

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE FÍSICA *Gleb Wataghin*

F 896 MONOGRAFIA

A frenagem eletromagnética de um ímã caindo
em um tubo condutor

Aluno: Alexandre Gomes Pinto

E-mail: alexandre.gomespinto@gmail.com

Orientador: Prof. Dr. André Koch Torres de Assis

E-mail: assis@ifi.unicamp.br

Campinas-SP

Novembro de 2012

Dedico este trabalho
à minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço ao orientador Prof. Dr. André K. T. Assis pelo constante auxílio na elaboração deste trabalho e pelas discussões sobre os diversos assuntos da física.

Resumo

Inicialmente, fizemos uma descrição qualitativa do fenômeno da frenagem eletromagnética de um ímã cilíndrico caindo em um tubo condutor não-ferromagnético. Em seguida, derivamos uma fórmula para a velocidade terminal do ímã, usando como modelo um ímã de magnetização uniforme caindo em um tubo na posição vertical, com o eixo de simetria do ímã coincidente com o eixo do tubo. A velocidade terminal depende das dimensões e da magnetização do ímã, assim como das dimensões e da resistividade do tubo.

Em seguida realizamos duas sequências de experiências para testar as características da fórmula obtida. Pela primeira sequência de experiências, comparamos as velocidades terminais previstas pela fórmula com as velocidades experimentais medidas para diferentes combinações de ímãs e tubos. Os resultados experimentais concordaram com os valores esperados. Um fator muito importante para a acurácia das medidas foi o posicionamento do ímã, que deve ficar na orientação vertical tanto quanto possível, em toda sua trajetória. Isso é garantido quando o raio do ímã é parecido com o raio do tubo, ou quando o raio do tubo é muito menor que o comprimento do ímã.

Na segunda sequência de experiências, medimos as velocidades terminais de um ímã ao percorrer um tubo de cobre posicionado em diferentes ângulos com a vertical, com objetivo de verificar uma dependência linear entre a velocidade terminal e a componente da força gravitacional paralela ao movimento do ímã. Há indícios de uma relação linear entre essas duas variáveis, porém este resultado não foi conclusivo, pois mostrou-se necessário considerar o atrito entre o ímã e o tubo.

Abstract

Initially, we made a qualitative description of the electromagnetic braking phenomenon of a cylindrical magnet falling inside a non-ferromagnetic conductor tube. Then, we derived a formula for the terminal velocity of the magnet, based on a magnet of uniform magnetization, falling inside a tube in the upright position, with the symmetry axis of the magnet coincident with the axis of the tube. The terminal velocity depends upon the dimensions and magnetization of the magnet, and depends also upon the dimensions and resistivity of the tube.

We then performed two sequences of experiments in order to test the features of the obtained formula. In the first sequence of experiments, we compared the terminal velocities provided by the formula with the experimental velocities measured for different combinations of magnets and tubes. The experimental results were in agreement with the expected values. A very important factor for the measurement accuracy was the positioning of the magnet, which must stay as much as possible in a vertical orientation, throughout its path. This is guaranteed when the magnet's radius is similar to the tube's radius, or when the radius of the tube is much smaller than the magnet's length.

For the second series of experiments, we measured the terminal velocities of a magnet traversing a copper tube positioned at different angles with the vertical direction, in order to verify a linear dependence between the terminal velocity and the gravitational force component parallel to the magnet's motion. There are indications of a linear relationship between these two variables, but this result was not conclusive, as it proved necessary to consider the friction between the magnet and the tube.

Biografia do Autor

Alexandre Gomes Pinto nasceu no dia 6 de Fevereiro de 1991, em Belo Horizonte, Minas Gerais. É filho de José Raimundo Pinto e Marlene Gomes Pinto.

Completou o ensino médio no Colégio Santa Rita de Cássia, no ano de 2008.

Em 2009 iniciou o curso de graduação para bacharelado em física, no Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas.

Sumário

Resumo	7
Abstract	9
Biografia do Autor	11
1 Introdução	15
2 Teoria	17
2.1 Dedução de uma Fórmula para a Velocidade Terminal	17
2.2 Sobre o Uso da Fórmula para a Velocidade Terminal nas Experiências	24
3 Metodologia Experimental	27
3.1 Primeira Parte: Medição da Velocidade Terminal	27
3.2 Segunda Parte: Relação entre a Velocidade Terminal e a Força Gravitacional . .	29
4 Resultados Experimentais	33
4.1 Resultados da Primeira Parte	33
4.2 Resultados da Segunda Parte	36
5 Conclusões	38
Referências Bibliográficas	39

Introdução

Esse trabalho tratará de um experimento que demonstra, com apelo visual, a lei de indução de Faraday-Lenz, a saber, a queda de um ímã em um tubo condutor não-ferromagnético. Nesta experiência, o ímã sofre uma força magnética proporcional à sua velocidade em relação ao tubo e contrária ao seu movimento. O ímã é solto do repouso até que eventualmente atinja uma velocidade terminal constante, se sua magnetização e comprimento do tubo forem suficientemente grandes. Esta experiência tem se tornado popular devido a fácil aquisição dos ímãs de neodímio-ferro-boro, que possuem intensa magnetização. Para estes fortes ímãs, o tempo de queda em um tubo condutor é bem menor do que o tempo de queda em tubos isolantes, e a velocidade terminal constante é alcançada em um tempo muito menor que o tempo de reação humana.¹

Podemos pensar no tubo condutor como uma justaposição de espiras condutoras, e assim fornecer uma descrição qualitativa para a frenagem do ímã no tubo. A queda do ímã no tubo causa uma variação positiva do fluxo magnético em uma espira imaginária do tubo, abaixo do ímã. Esse aumento do fluxo magnético gera uma corrente circular na espira que se opõe à variação do fluxo magnético, repelindo o ímã. Analogamente, para uma espira acima do ímã, o fluxo magnético diminui com o afastamento do mesmo, gerando uma corrente circular nesta espira que produz um campo magnético no sentido de atrair o ímã. Assim, o efeito resultante é que o ímã é freado.

A força magnética exercida pelas correntes induzidas nas espiras cresce conforme a velocidade de queda do ímã aumenta. Quanto maior é sua velocidade em relação ao tubo, maior é a variação do fluxo magnético atravessando uma espira qualquer do tubo, gerando uma maior corrente induzida que, por sua vez, gera um campo magnético proporcionalmente maior. Assim, a velocidade do ímã aumenta até que alcance um valor tal tal que a força magnética exercida

¹(da Silveira et al., 2007)

pelo tubo sobre o ímã se iguale, em módulo, à força peso.

Apesar da explicação qualitativa ser simples, deduzir uma expressão para a velocidade terminal é mais complicado. Isso será feito por meio do princípio de conservação da energia, igualando a potência da força gravitacional agindo sobre o ímã com a potência dissipada no tubo por efeito Joule. O efeito Joule está presente devido à resistividade do tubo e às correntes que foram induzidas no tubo pelo ímã, chamadas correntes de Foucault. Obteremos assim uma fórmula para a velocidade terminal em função das dimensões e da magnetização do ímã, assim como das dimensões e da resistividade do tubo. Essa dedução teórica está baseada no artigo (Levin et al., 2006).

