

Arquimedes e a Lei da Alavanca

ou

Como Arquimedes Utilizou a Lei da Alavanca  
para Calcular o Volume de uma Esfera

André K. T. Assis

Instituto de Física

UNICAMP

[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)

# Arquimedes (287-212 a. C.)

- Nascimento em Siracusa, atual Itália.
- Filho do astrônomo Fídias.
- Muitos trabalhos enviados para Alexandria.

(biblioteca de ~ 300 a. C. até ~ 400 d. C.)

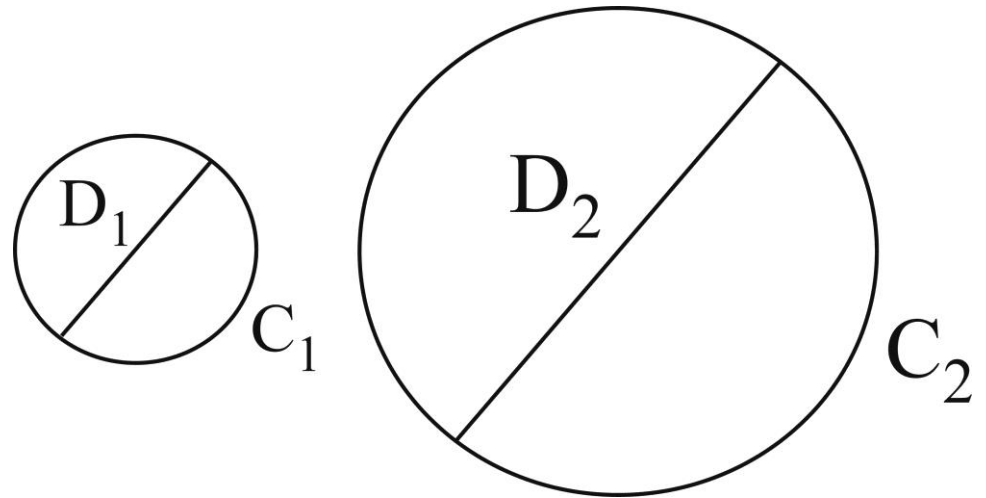
- Participou da defesa de Siracusa, então aliada de Cartago contra Roma.
- Obra **Sobre o Equilíbrio dos Planos**: Lei da alavanca e cálculo de centros de gravidade.
- Obra **Sobre os Corpos Flutuantes**: Lei do empuxo ou princípio de Arquimedes. Equilíbrio de corpos na água.

