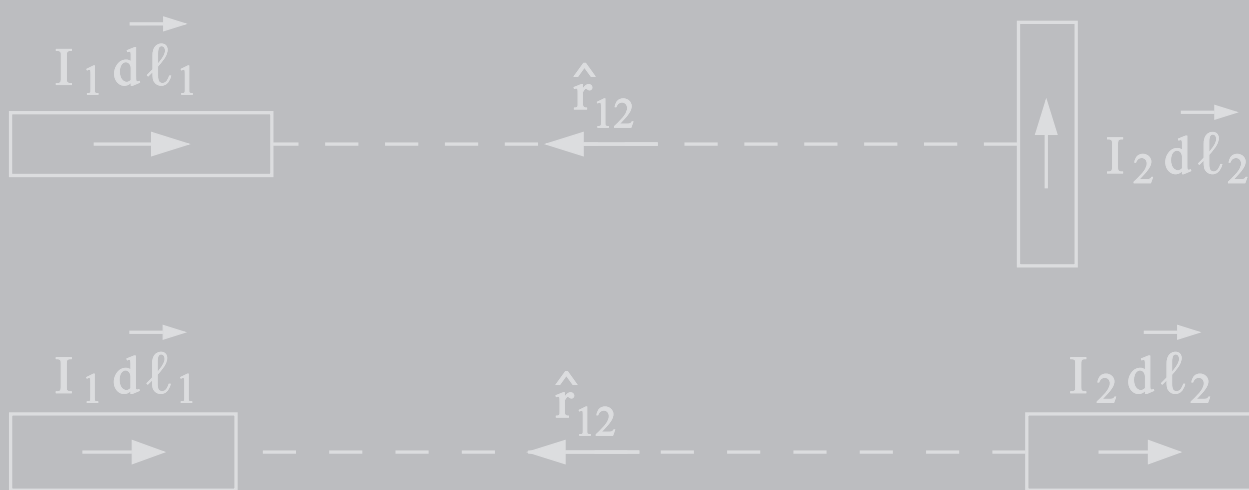


# ELETRODINÂMICA DE WEBER

*teoria, aplicações e exercícios*



**ANDRÉ K. T. ASSIS**

2ª edição revista

EDITORA  
UNICAMP



# ELETRODINÂMICA DE WEBER



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Reitor

JOSÉ TADEU JORGE

Coordenador Geral da Universidade

ALVARO PENTEADO CRÓSTA



Conselho Editorial

Presidente

EDUARDO GUIMARÃES

ESDRAS RODRIGUES SILVA – GUITA GRIN DEBERT

JOÃO LUIZ DE CARVALHO PINTO E SILVA – LUIZ CARLOS DIAS

LUIZ FRANCISCO DIAS – MARCO AURÉLIO CREMASCO

RICARDO ANTUNES – SEDI HIRANO

André K. T. Assis

**ELETRODINÂMICA DE WEBER**  
*Teoria, aplicações e exercícios*

2ª edição revista

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP  
DIRETORIA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

---

As76c Assis, André Koch Torres  
*Eletrodinâmica de Weber: Teoria, aplicações e exercícios* / André K. T. Assis. –  
2ª ed. revista – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2015.

1. Weber, W. E., 2. Eletrodinâmica. 3. Eletromagnetismo.  
I. Título.

e-ISBN 978-85-268-1240-6

CDD 537.6  
537.12

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Weber, W. E.	537.6
2. Eletrodinâmica	537.6
3. Eletromagnetismo	537.12

Copyright © by André K. T. Assis  
Copyright © 2015 by Editora da Unicamp

1ª edição, 1995

Direitos reservados e protegidos pela Lei 9.610 de 19.2.1998.  
É proibida a reprodução total ou parcial sem autorização,  
por escrito, dos detentores dos direitos.

Printed in Brazil.  
Foi feito o depósito legal.

Direitos reservados à

Editora da Unicamp  
Rua Caio Graco Prado, 50 – Campus Unicamp  
CEP 13083-892 – Campinas – SP – Brasil  
Tel./Fax: (19) 3521-7718/7728  
www.editora.unicamp.br – vendas@editora.unicamp.br

# Agradecimentos

Aos orientados de graduação e pós-graduação que tenho tido durante estes anos. Aos alunos da graduação e da pós-graduação que seguiram os cursos de Eletrodinâmica de Weber e de Mecânica Relacional que tenho ministrado nos últimos anos, pelas críticas construtivas que apresentaram. Às Instituições que me convidaram a ministrar estes cursos: Centro Acadêmico da Física da Unicamp em 1990 e 1993; Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) de São José dos Campos, em 1991; Instituto de Física da Universidade de São Paulo, USP, em 1993; Escola Técnica de Eletrônica Francisco Moreira da Costa, de Santa Rita do Sapucaí, em 1999; Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá em 1993, 1996 e 1997; Universidade Federal de Juiz de Fora em 1998; XVI Encontro Nacional de Estudantes de Física, ocorrido na Universidade Federal da Bahia, em Salvador, em 1999; Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina, em 1999; e Facultad de Ingeniería de la Universidad de Tarapacá, Arica, Chile, em 1999.

Aos Drs. Peter Graneau, James Paul Wesley, Cesar Lattes, Roberto Clemente e Kalr-Heinrich Wiederkehr, já falecidos, pelo muito que aprendi com estes grandes cientistas.

Aos Drs. Neal Graneau, Thomas E. Phipps Jr., Domina E. Spencer, Gerald Pellegrini, Julian B. Barbour, Harvey R. Brown, C. Roy Keys, Svetlana Tolchelnikova, Umberto Bartocci, Roberto Monti, Amitabha Ghosh, Roberto de A. Martins, Marcio J. Menon, Waldyr A. Rodrigues Jr., Wilson de C. Ferreira, Adolfo Maia Jr., Erasmo Recami, Edmundo C. de Oliveira, Vincent Buonmano, Iberê L. Caldas, Álvaro Vannucci, Haroldo Campos Velho, Thyrso Vilela, Hector R. T. Silva, Ruy H. do A. Farias, Marcos C. D. Neves, Werner M. Vieira, Paulo Magno Garcia, Paulo M. V. B. Barone, Durval C. Jacinto, Karin Reich, Gudrun Wolfschmidt, Martin Tajmar e a todos aqueles que leram uma primeira versão deste livro e que me ajudaram com suas ideias e sugestões.

Em particular desejo agradecer à Fapesp, ao CNPq e ao Faepex (Unicamp) pelo apoio financeiro durante os últimos anos. Agradeço também aos Institutos de Física e de Matemática da Unicamp que me forneceram toda a infraestrutura e auxílio necessários para a realização deste trabalho. À Editora da Unicamp pela Edição deste livro. Ao Center for Electromagnetics Research, Northeastern University (Boston, EUA), que me recebeu como Visiting Scholar durante um ano, durante o qual parte deste trabalho foi escrito. À Fundação

Alexander von Humboldt, da Alemanha, pelas bolsas-pesquisas concedidas em 2001-2002, 2009 e 2014.

Para finalizar agradeço aos meus pais, à minha esposa e aos meus filhos pelo estímulo que sempre me deram.

# Sumário

<b>Prefácio da Segunda Edição</b>	<b>9</b>
<b>1 Eletromagnetismo Clássico</b>	<b>13</b>
1.1 Introdução . . . . .	13
1.2 Equações de Movimento . . . . .	16
1.3 Forças Elétricas e Magnéticas . . . . .	21
1.3.1 Força de Coulomb . . . . .	21
1.3.2 Força Magnética . . . . .	23
1.3.3 Força Elétrica Geral . . . . .	24
1.3.4 Força de Maxwell-Lorentz . . . . .	27
1.4 Equações de Maxwell . . . . .	29
1.5 Potenciais Retardados . . . . .	33
1.6 Lagrangiana de Darwin . . . . .	37
1.7 Exercícios . . . . .	38
<b>2 Eletrodinâmica de Weber</b>	<b>45</b>
2.1 Wilhelm Weber . . . . .	45
2.2 Força de Weber . . . . .	54
2.3 Energia Potencial de Weber . . . . .	57
2.4 Leis de Conservação . . . . .	58
2.5 Lagrangiana de Weber . . . . .	61
2.6 Exercícios . . . . .	64
<b>3 Forças de Ampère e Grassmann entre Elementos de Corrente</b>	<b>73</b>
3.1 Força de Ampère entre Elementos de Corrente . . . . .	73
3.2 Deduzindo a Força de Ampère entre Elementos de Corrente a Partir da Força de Weber entre Cargas . . . . .	76
3.3 Força de Grassmann entre Elementos de Corrente . . . . .	79
3.4 Deduzindo a Força de Grassmann entre Elementos de Corrente a Partir da Força de Maxwell-Lorentz . . . . .	81
3.5 A Força de Ampère Contra a Força de Grassmann . . . . .	81
3.6 Deduzindo as Equações de Maxwell . . . . .	85
3.7 Experiências . . . . .	89
3.8 Exercícios . . . . .	90



