

*Relatório Final de Atividades –
Pibic/SAE*

*Título: Estudo Teórico e Experimental
sobre o Atrito*

Quota de Agosto de 2007 a Julho de 2008

Aluno: Cesar José Calderon Filho, RA: 042596
E-mail: cesinhacalderon@gmail.com

Orientador: Prof. André Koch Torres de Assis
E-mail: assis@ifi.unicamp.br
Homepage: <http://www.ifi.unicamp.br/~assis>

Instituto de Física, Unicamp

Campinas, 07 de Julho de 2008

Índice:

Resumo do Projeto

1. Introdução

2. Materiais e Métodos

3. Resultados Obtidos

3.1 Origens Históricas da Força de Atrito entre Superfícies

3.2 Força de Atrito Viscosa

3.3 Força Elétrica Resistiva

4. Modelo Mecânico da Lei de Ohm

5. Discussão e Conclusões

6. Agradecimentos

7. Bibliografia

Resumo do Projeto

Este projeto visa o estudo histórico e teórico das forças de atrito. É feito o estudo do comportamento matemático do atrito em superfícies secas, a força de arraste em meios fluidos e a lei de Ohm (força resistiva de origem elétrica).

Também é feito um estudo experimental do atrito devido a colisões através de um modelo mecânico da lei de Ohm. Este modelo foi baseado em um plano inclinado com pregos, [TBO91]. Constrói-se uma rampa com pregos e mede-se o tempo de queda de uma esfera ao longo de diversos comprimentos da rampa e também variando seu ângulo de inclinação em relação à horizontal. A partir disto tenta-se verificar se o comportamento mecânico da esfera é ou não compatível com o comportamento de um elétron livre em um resistor Ôhmico.

1. Introdução

O estudo de movimentos sem dissipação é utilizado como primeira aproximação para casos mais complexos, em que atuam inúmeras forças resistivas. Por exemplo, no caso de um bloco deslizando em uma superfície, despreza-se em muitos casos o atrito na superfície de contato, como também o próprio atrito com o ar.

Porém, as forças dissipativas estão sempre presentes no cotidiano. Sem estas forças os animais não poderiam se locomover, assim como um veículo em uma pista não poderia

partir do repouso e começar a se deslocar, nem parar depois de estar em movimento. Tais forças podem surgir também de maneira inconveniente ao homem, em oposição ao movimento desejado.

A utilização de forças dissipativas na vida do homem existe desde épocas remotas, como por exemplo, a geração de fogo por atrito. Outro exemplo, citado por [DOW79, pág 35], é o transporte de grandes massas no Egito antigo utilizando líquidos para atenuar o atrito entre o bloco que está deslizando e o solo. Porém o estudo científico de maior importância se deve a Leonardo da Vinci (1452 – 1519), que verificou a influência na força de atrito da força normal à superfície, assim como a independência da área aparente de contato sobre a força de atrito. Mas seus trabalhos só foram publicados no final do século XIX, [DOW79, pág. 96]. Logo eles não tiveram influência sobre os pesquisadores dos séculos XVI a XVIII. Guillaume Amontons (1663 – 1705) redescobre as leis de atrito estático, publicando seus resultados em 1699. Leonhard Euler (1707 – 1783) propõe um modelo teórico da força de atrito em superfícies devido à rugosidade da mesma, e também diferencia a força de atrito estática da força de atrito cinética. Também Coulomb (1726 – 1806) contribui de forma bem mais estruturada para os estudos sobre o atrito, chegando na lei do atrito cinético.

Devido à importância do tema, existem estudos sobre atrito até hoje. Em 1966 o assunto relacionado com tribologia foi definido como sendo a ciência e a tecnologia das superfícies em movimento relativo que interagem entre si e as práticas relacionadas com este tema, [DOW79, pág 1]. Assim, a tribologia é a ciência que estuda o atrito, o desgaste e a lubrificação. A década de 80 também foi marcada por diversas técnicas de medição do atrito em escalas nanométricas. O termo nanotribologia foi primeiramente citado por Jacqueline Krim em 1991 [KRIM96].

Existem, porém outras formas de atrito, e não somente o de superfície. Ocorre também na natureza atrito devido à viscosidade de um fluido, e o atrito elétrico (lei de Ohm).

O objetivo deste projeto é mapear as diferentes formas de atrito através da leitura de livros e artigos relacionados ao assunto. Foram estudadas as forças de atrito em superfícies, bem como as origens históricas de suas leis fundamentais. Foram também estudadas as forças de atrito viscosa e elétrica, que possuem grande analogia uma com a outra. Por último, fez-se um estudo de um modelo mecânico da lei de Ohm, que consiste em uma rampa inclinada contendo vários pregos, percorrida por uma esfera em queda. Estudou-se a dependência da velocidade da esfera com o ângulo de inclinação da rampa, e se a velocidade da esfera é constante ao longo da mesma. O objetivo era verificar se tal modelo é equivalente à lei de Ohm. Algumas vezes este modelo é utilizado no ensino médio, como forma de auxiliar na aprendizagem da lei de Ohm.

2. Materiais e Métodos

Como metodologia de pesquisa, fez-se o estudo de artigos e livros do assunto. As diferentes formas de atrito foram estudadas de livros básicos utilizados em um curso de graduação de física, como [NUS04] e [GRI99]. Já a parte histórica do atrito em superfícies foi baseada na análise do livro de Dowson, [DOW79].

Já a segunda parte do projeto, a análise de um análogo mecânico de uma resistência elétrica, foi baseada no artigo [TBO91]. O estudo em questão era saber se este modelo representava fielmente a lei de Ohm. Na lei de Ohm temos uma corrente constante e ela é

proporcional à tensão aplicada. A analogia mecânica desta situação é a de uma rampa com pregos (resistência), esfera em movimento (elétron livre), velocidade da esfera (velocidade de arraste dos elétrons) e inclinação da rampa (tensão elétrica). Para testar este modelo foi verificado inicialmente para uma inclinação constante da rampa se a velocidade média de queda era constante no tempo (se o espaço percorrido era proporcional ao tempo gasto). Em seguida tentamos verificar com várias inclinações da rampa se a velocidade média de queda era ou não proporcional ao seno do ângulo de inclinação. A obtenção dos dados foi feita com o auxílio de um cronômetro, e o estudo dos dados com o auxílio de um computador e do software Microsoft Excel[®].

3. Resultados Obtidos

3.1 Origens Históricas da Força de Atrito entre Superfícies

Os estudos de Leonardo da Vinci (1452 – 1519) sobre o atrito mostram a revolução científica que existiu na Renascença, não apenas pelos resultados obtidos, mas também pelos métodos experimentais adotados na época. Ele tinha uma enorme habilidade em analisar máquinas e seus elementos. A performance das máquinas depende fortemente de como o atrito atua sobre elas.