Foram realizadas ainda duas sequências de experiências. Na primeira sequência, medimos o tempo de queda dos ímãs com o tubo posicionado verticalmente, com o objetivo de comparar as velocidades terminais experimentais com os valores previstos pela fórmula teórica. Na segunda sequência, posicionamos o tubo em vários ângulos com a vertical, e medimos o tempo que os ímãs levavam para atravessar o tubo dessa maneira. Esta segunda parte tem por objetivo verificar se a velocidade terminal é linearmente proporcional à componente da força gravitacional paralela à direção da velocidade do ímã.

A experiência da queda de um ímã em um tubo condutor é uma ótima introdução ao fenômeno da frenagem eletromagnética. Este efeito também pode ser mostrado visualmente na frenagem de discos condutores em rotação entre os polos de um ímã,² ou pelo rolamento à velocidade constante de um ímã em uma rampa condutora.³ A frenagem eletromagnética é amplamente empregada na indústria atualmente, sendo utilizada, por exemplo, na parada dos veículos de uma montanha-russa, sistemas de suspensão em carros e sistemas de amortecimento em elevadores.

²(Wiederick et al., 1987)

³(da Silveira and Varriale, 2009)

2.1 Dedução de uma Fórmula para a Velocidade Terminal

Para calcular a velocidade terminal do ímã cilíndrico no tubo, precisamos de um modelo que descreva o campo magnético produzido pelo ímã. No eletromagnetismo clássico, esse campo magnético origina-se em correntes microscópicas, as correntes de Ampère. Em um cilindro uniformemente magnetizado na direção axial, as correntes de Ampère fluem em planos perpendiculares ao eixo do cilindro, todas com mesma orientação, distribuídas uniformemente nestes planos.⁴ A Figura 2.1 representa as correntes microscópicas em uma seção transversal do cilindro, admitindo que elas sejam circulares. O efeito resultante é de uma corrente superficial na lateral do cilindro, pois os elementos de corrente internos à superfície cancelam-se com elementos adjacentes. Esta superposição de correntes está representada na mesma figura, com \vec{K} sendo a densidade superficial de corrente na lateral do cilindro.

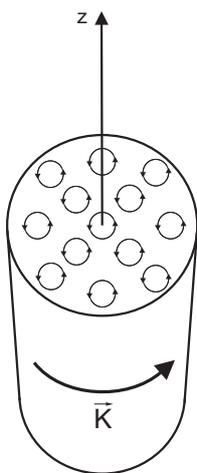


Figura 2.1: Correntes microscópicas em uma seção transversal do cilindro e a densidade superficial de corrente resultante \vec{K} .

⁴(Nussenzveig, 1997, p. 232).

Vamos utilizar coordenadas cilíndricas (s, φ, z) , onde usamos o símbolo $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ para representar a distância de um ponto qualquer até o eixo z de simetria. Este símbolo s está sendo utilizado em vez do símbolo usual ρ para evitar confusões com a densidade volumétrica de carga e com a resistividade do material, também representadas usualmente por ρ . Consideremos o cilindro da Figura 2.1, para o qual o eixo axial coincide com o eixo z . Sendo $\vec{M} = M\hat{z}$ a magnetização do cilindro, sua densidade superficial de corrente \vec{K} será dada por⁵ $\vec{K} = \vec{M} \times \hat{n}$, onde \hat{n} é o versor normal à superfície do cilindro apontando para fora dela. Na lateral do cilindro temos $\hat{n} = \hat{s}$. Logo, temos que $\vec{K} = M\hat{\varphi}$. Naturalmente, a densidade volumétrica de corrente de magnetização $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$ será nula, uma vez que \vec{M} é constante em todo volume. Estes resultados estão de acordo com o modelo qualitativo de ímã apresentado, a saber, com o ímã composto de correntes microscópicas. Entretanto, um dos passos necessários para deduzir a velocidade terminal do ímã é determinar o fluxo magnético $\Phi(z)$ em uma altura qualquer do tubo. O cálculo do campo magnético na direção z , produzido por um ímã modelado como anteriormente, leva a integrais elípticas para pontos fora do eixo axial, dificultando o cálculo do fluxo magnético. Para evitar este problema, vamos considerar um situação equivalente, que gera o mesmo campo magnético, recorrendo ao uso de cargas magnéticas efetivas. A diferença é que este outro modelo possibilita uma aproximação simples para o problema.

As densidades volumétrica e superficial de cargas elétricas ligadas em um objeto com polarização \vec{P} são dadas por, respectivamente,⁶ $\rho_\ell = -\nabla \cdot \vec{P}$ e $\sigma_\ell = \vec{P} \cdot \hat{n}$. Em analogia com estas cargas elétricas, as densidades volumétrica e superficial de cargas magnéticas de magnetização, ρ_M e σ_M , podem ser encontradas fazendo $\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M}$ e $\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n}$. O campo magnético em um ponto \vec{r} produzido por estas cargas magnéticas efetivas localizadas em \vec{r}' é dado por:⁷

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \int_{V_0} \rho_M \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int_{A_0} \sigma_M \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dA' . \quad (2.1)$$

Nesta equação $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ é a constante chamada de permeabilidade magnética no vácuo, V_0 é o volume do material magnetizado e A_0 é a área que engloba esse volume.

⁵(Reitz et al., 1982, Capítulo 9).

⁶(Griffiths, 1989, p. 167-168).

⁷(Reitz et al., 1982, p. 192) e (Griffiths, 1989, p. 362).

Sejam r o raio do ímã e d o seu comprimento. Para nosso ímã de magnetização $\vec{M} = M\hat{z}$, temos que $\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M} = 0$ e $\sigma_M = \vec{M} \cdot \hat{n} = \pm M$ nas extremidades do cilindro, sendo a densidade de carga magnética na superfície superior positiva, enquanto que a densidade de carga magnética da superfície inferior é negativa. Além disso, $\sigma_M = 0$ na lateral. A Figura 2.2(a) mostra a configuração resultante, que leva a um campo magnético idêntico ao da Figura 2.1.

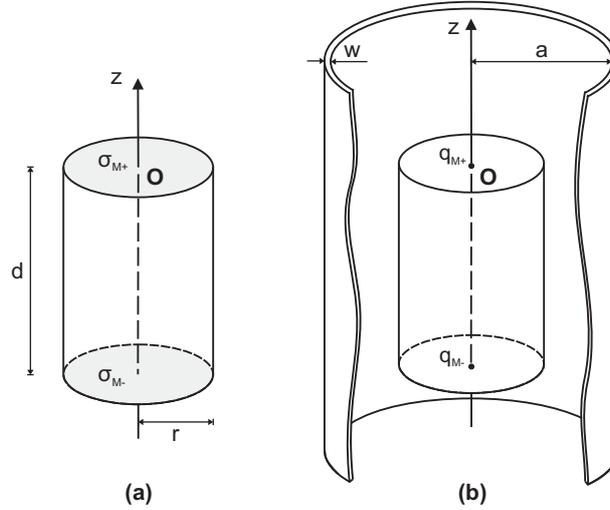


Figura 2.2: (a) Distribuição de carga magnética efetiva equivalente à configuração da Figura 2.1. (b) Aproximação da distribuição de carga magnética efetiva que possibilita o cálculo do fluxo magnético $\Phi(z)$.