<b>4</b>	<b>Lei de Indução de Faraday</b>	<b>97</b>
4.1	Lei de Faraday . . . . .	97
4.2	Franz Neumann . . . . .	100
4.3	Derivando a Lei de Faraday a Partir da Força de Weber . . . . .	102
4.4	Deduzindo a Lei de Faraday da Força de Weber Sem Usar a Hipótese de Fechner . . . . .	109
4.5	Exercícios . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Comparação entre a Força de Weber e a Força de Maxwell-Lorentz</b>	<b>121</b>
5.1	Introdução . . . . .	121
5.2	Força de Weber Versus Força de Maxwell-Lorentz . . . . .	122
5.3	Problema de Dois Corpos . . . . .	125
5.4	Campo Elétrico Devido a uma Corrente Constante . . . . .	130
5.5	Força de Weber e Variação da Massa . . . . .	133
5.6	Comentários Gerais sobre a Lei de Weber . . . . .	135
5.7	Exercícios . . . . .	138
	<b>Apêndices</b>	<b>147</b>
<b>A</b>	<b>Análise Vetorial</b>	<b>147</b>
A.1	Definições e Notação . . . . .	147
A.2	Álgebra Vetorial . . . . .	148
A.3	Gradiente . . . . .	150
A.4	Divergente, Rotacional e Laplaciano . . . . .	151
A.5	Cálculo Integral . . . . .	152
A.6	A Função Delta de Dirac . . . . .	155
A.7	Coordenadas Cilíndricas e Esféricas . . . . .	155
<b>B</b>	<b>Origens da Força Eletromagnética <math>\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}</math> e os Diferentes Significados Dados para a Velocidade <math>\vec{v}</math></b>	<b>161</b>
B.1	Força Eletromagnética nos Livros Atuais . . . . .	161
B.2	Origens Históricas da Força Eletromagnética e os Diferentes Significados de Sua Velocidade . . . . .	164
<b>C</b>	<b>Formulações Alternativas do Eletromagnetismo</b>	<b>171</b>
C.1	Força de Gauss . . . . .	171
C.2	Força de Riemann . . . . .	172
C.3	Força de Clausius . . . . .	173
C.4	Força de Ritz . . . . .	174
<b>D</b>	<b>Maxwell sobre Weber</b>	<b>177</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>183</b>

# Prefácio da Segunda Edição

Grande progresso tem sido feito na ciência elétrica, principalmente na Alemanha, pelos cultivadores da teoria de ação a distância. As valiosas medições elétricas de W. Weber são interpretadas por ele de acordo com sua teoria, e a especulação eletromagnética, que foi originada por Gauss e continuada por Weber, Riemann, J. [F.] e C. Neumann, [L.] Lorenz etc., está baseada na teoria de ação a distância, mas dependendo ou diretamente da velocidade relativa das partículas ou da propagação gradual de alguma coisa, seja potencial ou força, de uma partícula à outra. O grande sucesso obtido por estes homens eminentes na aplicação da matemática aos fenômenos elétricos fornece, como é natural, peso adicional às suas especulações teóricas de tal forma que aqueles que, como estudantes da eletricidade, se voltam em direção a eles como as maiores autoridades na eletricidade matemática provavelmente assimilariam, junto com seus métodos matemáticos, suas hipóteses físicas.

Estas hipóteses físicas, contudo, são completamente diferentes da maneira do olhar os fenômenos que eu adoto e um dos objetivos que tenho em vista é que alguns daqueles que desejam estudar eletricidade podem, ao ler este tratado, ver que há uma outra maneira de tratar o assunto, que não é menos apta a explicar os fenômenos e que, apesar de que em algumas partes ela possa parecer menos definida, corresponde, como penso, mais fielmente ao nosso conhecimento atual tanto naquilo que afirma quanto naquilo que deixa indeciso.

De um ponto de vista filosófico, além disto, é extremamente importante que os dois métodos sejam comparados, ambos os quais tiveram sucesso na explicação dos principais fenômenos eletromagnéticos e ambos os quais tentaram explicar a propagação da luz como um fenômeno eletromagnético e de fato calcularam sua velocidade, enquanto que ao mesmo tempo as concepções fundamentais sobre o que de fato acontece, assim como a maioria das concepções secundárias das grandezas envolvidas, são radicalmente diferentes.

Estas são as palavras de James Clerk Maxwell (1831-1879), no Prefácio da primeira edição de sua obra máxima, *Um Tratado de Eletricidade e Magne-*

*tismo*, de 1873.<sup>1</sup> Como se pode ver deste trecho, Maxwell via uma diferença conceitual entre suas concepções, derivadas em grande parte das ideias de Faraday, em relação às concepções de Gauss e Weber, entre outros. Maxwell reconheceu que ambas as formulações eram compatíveis com os principais fenômenos do eletromagnetismo. Considerava também extremamente importante comparar os dois métodos.

O objetivo deste nosso trabalho se encontra justamente dentro deste espírito geral. Nossa intenção básica é apresentar de maneira razoavelmente completa a Eletrodinâmica de Weber. Como Maxwell afirmou e mostrou mais de uma vez, a lei de Weber é compatível com as equações de Maxwell (lei de Gauss, lei circuital magnética, lei da não existência de monopolos magnéticos e lei de Faraday), embora ela seja completamente diferente das concepções de Maxwell em aspectos filosóficos. Mostramos no decorrer do trabalho como se derivam as equações de Maxwell a partir da força de Weber.

Outro objetivo deste livro é, se possível, complementar a cultura do leitor sobre a eletrodinâmica de Maxwell. Para isto incluímos várias seções históricas sobre o eletromagnetismo em geral que não se encontram nos livros didáticos usuais.

A admiração de Maxwell pelo trabalho de Weber também pode ser vista observando-se que Maxwell dedicou todo o último capítulo de seu livro mais importante a apresentar a eletrodinâmica de Weber e a mostrar sua compatibilidade com os principais fatos conhecidos do eletromagnetismo.<sup>2</sup>

Este livro destina-se a estudantes de um curso de graduação ou de pós-graduação em física, engenharia ou matemática que ainda não tenham se familiarizado com o assunto. Este trabalho visa a ser completo no sentido de que não se requer nenhum conhecimento prévio da lei de Weber para segui-lo. O Apêndice A sobre análise vetorial inclui as principais ferramentas matemáticas utilizadas neste trabalho.

Este livro está preparado para um curso de um semestre e com este objetivo foram incluídos exercícios ao final de cada capítulo. É fundamental que o estudante resolva detalhadamente cada um destes exercícios já que esta é uma parte integral e essencial do curso. Já ministramos cursos sobre a Eletrodinâmica de Weber tanto em nível de graduação quanto de pós-graduação. Este livro é o resultado destes cursos. Ele se baseia também em uma versão anterior deste trabalho que publicamos em 1992, em um trabalho análogo em língua inglesa que foi publicado em 1994 pela editora holandesa Kluwer Academic Publishers (adquirida posteriormente pela Editora Springer), assim como na edição em português que publicamos em 1995.<sup>3</sup>

O assunto do livro se encaixa na física clássica. Por este motivo não tratamos aqui da mecânica quântica. Nossos pontos de vista contrários às teorias

<sup>1</sup>[Max54, volume 1, prefácio, página x].

<sup>2</sup>[Max54, volume 2, capítulo 23: Teorias de ação a distância, págs. 480-493], com tradução para a língua portuguesa em [Ass92g].

<sup>3</sup>[Ass92b], [Ass94] e [Ass95].

da relatividade de Einstein foram expressos em outros trabalhos.<sup>4</sup>

Foi incluída uma bibliografia ampla no fim do livro para permitir um aprofundamento maior aos estudantes mais interessados. Pode-se usar estas referências recentes como sugestão de tópicos de pesquisa ou de trabalho aos estudantes de pós-graduação. As referências estão completas (com ano, volume, páginas e título do artigo) para incentivar os leitores a procurarem e estudarem os originais. Ganha-se muita coisa com isto e muitas vezes os artigos originais são facilmente encontrados em bibliotecas universitárias com um bom acervo.

Na medida do possível acrescentamos informações históricas relevantes no corpo do texto. O objetivo é dar o contexto histórico de algumas descobertas e fazer uma análise crítica de alguns tópicos. As fontes para a maior parte destas informações foram os artigos originais e os excelentes livros de Whittaker (*Uma História das Teorias do Éter e da Eletricidade*), O’Rahilly (*Teoria Eletromagnética - Um Exame Crítico dos Fundamentos*) e Mach (*Os Princípios da Física Óptica - Um Tratamento Histórico e Filosófico*).<sup>5</sup> Sugerimos fortemente um estudo atento destes três livros a todos que queiram aprofundar de maneira consciente e crítica os seus conceitos nesta área fundamental da ciência.

Em todo o livro usamos o Sistema Internacional de Unidades. Quando definimos alguma grandeza usamos “ $\equiv$ ” como símbolo de definição.

A primeira edição deste livro, publicada em 1995,<sup>6</sup> encontra-se atualmente esgotada. Fizemos então esta segunda edição para tornar o livro novamente disponível. Fizemos poucas mudanças na estrutura ou no conteúdo. Corrigimos alguns erros ortográficos, melhoramos e aumentamos o número das figuras, assim como incluímos novas referências bibliográficas.