Primeiramente, da Vinci reconheceu a diferença entre o atrito de rolamento e o atrito quando existe um deslizamento entre superfícies, assim como os benefícios da utilização de lubrificantes. Ele foi a primeira pessoa a chegar na lei correta de atrito estático. Estudou as forças sobre um bloco retangular para colocá-lo em movimento sobre uma superfície, com o bloco podendo estar apoiado sobre faces diferentes (que possuem áreas diferentes). Expressou estes resultados com as seguintes palavras, citado em [DOW79, pág 98]: “O atrito produz o dobro da quantidade de esforço se o peso for dobrado,” e “o atrito feito pelo mesmo peso terá resistência igual no início de seu movimento, embora o contato possa ser de larguras e comprimentos diferentes.” Estas observações estão de acordo com as formulações da lei de atrito estático, a saber:

1. A força de atrito é diretamente proporcional à força normal aplicada sobre o corpo.
2. A força de atrito é independente da área aparente de contato entre o corpo e a superfície sobre a qual está apoiado.

Foi ele também o responsável pela introdução do coeficiente de atrito, definido como a razão da força de atrito com a força normal (embora ele não utilizasse o símbolo μ para esta razão):

$$\mu = \frac{F_{at}}{N}$$

Porém, para da Vinci, o coeficiente de atrito era constante para superfícies polidas e lisas [DOW79, pág 99]. Em particular, para ele a razão anterior teria um valor constante de

$1/4 = 0,25$, qualquer que fosse a natureza dos corpos em contato. Embora hoje em dia se saiba que isto não é correto, ele não está tão longe assim da verdade. Por exemplo, o coeficiente de atrito estático entre madeira e madeira varia de aproximadamente 0,25 até 0,50, dependendo dos tipos de madeira em contato, [MSPC]. Da mesma forma, o coeficiente de atrito estático entre madeira e ferro varia de aproximadamente 0,20 até 0,60, dependendo do tipo de madeira, [MSPC]. Como estes materiais correspondem à maioria das substâncias utilizadas na época para a criação de máquinas, conclui-se que a idéia de da Vinci é perfeitamente plausível.

De qualquer forma da Vinci não publicou seus resultados, sendo que seus só ficaram conhecidos no final do século XIX quando seus cadernos de notas foram descobertos e publicados. Logo suas pesquisas não tiveram influência direta sobre outros pesquisadores.

O trabalho científico sobre o atrito se iniciou na França no final do século XVII, com destaque principal para a obra de Guillaume Amontons (1663 – 1705). Ele apresentou um artigo fundamental para a Academie Royale em 19 de dezembro de 1699, “De la resistance caus’ee dans les machines.” Amontons aponta que o estudo do atrito é justificado pela importância das máquinas, pois o atrito afeta a performance das mesmas [DOW79, pág 154].

O aparato utilizado por Amontons está esquematizado na Figura 1.

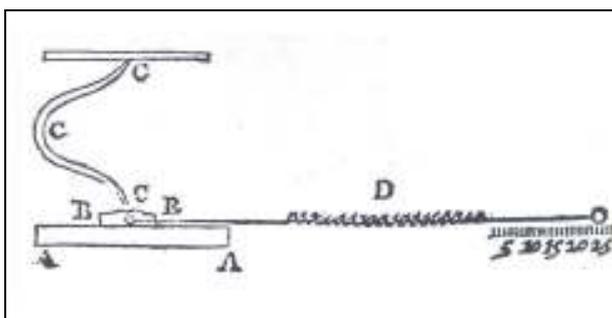


Figura 1 – Aparato experimental utilizado por Amontons. Materiais testados: atrito estático entre AA e BB; a mola CCC aplica uma força normal no material; a mola D é utilizada para medir a força de atrito (extraído de [DOW79, pág 155]).

Os materiais utilizados para o estudo foram cobre, ferro, chumbo e madeira em várias combinações. O interessante é que Amontons realizou os experimento com gordura animal (de porco), lubrificando as superfícies em contato. Ou seja, ele não estudou o atrito entre superfícies secas, como se afirma usualmente. Na Figura 1 as substâncias AA e BB eram pressionadas uma contra a outra por uma mola CCC. Para diferentes curvaturas da mola Amontons obtinha diferentes valores da força normal atuando entre as superfícies. Já a mola D media a força necessária para superar o atrito entre as substâncias AA e BB, iniciando assim o deslizamento entre elas. As principais conclusões de Amontons foram:

1. Que a resistência causada por fricção somente aumenta ou diminui em proporção com a maior ou menor pressão (força normal) aplicada. Por outro lado, esta resistência não varia com a maior ou menor extensão da superfície.

2. Que a resistência causada pela fricção é mais ou menos a mesma para o ferro, chumbo e madeira em qualquer combinação, caso as superfícies sejam recobertas com gordura de porco.
3. Que a resistência é mais ou menos igual a um terço da pressão (força normal) aplicada.

A primeira conclusão contém as atuais primeira e segunda leis do atrito estático, conforme já visto nos estudos de da Vinci. Amontons, assim como da Vinci, encontrou um valor constante para o coeficiente de atrito. Enquanto que para da Vinci este valor era de 1/4, para Amontons era de 1/3.

Amontons também sugere que a força de atrito surge devido às asperezas da superfície [DOW79, pág 156]. Para ele este atrito devido às asperezas da superfície valia tanto para superfícies rígidas como elásticas (Figura 2). No caso de superfícies rígidas, a força de atrito surgiria ao empurrar as asperezas rígidas. Já no caso de superfícies elásticas ela surgiria devido à força requerida para deformar as asperezas elásticas.

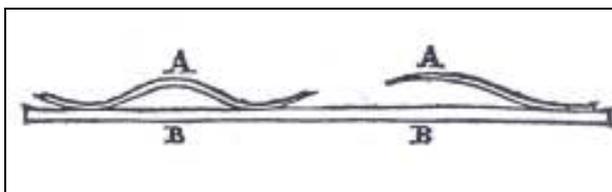


Figura 2 – Representação de Amontons das asperezas elásticas através de molas (extraído de [DOW79, pág 155]).

Já em 1748, o matemático Leonhard Euler (1707 – 1783) submeteu dois artigos sobre atrito para a Academia de Ciências, em Berlim, [DOW79, pág. 164]. No primeiro, mostrou que a força horizontal F necessária para subir um corpo de peso P em um plano inclinado de um ângulo α com a horizontal é dada pela expressão:

$$F > P \tan \alpha$$

Euler adotou um modelo de asperezas rígidas interpostas como causa do atrito. Baseado nas medidas de Amontons, a inclinação das asperezas deveria ser de $19^{\circ}29'$ ($\sin \alpha = 1/3$), como mostra a Figura 3.

