

www.ifi.unicamp.br/~assis

Equações de Maxwell (1864-1873)

Lei de Gauss: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$

Não há monopólos magnéticos: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Lei de indução de Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Lei circuital de “Ampère” com corrente de deslocamento: $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Força de Lorentz (1895) $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$



Wilhelm Weber (1804 – 1891)

J. C. Maxwell (1831 – 1879)

1846 – lei de força

1848 – energia potencial

1856 – medida de c

1857 – equação de onda

1870-80 – modelo
planetário para o átomo

Weber conhecia em 1846:

Coulomb (1785):
$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Ampère (1820-6):
$$\vec{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\hat{r}}{r^2} f(\alpha, \beta, \gamma)$$

Faraday (1831):
$$fem = -M \frac{dI}{dt}$$

Suposição de Weber:
$$Id\vec{\ell} \Leftrightarrow q\vec{v}$$

Sua proposta de unificação:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} [1 + K_1 v_1 v_2 + K_2 a_{12}]$$

Força de Weber (1846):

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} + \frac{r \ddot{r}}{c^2} \right)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Medida do Weber em 1856: $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Ligação do eletromagnetismo com a óptica
antes de Maxwell!

Propriedades da força de Weber

- No caso estático ($dr/dt = 0$ e $d^2r/dt^2 = 0$) volta-se à força de Coulomb e à lei de Gauss.
- Ação e reação. Logo, conservação do momento linear.
- Força ao longo da reta que une as cargas. Logo, conservação do momento angular.
- Pode ser deduzida de uma energia potencial dependente da velocidade:

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} \right)$$

- Conservação da energia: $\frac{d(T + U)}{dt} = 0$

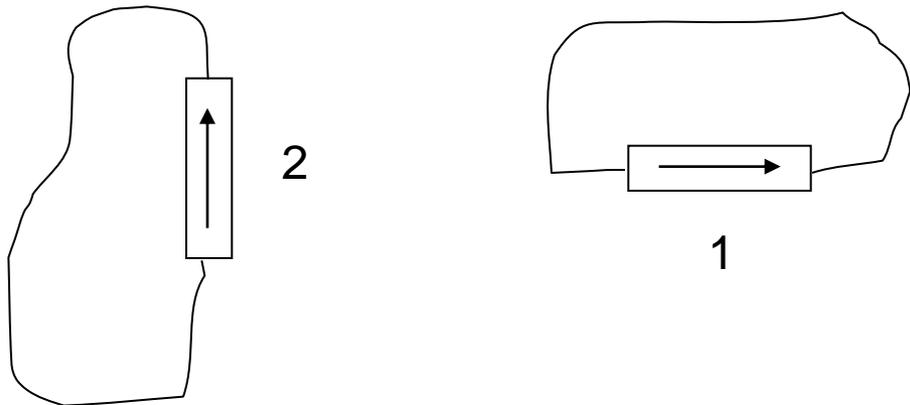
- A lei de indução de Faraday pode ser deduzida da força de Weber (ver o *Treatise* do Maxwell).
- A lei circuital de “Ampère” pode ser deduzida da força de Weber.
- Ela é completamente **relacional**. Isto é, só depende de r , dr/dt e d^2r/dt^2 . Portanto, tem o mesmo valor para todo observador e em todo sistema de referência. Depende apenas de grandezas intrínsecas aos corpos que estão interagindo, das relações entre as cargas.

Weber → Força de Ampère entre elementos de corrente (1826):

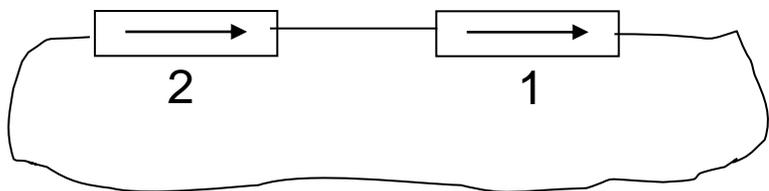
$$\vec{F}^A = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r^2} \left[2(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \hat{r} - 3(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_1)(\hat{r} \cdot d\vec{\ell}_2) \hat{r} \right]$$

Lorentz → Força de Grassmann-Biot-Savart (1845):