---

<sup>4</sup>[Ass98b], [Ass99b], [Ass13] e [Ass14].

<sup>5</sup>[Whi73], [O’R65] e [Mac26].

<sup>6</sup>[Ass95].



# Capítulo 1

## Eletromagnetismo Clássico

### 1.1 Introdução

O estudo da natureza e das leis que a regem são alguns dos objetivos principais dos cientistas. Os físicos, em particular, se dedicam a pesquisar os fenômenos mecânicos, gravitacionais, elétricos, magnéticos, ópticos, nucleares etc. Neste capítulo vamos nos concentrar no estudo do eletromagnetismo clássico. A maior parte das informações históricas apresentadas aqui provém dos originais que citamos e dos seguintes livros que são muito importantes: o de Ernst Mach sobre os princípios da física óptica, de 1926, o de Alfred O’Rahilly que apresenta uma visão bem completa e extremamente crítica da história do eletromagnetismo, e o de Whittaker que é o maior clássico sobre a história do eletromagnetismo, embora não seja tão crítico quanto o livro de O’Rahilly.<sup>1</sup> Sugerimos fortemente o estudo detalhado destes três livros e especialmente os de Mach e O’Rahilly pela visão extremamente crítica e instrutiva que apresentam.

Eletromagnetismo clássico é o nome que se dá à ciência que trata de uma maneira unificada das interações entre cargas elétricas, ímãs, correntes elétricas e da radiação eletromagnética (luz visível, raios X, ondas de rádio etc.). Os gregos antigos já conheciam alguns fenômenos elétricos, como o fato de que, ao se atritar o âmbar, este atraía pequenos objetos. Um estudo detalhado deste tópico, com informações históricas e diversas experiências com materiais de baixo custo, pode ser encontrado no livro *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*.<sup>2</sup> Eles também conheciam alguns fenômenos magnéticos, como o fato de que a magnetita, um tipo de pedra, atraía pedaços de ferro. Apesar deste conhecimento antigo, o desenvolvimento mais amplo destas ciências só passou a ocorrer a partir de aproximadamente 1600. É neste ano que William Gilbert (1540-1603) publicou o importante livro *Sobre o Ímã, sobre os Corpos Magnéticos e sobre o Grande Ímã a Terra*, que tratava do

---

<sup>1</sup>[Mac26], [O’R65] e [Whi73].

<sup>2</sup>[Ass10b] e [Ass10a].

magnetismo e da eletricidade.<sup>3</sup> Existem duas traduções deste livro para a língua inglesa.<sup>4</sup> É nele que Gilbert apresentou sua grande suposição de que a própria Terra é um ímã permanente e assim explicou a razão de as agulhas magnéticas apontarem para um mesmo ponto em relação à superfície terrestre. É a ele também que se deve a distinção clara entre atração elétrica e magnética. Também a óptica passou por um grande desenvolvimento a partir desta época. Embora os gregos antigos já conhecessem a lei de reflexão (ângulo de incidência igual ao de reflexão) e o fenômeno da refração, a lei que rege este último fenômeno só foi descoberta por Snell (1591-1626) por volta de 1621.<sup>5</sup> A primeira publicação desta lei ocorreu em 1637 no apêndice *A Dióptrica*, do famoso e agradável livro *Discurso do Método*, de René Descartes (1596-1650).<sup>6</sup>

A partir daí estes ramos foram se desenvolvendo mais ou menos independentemente. A descoberta fundamental da existência dos isolantes e condutores elétricos é devida a Stephen Gray em 1729, sendo publicada em 1731.<sup>7</sup> Foi esta descoberta que permitiu o rápido desenvolvimento do conhecimento dos fenômenos elétricos desde então, já que esta ciência pouco havia avançado desde os gregos antigos. Esta descoberta é posterior à morte de Newton. Todos os artigos fundamentais de Gray sobre eletricidade já se encontram traduzidos para a língua portuguesa, com comentários, além de terem sido reproduzidos com materiais de baixo custo.<sup>8</sup>

A descoberta da existência de dois tipos de eletricidade (positiva e negativa, como dizemos hoje em dia) é devida a Du Fay (1698-1739) em 1733-1734.<sup>9</sup> O princípio de conservação de cargas elétricas é devido a Benjamin Franklin (1706-1790) em seus experimentos de 1747.<sup>10</sup> A lei do inverso do quadrado da distância para as forças eletrostáticas foi sugerida entre outros por Priestley (1733-1804), em 1767. Em geral se afirma que esta lei foi estabelecida experimentalmente por Coulomb (1736-1806), em 1785, embora esta afirmação tenha sido questionada recentemente por Heering.<sup>11</sup> A mesma lei relativa a polos magnéticos foi sugerida entre outros por Michell (1724-1793), em 1750, e estabelecida experimentalmente por Coulomb, em 1785. Um importante predecessor de Coulomb no que se refere à atração entre polos magnéticos foi o físico experimental alemão Aepinus (1724-1802). Em 1759 ele publicou um importante livro que influenciou Coulomb, em que desenvolveu a ideia de ação a distância entre os polos magnéticos, ideia que acabou suplantando o conceito de circulação de um fluido magnético que havia sido sustentado por Descartes, entre outros. O livro de Aepinus, publicado originalmente em latim, foi

---

<sup>3</sup>[Gil00].

<sup>4</sup>[Gil00], [Gil78] e [Gil91].

<sup>5</sup>[Mac26, pág. 32].

<sup>6</sup>[Des52], [Des65] e [Des83].

<sup>7</sup>[Gra], [Ass10b] e [Ass10a].

<sup>8</sup>[Bos11] e [BAC12].

<sup>9</sup>[DF33], [DF], com tradução para a língua portuguesa em [BAC12].

<sup>10</sup>[Fra41].

<sup>11</sup>[Hee92].

traduzido há pouco para a língua inglesa.<sup>12</sup>

Isaac Newton (1642-1727) descobriu a decomposição da luz branca nas cores do espectro (arco-íris) em 1666. Este trabalho fundamental já se encontra traduzido para a língua portuguesa.<sup>13</sup> Ele foi também o primeiro a medir a periodicidade da luz, isto é, aquilo que hoje em dia chamamos de comprimento de onda, embora para ele a luz fosse um fluxo de partículas (teoria balística) e não uma perturbação ondulatória em um meio (éter). Também se deve a Newton a primeira interpretação correta do fenômeno da polarização da luz, em 1717. Em 1687 publicou sua grande obra, *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, que já se encontra totalmente traduzida para a língua portuguesa.<sup>14</sup> Em 1704 publicou seu outro grande livro, *Óptica*, que também já se encontra totalmente traduzido para a língua portuguesa.<sup>15</sup>

A descoberta de que a luz se propaga no tempo (e não instantaneamente) e o primeiro valor da velocidade da luz são devidas a Roemer (1644 - 1710), em 1675.

A interconexão entre os fenômenos elétricos e magnéticos, embora pressentida por muitos, só foi descoberta por Oersted (1777-1851) em 1820 ao observar a deflexão de uma agulha imantada ao ser colocada perto de um grande fio no qual fluía uma corrente elétrica constante. Seu trabalho já está traduzido para a língua portuguesa.<sup>16</sup> Em seguida a isto surgem os grandes trabalhos experimentais e teóricos de Ampère (1775–1836), no período 1820–1827, descrevendo a interação entre condutores conduzindo correntes elétricas. Seu primeiro artigo de eletrodinâmica, de 1820, assim como sua principal obra publicada em 1826-27, já se encontram totalmente traduzidos para a língua portuguesa.<sup>17</sup> Os trabalhos sobre indução eletromagnética de Faraday (1791–1867), a partir de 1831, também são fundamentais. Seu primeiro trabalho sobre o tema já está traduzido para a língua portuguesa.<sup>18</sup> A interconexão dos fenômenos elétricos e magnéticos com a luz, embora também pressentida por muitos, só é observada de fato pela primeira vez com a descoberta de Faraday em 1845 de que o plano de polarização de um feixe de luz gira quando o feixe atravessava o vidro em uma direção paralela às linhas de um campo magnético externo. Uma outra relação entre o eletromagnetismo e a óptica ficou evidente entre 1855 e 1857 com a primeira medida da razão entre as unidades eletromagnéticas e eletrostáticas de carga. Esta medida foi efetuada por W. Weber (1804-1891) e por R. Kohlrausch (1809-1858).<sup>19</sup> O valor que obtiveram,  $3,1 \times 10^8$  m/s, era essencialmente o mesmo valor que se conhecia da velocidade da luz no ar.

---

<sup>12</sup>[Aep79].

<sup>13</sup>[SM96].

<sup>14</sup>[New90], [New08] e [New10].

<sup>15</sup>[New96].

<sup>16</sup>[Ørs86].

<sup>17</sup>[CA07], [CA09], [Cha09] e [AC11].

<sup>18</sup>[Far11].

<sup>19</sup>[Web55b], [WK56], traduzido para a língua inglesa em [WK03] e para a língua portuguesa em [WK08], [KW57] e [WK68].