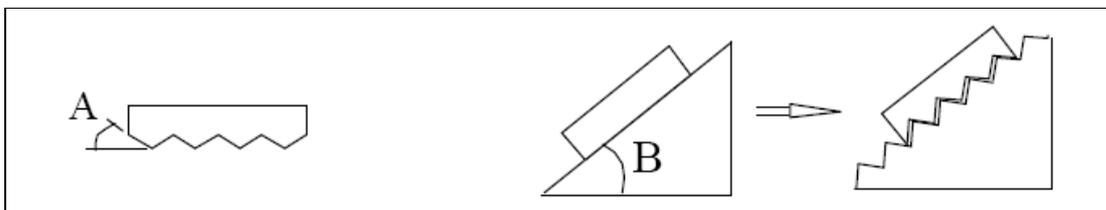


Figura 3 – Visualização da rugosidade das superfícies (modelo de Euler).

Euler chega à conclusão de que:

$$\mu = \tan \alpha$$

Os trabalhos de Euler tiveram três importâncias fundamentais: desenvolveu analiticamente o estudo do atrito, introduziu o símbolo utilizado hoje para o coeficiente de atrito, μ , e reconheceu a existência de dois tipos de atrito, estático e cinético. No primeiro caso não há movimento entre as duas superfícies em contato, enquanto que no segundo caso elas deslizam entre si.

Já no período da Revolução Industrial, Charles Augustin Coulomb (1736 – 1806) fez um brilhante estudo sobre o atrito em seu trabalho “*Théorie des machines simples*”. Este trabalho foi submetido para um prêmio da Academia Francesa em 1780, sendo publicado em 1785. Este tratado é dividido em duas partes e a primeira se refere ao atrito entre superfícies. Coulomb investigou os efeitos da área de contato e da pressão dos corpos sobre a superfície. Os materiais utilizados foram carvalho, carvalho verde, olmo, pinheiro, abeto, ferro e cobre amarelo. Estudou também tanto superfícies secas como lubrificadas com água, azeite, sebo, graxa e fuligem. Utilizou tanto superfícies lisas como rugosas, com velocidade máxima entre as superfícies em contato de 4,8 m/s e pressão máxima de $30,4 \times 10^6$ N/m². Coulomb também estudou o atrito dependendo do tempo de contato (denominado por ele de tempo de repouso) entre as superfícies, utilizando intervalos de tempo de 0,5 s até 4 dias (ver [DOW79, pág 217]).

Outro importante estudo de Coulomb foi a distinção entre o atrito estático e cinético. Em geral, Coulomb encontrou que a força de atrito cinética era menor que a força de atrito estática, mas sendo a diferença quase imperceptível nos metais. No caso do atrito cinético Coulomb obteve empiricamente que o coeficiente de atrito depende da natureza das superfícies em contato sendo diferente, por exemplo, para o carvalho deslizando sobre carvalho, ou para o carvalho deslizando sobre pinheiro.

Ao final de seu trabalho, Coulomb sumariza seus principais resultados empíricos:

1. Para o deslizamento de madeira sobre madeira em condições secas, a força de atrito cinético cresce até atingir um máximo. Logo após, a força de atrito cinético é essencialmente proporcional com a força normal.
2. Para o deslizamento de madeira sobre madeira, a força de atrito cinético é essencialmente proporcional à força normal a qualquer velocidade, mas o atrito cinético é menor que o atrito estático após longos períodos de tempo de repouso.
3. Com metais deslizando em metais sem lubrificantes, a força de atrito é essencialmente proporcional à força normal e não há diferenças entre atrito cinético e estático.
4. Para metais sobre a madeira em condições secas, o atrito estático cresce muito lentamente com relação ao tempo de repouso e pode tomar quatro, cinco ou até mais dias para atingir o limite. Com metal sobre metal, o limite é atingido quase que imediatamente e com madeira sobre madeira, este limite é atingido em somente um ou dois minutos. Para madeira sobre madeira ou metal sobre metal em condições secas, a velocidade tem uma pequena influência no atrito cinético, mas no caso de metal com madeira, o atrito cinético aumenta com a velocidade.

Coulomb concluiu que o atrito se origina das asperezas, e que a força de atrito é exatamente proporcional à força normal e independente da área de contato. Além disso, para ele a força de coesão tem pouca influência sobre o atrito, e pode ser desprezada na prática.

Dessa maneira resumida, podem-se enunciar leis fundamentais sobre o atrito, que são verificadas empiricamente:

1. As forças de atrito estático e cinético independem da área de contato.
2. As forças de atrito estático e cinético são proporcionais à força normal à superfície que age sobre o corpo.
3. As forças de atrito estático e cinético dependem dos materiais em contato.
4. A força de atrito cinético independe do módulo da velocidade entre as superfícies em contato, uma vez iniciado o movimento.

Também, pelo estudo acima, diferenciam-se duas formas de atrito em superfícies, estático e cinético.

Vamos supor um corpo em repouso sobre uma superfície horizontal. Agora aplicamos sobre ele uma força F_{tan} tangencialmente à superfície. Experimentalmente, é verificado que este corpo submetido a esta força tangencial não inicia o movimento até que seja atingido um valor crítico, F_d , para esta força tangencial. Quando o corpo em repouso está sob a ação de uma força tangencial menor que F_d , vem que a força de atrito estático F_{at} é dada por $F_{at} = F_{tan}$, tendo sentido contrário a ela (para que a força resultante sobre o corpo em repouso seja nula). Na iminência do movimento a força tangencial aplicada sobre o corpo é dada por F_d . Ainda neste caso $F_{at} = F_{tan}$. Dos resultados experimentais já discutidos vem que na iminência do movimento a força de atrito estático é dada por

$$F_{at} = \mu_e N$$

onde μ_e é o coeficiente de atrito estático, e N a força normal à superfície de contato. Esta força é independente da área de contato entre os corpos.

Após o início do movimento entre as superfícies, passa a atuar uma força de atrito cinético sobre o corpo deslizando. Experimentalmente vem que ela é dada por:

$$F_{at} = \mu_c N$$

onde μ_c é o coeficiente de atrito cinético. Experimentalmente vem que esta força não depende da área de contato nem da velocidade entre o corpo e a superfície sobre a qual está deslizando. Observa-se experimentalmente que o coeficiente de atrito cinético é menor ou igual ao coeficiente de atrito estático, $\mu_c \leq \mu_e$.

3.2 Força de Atrito Viscosa

O conhecimento sobre o comportamento de corpos em meios fluidos é essencial, visto a interferência do ar em diversos experimentos, assim como observações feitas em meios líquidos.

Sir Isaac Newton (1642 - 1727) obteve resultados importantes na resistência dos fluidos. Em particular, foi ele quem obteve tanto experimentalmente quanto teoricamente que a parte do atrito em fluidos que vem da colisão do corpo com as partículas do fluido é proporcional à densidade do meio, à seção reta do corpo e ao quadrado da velocidade do corpo em relação ao meio. Ao final da Seção III do Livro II de seu livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, publicado pela primeira vez em 1687, ele escreve, [NEW95, pág 222]:

“A resistência dos corpos esféricos em fluidos surgem parcialmente da tenacidade, parcialmente do atrito e parcialmente da densidade do meio. E esta parte da resistência que surge da densidade do meio é, como eu disse, como o quadrado da velocidade; a outra parte, que surge da tenacidade do fluido, é uniforme, ou como o momento do tempo; (...)”