Como dito anteriormente, uma aproximação é necessária para calcular o fluxo no tubo produzido pelo ímã. Isso será feito substituindo os discos por monopolos pontuais de mesma carga magnética q_M resultante, a saber:

$$q_M = \pi r^2 \sigma_M = \pm \pi r^2 M . \quad (2.2)$$

Na Figura 2.2(b) temos a situação que nos permitirá calcular o fluxo magnético $\Phi(z)$. Nela, o ímã de raio r e comprimento d está em queda livre em um tubo infinito de raio interno a e espessura w . Ambos têm seu eixo axial coincidindo com o eixo z , e o topo do ímã cilíndrico está posicionado em $z = 0$. Sejam B_+ e B_- os campos magnéticos na direção z produzidos pelas cargas magnéticas $+\pi r^2 M$ e $-\pi r^2 M$, respectivamente. Usando a equação (2.1) e um sistema

de coordenadas cilíndrico com as variáveis usuais (s, φ, z) , onde $s = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos que:

$$B_z(s, z) = B_+ + B_- \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow B_z(s, z) = \frac{\mu_0 r^2 M}{4} \left\{ \frac{z}{(s^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z + d}{[s^2 + (z + d)^2]^{3/2}} \right\}. \quad (2.4)$$

Integrando o campo magnético $B_z(s, z)$ em uma área da seção transversal do tubo localizada na altura z , obtemos o fluxo magnético nessa altura:

$$\Phi(z) = \int_0^a 2\pi s B_z(s, z) ds \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow \Phi(z) = \frac{\mu_0 \pi r^2 M}{2} \int_0^a s \left\{ \frac{z}{(s^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z + d}{[s^2 + (z + d)^2]^{3/2}} \right\} ds \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow \Phi(z) = \frac{\mu_0 \pi r^2 M}{2} \left[-\frac{z}{\sqrt{s^2 + z^2}} + \frac{z + d}{\sqrt{s^2 + (z + d)^2}} \right]_0^a \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow \Phi(z) = \frac{\mu_0 \pi r^2 M}{2} \left[\frac{z + d}{\sqrt{a^2 + (z + d)^2}} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]. \quad (2.8)$$

Como já dito, podemos considerar o tubo condutor como uma sobreposição de espiras. A queda do ímã provocará uma mudança no fluxo magnético que atravessa cada espira. Pela lei de Faraday, podemos calcular a força eletromotriz $\varepsilon(z)$ induzida em uma espira localizada na altura z :

$$\varepsilon(z) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dz}{dt} \frac{d\Phi}{dz} = -v \frac{d\Phi}{dz}, \quad (2.9)$$

onde v é a velocidade terminal do ímã em relação ao tubo, que está em repouso em relação à Terra, a qual consideramos um bom referencial inercial para esse tipo de experiência. Esta velocidade é alcançada rapidamente para ímãs de alta magnetização, por isso vamos considerá-la

constante em toda trajetória do ímã no tubo.⁸ A derivada $d\Phi/dz$ resulta em:

$$\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{\mu_0\pi r^2 a^2 M}{2} \left[\frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2 + (z + d)^2)^{3/2}} \right]. \quad (2.10)$$

Não precisamos nos preocupar com a variação do fluxo nas espiras provocada pelo decaimento da própria corrente induzida (fenômeno da auto-indução), pois os tempos associados ao decaimento dessas correntes são muito maiores que o tempo de passagem do ímã por cada espira.⁹ Isto significa que a variação do fluxo é devida essencialmente somente à passagem do ímã por cada espira. Substituindo a equação (2.10) em (2.9), e usando que $I(z) = \varepsilon(z)/R$, onde R é a resistência de uma espira e $I(z)$ a corrente induzida em uma altura z do tubo, encontramos:

$$I(z) = \frac{\varepsilon(z)}{R} = -\frac{v}{R} \frac{d\Phi}{dz} = \frac{\mu_0\pi r^2 a^2 v M}{2R} \left\{ \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{[a^2 + (z + d)^2]^{3/2}} \right\}. \quad (2.11)$$

O comportamento de $I(z)$ está exemplificado na Figura 2.3, onde temos o gráfico da razão entre a corrente induzida na altura z e a corrente induzida nas alturas das bordas do ímã, a qual chamamos de I_0 , onde $I_0 = I(z = 0) = I(z = -d)$. Como vemos pelo gráfico, se a razão $n = d/a$ entre o comprimento do ímã e o raio do tubo for alta, a corrente induzida máxima se encontra perto das bordas, sendo quase nula a uma distância de um comprimento de ímã depois das bordas. Não foi possível calcular analiticamente o valor de z no qual ocorre a corrente máxima, pois é preciso achar a raiz de um polinômio de grau 11.

Uma vez que o ímã alcança a velocidade terminal, a energia potencial gravitacional que o ímã perde em sua queda não é transformada em energia cinética do ímã. Ao invés disso, a potência realizada pela força gravitacional é dissipada no tubo por efeito Joule pelas correntes induzidas.¹⁰ Matematicamente esta igualdade de potências pode ser escrita da seguinte forma:

⁸(da Silveira et al., 2007).

⁹(Saslow, 1992).

¹⁰(Levin et al., 2006).

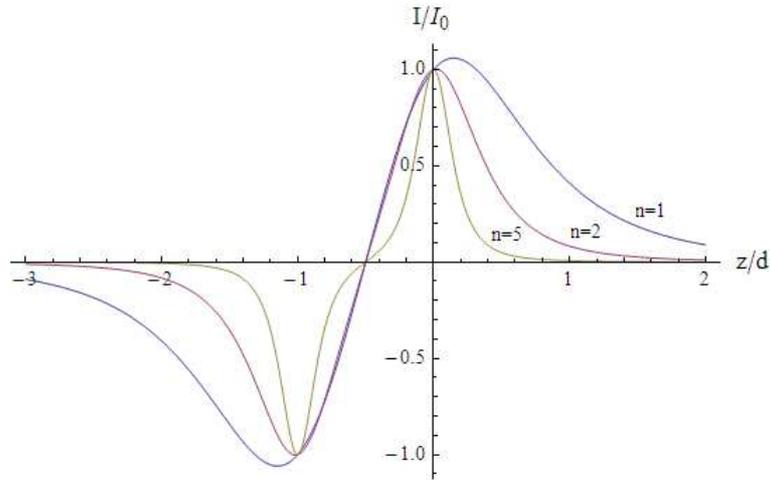


Figura 2.3: Gráfico da razão entre a corrente induzida em uma altura z e a corrente induzida na altura das bordas do ímã. A razão entre o comprimento do ímã e o raio do tubo é dada por $n = d/a$.

$$mgv = \sum RI^2(z) . \quad (2.12)$$

Agora que temos uma expressão para as correntes induzidas no tubo, torna-se possível o cálculo da potência $P_J = \sum RI^2(z)$ dissipada por esse efeito Joule. Vamos considerar cada espira como sendo um anel de raio médio $(a + w/2)$ com seção retangular, de altura dz e espessura w , como representado na Figura 2.4.