# Euclides, Os Elementos (~ 300 a.C.)

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^3$$



Por exemplo, se  $D_2 = 3D_1$  então

$$C_2 = 3C_1, \quad A_2 = 9A_1 \quad \text{e} \quad V_2 = 27V_1$$

# Alguns resultados de Arquimedes relativos ao círculo (C) e à esfera (E):

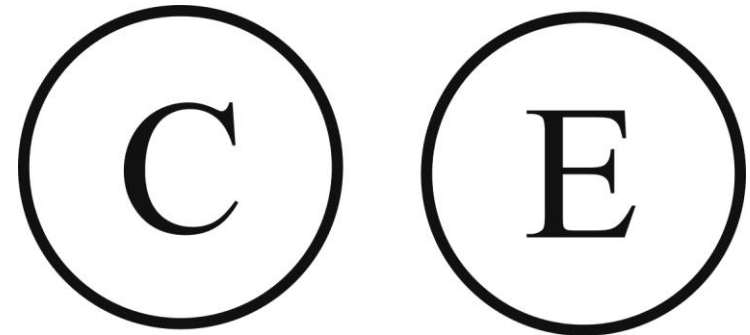
$$C = 2\pi r$$

$$\pi \approx 3,14$$

$$A_C = \pi r^2$$

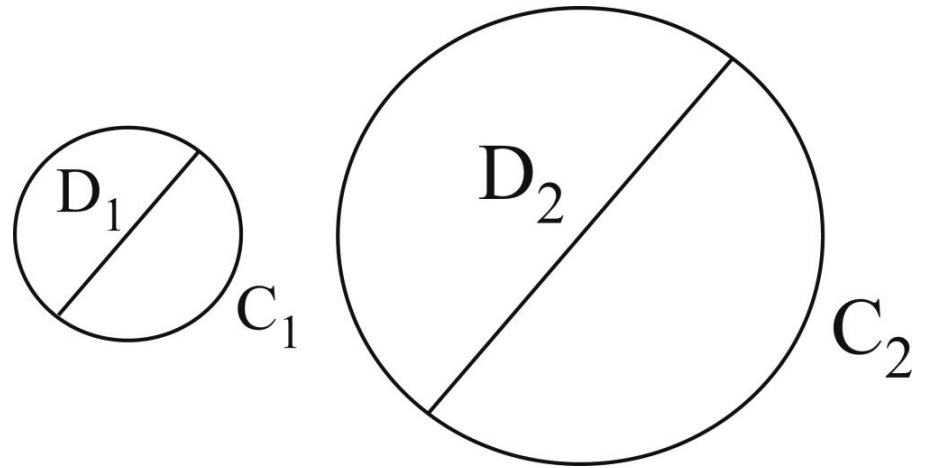
$$A_E = 4\pi r^2$$

$$V_E = \frac{4\pi r^3}{3}$$



# Obra de Arquimedes: Medida do Círculo

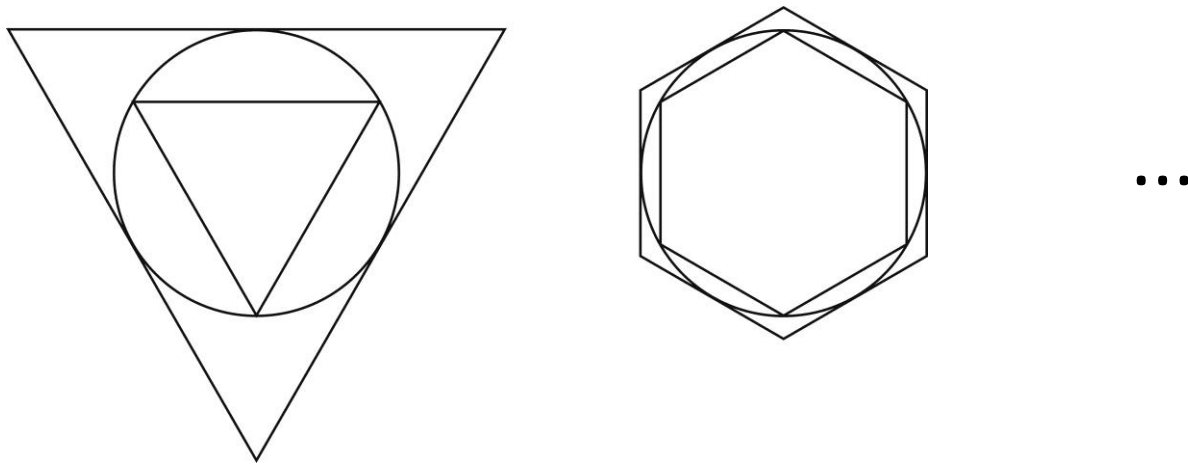
Por semelhança  
de figuras:



$$\frac{C_2}{D_2} = \frac{C_1}{D_1} = \text{constante} = \pi$$

$$C = D \cdot \text{constante} = 2r \cdot \pi = 2\pi r$$

Mas constante =  $\pi$  = ?