Para chegar a tais resultados, Newton realizou importantes experimentos fazendo o uso de pêndulos. Ao final da Seção VI do Livro II lê-se, [NEW95, pág 253]:

“Portanto as resistências destes globos igualmente velozes eram menores do que a razão ao quadrado dos diâmetros. Mas ainda não consideramos a resistência ao fio, que certamente foi muito considerável, e tem de ser subtraída da resistência dos pêndulos encontrada aqui. Não pude determiná-la precisamente, mas encontrei-a maior do que 1/3 parte da resistência total do pêndulo menor; de onde obtive que as resistências dos globos, quando era subtraída a resistência do fio, estão aproximadamente na razão ao quadrado dos diâmetros.”

Adiante ele escreve que [NEW95, pág 256]:

“(...) e além disto, do que já foi descrito, aparece suficientemente que a resistência dos corpos movendo-se rapidamente é aproximadamente proporcional às densidades dos fluidos onde se movem.”

Newton também estudou a componente da força de atrito em fluidos que não depende da velocidade do corpo, assim como a componente linear com a velocidade. Analisou ainda o caso geral com as três componentes da velocidade. Equacionando os resultados de Newton, lembrando que a dependência com o quadrado do diâmetro significa uma dependência com a área da seção reta A da esfera de raio r movendo-se com velocidade v em um fluido com densidade ρ_{meio} , tem-se, [NEW96, pág. 268]:

$$F_d = a_0 + a_1 r \cdot v + a_2 \rho_{meio} A v^2$$

Newton também explica que o atrito dependente do quadrado da velocidade do corpo em relação ao fluido é devido a colisões do corpo com as partículas do meio. Explica isto através de argumentos teóricos no Escólio ao fim da Seção I do Livro II do *Principia* [NEW95, pág 194]:

“Contudo, que a resistência dos corpos está na razão da velocidade é mais uma hipótese matemática do que física. Em meios vazios de toda tenacidade, as resistências feitas aos corpos estão como o quadrado das velocidades. Pois pela ação de um corpo mais rápido, é comunicado um movimento maior em proporção a uma maior velocidade à mesma quantidade do meio num tempo menor; e num tempo igual, em razão de uma maior quantidade de meio perturbado, é comunicado um movimento como o quadrado da razão maior; e a resistência (pelas Leis II e III) é como o movimento comunicado.”

Tudo isto mostra a genialidade de Newton e o quanto conseguiu obter em sua obra magistral, *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*.

Depois de Newton outros cientistas deram continuidade a suas pesquisas.

É muito importante na física a criação de leis gerais que expliquem uma grande variedade de fenômenos físicos. Para isso às vezes é necessária a substituição de variáveis por outras de maneira a simplificar o problema. No caso da hidrodinâmica clássica, a utilização do número de Reynolds torna seu desenvolvimento mais claro. A interpretação física do número de Reynolds é exatamente a razão das forças inerciais que deslocam o fluido pelas forças viscosas que atuam no corpo. Defini-se o número de Reynolds como:

$$Re = \frac{\rho l v}{\eta}$$

onde ρ é a densidade do fluido, l é o comprimento característico da seção transversal do corpo, v a velocidade do corpo em relação ao meio fluido e η a viscosidade do fluido. Pode se verificar facilmente que o número de Reynolds é adimensional. Exemplos numéricos são de uma bactéria a uma velocidade em um fluido de 0,01 mm/s para a qual $Re = 10^{-5}$ e o bater de asas de pequenos insetos no ar que apresentam um valor de $Re = 30$ (ver [VOG96, pág 86]).

A força de arraste F_d em meios fluidos foi obtida pelo Lord Rayleigh em 1915, utilizando o que hoje é denominado como análise dimensional. A expressão pode ser vista em [TM04, pág 59]:

$$F_d = \frac{1}{2} \rho C_d A v^2$$

Nesta expressão A é a área da seção reta transversal do corpo deslocando-se com velocidade v em um fluido com densidade ρ e C_d o coeficiente de arrasto, que é uma função que depende somente do número de Reynolds e, portanto, adimensional. Existem várias curvas da dependência de C_d pelo número de Reynolds que se ajustam aos dados experimentais. A que melhor se ajusta é dada por [VOG96, pág 334]:

$$C_d \approx \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4$$

Assim, caso tenha-se um regime onde $Re \ll 1$, a força de viscosa reduz-se a:

$$F_d = 12 \frac{\eta A}{l} v$$

Percebe-se claramente a dependência com a velocidade de maneira linear. No caso de uma esfera de raio r temos $l = 2r$ e $A = \pi \cdot r^2$. Aplicando estes resultados na equação anterior chega-se em uma expressão conhecida como fórmula de Stokes (1819 – 1903), que ele obteve em 1845:

$$F_d = 6\pi\eta r v$$

Veja que a força de atrito em baixas velocidades depende da viscosidade do meio, isto é, da dificuldade do escoamento do líquido. Por outro lado ela não depende da densidade do meio. A origem da viscosidade vem da transferência de momento de uma fina “camada” de fluido para outra, de maneira que a “camada” com mais velocidade perde momento para uma camada com menor velocidade, fazendo com que esta se desloque mais rápido, e a que perdeu momento passe a se deslocar mais devagar. Deste modo, as “camadas” de fluido acabam se deslocando juntas. Numa visão mais simplista, seria o atrito entre as “camadas” de fluido que fazem elas escoarem juntas.

Já no caso em que $Re \gg 1$ obtém-se $C_d \approx 0,4$. Isto leva a uma força resistiva em um fluido dada por:

$$F_d = \frac{1}{5} \rho A v^2$$

Neste caso, tem-se a dependência da força com o quadrado da velocidade, como obtido inicialmente por Newton. Existe também a dependência da força com a densidade do meio. Uma interpretação física de tal resultado é que este fator da força de arraste surge devido a colisões do corpo com as partículas constituintes do meio. Caso a densidade do meio torne-se nula, isto é, não exista nenhuma partícula constituinte do meio, a força de arraste tende a zero.

3.3 Força Elétrica Resistiva

O circuito elétrico mais simples é aquele no qual uma bateria está associada em série a um resistor. Se a bateria gera uma tensão V e a resistência do resistor é R a lei de Ohm (1789 – 1854) afirma que vai circular uma corrente elétrica constante I ao longo do circuito dada por

$$I = \frac{V}{R}$$

Ohm obteve esta lei entre 1825 e 1827. Em termos microscópicos ela pode ser expressa como [RMC82, Seção 7.7]:

$$v = \frac{g}{\rho} E$$

Nesta equação v é a velocidade de arraste dos elétrons livres em relação à rede cristalina do metal, g é a condutividade do meio (o inverso da resistividade) e ρ é a densidade volumétrica de cargas do meio. Além disso, E é o campo elétrico devido à bateria.