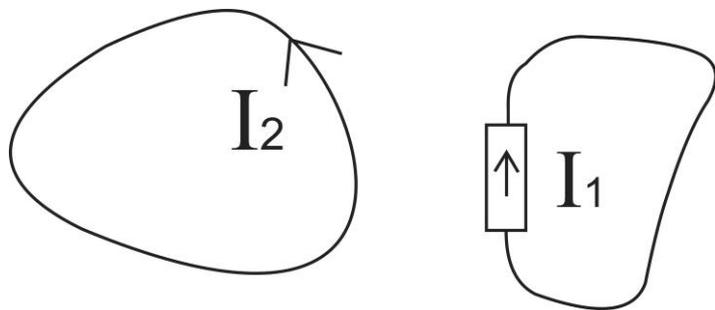
$$\begin{aligned} \vec{F}^G &= I d\vec{\ell}_1 \times d\vec{B}_2 = I_1 d\vec{\ell}_1 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{\ell}_2 \times \hat{r}}{r^2} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r^2} \left[(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \hat{r} - (d\vec{\ell}_1 \cdot \hat{r}) d\vec{\ell}_2 \right] \end{aligned}$$



	$F_{2 \text{ em } 1}$	$F_{1 \text{ em } 2}$
A	0	0
G	↑	0



	$F_{2 \text{ em } 1}$	$F_{1 \text{ em } 2}$
A	→	←
G	0	0

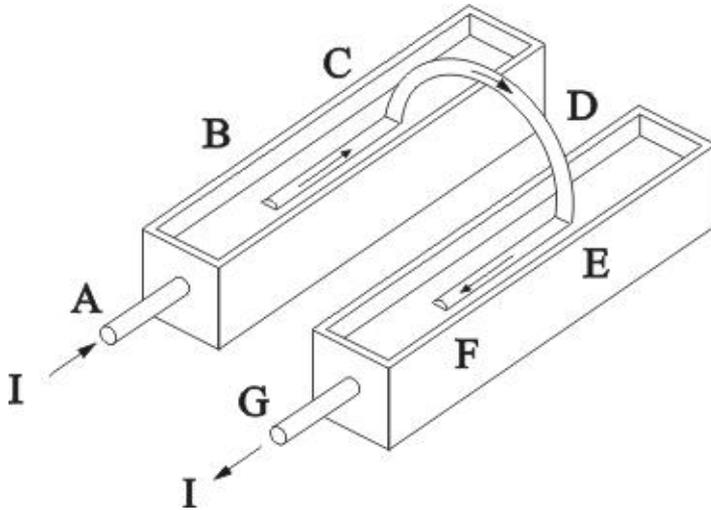


$$F_{2 \text{ em } 1}^A = F_{2 \text{ em } 1}^G =$$

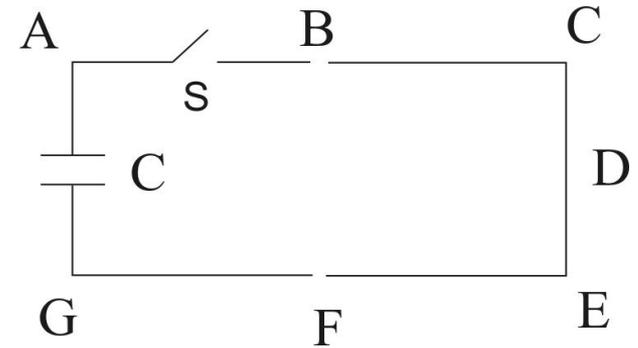
$$I_1 d\vec{\ell}_1 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I_2 d\vec{\ell}_2 \times \hat{r}}{r^2} \right)$$

Ampère X Grassmann:

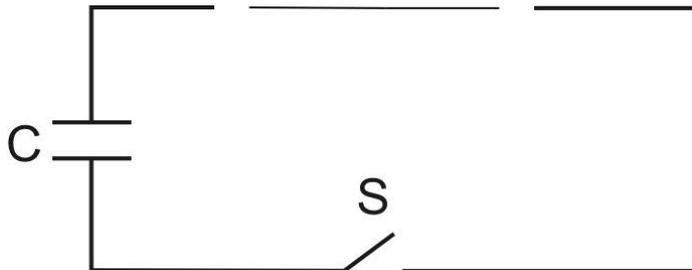
Ponte de Ampère:



Pêndulo de impulso eletromagnético:



Explosão de fios:



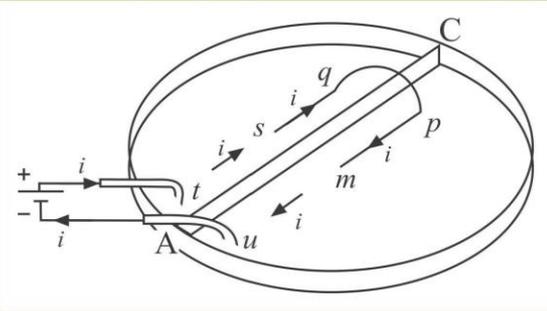
Maxwell no *Treatise on Electricity and Magnetism* ao comparar as forças entre elementos de corrente de Ampère (1826), Grassmann (1845) e duas outras expressões que o próprio Maxwell criou (1873):

Artigo 527: “Destas quatro suposições diferentes, a expressão do Ampère é sem dúvida alguma a melhor, por ser a única na qual a força entre os dois elementos é não apenas igual e oposta, mas também ao longo da linha reta que os une.”

Avaliação de Maxwell sobre o trabalho de Ampère:

Artigo 528: “A investigação experimental pela qual Ampère estabeleceu as leis da ação mecânica entre correntes elétricas é um dos feitos mais brilhantes na ciência. O conjunto de teoria e experiência parece como que se tivesse pulado, crescido e armado, do cérebro do “Newton da eletricidade”. O conjunto é perfeito na forma, e de precisão irrefutável, e está resumido em uma fórmula a partir da qual todos os fenômenos podem ser deduzidos, e que tem de sempre permanecer como a fórmula mais importante da eletrodinâmica.”

Marcelo Bueno
Andre Koch Torres Assis



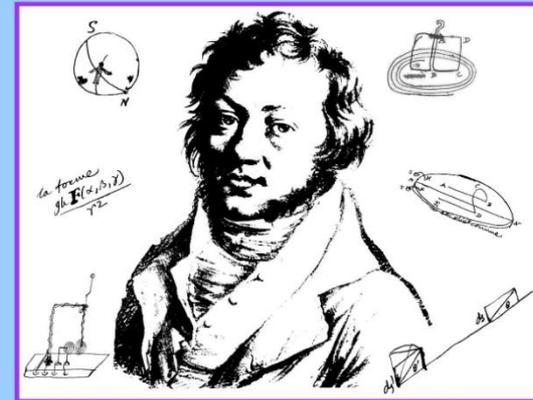
Cálculo de
Indutância e de
Força em
Circuitos Elétricos

Segunda Edição

Ampère's Electrodynamics

Analysis of the Meaning and Evolution of Ampère's Force between Current Elements, together with a Complete Translation of his Masterpiece:

*Theory of Electrodynamical Phenomena,
Uniquely Deduced from Experience*



A. K. T. Assis
and
J. P. M. C. Chaib

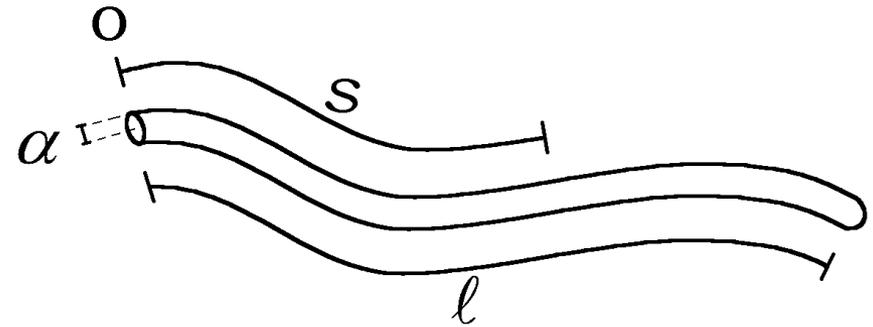
Disponíveis em

www.ifi.unicamp.br/~assis

Propagação de sinais eletromagnéticos obtida pela primeira vez por Weber e Kirchhoff em 1857 a partir da eletrodinâmica de Weber:
Equação do telegrafista

$$\vec{J} = g\vec{E} = -g \left(\nabla\phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{2\pi\epsilon_0 R}{\ell \ln \frac{\ell}{\alpha}} \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

onde $\xi = I, \sigma, \phi, A$

Maxwell introduziu a corrente de deslocamento na lei circuital de “Ampère” em 1864:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Porém:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Utilizou a constante c que Weber havia introduzido em 1846.

$$c = 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

Conhecia seu valor medido pela primeira vez por Weber em 1856.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Conhecia a equação de onda obtida pela primeira vez por Weber e Kirchhoff em 1857 a partir da eletrodinâmica de Weber.