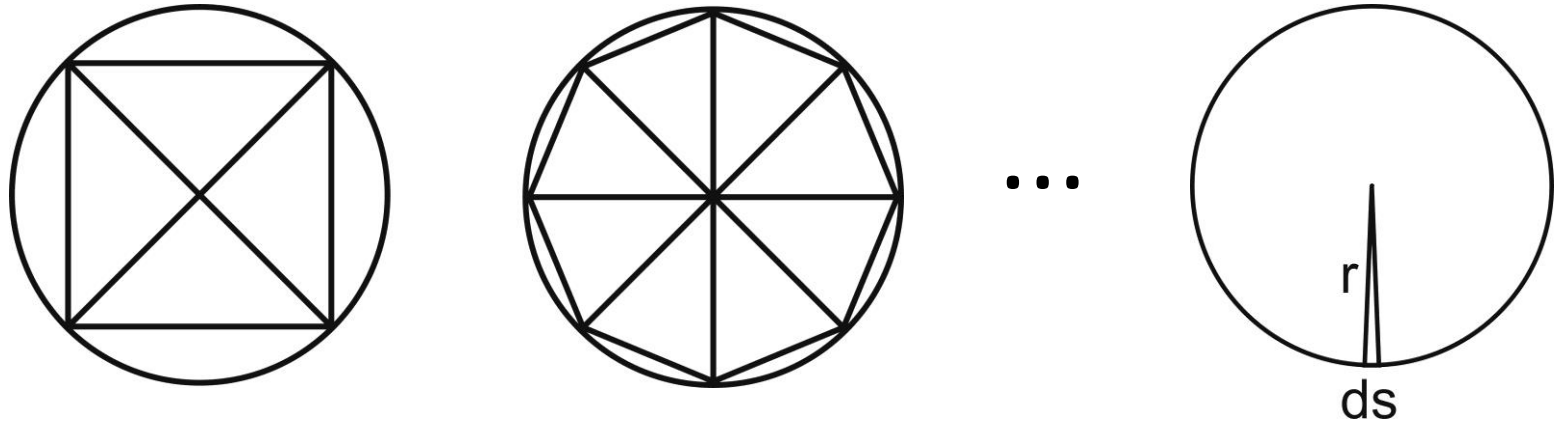


InscREVendo e circunscREVendo dois polígonos de 96 lados em um círculo, Arquimedes provou o seguinte resultado:

“A razão da circunferência de qualquer círculo para seu diâmetro é maior do que 3 e 10/71 mas menor do que 3 e 1/7.”

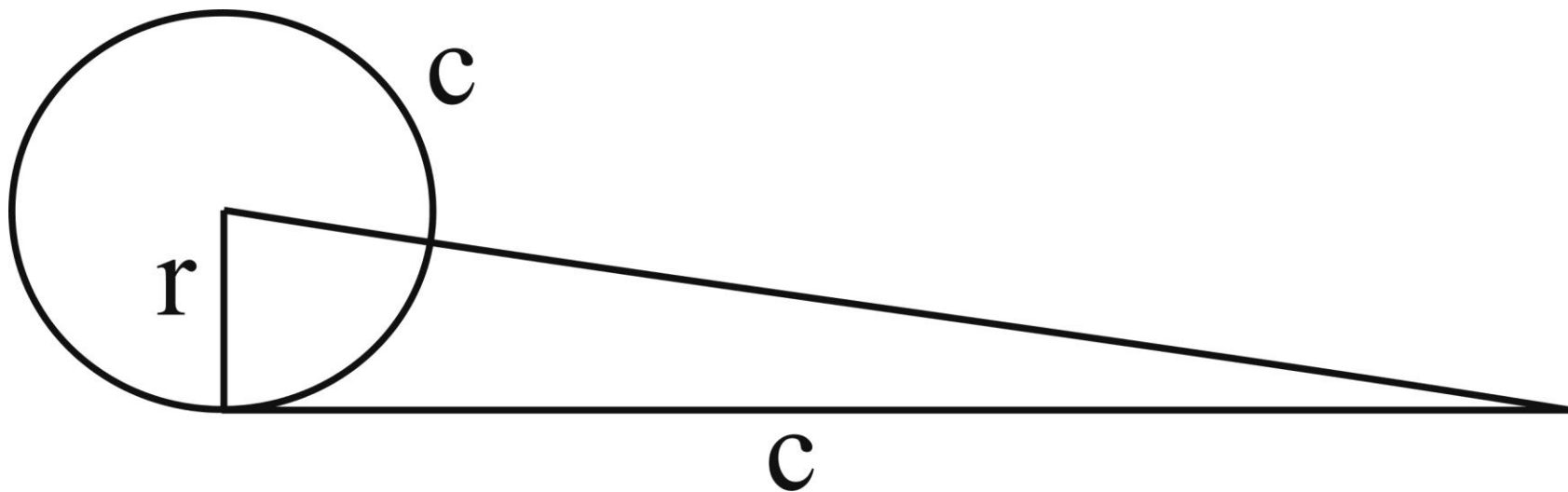
$$3,1408 < \frac{C}{D} < 3,1429$$

Também no trabalho **Medida do Círculo:**



$$A_C = \Sigma A_T = \Sigma \frac{ds \cdot r}{2} = \frac{\Sigma ds \cdot r}{2} = \frac{(2\pi r) \cdot r}{2} = \pi r^2$$

“A área de qualquer círculo é igual a um triângulo retângulo no qual um dos lados ao redor do ângulo reto é igual ao raio, e o outro [lado é igual] à circunferência do círculo.”