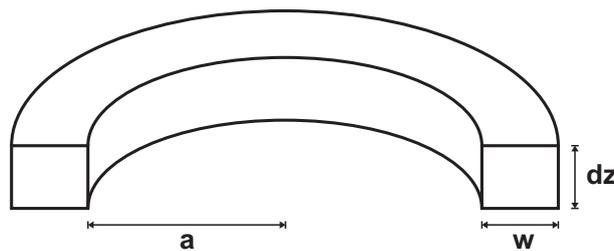


Figura 2.4: Dimensões de uma única espira do tubo.

Neste caso a resistência de cada espira é dada por $R = \rho 2\pi(a + w/2)/(wdz)$, onde ρ é a resistividade do material. Vamos considerar o limite contínuo da somatória na equação (2.12). Utilizando a equação (2.11), resulta que para um tubo de comprimento infinito a potência dissipada é dada por:

$$P_J = \int_{-\infty}^{\infty} R \left[\frac{\mu_0 \pi r^2 a^2 v M}{2R} \left(\frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right) \right]^2 \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow P_J = \frac{\mu_0^2 \pi r^4 a^4 v^2 M^2 w}{8\rho(a+w/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right]^2 dz . \quad (2.14)$$

Definindo $y \equiv z/a$ obtém-se:

$$\Rightarrow P_J = \frac{\mu_0^2 \pi r^4 v^2 M^2 w}{8\rho a(a+w/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+y^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+(y+d/a)^2)^{3/2}} \right]^2 dy \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow P_J = \frac{\mu_0^2 \pi r^4 v^2 M^2 w}{8\rho a(a+w/2)} f(d/a) . \quad (2.16)$$

Nesta equação $f(d/a)$ é uma função de escala, que deve ser calculada numericamente, dada por:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+y^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+(y+x)^2)^{3/2}} \right]^2 dy . \quad (2.17)$$

Utilizando (2.13) em (2.12), encontramos que a velocidade terminal do ímã cilíndrico em queda livre em um tubo condutor de comprimento infinito é:

$$v = \frac{8mg\rho a(a+w/2)}{\mu_0^2 \pi r^4 M^2 w f(d/a)} . \quad (2.18)$$

Podemos encontrar uma expressão aproximada para a função de escala $f(x)$ quando $x \ll 1$, e assim encontrar a velocidade terminal para um dipolo magnético pontual, onde $d \ll a$, de momento de dipolo magnético $p = q_m d$, com $q_m = \pi r^2 M$. Expandindo o termo dentro dos colchetes da equação (2.17) em torno de $x = 0$, encontramos:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{3yx}{(y^2+1)^{5/2}} + \mathcal{O}^2(x) \right]^2 dy \quad (2.19)$$

$$\Rightarrow f(x) \approx \frac{45\pi}{128} x^2 . \quad (2.20)$$

Na Figura 2.5, temos o gráfico da função de escala $f(x)$, juntamente com sua aproximação para $x \ll 1$.

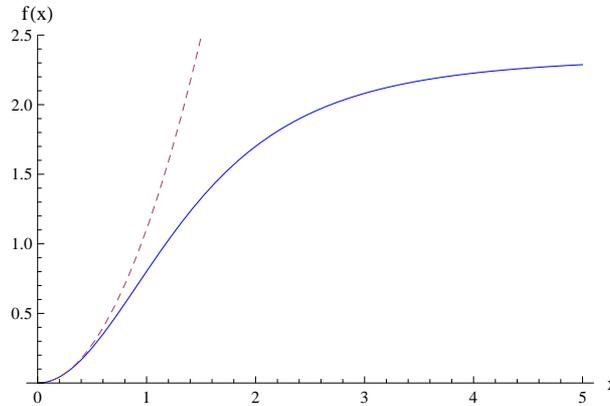


Figura 2.5: Gráfico da função de escala $f(x)$, em linha contínua, juntamente com sua aproximação para $x \ll 1$, em linha tracejada.

Substituindo (2.20) em (2.18), obtemos que a velocidade terminal de queda de uma ímã pontual é dada por:¹¹

$$v = \frac{1024}{45} \frac{mg\rho a^4}{\mu_0^2 p^2 w}. \quad (2.21)$$

2.2 Sobre o Uso da Fórmula para a Velocidade Terminal nas Experiências

Em nossos experimentos, frequentemente tivemos que $d > a$. Portanto, vamos usar a expressão completa de $f(x)$ para calcular a velocidade terminal do ímã.

Para podermos usar a fórmula (2.18), precisamos justificar porque a dedução da velocidade terminal para um tubo infinito é válida para tubos finitos, e precisamos determinar o valor de M . Para tal, vamos calcular o campo magnético na direção axial do cilindro. Veremos o quanto rápido o campo magnético cai com a distância até o ímã, e que a magnetização do ímã pode ser determinada medindo o campo magnético no centro da tampa do cilindro imantado.

¹¹(Saslow, 1992).

Para tal, vamos utilizar o modelo do cilindro com densidade superficial de carga magnética $\sigma_M = \pm M$, uma vez que \vec{B} é integrável no eixo do cilindro. Consideremos o cilindro da Figura 2.2(a), posicionado com o eixo do axial coincidente com o eixo z e tampa superior na origem do sistema de coordenadas. Para o cálculo do fluxo magnético torna-se necessário apenas o cálculo de B_z . Utilizando as coordenadas cilíndricas (s, φ, z) , a fórmula (2.1) e integrando até o raio r do ímã cilíndrico, encontramos:

$$\Rightarrow B_z(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \int_0^r \left\{ \frac{z}{(s^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z+d}{[s^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right\} s \, ds \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow B_z(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[-\frac{z}{\sqrt{s^2 + z^2}} + \frac{z+d}{\sqrt{s^2 + (z+d)^2}} \right]_0^r \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow B_z(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[\frac{z+d}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]. \quad (2.24)$$

A partir de (2.24), podemos encontrar o campo máximo gerado pelo ímã. Fazendo $dB_z/dz = 0$ vemos que esse máximo ocorre em $z = -d/2$, no centro do ímã cilíndrico.

Na Figura 2.6 mostramos como varia o campo magnético no eixo z em termos do campo máximo. Vemos que, a partir de $z = 3r$, o campo magnético está praticamente extinto, com cerca de 5% de seu valor máximo. Além disso, a derivada dB_z/dz tende a zero para valores maiores que $z = 3r$. Logo, apesar de termos considerado um tubo infinito para nossos cálculos, desde que o tubo tenha comprimento muito maior que o raio do ímã, a fórmula (2.18) é válida, pois as contribuições para $z \gg r$ são desprezíveis.¹²

Podemos obter o valor do módulo do campo magnético B nas tampas do cilindro a partir de (2.24):

$$B_z(0) = B_z(-d) = B = \frac{\mu_0 M}{2} \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}}. \quad (2.25)$$

Usando (2.25) em (2.18), chegamos à uma expressão da velocidade terminal em função do

¹²(da Silveira et al., 2007).