Principal diferença entre Weber e Lorentz:

A força de Lorentz depende apenas da posição e velocidade da carga teste:

$$\vec{F}_{2 \text{ em } 1}^{\text{Lorentz}} = q_1 \vec{E} + q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B}$$

Ou seja, a força de Lorentz não tem um termo que dependa de \vec{a}_1

Já a força de Weber depende não apenas da posição e velocidade da carga teste, mas também de sua aceleração!

Weber versus Lorentz

$$\begin{aligned} \vec{F}_{2\text{em}1}^{\text{Weber}} &= \vec{F}(r_1, r_2, v_1, v_2, a_1, a_2) = \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \left\{ 1 + \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{c^2} - \frac{3[\hat{r} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)]^2}{2c^2} + \frac{\vec{r} \cdot (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)}{c^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{2\text{em}1}^{\text{Lorentz}} &= q_1 \vec{E} + q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B} = \vec{F}(r_1, r_2, v_1, v_2, a_2) = \\ &= q_1 \left\{ \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left[\left(1 + \frac{v_2^2}{2c^2} - \frac{3(\hat{r} \cdot \vec{v}_2)^2}{2c^2} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}_2}{2c^2} \right) \hat{r} - \frac{r\vec{a}_2}{2c^2} \right] \right\} + q_1 \vec{v}_1 \times \left\{ \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\vec{v}_2 \times \hat{r}}{c^2} \right\} \end{aligned}$$

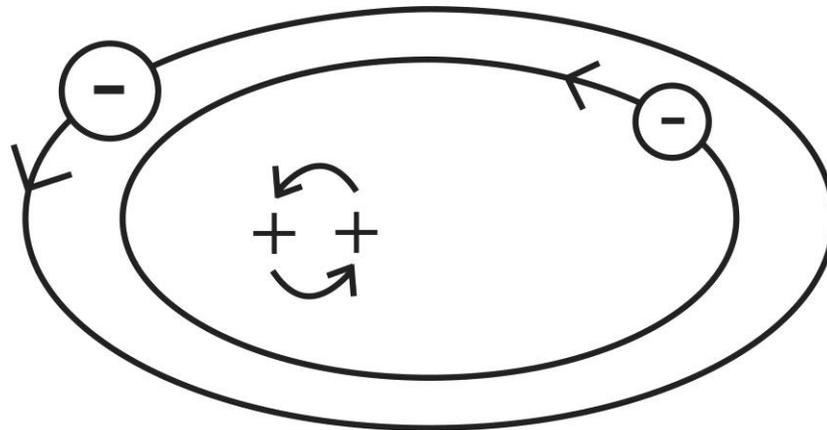
Modelo planetário de Weber para o átomo (1870-1880)

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} + \frac{r \ddot{r}}{c^2} \right) \approx q_1 E + m_W a_1 = m_1 a_1$$

$$q_1 E = (m_1 - m_W) a_1 \quad \text{onde} \quad m_W = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r}$$

$$m_1 = m_W \quad \text{quando} \quad r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{m_1} = r_C$$

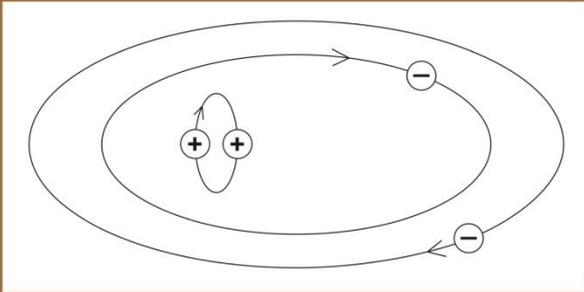
Dois pósitrons atraem-se para distâncias menores do que: $r_C = 10^{-15} m$



Propriedades **notáveis** do modelo planetário de Weber para o átomo:

- A **previsão** de Weber (1870-1880) foi feita antes da descoberta do elétron (1897), da série espectral de Balmer (1897) e das experiências de espalhamento de Rutherford (1911)! Já o modelo de Bohr (1913) foi **inventado** para ser compatível com estes dados experimentais.
- Weber apresentou uma fórmula para sua distância crítica r_c a partir da qual duas cargas de mesmo sinal se atraem. Mas não tinha como calcular seu valor pois não conhecia os elétrons e pósitrons (1932). Se utilizarmos a massa e a carga de dois pósitrons, obtemos que eles se atraem quando:
 $r_c < 10^{-15}$ m. Ou seja, o modelo de Weber dá uma **justificativa** para o tamanho conhecido dos núcleos atômicos!
- Na física atual é necessário **postular** forças nucleares para estabilizar o núcleo eletrizado positivamente contra as forças repulsivas de Coulomb. Já o modelo de Weber é uma **unificação** do eletromagnetismo com a física nuclear, pois o núcleo é mantido estável por forças puramente eletrodinâmicas!