$$A_C = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

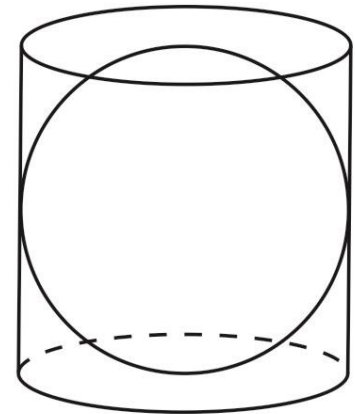


## Outra obra de Arquimedes: *Sobre a Esfera e o Cilindro*

*“A superfície de esfera é quatro vezes seu círculo máximo.”*

$$A_E = 4(\pi r^2)$$

*“Todo cilindro cuja base é o círculo máximo de uma esfera e cuja altura é igual ao diâmetro da esfera é 3/2 da esfera.”*



$$V_C = \frac{3}{2}V_E = \pi r^2 \cdot 2r \quad \text{ou} \quad V_E = \frac{4\pi r^3}{3}$$

**Como Arquimedes descobriu esses resultados?**

# Obras de Arquimedes

Encontram-se principalmente em textos dos séculos XV e XVI, copiados de dois manuscritos dos séculos IX e X, atualmente perdidos.

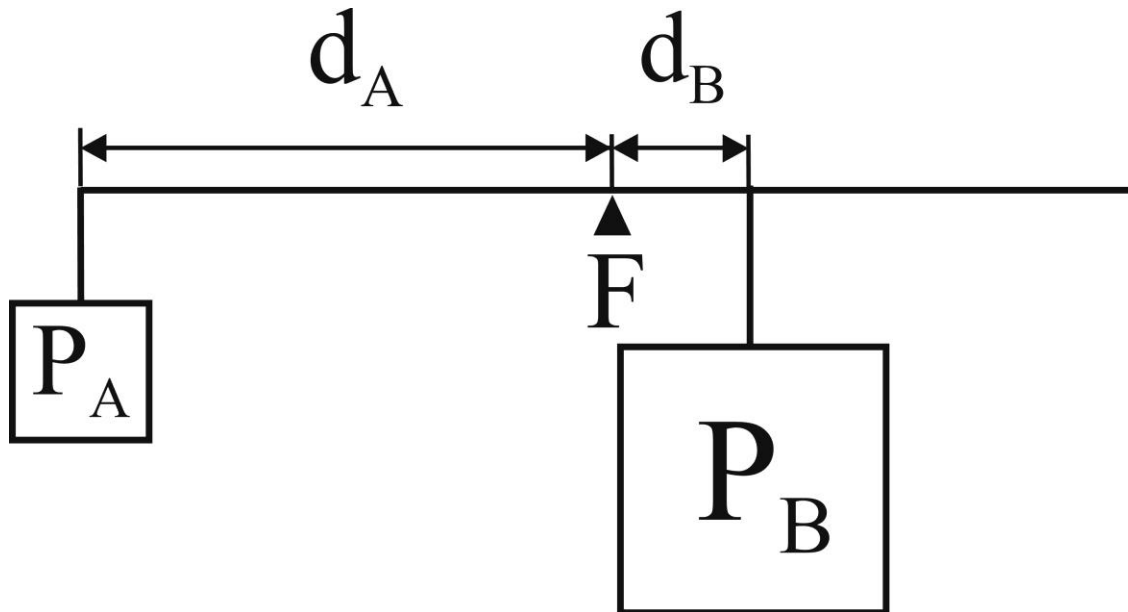


O terceiro manuscrito do século IX, encontrado apenas em 1906, é um palimpsesto. Contém a única versão conhecida da obra endereçada a Eratóstenes com título: *O Método dos Teoremas Mecânicos*

Heiberg (1854 – 1928)

A lei da alavanca aparece na obra  
**Sobre o Equilíbrio dos Planos:**

“Grandezas comensuráveis se equilibram em distâncias inversamente proporcionais a seus pesos.”