Este trabalho já se encontra traduzido para a língua portuguesa.<sup>20</sup> A ideia de que a luz é uma perturbação eletromagnética que se propaga no éter surge de forma completa e acabada pela primeira vez com os trabalhos de Maxwell, no período 1860-1864. A confirmação experimental das predições teóricas de Maxwell veio com Hertz (1857-1894), no período 1885-1889.<sup>21</sup>

Estes trabalhos formam a base do eletromagnetismo clássico. Revisaremos este assunto neste capítulo. Como há milhares de livros que tratam desta área, em todos os níveis, faremos apenas uma curta revisão de alguns tópicos, especialmente daqueles que serão relevantes na discussão da teoria de Weber. Devido ao objetivo deste livro, deixaremos de tratar de muitos assuntos importantes do eletromagnetismo moderno, mas o leitor certamente encontrará muitos livros especializados tratando destas áreas. Nosso objetivo ao escrever este capítulo é dar um pano de fundo para a introdução da teoria de Weber. Com isto, mais para frente poderemos fazer uma comparação mais detalhada entre a eletrodinâmica de Weber e o eletromagnetismo clássico.

## 1.2 Equações de Movimento

Depois deste pequeno resumo histórico podemos voltar ao assunto principal deste capítulo que é uma apresentação do eletromagnetismo clássico. Em linhas gerais, pode-se dizer que o eletromagnetismo clássico é constituído de quatro partes principais, independentes uma da outra, mas todas necessárias para uma formulação completa da teoria. São elas:

- (A) Equação de movimento,
- (B) Força exercida sobre a carga,
- (C) Equações de Maxwell,
- (D) Equações ou relações constitutivas do meio.

As equações ou relações constitutivas do meio são descrições empíricas das propriedades dos materiais. Como tais, elas não dependem de com qual teoria se está trabalhando e valem do mesmo jeito em todas as formulações teóricas. Exemplos: Lei de Ohm ( $V = RI$  ou  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ),  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  etc. Nestas relações  $R$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$  e  $\mu$  são propriedades características de cada meio, sendo medidas empiricamente. Daqui para a frente nos concentraremos apenas nos aspectos (A), (B) e (C).

Um dos problemas mais típicos da física é descrever o movimento de corpos materiais sob a ação de forças. A forma usual mais tradicional de tratar deste problema no eletromagnetismo clássico é usando os três famosos axiomas ou leis de movimento de Newton. Estas leis são aqui apresentadas na forma como Newton formulou-as originalmente em 1687 no livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*.<sup>22</sup> Este livro, mais conhecido pelo primeiro nome *Principia*,

---

<sup>20</sup>[WK08].

<sup>21</sup>[Her62].

<sup>22</sup>[New52].

escrito originalmente em latim, é por muitos considerado como a maior obra da ciência de todos os tempos. Este livro já se encontra totalmente traduzido para a língua portuguesa.<sup>23</sup> Suas leis do movimento:<sup>24</sup>

*Axiomas ou Leis do Movimento*

*Lei I: Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele.*

[...]

*Lei II: A mudança de movimento é proporcional a força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida.*

[...]

*Lei III: A toda ação há sempre oposta uma reação igual, ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas.*

[...]

*Corolário 1: Um corpo, submetido a duas forças simultaneamente, descreverá a diagonal de um paralelogramo no mesmo tempo em que ele descreveria os lados pela ação daquelas forças separadamente.*

Em linguagem vetorial moderna, estas três leis poderiam ser reescritas como segue:

Lei I: Se a força resultante atuando sobre um corpo é nula,  $\vec{F}_R = \vec{0}$ , então o corpo fica parado ou em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial.

$$\text{Com } \vec{F}_R = \vec{0}, \quad \text{temos } \vec{v} = \text{constante} . \quad (1.1)$$

Lei II:

$$\vec{F}_R = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) . \quad (1.2)$$

Lei III:

$$\vec{F}_{AB} = - \vec{F}_{BA} . \quad (1.3)$$

Nas equações (1.1) e (1.2),  $\vec{F}_R$  é a força resultante agindo sobre o corpo de massa inercial  $m$ , sendo  $\vec{v}$  é a velocidade deste corpo em relação ao espaço absoluto de Newton ou em relação a um referencial inercial. Em todo este trabalho  $\vec{F}_{ji}$  significará a força que o corpo  $j$  exerce sobre o  $i$  (isto é, a força

---

<sup>23</sup>[New90], [New08] e [New10].

<sup>24</sup>[New90, págs. 15-23].

em  $i$  devida ao corpo  $j$ ). Logo, na equação (1.3)  $\vec{F}_{AB}$  é a força que  $A$  exerce em  $B$  e o oposto vale para  $\vec{F}_{BA}$ .

O primeiro corolário de Newton é chamado hoje em dia de princípio de superposição de forças. Ele afirma que as forças se adicionam como vetores (regra do paralelogramo para a adição vetorial).

Caso a massa seja constante, a segunda lei de Newton fica na seguinte forma:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} . \quad (1.4)$$

Nesta equação  $\vec{a}$  representa a aceleração do corpo de massa  $m$  em relação a um referencial inercial. Neste livro, nos concentraremos neste último caso (massa constante) e não trataremos de alguns problemas de variação de massa típicos da mecânica (como o do caminhão que vai perdendo areia, ou o do foguete que vai expelindo combustível e variando sua massa).

Antes de prosseguir, vale a pena comentar que a aceleração que aparece na equação (1.4) é a aceleração do corpo em relação ao espaço absoluto, conforme formulado por Newton. Pode-se também dizer que esta é a aceleração do corpo em relação a um referencial inercial. Em outras obras discutimos detalhadamente estas noções de espaço absoluto ou de referencial inercial.<sup>25</sup> Embora a Terra não seja um referencial inercial (sabe-se isto por ela girar em relação ao referencial das “estrelas fixas,” por ter uma forma achatada nos polos e por experiências como as do pêndulo de Foucault), pode-se na maior parte dos casos considerá-la como tal. Em termos práticos, isto significa que em geral pode-se usar as leis de Newton no referencial do laboratório (os efeitos da não inercialidade da Terra são muitas vezes pequenos comparados com o que se está observando). Isto é válido na maioria das situações nas quais os movimentos são restritos a uma pequena área na superfície da Terra e têm uma duração pequena comparada com 24 horas.

Há duas formas da terceira lei de Newton: ação e reação forte (quando a força está ao longo da reta que une os dois corpos) e fraca (quando a força tem pelo menos uma das componentes que não está ao longo da reta que une os dois corpos). Um exemplo de ação e reação na forma forte está representado na figura 1.1.



Figura 1.1: Ação e reação na forma forte.

Um exemplo no qual haveria ação e reação na forma fraca encontra-se na figura 1.2.

<sup>25</sup>[Ass98b], [Ass99b], [Ass99c], [Ass13] e [Ass14].

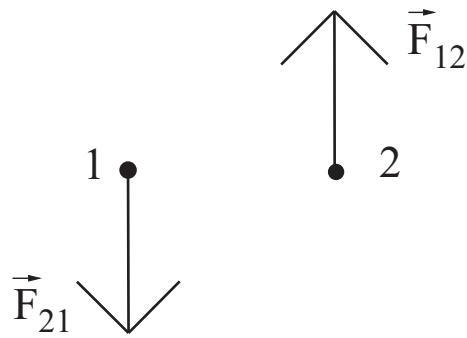


Figura 1.2: Ação e reação na forma fraca.

Exemplos imaginários nos quais não vale a lei de ação e reação encontra-se na figura 1.3.

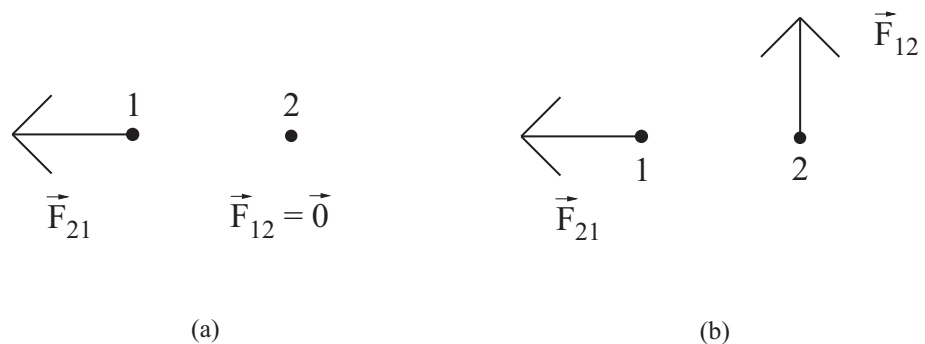


Figura 1.3: Casos imaginários nos quais não vale a lei de ação e reação.

Para resolver um problema qualquer na física em geral usamos a equação (1.4). Para isto precisamos de relações precisas para a força e estas relações vão depender do tipo de interação a que o corpo está sujeito. A seguir vão alguns exemplos.