O Modelo Planetário de Weber para o Átomo



**A. K. T. Assis
K. H. Wiederkehr
G. Wolfschmidt**

Disponível em

www.ifi.unicamp.br/~assis

Analogia matemática nos livros didáticos entre a segunda lei de Newton e a teoria de circuitos:

$$F - bv - kx = ma$$

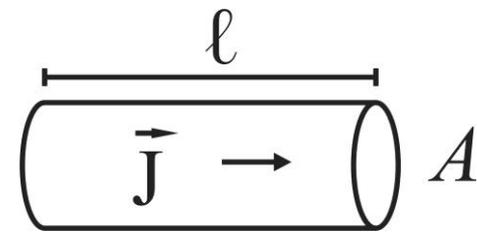
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F$$

$$V - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = RI$$

$$V = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

Pode-se mostrar que a equação da teoria de circuitos é a segunda lei de Newton aplicada aos elétrons de condução, desde que combinada com a força de Weber. A aceleração vem do termo LdI/dt . Mas o que acontece com a massa do elétron?

Lei de Ohm a partir da 2ª lei de Newton nos livros didáticos:



2ª lei de Newton: $F = m_1 a_1 = \sum_j \frac{q_1 q_j}{4\pi \epsilon_0 r^2} - b v_1 = q_1 E - b v_1$

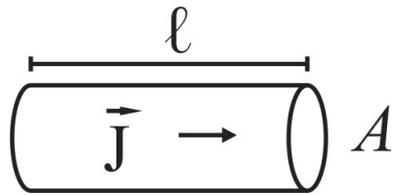
quando $a_1 = 0$ vem: $q_1 E = b v_1$

ou: $E \ell = \frac{b \ell}{q_1} v_1 = \frac{b \ell}{q_1 \rho A} \cdot \rho A v_1$ Isto é: $V = R \cdot I$

quando $a_1 \neq 0$ viria: $V = RI + \frac{m \ell}{q_1 \rho A} \frac{dI}{dt}$

mas $\frac{m \ell}{q_1 \rho A} \approx 10^{-16} H$ Porém: $L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{2\ell}{d} \approx 10^{-6} H$

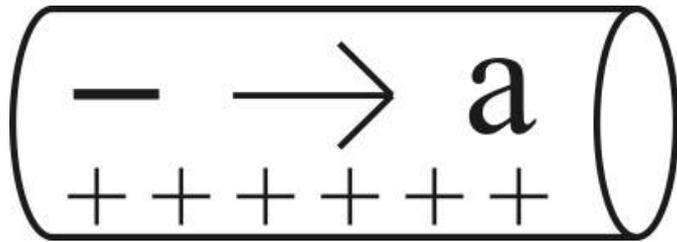
Ou seja, parece que não dá para deduzir a equação de circuitos da 2ª lei de Newton quando I varia no tempo.



Segunda lei de Newton junto com a força de Weber:

$$F = m_1 a_1 = F_W - b v_1$$

$$\vec{F}_W = \sum_j \frac{q_1 q_j}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\hat{r}}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} + \frac{r \ddot{r}}{c^2} \right)$$



$$q_1 E - b v_1 - \left(\frac{\mu_0 q_1 \rho d^2}{8} \ln \frac{2\ell}{d} \right) a_1 = m_1 a_1$$