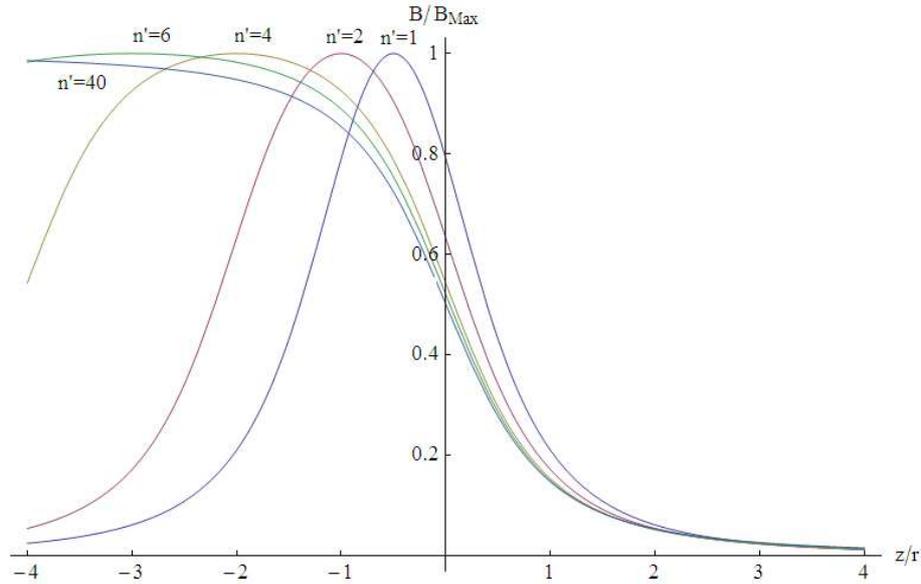


Figura 2.6: Variação do campo magnético no eixo z , em função da razão n' do comprimento d do ímã cilíndrico para seu raio r , ou seja, em função de $n' = d/r$.

módulo do campo magnético B no centro da tampa:

$$v = \frac{2mgd^2a(a + w/2)}{\pi r^4 B^2 (d^2 + r^2) w f(d/a)} . \quad (2.26)$$

Usaremos a equação (2.26) para estimar a velocidade de queda do ímã em nossas experiências.

Metodologia Experimental

As experiências realizadas dividem-se em duas partes. A primeira parte tem como objetivo verificar se o valor da velocidade terminal do ímã coincide com o valor teórico. Já a segunda parte visa testar se essa velocidade é linearmente proporcional à força gravitacional que age sobre o ímã, na direção de seu movimento. Com esse último teste poderemos concluir se a força magnética sofrida pelo ímã é proporcional à sua velocidade em relação ao tubo.

3.1 Primeira Parte: Medição da Velocidade Terminal

Para medir a velocidade terminal do ímã em relação ao tubo, colocamos o tubo condutor suspenso por meio de fitas adesivas no encontro de duas paredes, para garantir que ficava parado em relação ao solo, na posição vertical. Utilizando um cronômetro, medimos o tempo de queda do ímã no tubo, iniciando a contagem quando a base inferior do ímã entrasse no tubo e parando quando esta saísse dele. A velocidade terminal experimental é então obtida dividindo-se o comprimento do tubo pelo tempo de queda. Novamente, estamos aqui utilizando o fato de que ele atinge rapidamente a velocidade terminal, de tal forma que desloca-se em relação ao tubo durante todo o tempo com velocidade praticamente constante e igual à velocidade terminal. Representamos essa experiência na Figura 3.1.

Foram utilizados 2 conjuntos de ímãs de neodímio e 4 tubos distintos para essas medições. As dimensões dos tubos estão apresentadas na Tabela 3.1. Apenas o tubo *A* é constituído de alumínio, os demais são de cobre.

Cada conjunto de ímãs é composto por cinco ímãs cilíndricos idênticos. Em cada conjunto, acoplamos os ímãs em série, permitindo-nos um maior número de medições ao considerar que uma série de ímãs comporta-se como um único ímã. O conjunto 1 é composto de ímãs com

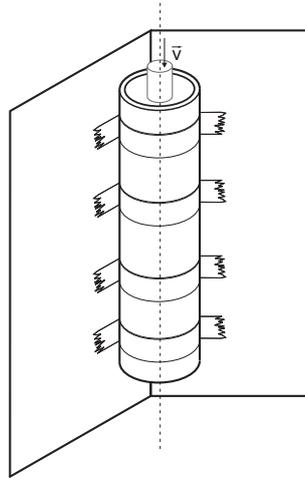


Figura 3.1: Experiência para medição da velocidade terminal de um ímã caindo em um tubo condutor.

Tabela 3.1: Dimensões dos tubos.

Tubo	Diâmetro Interno (mm)	Diâmetro Externo (mm)	Comprimento (cm)
<i>A</i>	$8,55 \pm 0,05$	$9,50 \pm 0,05$	$125,4 \pm 0,1$
<i>B</i>	$7,60 \pm 0,05$	$9,45 \pm 0,05$	$71,7 \pm 0,1$
<i>C</i>	$20,25 \pm 0,05$	$22,10 \pm 0,05$	$101,7 \pm 0,1$
<i>D</i>	$24,60 \pm 0,05$	$28,05 \pm 0,05$	$91,3 \pm 0,1$

diâmetro $\phi = (6,35 \pm 0,05) mm$, comprimento $d = (10,10 \pm 0,05) mm$ e massa $m = (6,6 \pm 0,1) g$. Já o conjunto 2 é composto por ímãs com diâmetro $\phi = (15,00 \pm 0,05) mm$, comprimento $d = (5,05 \pm 0,05) mm$ e massa $m = (2,4 \pm 0,1) g$.

Como vimos na Seção 2.2, equação (2.26), para o cálculo da velocidade terminal é preciso que o campo magnético no centro da tampa de cada ímã seja medido. Isso foi feito por meio de um gaussímetro digital, inicialmente colocando a sonda onde visualmente era o centro da tampa, e então variando sua posição ligeiramente até encontrar o campo máximo na tampa.

Na Tabela 3.2, temos as características dos ímãs utilizados, onde N é o número de ímãs acoplados em série para cada conjunto de ímãs.

Com os ímãs do conjunto 1, fizemos as medidas de tempo de queda utilizando os tubos *A* e *B*. O conjunto 2 de ímãs foi utilizado juntamente com os tubos *C* e *D*. A razão pela qual não vamos considerar a queda dos ímãs do conjunto 1 nos tubos *C* e *D*, apesar destes

Tabela 3.2: Campo externo B no centro da base do ímã em função da quantidade N de ímãs em série.