Ou seja, há dois aspectos na lei de Ohm. O primeiro é que em um circuito RC a velocidade de arraste dos elétrons é constante em função do tempo. O segundo aspecto é que esta velocidade varia linearmente com o campo elétrico aplicado (ou que a corrente elétrica do circuito varia linearmente com a tensão aplicada).

Pode ser feita uma dedução microscópica da lei de Ohm a partir da segunda lei de Newton, $F = ma$. A força aplicada sobre uma carga q devida a um campo elétrico E é dada por qE . Como a velocidade média dos elétrons é constante no tempo no caso de uma corrente contínua, tem-se $a = 0$. Logo pode-se chegar na lei de Ohm supondo-se uma força de atrito atuando sobre os elétrons livres dada por $F_{at} = -bv$, onde b é uma constante. Ou seja, a lei de Ohm, vista microscopicamente, é análoga a uma força de atrito linear com a velocidade dos elétrons livres em relação à rede cristalina do metal.

4. Modelo Mecânico da Lei de Ohm

Na segunda parte deste projeto estudou-se um modelo mecânico de uma resistência elétrica. A parte experimental foi baseada em [TBO91] e [NET]. Na lei de Ohm temos uma corrente constante e ela é proporcional à tensão aplicada. A analogia mecânica desta situação é a de uma rampa com pregos. A rampa é inclinada e por ela desce uma esfera colidindo com os pregos. A velocidade média da esfera é aparentemente constante em função do tempo. A esfera em queda seria o análogo mecânico de um elétron livre dentro de um resistor. A rampa com pregos faria o papel da resistência elétrica. E a inclinação da rampa seria o análogo à tensão elétrica sobre o resistor. Nosso objetivo foi testar se realmente este modelo mecânico descreve os aspectos principais da lei de Ohm. Para testar este modelo foi verificado inicialmente para uma inclinação constante da rampa se a velocidade média de queda era constante no tempo (se o espaço percorrido era proporcional ao tempo gasto). Em seguida tentamos verificar com várias inclinações da rampa se a velocidade média de queda era ou não proporcional ao seno do ângulo de inclinação. Caso isto ocorresse o modelo mecânico seria uma representação fiel da lei de Ohm, já que neste caso a corrente elétrica (ou velocidade de arraste dos elétrons) é proporcional à tensão aplicada. A obtenção dos dados foi feita com o auxílio de um cronômetro, e o estudo dos dados com o auxílio de um computador e do software Microsoft Excel[®].

Fizemos duas rampas de pregos. A primeira não funcionou direito pois as linhas estavam alinhadas e havia um grande espaçamento entre os pregos. Com isto a esfera descia várias linhas seguindo uma trajetória reta, sem colidir com os pregos. Fizemos então uma segunda rampa que descrevemos em detalhes.

As dimensões da rampa estão dadas na figura abaixo.

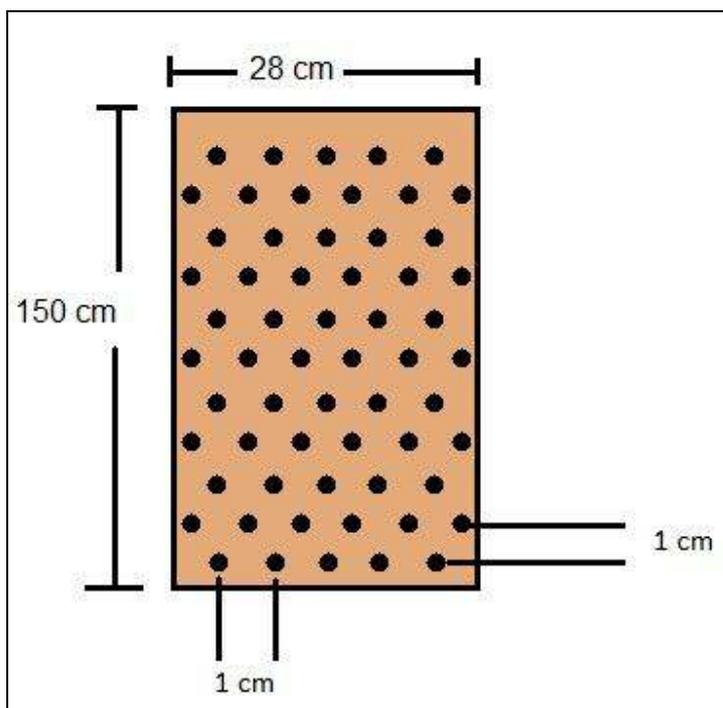


Figura 4 – Desenho esquemático das distâncias envolvidas na rampa. Utilizaram-se esferas de aço com 5 mm de diâmetro que desciam pela rampa.



Figura 5 – Rampa que construímos para a obtenção das medidas experimentais.

Foram colocados 31 pregos igualmente espaçados em cada linha. Foram feitas 149 destas linhas de pregos. Com isto utilizamos um total de 4.619 pregos em nossa rampa.

Traçaram-se retas paralelas à base afastadas de 30 cm entre si, começando a partir da parte mais alta da rampa. Nosso objetivo inicial foi verificar se a velocidade média de queda da esfera era constante para uma inclinação fixa da rampa em relação à horizontal. Para isto medimos o tempo para uma esfera de aço percorrer as distâncias de 30, 60, 90, 120 e 150 cm. A esfera era sempre solta do repouso no início da rampa. Mediu-se 30 vezes o tempo para percorrer cada distância. Desta forma melhoramos o tratamento estatístico dos dados. Conhecendo-se o tempo e a distância percorrida, era possível comparar as velocidades médias para cada distância.

Na Tabela 1 encontra-se um exemplo de um conjunto de 30 medidas do tempo de queda para uma esfera percorrer a distância de 90 cm da rampa, partindo do repouso, com um ângulo de inclinação de 45° da rampa em relação à horizontal:

6,91	7,10	6,75	6,66	6,78
6,46	6,53	6,04	6,43	7,34
6,29	6,87	7,00	6,15	6,21
7,03	6,25	7,38	6,78	6,85
6,69	7,60	6,94	7,03	7,10
6,47	6,71	6,60	6,56	6,53
Tempo médio de queda ($6,73 \pm 0,07$) s				

Medidas análogas foram feitas para distâncias percorridas de 30 cm, 60 cm, 120 cm e 150 cm, sempre com a esfera partindo do repouso. Dividindo o espaço percorrido pelo tempo médio obtinha-se a velocidade média de queda para a esfera percorrer cada uma destas distâncias, sempre com a inclinação constante de 45° (neste exemplo).