I) Força Gravitacional (também proposta por Newton em 1687). Sejam dois pontos materiais  $i$  e  $j$  com massas gravitacionais representadas por  $m_i$  e  $m_j$ . Vamos supor que eles estão localizados nos vetores posição  $\vec{r}_i$  e  $\vec{r}_j$  em relação à origem  $O$  de um referencial inercial  $S$ , como na figura 1.4.

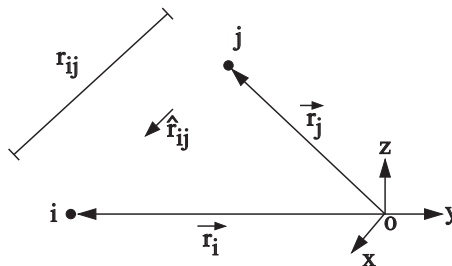


Figura 1.4: Distância entre dois pontos materiais.

Seja  $\hat{r}_{ij}$  o vetor unitário que aponta do corpo  $j$  para o  $i$ , enquanto que  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  é a distância entre eles. Seja ainda  $G$  a constante universal da gravitação ( $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ). Neste caso a força gravitacional newtoniana exercida pela partícula  $j$  sobre a partícula  $i$  é dada por:

$$\vec{F}_{ji} = -Gm_i m_j \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2}. \quad (1.5)$$

Na equação (1.5) temos:

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{ij} &\equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j = (x_i - x_j)\hat{x} + (y_i - y_j)\hat{y} + (z_i - z_j)\hat{z}, \\ r_{ij} &\equiv |\vec{r}_{ij}| \equiv [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{1/2}, \\ \hat{r}_{ij} &\equiv \vec{r}_{ij}/r_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Um caso típico da força gravitacional é o de um corpo interagindo com a Terra (força peso  $\equiv \vec{P}$ ). Esta força é representada por  $\vec{P} = m\vec{g}$ , onde  $\vec{g}$  representa uma grandeza denominada de campo gravitacional da Terra. Caso o corpo esteja próximo da superfície terrestre, resulta que  $g \equiv |\vec{g}| = GM_T/R_T^2 \simeq 9,8 \text{ ms}^{-2}$ , onde  $M_T$  é a massa da Terra e  $R_T$  seu raio.

II) Força Elástica:

Seja  $\ell_o$  o comprimento de uma mola relaxada, figura 1.5.

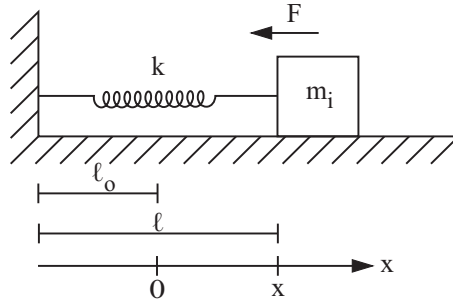


Figura 1.5: Mola de constante elástica  $k$ , comprimento relaxado  $\ell_o$ , comprimento esticado  $\ell$ , com uma massa inercial  $m_i$  presa em uma de suas extremidades, sendo  $F$  a força elástica que a mola exerce no corpo preso a ela.

Vamos supor que uma extremidade da mola está presa a um suporte fixo em um referencial inercial, com um corpo de massa  $m$  preso à sua outra extremidade. Quando esticamos ou comprimimos a mola tal que fique com um comprimento  $\ell$ , a força elástica que ela exerce sobre o corpo é dada por:

$$\vec{F} = -k(\vec{\ell} - \vec{\ell}_o) = -k\vec{x}, \quad (1.7)$$

onde  $k$  é a constante elástica da mola ( $k > 0$ ) e  $x \equiv \ell - \ell_o$  é a distância do corpo à posição de equilíbrio da mola.

III) Força de Atrito Dinâmico:

$$\vec{F} = -b\vec{v}, \quad (1.8)$$

onde  $b$  é o coeficiente de atrito ( $b > 0$ ) entre o corpo e o meio (ar ou água, por exemplo) e  $\vec{v}$  é a velocidade do corpo em relação a este meio. Em geral, a força de atrito dinâmica em um fluido é melhor representada por  $\vec{F} = -b_1 v^2 \hat{v}$ , onde  $b_1$  é uma constante positiva e  $\hat{v} \equiv \vec{v}/|\vec{v}|$ . Contudo a expressão linear (1.8) é muito mais fácil de ser tratada matematicamente e funciona razoavelmente bem com uma escolha razoável de  $b$ .

Estas são algumas das forças mais comuns que se encontram na mecânica. Na seção 1.3, veremos as forças que aparecem no eletromagnetismo. Juntando estas expressões de força com a equação (1.4) podemos descrever o movimento dos corpos submetidos às interações usuais.

A formulação que apresentamos aqui é a visão clássica newtoniana. Há outras formulações para descrever o movimento dos corpos no espaço, como as teorias da relatividade restrita e geral de Einstein. Neste livro não discutiremos estas outras formulações pois já as analisamos em outras obras, mostrando detalhadamente os motivos pelos quais somos totalmente contrários a elas.<sup>26</sup>

## 1.3 Forças Elétricas e Magnéticas

Nesta seção discutiremos as forças que aparecem no eletromagnetismo.

### 1.3.1 Força de Coulomb

Esta é a força eletrostática, obtida por Coulomb em 1785, que descreve a força exercida pela carga elétrica  $q_j$  em  $q_i$ , quando ambas estão em repouso em relação ao laboratório:

$$\vec{F}_{ji} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_o} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2}, \quad (1.9)$$

onde  $\hat{r}_{ij}$  e  $r_{ij}$  foram definidos na equação (1.6), ver a figura 1.4. Já  $\epsilon_o$  é uma constante chamada de permissividade do vácuo ( $\epsilon_o = 8,85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$ ).

Usualmente se afirma que a equação (1.9) foi obtida por Coulomb a partir de seus experimentos com a balança de torção. Contudo, em um artigo recente bem interessante, Heering argumentou que Coulomb não obteve a lei do inverso do quadrado das distâncias a partir de seus experimentos, mas sim por considerações teóricas em analogia com a lei de Newton da gravitação.<sup>27</sup> É importante ver a influência fundamental de Newton na lei mais importante da eletrostática.

Caso haja  $N$  cargas em repouso interagindo com uma certa carga  $q_o$ , vem da equação (1.9) e do princípio de superposição de forças que a força resultante atuando em  $q_o$  é dada por:

<sup>26</sup>[Ass98b], [Ass99b], [Ass13] e [Ass14].

<sup>27</sup>[Hee92].

$$\vec{F} = q_o \vec{E} , \quad (1.10)$$

onde

$$\vec{E}(\vec{r}_o) \equiv \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_o} \frac{\hat{r}_{oj}}{r_{oj}^2} . \quad (1.11)$$

Na equação (1.11) a grandeza  $\vec{E}$  é conhecida como o campo elétrico obtido da lei de Coulomb.

Esta força também pode ser obtida dos potenciais. Lagrange (1736–1813) havia introduzido a função potencial escalar na gravitação em 1777. Em 1782, Laplace (1749-1827) obteve a equação satisfeita por este potencial no espaço livre, resultado publicado em 1785. Em 1811 Poisson (1781-1840) introduziu o potencial escalar no eletromagnetismo e ainda obteve um resultado mais geral que o de Laplace ao obter em 1813 a equação satisfeita pelo potencial em regiões onde há matéria e cargas livres. No caso do eletromagnetismo o potencial de Poisson é dado por:

$$\phi(\vec{r}_o) \equiv \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{oj}} . \quad (1.12)$$

Na equação (1.12) a grandeza  $\phi$  é conhecida como o potencial escalar elétrico no ponto  $\vec{r}_o$  devido às cargas  $q_j$ . Aplicando o gradiente em  $\phi$  atuando no ponto  $\vec{r}_o$ , ver a equação (A.13) do Apêndice A, podemos obter o campo elétrico dado pela equação (1.11):

$$\vec{E} = -\nabla_o \phi . \quad (1.13)$$

A prova deste fato é para ser obtida no exercício 1.1.

Fazendo a integral de linha da equação (1.13) obtemos (ver a equação (A.30)):

$$V_{AB} = \phi(\vec{r}_A) - \phi(\vec{r}_B) = - \int_A^B (\nabla\phi) \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} , \quad (1.14)$$

onde  $V_{AB}$  é a diferença de potencial entre os pontos  $A$  e  $B$ , sendo também chamada de voltagem entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Se temos uma distribuição contínua de cargas no volume  $V$ , as equações (1.11) até (1.13) ficam nas seguintes formas:

$$\phi(\vec{r}_o) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \int \int_V \frac{\rho(\vec{r}_j) dV}{r_{oj}} , \quad (1.15)$$

e

$$\vec{E}(\vec{r}_o) = -\nabla_o \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \int \int_V \rho(\vec{r}_j) \frac{\hat{r}_{oj}}{r_{oj}^2} dV . \quad (1.16)$$

Nestas equações substituímos as somatórias por integrais triplas e  $q_j$  por  $dq = \rho(\vec{r}_j)dV$ , onde  $\rho(\vec{r}_j)$  é a densidade volumétrica de carga, ou seja, a quantidade de carga por unidade de volume no ponto  $\vec{r}_j$ .