Conjunto de ímãs 1		Conjunto de ímãs 2	
N ímãs	B (T)	N ímãs	B (T)
1	$0,50 \pm 0,01$	1	$0,28 \pm 0,01$
2	$0,53 \pm 0,01$	2	$0,42 \pm 0,01$
3	$0,53 \pm 0,01$	3	$0,45 \pm 0,01$
4	$0,54 \pm 0,01$	4	$0,47 \pm 0,01$
5	$0,54 \pm 0,01$	5	$0,49 \pm 0,01$

terem diâmetros maiores do que o diâmetro dos ímãs, é que os ímãs não se mantêm na vertical ao percorrerem tubos de raios grandes comparados às suas dimensões. Eles ficam em uma inclinação fixa durante sua queda e, apesar de continuarem não encostando no tubo, e ainda podemos ignorar o atrito entre o ímã e o tubo, a fórmula teórica para a velocidade deixa de ser válida, pois foi deduzida para ímãs com eixo axial coincidente com o eixo do tubo.

Foram feitas cinco medidas de tempo para cada acoplamento de ímãs caindo em um tubo. Com o tempo médio de queda \bar{t} , calculamos a velocidade experimental $v_{exp} = L/\bar{t}$, onde L é o comprimento do tubo, e comparamos com a velocidade terminal teórica, v_{teo} , dada pela equação (2.26).

3.2 Segunda Parte: Relação entre a Velocidade Terminal e a Força Gravitacional

Para verificar se a relação entre a força gravitacional sobre o ímã e sua velocidade terminal em relação ao tubo é linear, variamos o ângulo de inclinação θ do tubo com a normal, fazendo com que a resultante gravitacional F do peso na direção do tubo seja dependente de θ , isto é, $F = mg \cos \theta$. Para isso, primeiramente traçamos uma reta vertical em uma parede. Então fixamos, com fitas adesivas, o tubo em diferentes ângulos com a reta vertical. Com um lápis e uma régua, traçamos uma reta paralela ao tubo, cruzando a reta vertical, e então medimos o

ângulo entre as duas retas com um transferidor. Feito isso, soltamos o ímã na borda do tubo e medimos o tempo de sua queda, começando a contagem no cronômetro quando o base do ímã entrava no tubo e terminando quando esta saía do mesmo.

Sabemos que a força de atrito cinético F_c sobre o ímã depende apenas da normal $N = mg \cos \theta$ sobre a superfície do tubo e do coeficiente de atrito cinético μ_c entre as superfícies do ímã e do tubo, isto é, $F_c = \mu_c mg \cos \theta$. Quando o ímã está deslocando-se em relação ao tubo com uma velocidade terminal constante, a força resultante sobre ele tem de ser nula. A componente da força peso ao longo do tubo, $F = mg \sin \theta$, é então contrabalançada pela força de atrito cinético F_c mais a força magnética F_M sobre o ímã que atuam no sentido contrário ao seu movimento em relação ao tubo. Esta força magnética mostrou-se linearmente proporcional à velocidade terminal do ímã na Seção 2.1. Ficamos então com a seguinte equação de movimento:

$$mg \cos \theta = F_M + \mu_c mg \sin \theta . \quad (3.1)$$

Entretanto, vamos ignorar a força de atrito para nossa análise, isto é, vamos considerar que a força magnética sobre o ímã é muito maior do que a força de atrito. Se essa consideração for válida, devemos encontrar uma relação linear entre $\cos \theta$ e a velocidade v , já que a força magnética teórica é proporcional à velocidade v do ímã em relação ao tubo. Além do mais, essa relação deve levar à velocidade encontrada pela experiência da primeira parte, se extrapolarmos o resultado para o ângulo $\theta = 0^\circ$. A segunda experiência está representada na Figura 3.2.

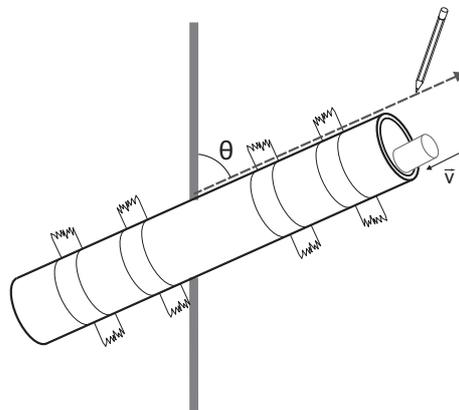


Figura 3.2: Experiência para verificação da proporcionalidade entre a velocidade terminal e a força magnética sobre o ímã.

Para esta experiência usamos quatro ímãs do conjunto 2 acoplados em série, juntamente com o tubo C . Essa escolha se deve ao fato do tubo C ter um acabamento interno melhor do que o acabamento dos tubos A e B , e resulta em uma velocidade terminal menor que o mesmo ímã caindo no tubo D , permitindo uma medição mais acurada do tempo de queda. Usamos a série de quatro ímãs pois queríamos que o ímã se comportasse de maneira semelhante com o tubo estando inclinado de diferentes ângulos. Com uma sequência de três ímãs isto já não ocorria, pois para pequenos ângulos o ímã resultante não encostava totalmente sua lateral no tubo, ficando ligeiramente inclinado em relação a este.

Resultados Experimentais

4.1 Resultados da Primeira Parte

A relação entre a resistividade ρ , a temperatura T e o chamado coeficiente de temperatura α dos materiais é dada por:¹³

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}, \quad (4.1)$$

ou seja,

$$\rho = \rho_o e^{\alpha(T-T_o)}. \quad (4.2)$$

Usamos que a resistividade e o coeficiente de temperatura do cobre têm os seguintes valores a $20^\circ C$, respectivamente:¹⁴ $\rho_{cobre} = 1,67 \times 10^{-8} \Omega m$ e $\alpha_{cobre} = 0,0068 \text{ } ^\circ C^{-1}$. As mesmas grandezas para o alumínio são dadas por: $\rho_{alu} = 2,65 \times 10^{-8} \Omega m$ e $\alpha_{alu} = 0,0043 \text{ } ^\circ C^{-1}$. Como a temperatura ambiente no dia das medições era $(30 \pm 1) \text{ } ^\circ C$, temos que a resistividade do cobre e do alumínio eram $(1,78 \pm 0,01) \times 10^{-8} \Omega m$ e $(2,76 \pm 0,01) \times 10^{-8} \Omega m$, respectivamente. Usamos ainda que a gravidade em campinas é dada por:¹⁵ $g = 9,7855 \text{ } m/s^2$. Para o cálculo da velocidade experimental consideramos, em todas as medidas de tempo, um erro de $0,2 \text{ } s$, devido ao tempo de reação humana. Os erros das velocidades foram calculados via propagação de erros.

Na Tabela 4.1 temos a comparação entre as velocidades previstas teoricamente, v_{teo} , dada pela equação (2.26), e as velocidades experimentais, v_{exp} .

Notamos que, em geral, as velocidades teórica e experimental concordam entre si, isto é,

¹³(Reitz et al., 1982, p. 142).

¹⁴(Reitz et al., 1982, p. 142).

¹⁵(Lopes, 2008).

Tabela 4.1: Comparação entre a velocidade terminal teórica v_{teo} e a experimental v_{exp} .