Fez-se isso para 10 ângulos diferentes de inclinação da rampa em relação à horizontal. Os dados obtidos para os valores médios das velocidades de queda para cada distância estão na Tabela 2

Ângulo	d = 30 cm	d = 60 cm	d = 90 cm	d = 120 cm	d = 150 cm
18°	10,9 ± 0,2	10,7 ± 0,1	10,5 ± 0,1	10,4 ± 0,1	10,5 ± 0,1
22°	11,4 ± 0,2	11,4 ± 0,2	11,4 ± 0,2	11,3 ± 0,1	11,4 ± 0,1
27°	11,8 ± 0,2	11,9 ± 0,1	12,0 ± 0,1	12,0 ± 0,1	12,0 ± 0,1
32°	12,3 ± 0,2	12,5 ± 0,1	12,5 ± 0,1	12,4 ± 0,1	12,6 ± 0,1
37°	12,6 ± 0,3	12,7 ± 0,2	12,6 ± 0,1	12,8 ± 0,1	12,9 ± 0,1
45°	13,3 ± 0,3	13,6 ± 0,2	13,4 ± 0,1	13,5 ± 0,1	13,5 ± 0,1
50°	14,0 ± 0,3	14,1 ± 0,2	13,5 ± 0,1	13,6 ± 0,2	13,7 ± 0,1
55°	14,1 ± 0,3	14,0 ± 0,2	14,2 ± 0,2	14,2 ± 0,1	14,1 ± 0,1
60°	13,8 ± 0,3	14,6 ± 0,2	14,1 ± 0,1	14,7 ± 0,2	14,6 ± 0,2
65°	14,9 ± 0,4	14,6 ± 0,2	14,6 ± 0,2	14,4 ± 0,2	14,9 ± 0,1

Desta Tabela 2 observa-se que a velocidade média de queda, para um ângulo fixo de inclinação da rampa, é aproximadamente constante qualquer que seja a distância percorrida pela esfera. Medidas com ângulos de inclinação menores que 18° não eram possíveis, já que a esfera de aço parava ao longo da rampa atrás de algum prego com o qual colidia, devido à baixa velocidade que adquiria ao rolar pela rampa. Depois de analisar com atenção a construção de nossa rampa, parece que o motivo para isto foi devido a pequenas fendas ou fiapos de madeira que ficavam ao redor dos pregos fincados na rampa de madeira. Já para ângulos maiores que 65° tornaram-se impraticáveis as medidas de tempo, pois a esfera de aço chegava a saltar da rampa. Ou seja, ela perdia contato com a rampa, inviabilizando os dados obtidos nestes casos. A esfera também saltava em alguns casos com inclinações de 60° ou 65° . Mas como isto acontecia poucas vezes, estes casos foram desconsiderados na Tabela acima (isto é, não entraram nas contas na hora de fazer as médias). Pelos resultados verificados na Tabela 2, provavelmente para tais ângulos a esfera se “desligava” da rampa imperceptivelmente, de maneira a afetar os dados obtidos. Por este motivo não se verificou que a velocidade permanecia constante ao longo da rampa nestes ângulos. Dessa forma, desconsideramos tais pontos para o estudo seguinte.

Sempre incluímos um total de 30 medidas de tempo para cada distância percorrida, em cada inclinação da rampa. Como tínhamos 5 distâncias diferentes, fizemos então um total de 150 medidas de tempo para cada inclinação da rampa. Como fizemos medidas para 10 inclinações diferentes, obtivemos um total de 1.500 medidas de tempo.

Para cada linha da Tabela 2 vem então que, para um ângulo fixo de inclinação da rampa em relação à horizontal, a velocidade média da esfera era praticamente constante qualquer que fosse a distância percorrida pela esfera. Este aspecto do comportamento da esfera é análogo ao que ocorre com um elétron livre se deslocando em um circuito resistivo. Isto é, a velocidade de arraste do elétron é constante.

Vem também da Tabela 2 que a velocidade média aumenta com a inclinação da rampa. A questão é saber de que maneira ocorre este aumento, ou seja, qual é a lei relacionando a velocidade média com o ângulo de inclinação da rampa. As principais forças atuando sobre a esfera são seu peso, a força normal exercida pela rampa e a força de atrito com a rampa e com os pregos. A componente normal do peso é contrabalançada pela força normal exercida pela rampa. A componente tangencial da equação de movimento ao longo da rampa (de acordo com a segunda lei de Newton, $F = ma$) é dada por $mg \sin \alpha - F_{at} = ma$, onde α é o ângulo de inclinação da rampa em relação à horizontal e F_{at} é a força de atrito exercida sobre a esfera pela rampa e pelos pregos. Para cada ângulo fixo vem de uma linha qualquer da Tabela 2 que a velocidade média de queda é constante, qualquer que seja a distância percorrida. Logo a aceleração a da esfera é nula, na média de muitas colisões com os pregos. A equação de movimento fica então $F_{at} = mg \sin \alpha$.

A segunda parte do nosso projeto foi tentar verificar se a velocidade média de queda da esfera era proporcional ao seno do ângulo de inclinação da rampa. Caso isto se verificasse, este seria um bom modelo mecânico da lei de Ohm (para a qual a velocidade de arraste dos elétrons é proporcional ao campo elétrico aplicado sobre eles). Supondo uma força de atrito devida a colisões como sendo uma lei de potências, $F_{at} = kv^n$, tem-se:

$$kv^n = mg \sin \alpha$$

Nesta equação k é uma constante e n é a potência da velocidade.

Espera-se que as leis possíveis que regem o atrito sejam com $n = 1$ ou $n = 2$. Para analisar estas possibilidades foram obtidos os seguintes gráficos linearizados da velocidade média v em função de seno de inclinação da rampa, $\text{sen}(\alpha)$, para $n = 1$ e $n = 2$:

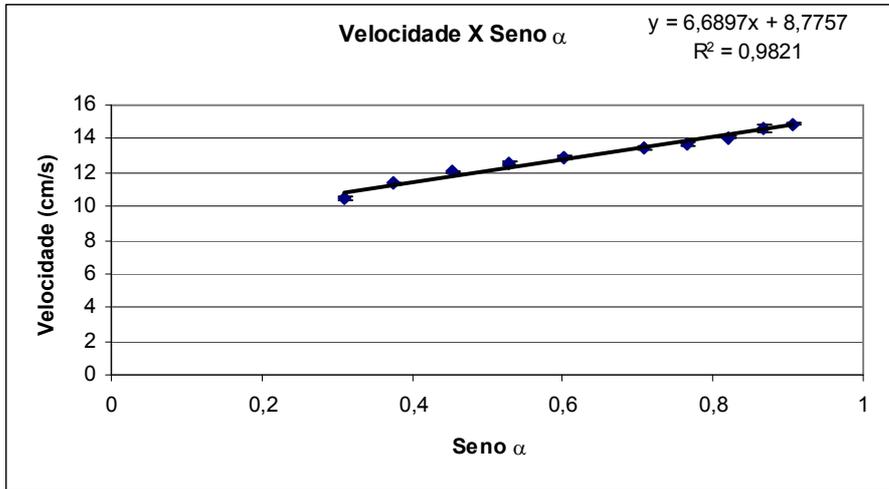


Figura 6 – Gráfico da velocidade média em função do seno de α para $n = 1$.