### 1.3.2 Força Magnética

Esta força é dada por:

$$\vec{F}_M = q_o \vec{v}_o \times \vec{B}. \quad (1.17)$$

No Apêndice B se encontra uma discussão sobre as origens históricas e os significados desta expressão.

Nesta expressão a grandeza  $\vec{B}$  é chamada de campo magnético na posição onde se encontra a carga  $q_o$ , campo este gerado por ímãs ou por correntes elétricas. Já  $\vec{v}_o$  é a velocidade da carga  $q_o$  em relação a um observador ou sistema de referência. Este é um dado muito importante e que é pouco enfatizado nos livros didáticos usuais. Quando aplicamos esta força juntamente com a segunda lei de Newton na forma da equação (1.4), então o observador ou sistema de referência tem de ser inercial.

Nas equações (1.11) e (1.12) temos os valores para o campo elétrico coulombiano e para o potencial escalar elétrico. Apresentamos agora o valor do campo magnético gerado por um elemento de corrente pertencendo a fios metálicos. Em geral se afirma nos livros didáticos que este campo é dado pela lei de Biot (1774–1862) e Savart (1791–1841), de 1820–1824. Só que Biot e Savart não falaram de um campo magnético e chegaram apenas em uma expressão para a força exercida por um elemento de corrente ao atuar sobre um polo magnético.<sup>28</sup> O artigo principal de Biot e Savart já se encontra traduzido para a língua portuguesa.<sup>29</sup> Devido a este fato diremos neste livro que esta é a expressão do campo magnético devido a um elemento de corrente, sem denominar este campo como sendo de Biot-Savart. No capítulo 3 discutiremos a expressão do campo magnético no ponto  $\vec{r}_o$  devido a um elemento de corrente  $I_j d\vec{l}_j$  do circuito  $\mathcal{C}_j$ , sendo este elemento localizado em  $\vec{r}_j$ . Este campo magnético devido a um elemento de corrente é dado por:

$$d\vec{B}(\vec{r}_o) \equiv \frac{\mu_o}{4\pi} I_j d\vec{l}_j \times \frac{\hat{r}_{oj}}{r_{oj}^2}. \quad (1.18)$$

Nesta expressão  $\mu_o$  é chamada de permeabilidade do vácuo ( $\mu_o \equiv 4\pi \times 10^{-7} \text{ kgmC}^{-2}$ ).

O campo de todo o circuito é então obtido integrando-se sobre todo o circuito fechado de forma arbitrária  $\mathcal{C}_j$ :

<sup>28</sup>[BS20], [BS24], [BS65b], [BS65a], [Whi73, págs. 82–83], [Tri62, especialmente as páginas 453–455], [Cha09, capítulo 5: As Contribuições de Biot e Savart] e [AC11, capítulo 6: As Contribuições de Biot e Savart].

<sup>29</sup>[AC06].



$$\vec{B}(\vec{r}_o) \equiv \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_j} I_j d\vec{l}_j \times \frac{\hat{r}_{oj}}{r_{oj}^2}. \quad (1.19)$$

### 1.3.3 Força Elétrica Geral

Em 1729 Gray fez a descoberta fundamental de que existem dois tipos de materiais na natureza, a saber, condutores elétricos e isolantes elétricos. Gray descobriu também algumas das principais propriedades destes materiais. Seu trabalho principal foi publicado em 1731.<sup>30</sup> Foi esta descoberta que permitiu o rápido desenvolvimento do conhecimento dos fenômenos elétricos desde então, já que esta ciência pouco havia avançado desde os gregos antigos. Esta descoberta é posterior à morte de Newton. Todos os artigos fundamentais de Gray sobre eletricidade já se encontram traduzidos para a língua portuguesa, com comentários, além de terem sido reproduzidos com materiais de baixo custo.<sup>31</sup>

Em 1780, Galvani descobriu a corrente elétrica gerada quimicamente (no caso dele, corrente em nervos de animais). Ao redor de 1800 Volta (1745-1827) iniciou a construção das primeiras pilhas (baterias químicas).<sup>32</sup> Este foi o início do estudo das correntes elétricas constantes (antes disso só se pesquisava a eletrostática e a magnetostática, estudo dos ímãs naturais). Para explicar o funcionamento da bateria química Volta introduziu o conceito de força eletromotriz. Uma discussão clara deste conceito e de sua distinção em relação à diferença de potencial eletrostático se encontra no artigo de Varney e Fisher.<sup>33</sup> O trabalho fundamental de Volta descrevendo sua invenção das pilhas e baterias químicas já se encontra traduzido para a língua portuguesa.<sup>34</sup>

Em 1826 Ohm (1787-1854) descobriu a lei que leva seu nome:<sup>35</sup> Se uma pilha ou bateria química gera uma voltagem  $V$  entre seus terminais, então a corrente elétrica  $I$  que vai circular no circuito ligado aos terminais desta pilha vai depender da resistência  $R$  do fio de acordo com a relação:  $I = V/R$ .

Esta equação pode ser escrita na forma diferencial utilizando a equação (1.14) da seguinte forma:

$$\vec{J} = -\sigma \nabla \phi. \quad (1.20)$$

Nesta equação  $\vec{J}$  é a densidade de corrente em cada ponto do fio (suas unidades sendo  $Am^{-2} = Cs^{-1}m^{-2}$ ). Além do mais,  $\sigma$  é a condutividade do material do qual o fio é composto. O recíproco de  $\sigma$  é chamado de resistividade do meio, sendo algumas vezes representado por  $\rho$ , ou seja,  $\rho = 1/\sigma$ . Esta grandeza  $\rho$  não deve ser confundida com a densidade volumétrica de carga, embora esta

<sup>30</sup>[Gra], [Ass10b] e [Ass10a].

<sup>31</sup>[Bos11] e [BAC12].

<sup>32</sup>[MA06].

<sup>33</sup>[VF80].

<sup>34</sup>[MA08].

<sup>35</sup>[Ohm66]. Ver também [JM86, volume 1, págs. 51–55].

última grandeza também seja representada muitas vezes pelo mesmo símbolo  $\rho$ . As unidades de resistividade são  $\Omega m$  (Ohm-metro). Um valor típico de  $\rho$  para bons condutores como os metais (cobre, prata, alumínio, ouro) é da ordem de  $10^{-8} \Omega m$  na temperatura ambiente. Para um semicondutor como a água salgada saturada temos  $\rho = 0,044 \Omega m$ . Por outro lado um isolante como a água pura na temperatura ambiente tem  $\rho = 2,5 \times 10^5 \Omega m$ . Bons isolantes como a madeira, o vidro e a borracha têm  $\rho$  variando de  $10^8 \Omega m$  a  $10^{16} \Omega m$ , sendo todos estes valores na temperatura ambiente.

A densidade de corrente  $\vec{J}$  está relacionada com a quantidade de corrente elétrica  $I$  que atravessa a seção reta  $S$  do fio pela seguinte relação:

$$I = \int \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} . \quad (1.21)$$

A relação entre a resistência  $R$  de um fio de comprimento  $L$  e seção reta de área  $A$  com forma arbitrária mas uniforme ao longo deste comprimento é dada por:  $R = L/(\sigma A) = \rho L/A$ .

Para correntes constantes fluindo em um condutor homogêneo, algumas vezes representadas pelo símbolo  $cc$ , as grandezas  $\vec{E}$  e  $\vec{J}$  são uniformes dentro do fio, de tal forma que elas têm o mesmo valor para qualquer ponto de uma mesma seção reta do fio, embora possam ter valores diferentes em diversas seções retas do mesmo fio se estas seções tiverem áreas diferentes. Isto significa que correntes contínuas fluem uniformemente através de cada seção reta do fio.<sup>36</sup>

Em 1831, Faraday (1791–1867) descobriu que uma corrente é gerada não apenas por uma bateria mas também quando se variava o fluxo magnético sobre um circuito primário. Este fluxo magnético pode variar, por exemplo, aproximando ou afastando um ímã deste circuito. Outra possibilidade de alterar o fluxo magnético sobre um circuito primário é variar a intensidade de corrente de um circuito secundário, sendo que este circuito secundário gera o campo magnético  $\vec{B}$  de acordo com a equação (1.19). O trabalho fundamental de Faraday já se encontra traduzido para a língua portuguesa.<sup>37</sup> A lei de indução de Faraday pode ser expressa como (no caso em que o circuito não está ligado a uma bateria):  $I = fem/R$ , onde

$$fem \equiv -\frac{d}{dt}\Phi_M \equiv -\frac{d}{dt} \int \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} . \quad (1.22)$$

Nesta equação a grandeza  $fem$  é conhecida como “força eletromotriz induzida.” Embora a grandeza  $fem$  tenha o nome de força, ela é na realidade uma voltagem de origem não eletrostática, cuja unidade é o Volt ( $1V = 1kg m^2 C^{-1} s^{-2}$ ). Já introduzimos na equação (1.22) o sinal de menos devido à lei de Heinrich F. E. Lenz (1804-1865) de 1834.<sup>38</sup> Esta lei afirma que quando

<sup>36</sup>[Whi73, pág. 90].