Conjunto de ímãs 1				Conjunto de ímãs 2			
Tubo	N ímãs	v_{exp} (cm/s)	v_{teo} (cm/s)	Tubo	N ímãs	v_{exp} (cm/s)	v_{teo} (cm/s)
A	1	33 ± 2	33 ± 3	C	1	45 ± 4	47 ± 5
	2	57 ± 5	52 ± 5		2	25 ± 1	26 ± 2
	3	80 ± 10	80 ± 7		3	22 ± 1	25 ± 2
	4	110 ± 20	98 ± 9		4	24 ± 1	26 ± 2
	5	130 ± 30	120 ± 10		5	27 ± 1	27 ± 2
B	1	$7,9 \pm 0,2$	$8,2 \pm 0,6$	D	1	59 ± 8	58 ± 5
	2	$14,0 \pm 0,5$	$13,0 \pm 0,9$		2	37 ± 3	30 ± 2
	3	21 ± 1	19 ± 1		3	27 ± 2	27 ± 1
	4	28 ± 2	25 ± 2		4	22 ± 1	26 ± 1
	5	35 ± 3	31 ± 2		5	23 ± 1	25 ± 1

existem valores comuns de velocidade quando consideramos os erros de v_{exp} e v_{teo} . As Figuras 4.1 e 4.2 apresentam curvas das velocidades teóricas para os conjuntos de ímã 1 e 2, respectivamente, juntamente com as velocidades medidas e seus erros.

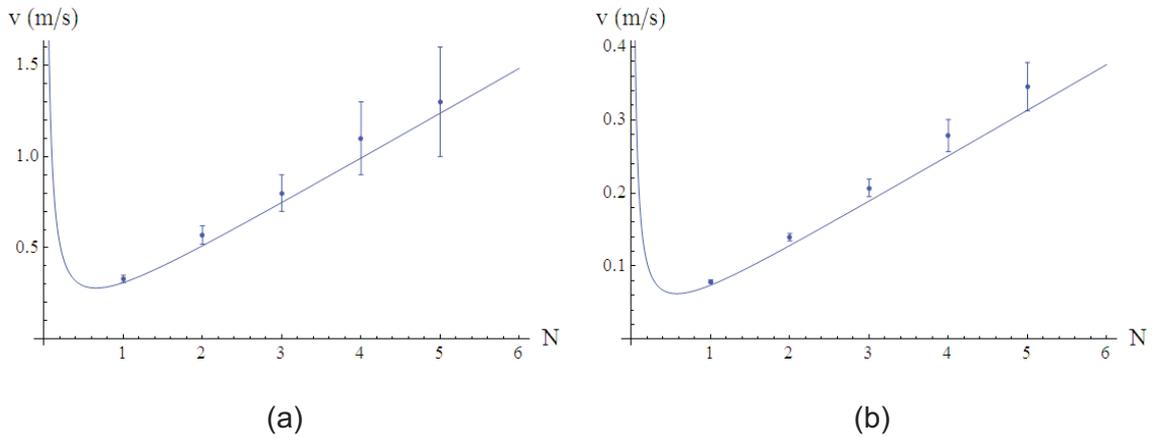


Figura 4.1: Gráfico com valores das velocidades terminais teóricas (curvas contínuas) e experimentais (pontos com barras de erro), em função de uma série de N ímãs do conjunto 1, caindo em (a) tubo A e (b) tubo B .

Podemos perceber que, para ímãs de mesma magnetização e mesmo raio, existe um comprimento que minimiza a velocidade de queda do ímã, ou seja, a velocidade terminal não apresenta um comportamento monotônico. Infelizmente, com os materiais que dispúnhamos, não houve

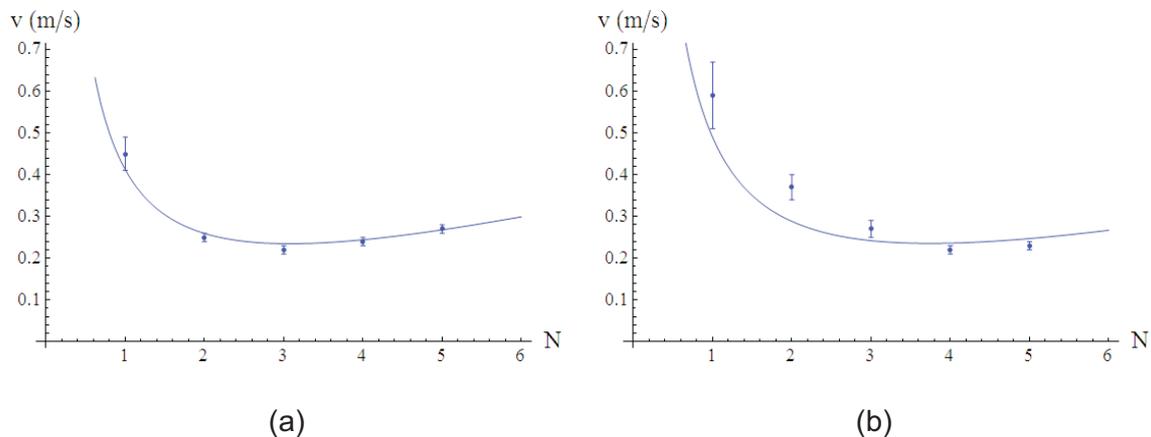


Figura 4.2: Gráfico com valores das velocidades terminais teóricas (curvas contínuas) e experimentais (pontos com barras de erro), em função de uma série de N ímãs do conjunto 2, caindo em (a) tubo C e (b) tubo D .

uma situação onde o mínimo de velocidade fosse proeminente. O único mínimo encontrado foi o da série de três ímãs do conjunto 2 em queda no tubo C , Figura 4.2(a). Para as demais configurações, ou eram necessários ímãs de comprimento menor, ou o mínimo era tão inexpressivo que passou despercebido pelos erros das velocidades.

Os coeficientes de correlação entre as velocidades medidas e calculadas dos ímãs do conjunto 1 nos tubos A e B , e dos ímãs do conjunto 2 nos tubos C e D foram, respectivamente, $R_{1A} = 0,9990$, $R_{1B} = 0,9999$, $R_{2C} = 0,9895$, $R_{2D} = 0,9584$. Logo, dentre as experiências, a que apresentou pior concordância da velocidade experimental com a velocidade teórica foi a queda dos ímãs do conjunto 2 no tubo D . A causa mais provável para esta discrepância é que o raio do tubo D tem dimensões grandes comparadas ao comprimento dos ímãs, de maneira que os ímãs apresentam uma maior inclinação em relação à vertical quando há um número pequeno destes ímãs associados em série. À medida que mais ímãs são acoplados (fazendo com que o conjunto tenha um comprimento total maior), o ímã resultante fica cada vez menos inclinado em sua queda, fazendo com que a situação fique mais parecida com a situação para a qual a velocidade teórica foi calculada. Assim, as velocidades experimentais se aproximam da curva teórica quanto maior for o comprimento do ímã.

Um efeito que pode ser notado em todos os gráficos das Figuras 4.1 e 4.2 é que, quanto maior foi a velocidade do ímã, menos acuradas foram as medidas, e estas ficaram acima das

velocidades teóricas. A isso associamos um erro sistemático na medição do tempo de queda, por parte do operador.