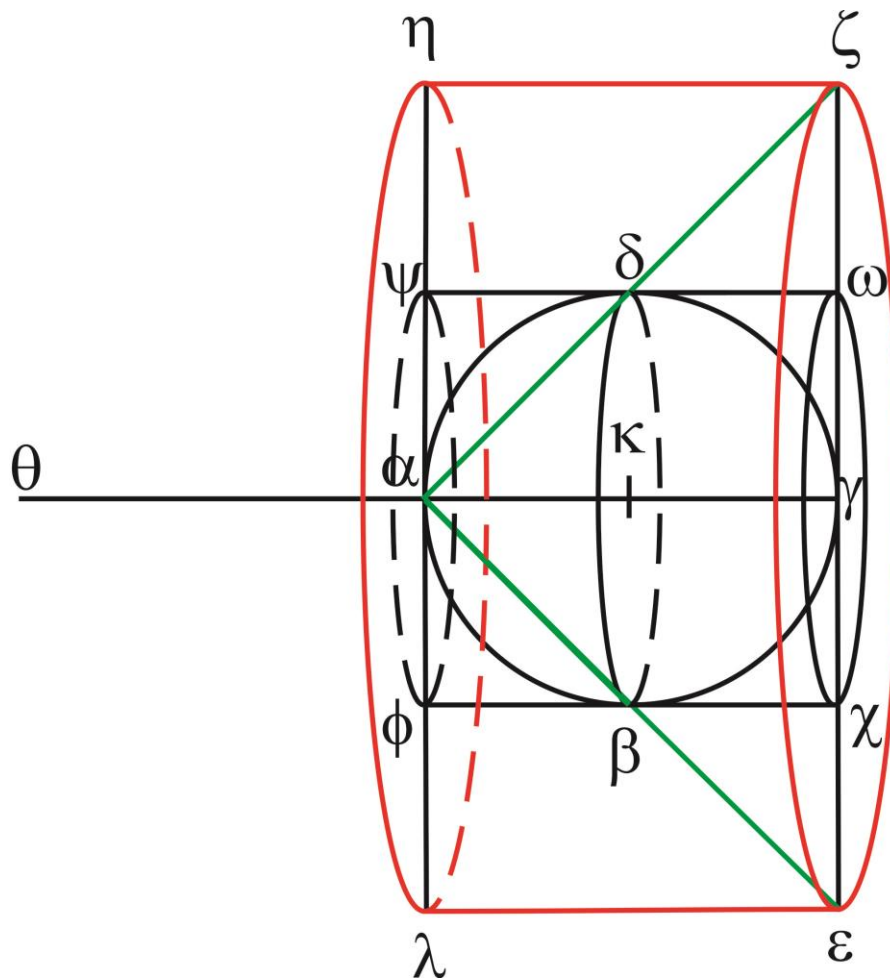


$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{P_B}{P_A}$$

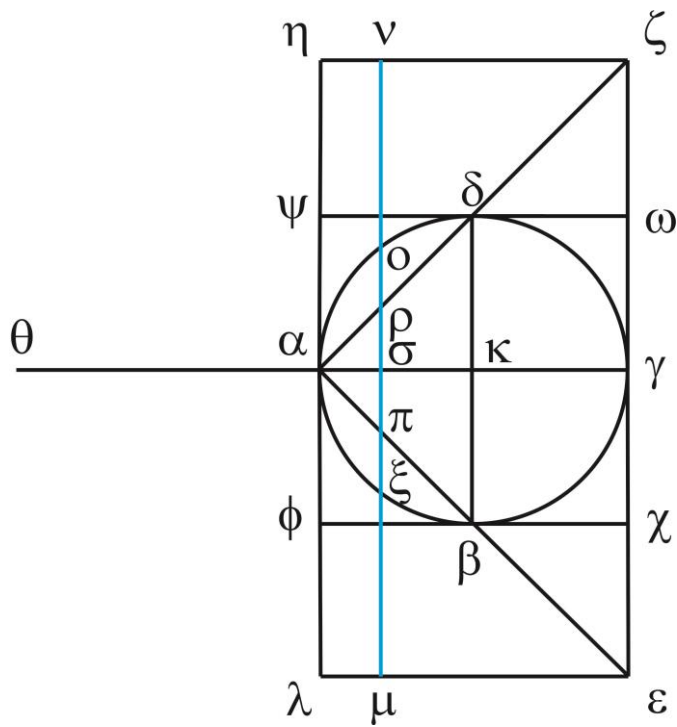


Livro disponível em formato PDF em  
[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)

Na obra *O Método dos Teoremas Mecânicos* Arquimedes explicou a Eratóstenes como descobriu o volume e a área da esfera usando a lei da alavanca:

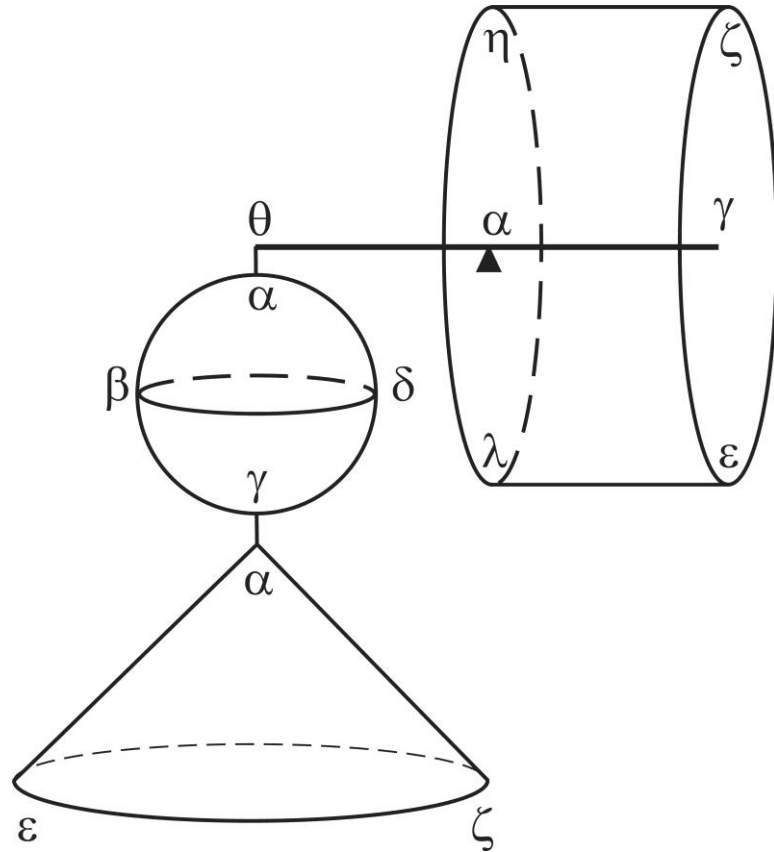
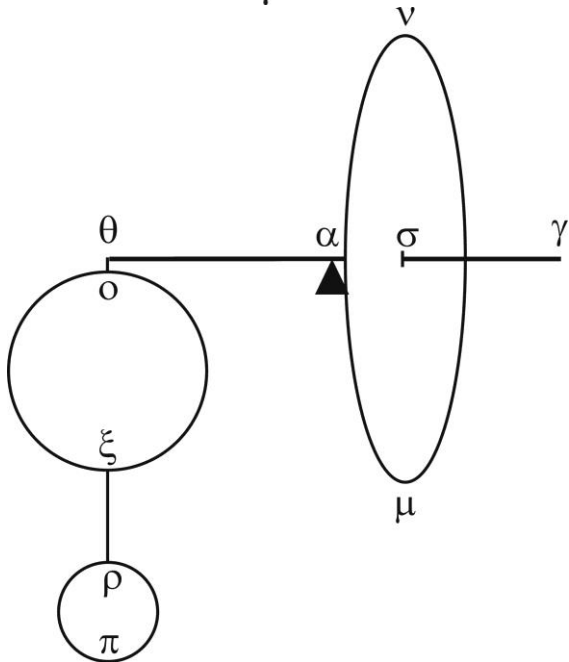


$$\theta\alpha = \alpha\gamma$$

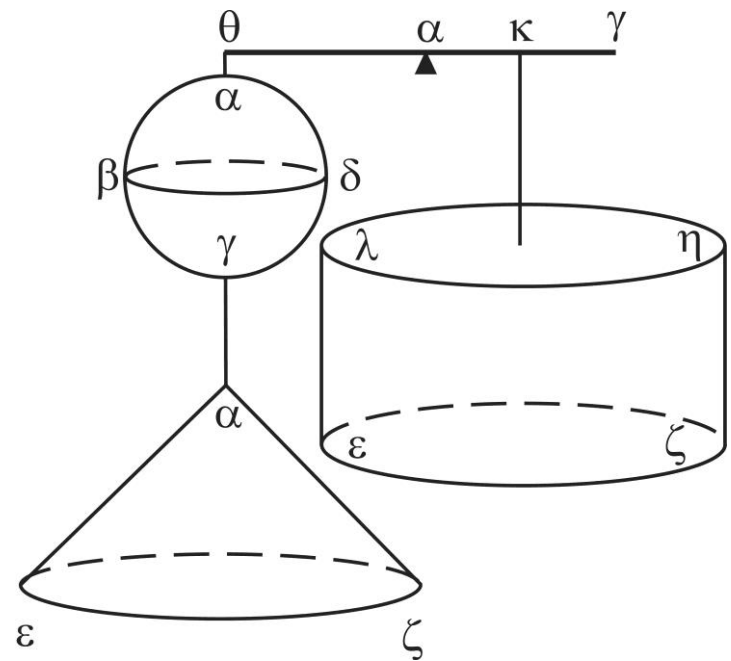


Da matemática elementar obteve:

$$\frac{\theta\alpha}{\alpha\sigma} = \frac{\text{Círculo } \nu\mu}{\text{Círculo } \omicron\xi + \text{Círculo } \rho\pi}$$

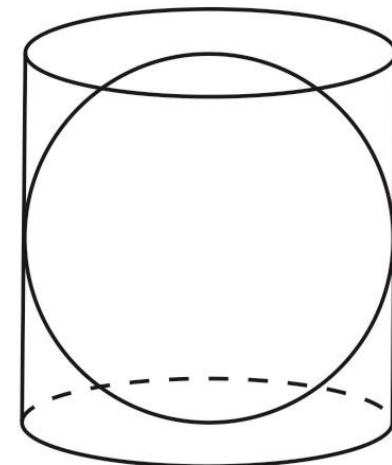


“Postulado 6. Se grandezas se equilibram a certas distâncias, então grandezas equivalentes a estas grandezas se equilibrarão, por sua vez, nas mesmas distâncias.”

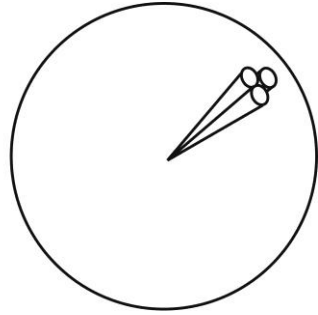
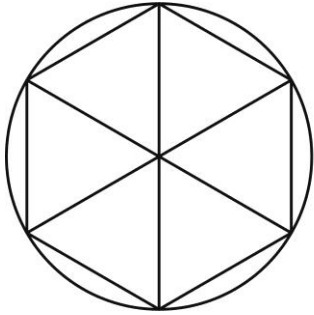


“Todo cilindro cuja base é o círculo máximo de uma esfera e cuja altura é igual ao diâmetro da esfera é 3/2 da esfera.”

$$V_E = \frac{4\pi r^3}{3}$$



## Área da esfera:



$$V_E = \Sigma V_C = \frac{\Sigma da \cdot r}{3} = \frac{A_E \cdot r}{3}$$

Como:

$$V_E = 4 \left( \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} \right)$$

Vem:

$$A_E = 4(\pi r^2)$$

*“A superfície de qualquer esfera é quatro vezes seu círculo máximo.”*



Dissertação de mestrado de Ceno Pietro Magnaghi (2011).

Título: *Análise e Tradução Comentada da Obra de Arquimedes Intitulada “Método sobre os Teoremas Mecânicos”*

Disponível em formato PDF em:

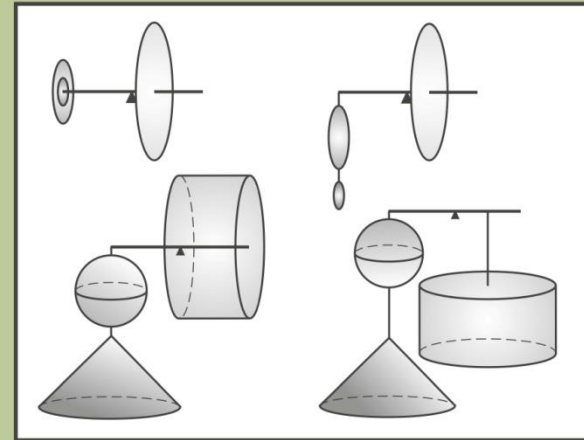
[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)



André Koch Torres Assis  
**Arquimedes, o Centro de  
Gravidade e a Lei da Alavanca**

## O Método Ilustrado de Arquimedes

Utilizando a Lei da Alavanca para  
Calcular Áreas, Volumes e Centros  
de Gravidade



Andre Koch Torres Assis e  
Ceno Pietro Magnaghi

Livros disponíveis em  
[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)