<sup>37</sup>[Far11].

<sup>38</sup>[Len34].

se varia o fluxo magnético sobre o circuito, a corrente induzida flui em direção tal que a força resultante sobre o circuito tende a se opor à variação do fluxo. Já a grandeza  $\Phi_M$  representa o fluxo magnético sobre o circuito primário, onde está sendo induzida a corrente, sendo este fluxo devido ao campo magnético gerado no circuito secundário.<sup>39</sup>

Em 1845 Franz Neumann (1798-1895) introduziu pela primeira vez o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  devido a um circuito fechado  $\mathcal{C}_j$  onde circula a corrente elétrica  $I_j$ . Este potencial vetor magnético é dado por:

$$\vec{A}(\vec{r}_o) \equiv \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_j} I_j \frac{d\vec{l}_j}{r_{oj}}. \quad (1.23)$$

O campo magnético pode ser obtido aplicando o rotacional em  $\vec{A}$ :

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}_o) &= \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z = \nabla_o \times \vec{A} \\ &= \hat{x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y_o} - \frac{\partial A_y}{\partial z_o} \right) + \hat{y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z_o} - \frac{\partial A_z}{\partial x_o} \right) + \hat{z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x_o} - \frac{\partial A_x}{\partial y_o} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

A descoberta de Neumann foi perceber que a lei de Faraday podia ser expressa apenas em função do potencial vetor magnético que criou, sem necessitar falar de campo magnético, isto é:

$$\Phi_M = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (1.25)$$

e

$$fem = -\frac{d}{dt} \Phi_M = \oint_{\mathcal{C}} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l}. \quad (1.26)$$

Nesta última expressão estamos supondo um circuito rígido e estacionário de tal forma que foi possível entrar com a derivada total na integral e ela se tornou uma derivada parcial.

No capítulo 4 descreveremos em maiores detalhes a lei de Faraday e o papel de  $\vec{A}$ .

Comparando a equação (1.26) com a equação (1.14), vê-se que  $-\partial \vec{A} / \partial t$  tem o mesmo papel que um campo elétrico usual já que ambos geram uma voltagem, voltagem esta que pode ocasionar uma corrente elétrica.

A partir do trabalho de Neumann a teoria de circuitos foi generalizada para incluir os efeitos de auto-indutância. Os principais trabalhos nesta direção foram feitos por Gustav Kirchhoff (1824-1887) no período 1848-1857; William Thomson (1824-1907), também conhecido como Lord Kelvin, juntamente com Stokes, no período 1853-1854; e Heaviside (1850-1925), em 1876. Kirchhoff já

---

<sup>39</sup>[Far52] e [Far11].

em 1857 escrevia a lei de Ohm de maneira geral, da forma como a conhecemos hoje em dia, incluindo as influências dos potenciais escalar elétrico e vetor magnético.

Kirchhoff considerava a força agindo em uma carga  $q$  dentro de um fio resistivo no qual fluía uma corrente elétrica como tendo duas partes. A primeira era a força eletrostática usual devido às cargas livres ao longo da superfície do fio. Esta distribuição de cargas ao longo da superfície do fio resistivo não era neutralizada em todos os lugares ao longo do fio devido à presença da bateria. Uma discussão detalhada destas cargas superficiais encontra-se nos livros de Assis e Hernandez.<sup>40</sup> Esta primeira parte podia ser escrita como  $-q\nabla\phi$ . A segunda parte era devida à alteração da intensidade da corrente em todas as porções do fio. Esta segunda parte podia ser escrita como  $-q\partial\vec{A}/\partial t$ . Aqui ele estava levando em consideração a auto-indutância do fio. Ele então assumia uma lei de Ohm generalizada afirmando que mesmo quando a corrente não era estacionária ou constante, a densidade de corrente seria igual ao produto da condutividade pela força eletromotriz por unidade de carga considerando ambas as contribuições, a parte eletrostática e a parte devida à auto-indutância. Matematicamente isto significa que ele postulava ou assumia o seguinte:

$$\vec{J} = -\sigma \left( \nabla\phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right). \quad (1.27)$$

Podemos escrever esta equação como  $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ , onde  $\vec{E}$  é um campo elétrico generalizado definido por:

$$\vec{E}(\vec{r}_o) \equiv -\nabla_o\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \quad (1.28)$$

A força elétrica geral é então dada por  $\vec{F} = q_o\vec{E}$ , com  $\vec{E}$  dado pela equação (1.28).

Os importantes trabalhos de Kirchhoff relacionados com estes tópicos já foram traduzidos para a língua inglesa.<sup>41</sup>

### 1.3.4 Força de Maxwell-Lorentz

No eletromagnetismo clássico a expressão geral para a força eletromagnética sobre uma carga é usualmente conhecida como força de Lorentz. Neste livro vamos denominá-la de força de Maxwell-Lorentz, já que é devida tanto a J. C. Maxwell quanto a Lorentz, como discutimos anteriormente em outras obras.<sup>42</sup>

<sup>40</sup>[AH07], [AH09] e [AH13].

<sup>41</sup>[Kir49] e [Kir50], [Kir57b] e [Kir57a], assim como [Kir57c] e [GA94]. Ver ainda [Ros81].

<sup>42</sup>[Ass13, Seção 14.5: Origens e Significados da Velocidade  $\vec{v}$  que Aparece na Força Magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$ ] e [Ass14, Seção 15.5: Origens e Significados da Velocidade  $\vec{v}$  que Aparece na Força Magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$ ].

Ela engloba as influências elétricas e magnéticas, sendo escrita da seguinte forma:

$$\vec{F} = q_o \vec{E} + q_o \vec{v}_o \times \vec{B}, \quad (1.29)$$

onde o campo elétrico  $\vec{E}$  é dado pela equação (1.28) e o campo magnético  $\vec{B}$  pela equação (1.24).

Novamente a velocidade  $\vec{v}_o$  que aparece na equação (1.29) é interpretada desde 1905, devida ao trabalho sobre a relatividade restrita de Einstein, como sendo a velocidade da carga  $q_o$  em relação a um referencial ou observador. Ou seja, esta velocidade não é mais interpretada como sendo a velocidade em relação ao campo magnético, nem em relação ao ímã ou fio que geram o campo magnético  $\vec{B}$ .

A expressão (1.29) foi obtida pela primeira vez por J. C. Maxwell entre 1861 e 1873.<sup>43</sup> Mais tarde esta equação também foi apresentada por H. A. Lorentz (1853–1928), um físico teórico holandês, em 1895.<sup>44</sup> Uma discussão sobre as origens desta força aparece em diversos trabalhos.<sup>45</sup> Em seus trabalhos de 1892 e 1895 Lorentz apresentou uma estrutura granular microscópica para a formulação do eletromagnetismo de Maxwell, que era todo baseado no contínuo. Isto é, Lorentz passou a descrever as fontes dos campos como sendo entidades corpusculares discretas, a saber, cargas elétricas e elementos de corrente.

Utilizando o campo elétrico dado pela equação (1.28) vem que a força de Maxwell-Lorentz, equação (1.29), pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{F} = -q_o \nabla_o \phi + q_o \vec{v}_o \times \vec{B} - q_o \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.30)$$

Vemos que há três componentes na força de Maxwell-Lorentz (1.30): (I) A força coulombiana  $-q_o \nabla_o \phi$ . (II) A força magnética  $q_o \vec{v}_o \times \vec{B}$ . (III) A força de indução  $-q_o \partial \vec{A} / \partial t$ .

A força coulombiana  $-q_o \nabla_o \phi$  depende apenas das posições relativas entre cargas em repouso.

A força magnética  $q_o \vec{v}_o \times \vec{B}$  depende da velocidade  $\vec{v}_o$  da carga de teste (isto é, da carga que sente a força) e da velocidade das cargas fontes (isto é, das cargas que geram  $\vec{B}$ ). O motivo para esta dependência é que o campo magnético  $\vec{B}$  é diretamente proporcional à corrente elétrica, como dado pela equação (1.19). Esta corrente elétrica, por outro lado, é diretamente proporcional à velocidade das cargas fontes.

<sup>43</sup>[Max, pág. 342, equação (77)], [Max65d, equação (77)], [Max65, pág. 484, equação (D)], [Max65a, equação (D)] e [Max54, Vol. 2, §§598-599, págs. 238-241, equações (B) e (10)].

<sup>44</sup>[Lor95].

<sup>45</sup>[Ass13, Seção 14.5: Origens e Significados da Velocidade  $\vec{v}$  que Aparece na Força Magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$ ] e [Ass14, Seção 15.5: Origens e Significados da Velocidade  $\vec{v}$  que Aparece na Força Magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$ ], [Pai82, pág. 125] e [Pai86, pág. 76].