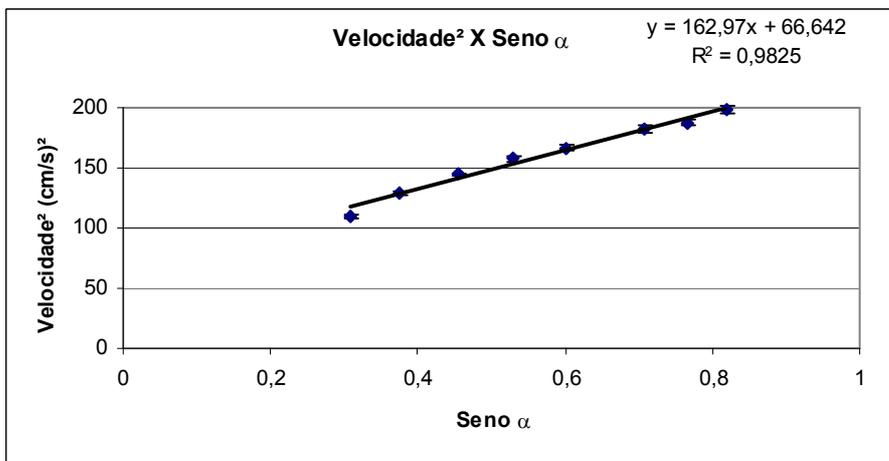


Figura 7 – Gráfico da velocidade média em função do seno de α para $n = 2$.

As equações possíveis estão no gráfico. O valor de R^2 representa a precisão da linearização. É visível que os valores da precisão de ambos os modelos são altos e parecidos. Dessa maneira, torna-se impossível determinar qual a lei que rege o atrito da rampa. Ou seja, não conseguimos distinguir estes dois modelos partindo apenas de nossos dados experimentais.

Tentamos também uma lei do tipo:

$$C(v - v_0)^n = \text{sen } \alpha$$

Através do logaritmo natural desta equação, é possível escrevê-la como:

$$\ln(\text{sen } \alpha) = \ln C + n \ln\left(\frac{v - v_0}{m/s}\right)$$

Tentando vários valores de v_0 , é possível obter os valores da precisão R^2 para cada linearização, bem como os valores da potência n e de $\ln C$ possíveis. Encontrando o máximo da curva de R^2 em função de v_0 , encontram-se os valores ideais de n e $\ln C$.

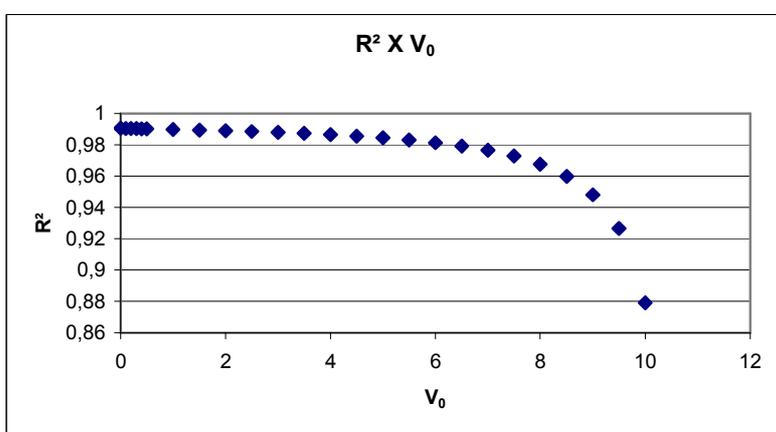


Figura 8 – Gráfico de R^2 em função de v_0 .

Assim, é verificado que a constante v_0 que melhor se ajusta com o modelo teórico anterior é dada por $v_0 = 0$, com $R^2 = 0,9905$. Podemos então fazer uma linearização dos dados para obter qual a melhor potência n que se ajusta a nosso conjunto de dados. Para este valor de R^2 tem-se o gráfico:

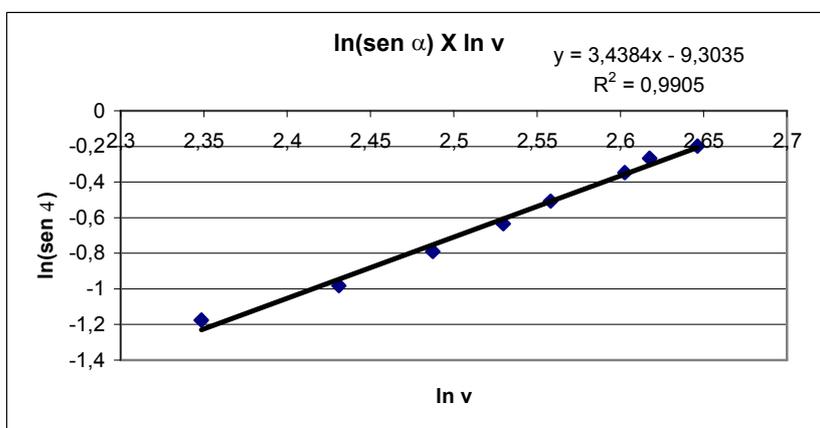


Figura 9 – Gráfico de $\ln(\text{sen } \alpha)$ em função de $\ln v$.

Da Figura 9 verifica-se que a lei ideal é aquela com $n = 3,44$, o que é próximo do valor $7/2$. E o valor ideal de $\ln C$ é $-9,30$. Dessa forma, o valor de C é em torno de $9,1 \times 10^{-5}$ (m/s) ^{n} , onde $n = 3,44$ é o valor encontrado anteriormente. Ou seja, a melhor representação que obtivemos com nossos dados para uma força de atrito que satisfaça a uma lei de potência é do tipo (com D sendo uma constante):

$$Dv^{3,44} = \text{sen } \alpha$$

De qualquer forma, não foi possível distinguir claramente com nossos dados experimentais o melhor modelo para representar a força de atrito ocasionada pela colisão da esfera com os pregos. Isto é, nossos dados podem ser bem ajustados por uma força de atrito linear na velocidade, quadrática na velocidade ou até mesmo aproximadamente cúbica na velocidade, como dada por esta última equação. Para distinguir todos estes modelos seriam necessárias experiências bem mais precisas do que as realizadas durante este trabalho de iniciação científica. Também seria necessário construir um outro tipo de rampa que permitisse que a esfera continuasse percorrendo a rampa para inclinações inferiores a 18° (no nosso caso as feras ao redor dos pregos impediam o movimento da esfera após ela colidir com alguns pregos). E também algum outro mecanismo para permitir que a esfera continuasse em contato com a rampa para inclinações acima de 65° (no nosso caso a esfera saltava da rampa, deixando de ficar em contato com ela).