4.2 Resultados da Segunda Parte

Considerando novamente um erro de $0,2\text{ s}$ nas medidas de tempo devido ao tempo de reação humana. Medições de tempo para seis diferentes ângulos resultaram nas velocidades experimentais da Tabela 4.2. As velocidades são dadas simplesmente por $v = L/\bar{t}$, onde $L = (101,7 \pm 0,1)\text{ cm}$ é o comprimento do tubo C e \bar{t} é o tempo médio de queda do ímã.

Tabela 4.2: Velocidade terminal do ímã em função do ângulo do tubo com a vertical.

θ ($^\circ$)	$\cos \theta$	\mathbf{v} (cm/s)
9 ± 1	$0,998 \pm 0,003$	23 ± 1
18 ± 1	$0,954 \pm 0,005$	$21,0 \pm 0,9$
32 ± 1	$0,853 \pm 0,009$	$17,4 \pm 0,6$
43 ± 1	$0,74 \pm 0,01$	$13,6 \pm 0,4$
54 ± 1	$0,59 \pm 0,01$	$10,1 \pm 0,2$
67 ± 1	$0,40 \pm 0,02$	$5,23 \pm 0,06$

Com os dados da Tabela 4.2 montamos o gráfico da Figura 4.3, que mostra a velocidade terminal v em função do cosseno do ângulo θ que o tubo fazia com a vertical.

O ajuste linear realizado pelo programa *Origin* indica que a reta que melhor descreve os dados é dada por:

$$v = (26,6 \pm 0,6) \cos \theta - (5,4 \pm 0,3) \text{ cm/s} . \quad (4.3)$$

O coeficiente de correlação entre os dados e a reta da expressão (4.3) foi de $0,9938$. Logo, há indícios de que a velocidade terminal do ímã em relação ao tubo é linearmente proporcional à força gravitacional que age sobre o ímã, na direção do tubo. Porém, apesar de apresentar um comportamento satisfatoriamente linear, essa experiência não foi conclusiva. A reta de ajuste

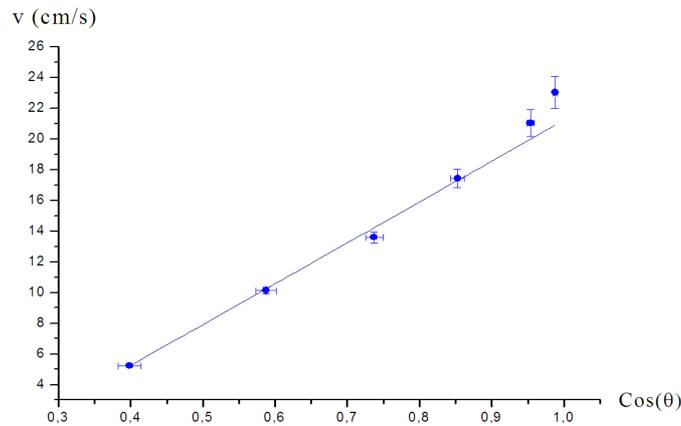


Figura 4.3: Gráfico da velocidade terminal $v = L/\bar{t}$ do ímã em função do cosseno do ângulo θ do tubo com a vertical.

leva à uma velocidade para o tubo na posição vertical ($\cos \theta = 1$) igual a $v = (21,2 \pm 0,7) \text{ cm/s}$, enquanto a velocidade experimental para essa configuração de ímã/tubo, dada pela Tabela 4.1, é $v_{exp} = (24 \pm 1) \text{ cm/s}$. Portanto, o atrito não pode ser desprezado na equação (3.1). Como exemplo, considerando que a reta de ajuste descreve os pontos para uma força de atrito “média”, deveríamos ter velocidades experimentais acima da reta para ângulos pequenos, pois para eles a força de atrito é menor que a força média; o contrário valeria para ângulos altos. Esse comportamento é visto na Figura 4.3. Contudo, a reta se encontra mais próxima dos pontos com maior força de atrito, pois para estes pontos a velocidade terminal foi menor, levando à erros menores, e a influência dos erros foi levada em conta no ajuste linear.

Conclusões

A fórmula obtida para a velocidade terminal de um ímã cilíndrico em queda em um tubo condutor, deduzida a partir do uso de cargas magnéticas efetivas, obteve boa concordância experimental. Isto foi verificado para combinações de tubos e ímãs com diferentes dimensões, tanto com os tubos de cobre quanto com o tubo de alumínio.

Verificamos que a velocidade terminal não tem um comportamento monotônico com o aumento de ímãs em série, mas tem um valor mínimo, pois a campo magnético na tampa do ímã satura-se com a adição de ímãs, enquanto a força peso aumenta linearmente com a quantidade de ímãs. Com os materiais que dispúnhamos, apenas para uma combinação ímã-tubo um mínimo na velocidade terminal pôde ser observado experimentalmente, sendo necessário para as demais combinações ímãs de menor comprimento ou medições mais precisas.

Foi observado que a inclinação dos ímãs em relação à vertical é um fator muito importante para a concordância entre a velocidade terminal prevista e a medida. Uma menor inclinação, resultando em previsões mais acuradas, pode ser obtida fazendo com que o raio da ímã seja muito próximo do raio interno do tubo, ou que este seja muito menor que o comprimento do ímã.

Ao analisar o movimento do ímã ao percorrer o tubo posicionado em diferentes ângulos com a vertical, constatamos que há indícios de que a velocidade terminal do ímã seja linearmente proporcional à força magnética. Esta segunda experiência não foi conclusiva pois mostrou-se necessário considerar o atrito entre o tubo e o ímã, já que o ajuste linear dos dados nos leva à uma velocidade terminal para o tubo na vertical inferior à que foi medida.

Referências Bibliográficas

- da Silveira, F. L., Levin, Y., and Rizzato, F. B. (2007). A frenagem eletromagnética de um ímã que cai. *Carderno Brasileiro de Ensino de Física*, 24(3):295–318.
- da Silveira, F. L. and Varriale, M. C. (2009). O rolamento freado do magneto na rampa: uma interessante aplicação da lei de Faraday-Lenz. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 31(4):4303.
- Griffiths, D. J. (1989). *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2nd edition.
- Levin, Y., da Silveira, F. L., and Rizzato, F. B. (2006). Eletromagnetic braking: A simple quantitative model. *Am. J. Phys.*, 74(9):815–817.
- Lopes, W. (2008). Variação da aceleração da gravidade com a latitude e altitude. *Carderno Brasileiro de Ensino de Física*, 25(3):561–568.
- Nussenzveig, H. M. (1997). *Curso de Física Básica*, volume 3. Edgard Blucher, São Paulo.
- Reitz, J. R., Milford, F. J., and Christy, R. W. (1982). *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. Campus, Rio de Janeiro, 3ª ed. Tradução de R. B. Sander e C. Duarte.
- Saslow, W. M. (1992). Maxwell's theory of eddy currents in thin conducting sheets and applications to electromagnetic shielding and MAGLEV. *Am. J. of Phys.*, 60:693–711.
- Wiederick, H. D., Gauthier, N., Campbell, D. A., and Rochon, P. (1987). Magnetic braking: Simple theory and experiment. *Am. J. Phys.*, 55:500–503.