ou

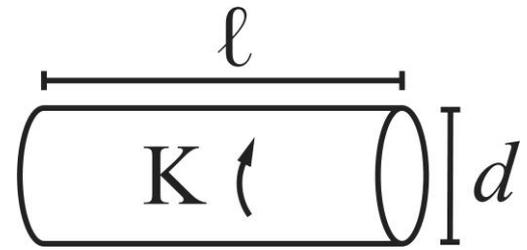
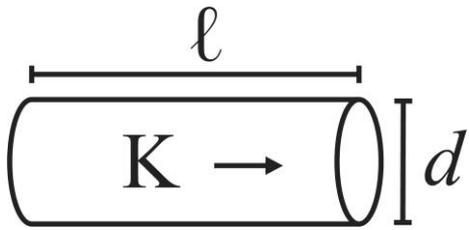
$$E\ell = \frac{b\ell}{q_1} v + (m_W + m_1) \frac{\ell}{q_1} a_1$$

onde

$$m_1 = 9 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad \text{e} \quad m_W \approx 10^{-20} \text{ kg} \gg m$$

deduzimos então

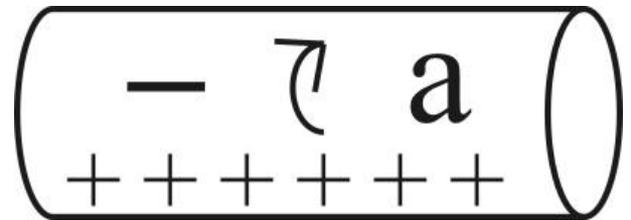
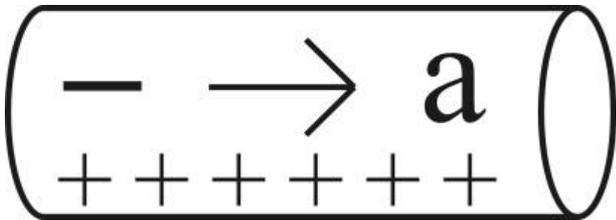
$$V = RI + L \frac{dI}{dt} \quad \text{com} \quad m_W = \frac{q_1 \rho A}{\ell} L$$



$$V = RI + L \frac{dI}{dt}$$

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{2\ell}{d}$$

$$L = \frac{\mu_0 \pi d^2}{4\ell}$$

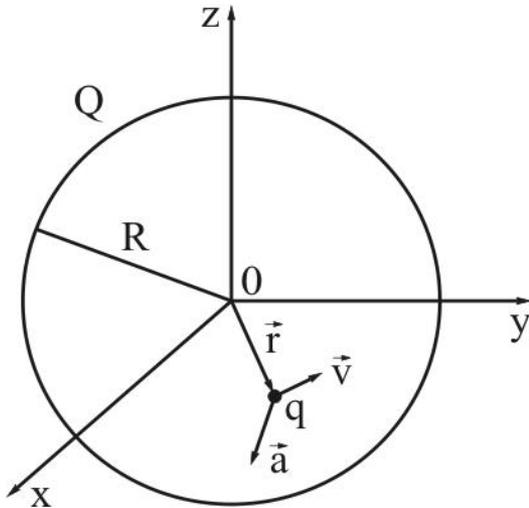


$$F = m_1 a_1 = F_W - bv_1 \quad \text{com} \quad m_W = \frac{q_1 \rho \pi d^2}{4\ell} L$$

A auto-indutância de um circuito é deduzida na eletrodinâmica de Weber como sendo devida a uma massa inercial efetiva do elétron. Esta massa efetiva é muito maior do que a massa usual do elétron e surge de sua aceleração em relação à rede cristalina positiva do metal.

A. K. T. Assis, Circuit theory in Weber electrodynamics, Eur. J. Phys., Vol. 18, p. 241 (1997).

Teste experimental da eletrodinâmica de Weber: Carga sendo acelerada no interior de uma casca eletrizada



$$\vec{F}^{Lorentz} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{F}^{Weber} = \frac{\mu_0 q Q}{12\pi R} \vec{a} = \frac{q\phi}{3c^2} \vec{a} = m_W \vec{a}$$

De acordo com a eletrodinâmica de Weber, a carga teste deve se comportar como tendo uma massa inercial efetiva que depende das cargas ao redor. Ordem de grandeza:

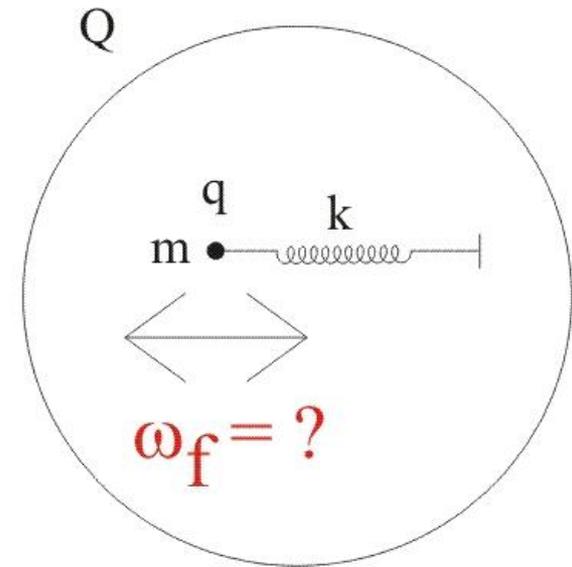
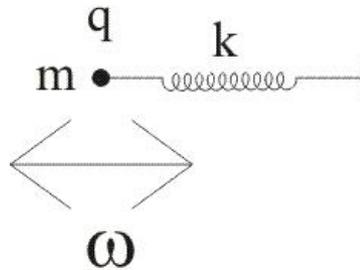
$$\text{se } \phi = 1,5MV \quad \text{então} \quad m_W = 9 \times 10^{-31} kg$$

Possível experiência:

$$F = -kx = ma$$

Logo:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

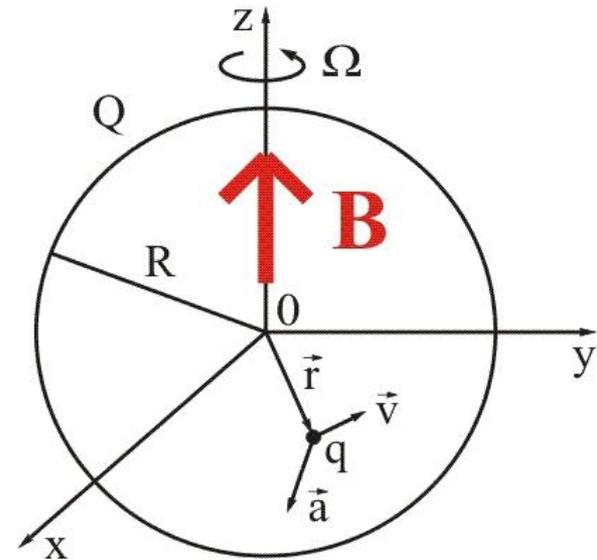


Ao cercar o sistema com a casca esférica eletrizada:

$$\vec{F}_{Q \text{ em } q}^{\text{Lorentz}} = \vec{0} \quad \text{Logo: } \omega_f^L = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\vec{F}_{Q \text{ em } q}^{\text{Weber}} = \frac{\mu_0 q Q}{12\pi R} \vec{a} = m_W \vec{a} \quad \text{Logo: } \omega_f^W = \sqrt{\frac{k}{m - m_W}}$$

Se a casca esférica eletrizada estiver girando:

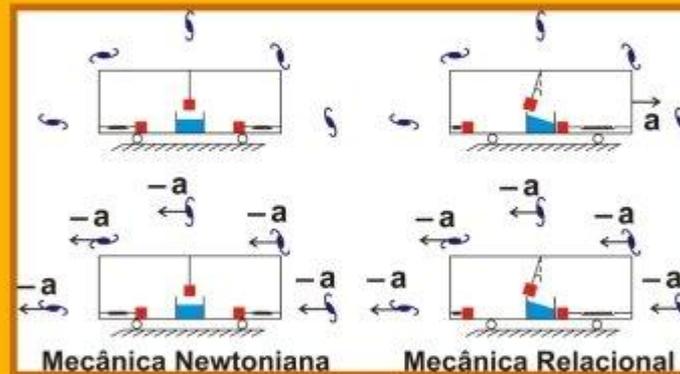


$$\vec{F}^{Lorentz} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v} \times \frac{\mu_0 Q \vec{\Omega}}{6\pi R}$$

$$\vec{F}^{Weber} = \frac{\mu_0 q Q}{12\pi R} \left[\vec{a} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + 2\vec{v} \times \vec{\Omega} + \vec{r} \times \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right]$$

Mecânica Relacional

e Implementação do Princípio de Mach
com a Força de Weber Gravitacional



André Koch Torres Assis

Disponível em

www.ifi.unicamp.br/~assis

Conclusão:

É uma eletrodinâmica extremamente poderosa.

Nos últimos anos tem havido um interesse renovado na eletrodinâmica de Weber por motivos teóricos e experimentais.

www.ifi.unicamp.br/~assis