É interessante observar que algo análogo ocorreu com a experiência descrita no artigo de Tavares, Boa e Oliveira, [TBO91]. Isto é, seus dados experimentais são compatíveis com uma força de atrito linear com a velocidade (como a que estes autores assumiram neste artigo), mas também com uma lei de potência quadrática na velocidade. Isto foi apontado por Fricker, [FRI91].

Ou seja, concluímos que a velocidade média de queda da esfera ao longo de uma rampa com inclinação constante em relação à horizontal é constante qualquer que seja a distância percorrida ao longo da rampa. Mas não deu para concluir, ao variar a inclinação da rampa, se esta velocidade média é ou não linear com o seno de inclinação da rampa. Isto é, qualitativamente este modelo mecânico é análogo à situação de um circuito resistivo ligado a uma bateria no sentido de levar a uma velocidade constante. Mas ainda não é possível afirmar conclusivamente se este modelo mecânico é ou não quantitativamente análogo à lei de Ohm, no sentido de levar a uma velocidade média de queda proporcional ao seno de inclinação da rampa, como seria de esperar.

5. Discussão e Conclusões

Inicialmente, para este projeto, foi essencial enumerar quais as possíveis formas de atrito que ocorrem no cotidiano. Chegou-se à conclusão de que o atrito pode ocorrer de três formas diferentes: atrito entre superfícies, atrito em um meio fluido, e atrito elétrico.

A expressão matemática para o atrito entre superfícies foi desenvolvido principalmente por Leonardo da Vinci, Guillaume Amontons, Leonhard Euler e Charles Augustin Coulomb. Da Vinci e Amontons mostraram que a força de atrito estático não depende da área de contato entre as superfícies e que varia linearmente com a força normal entre as superfícies. Coulomb obteve a lei do atrito cinético, mostrando que quando há

deslizamento entre duas superfícies a força de atrito é independente da área de contato, varia linearmente com a força normal entre as superfícies, é independente do módulo da velocidade entre as superfícies, e depende dos materiais em contato.

A expressão matemática e o estudo experimental para a força de atrito sobre um corpo deslizando-se em um fluido são devidos principalmente a Newton, Stokes e Reynolds. Neste caso há uma componente da força de atrito linear com a velocidade e outra componente quadrática com a velocidade. Para o estudo de meios fluidos, destaca-se a utilidade da grandeza denominada número de Reynolds. Tal grandeza é a razão das forças inerciais que tendem a manter o movimento do fluido e da força viscosa.

Foi observado que para baixos valores do número de Reynolds, isto é, em um escoamento denominado laminar, a força de arraste é proporcional à velocidade. Neste regime, a força de arraste depende também da viscosidade. Por isso, é dito que tal fator da força de arraste é o análogo à força de atrito em superfícies secas no caso dos sólidos.

Para altos valores do número de Reynolds, isto é, em um regime de escoamento turbulento, a força de arraste depende do quadrado da velocidade. Tais resultados obtidos teoricamente correspondem às observações de Newton, realizadas experimentalmente com pêndulos. Tal força de arraste surge devido a colisões do corpo com as partículas constituintes do meio, conforme proposto por Newton.

Estudou-se também a lei de Ohm e sua interpretação física. Primeiramente, mostrou-se a existência de uma força de atrito elétrico para explicar a velocidade constante das cargas percorrendo uma resistência quando é aplicada uma força elétrica constante (devido a um campo elétrico uniforme que surge devido à bateria ligada ao circuito). Como a velocidade depende da força aplicada, e tal força de atrito deve ser igual a esta força elétrica para que não haja aceleração média dos elétrons livres, a força de atrito tem de depender linearmente com a velocidade.

Por último, fizemos um estudo experimental de um análogo mecânico de uma resistência elétrica. Construimos uma rampa de pregos e fizemos diversas medidas do tempo de queda de uma esfera ao longo da rampa. Inicialmente fixamos uma inclinação e medimos o tempo médio para a esfera percorrer diversas distâncias diferentes. Concluimos que o tempo gasto pela esfera era proporcional ao comprimento percorrido, indicando que a velocidade média era constante no tempo. Depois variamos a inclinação da rampa em relação à horizontal para analisar como a velocidade média variava em função do seno do ângulo de inclinação. Os dados obtidos não permitiram distinguir entre vários modelos possíveis (força de atrito proporcional à primeira, segunda ou terceira potência da velocidade média). Com isto não foi possível decidir se este modelo mecânico é ou não compatível com a lei de Ohm em termos quantitativos.

6. Agradecimentos

Agradeço ao SAE pela oportunidade de desenvolver tal projeto e pela concessão de uma bolsa de iniciação científica. Também agradeço ao professor André K. T. Assis por me auxiliar e incentivar, na posição de orientador, a desenvolver esta pesquisa. Por último, agradeço a Márcia M. Calderon, sem a qual não seria possível a construção da rampa com pregos.

7. Bibliografia

- [DOW79] – D. Dowson; *History of Tribology*, London: Longman, 1979.
- [FRI91] – H. S. Fricker. *On an analogy for Ohm's law*. Physics Education, 26: 340 (1991).
- [GRI99] – D. J. Griffiths; *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Edition, Prentice Hall, 1999.
- [KRIM96] – J. Krim; *Friction at Atomic Scale*, Scientific American, October 1996, pp. 48 – 56.
- [MSPC] – http://www.mspc.eng.br/mecn/fric_120.shtml#coef_alg_mat, acessado em 25/06/2008.
- [NET] – L. F. Netto. Modelo mecânico do resistor (conceito de resistência elétrica). Disponível em (acessado em 2008): http://www.feiradeciencias.com.br/sala12/12_10.asp.
- [NEW95] – I. Newton. *The Principia*. Prometheus Books, Madrid, 1995. Translated by Andrew Motte.
- [NEW96] – I. Newton. *Óptica*. Edusp, São Paulo, 1996. Traduzido por A. K. T. Assis.
- [NUS04] – H. M. Nussenzveig; *Curso de Física Básica 3 – Eletromagnetismo*, 4ª Edição, Editora Edgard Blücher, 2004.
- [RMC82] – J. R. Reitz, F. J. Milford e R. W. Christy, *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, 3ª Edição, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1982. Tradução de R. B. Snader e C. Duarte.
- [TBO91] – M. d. C. Tavares, M. C. F. Boa, and P. M. C. d. Oliveira. *A mechanical analogy for Ohm's law*. Physics Education, 26:195 – 199, 1991.
- [TM04] – S. T. Thornton, J. B. Marion; *Classical Dynamics of Particles and Systems*; Fifth Edition; Thomson Brooks/Cole, 2004.
- [VOG96] – S. Vogel; *Life in Moving Fluids*, Princeton: Princeton University Press, 1996.