A força de indução  $-q_o \partial \vec{A} / \partial t$  tem uma componente dependente da aceleração das cargas fontes. Esta componente é devida ao potencial vetor magnético  $\vec{A}$ , que está ligado com o campo magnético  $\vec{B}$  pela equação (1.24). Logo,  $\vec{A}$  também é proporcional à velocidade das cargas fontes. Nesta componente da força de Maxwell-Lorentz aparece  $\partial \vec{A} / \partial t$ , indicando que esta componente depende da aceleração das cargas fontes. Por outro lado, esta componente da força de Maxwell-Lorentz não depende nem da velocidade da carga teste, nem da aceleração da carga de teste. A outra componente da força de indução  $-q_o \partial \vec{A} / \partial t$  depende apenas da velocidade das cargas fontes que geram o campo magnético  $\vec{B}$ . Isto pode ser visto lembrando que a indução ocorre não apenas quando a intensidade da corrente muda (caso anterior com aceleração diferente de zero), mas também quando a intensidade da corrente é constante (componente longitudinal da aceleração nula ao longo da direção da corrente elétrica em cada ponto do circuito,  $\vec{a} = \vec{0}$ ) e o fluxo do campo magnético  $\vec{B}$  sobre o circuito primário muda no tempo, como quando um ímã se aproxima ou se afasta do circuito primário. Neste segundo caso para haver indução é necessário ter campo magnético  $\vec{B}$ , mostrando que esta componente da força de indução vai depender da velocidade das cargas fontes.

No capítulo 5 faremos uma comparação da força de Maxwell-Lorentz com a força de Weber.

## 1.4 Equações de Maxwell

Para resolver nosso problema inicial, que é o de descrever o movimento de cargas no espaço, o primeiro passo já está dado. Isto é, temos a equação de movimento (1.4) e a força eletromagnética correspondente dada pelas equações (1.29) ou (1.30). Logo, se estamos em um sistema de coordenadas inercial e uma partícula (ponto material) de carga  $q$  e massa  $m$  se move com velocidade  $\vec{v}$  e aceleração  $\vec{a}$  em relação a este referencial inercial, em uma região onde há um campo elétrico  $\vec{E}$  e um campo magnético  $\vec{B}$ , resulta que seu movimento é descrito pela equação

$$q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a} . \quad (1.31)$$

Usualmente os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  que aparecem nesta equação não são aqueles gerados pela própria carga  $q$ , mas sim gerados por outras cargas e distribuições de correntes, que são chamados de fontes de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Para resolver o problema completo de forma autoconsistente (isto é, descrever o movimento de um conjunto de cargas interagindo entre si sem a presença de campos eletromagnéticos externos), precisamos saber como as fontes geram os campos. Ou seja, dada uma distribuição de cargas e de correntes, obter os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  gerados por este sistema. E é exatamente esta a função das equações de Maxwell.

As equações de Maxwell são usualmente apresentadas de duas maneiras: forma diferencial e forma integral. Inicialmente vamos apresentá-las na forma

diferencial, supondo as fontes e os campos no vácuo. Todas as grandezas são funções da posição e do tempo:  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ ,  $\vec{G} = \hat{x}G_x(x, y, z, t) + \hat{y}G_y(x, y, z, t) + \hat{z}G_z(x, y, z, t)$ . As equações de Maxwell são então:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.32)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.33)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.34)$$

e

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.35)$$

Na equação (1.33) a constante  $c$  é dada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (1.36)$$

Esta grandeza tem o mesmo valor que a velocidade da luz no vácuo. Como veremos no capítulo 2, foi Weber quem introduziu pela primeira vez esta grandeza no eletromagnetismo, em 1846. Foi ele também o primeiro a medi-la experimentalmente, entre 1855 e 1857, juntamente com seu colaborador Kohlrausch.<sup>46</sup> Eles obtiveram  $c = 3,1 \times 10^8$  m/s. Maxwell só mediu esta grandeza em 1868 e obteve  $c = 2,8 \times 10^8$  m/s.<sup>47</sup>

Apresentamos agora alguns comentários sobre as equações de Maxwell. A equação (1.32) é conhecida como lei de Gauss. Ela é essencialmente equivalente à força de Coulomb, equações (1.9) a (1.13). A relação da força de Coulomb com a lei de Gauss será discutida no exercício 1.10. A segunda equação é denominada nos livros didáticos como lei circuital de Ampère. Embora ela tenha este nome hoje em dia, ela nunca foi deduzida ou escrita por Ampère. O primeiro a obter esta equação, *mesmo sem o termo com a corrente de deslocamento*, foi Maxwell em seu primeiro artigo tratando do eletromagnetismo, de 1855, vinte anos após a morte de Ampère.<sup>48</sup> Devido a este fato vamos chamar a esta equação de lei circuital magnética, em vez de denominá-la de lei circuital de Ampère. Para chegar neste resultado, Maxwell utilizou os resultados que Ampère havia obtido com sua força entre elementos de corrente (que vai ser descrita em detalhes no capítulo 3). Maxwell introduziu o termo com a corrente de deslocamento (o termo com a constante de Weber  $c$  na equação

<sup>46</sup>[Web55b], [WK56], traduzido para a língua inglesa em [WK03] e para a língua portuguesa em [WK08], [KW57] e [WK68].

<sup>47</sup>[Max68], [Max65b] e [Max54, volume 2, artigos 786–787, págs. 435–436].

<sup>48</sup>[Max65c] e [Whi73, págs. 242–245].

(1.33)) em seu segundo artigo sobre eletromagnetismo de 1861.<sup>49</sup> Este termo também é chamado de corrente, assim como  $\vec{J}$ , já que apesar de não indicar um transporte líquido de cargas elétricas, foi observado que um campo elétrico variável gera um campo magnético e esta é uma das propriedades fundamentais das correntes elétricas usuais. A terceira equação representa a observação experimental de que não se consegue separar espacialmente os polos norte e sul de nenhum ímã ou corrente. A quarta e última equação é conhecida como lei de Faraday. Faraday descobriu a indução eletromagnética em 1831. Foram Franz Neumann (em 1845) e Weber (em 1846) os primeiros a colocar a lei de Faraday em forma matemática. Este é o assunto do capítulo 4. Os conhecimentos matemáticos de Faraday sempre foram muito elementares, sendo ele essencialmente um excelente físico experimental.

Vemos então que aquilo que se chama de equações de Maxwell são de fato leis devidas a outros pesquisadores e que já eram conhecidas e usadas na época de Maxwell. O papel de Maxwell foi perceber que este conjunto de equações formava um todo coerente e introduzir a corrente de deslocamento. Este último feito foi realmente sua grande descoberta, já que a corrente de deslocamento é fundamental para se obter as ondas eletromagnéticas a partir das equações de Maxwell. Com isto se pôde unificar a óptica com o eletromagnetismo, identificando a luz como sendo uma radiação eletromagnética. Maxwell introduziu este termo (a corrente de deslocamento) para que este conjunto de equações ficasse compatível com a equação de continuidade para cargas, que também é conhecida como a equação de conservação de cargas e que é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 . \quad (1.37)$$

O primeiro a escrever esta equação descrevendo a conservação de cargas foi Kirchhoff em 1857, em forma linear ou filiforme<sup>50</sup> e também na forma volumétrica desta equação.<sup>51</sup>

Aplicando  $\partial/\partial t$  na equação (1.32) e invertendo a ordem das derivadas, obtém-se:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\epsilon_o} \frac{\partial \rho}{\partial t} . \quad (1.38)$$

Usando as equações (1.33), (1.36) e (A.27) na equação (1.38) obtém-se:

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\epsilon_o \mu_o} \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_o} \vec{J} \right) = -\frac{1}{\epsilon_o} \nabla \cdot \vec{J} = \frac{1}{\epsilon_o} \frac{\partial \rho}{\partial t} . \quad (1.39)$$

Esta relação é a equação de continuidade dada pela equação (1.37), lembrando que  $\vec{J} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-$  e que  $\rho = \rho_+ + \rho_-$ . Isto significa que para

<sup>49</sup>[Max65d] e [Whi73, 247–255].

<sup>50</sup>[Kir57b], com tradução para a língua inglesa em [Kir57a].

<sup>51</sup>[Kir57c], com tradução para a língua inglesa em [GA94].



obter a equação (1.37) a partir das equações de Maxwell, foi essencial utilizar a corrente de deslocamento na equação (1.33).

Apresentamos agora as equações de Maxwell na forma integral, obtidas a partir das equações (1.32) até (1.35), usando ainda as equações (A.32) e (A.33), ver o exercício 1.3:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q}{\epsilon_o} = \frac{1}{\epsilon_o} \int \int \int_V \rho dV , \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_o I + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \Phi_E \\ &= \mu_o \int_S \int \vec{J} \cdot d\vec{a} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S \int \vec{E} \cdot d\vec{a} , \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = 0 , \quad (1.42)$$

e

$$fem \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_B = -\frac{d}{dt} \int_S \int \vec{B} \cdot d\vec{a} . \quad (1.43)$$

Para se chegar a estas equações em forma integral foram utilizados os teoremas de Gauss e Stokes, equações (A.32) e (A.33). Aparentemente uma história completa destes teoremas nunca foi escrita. O teorema de Gauss foi utilizado em casos particulares por Lagrange em 1760–1761 e foi então formulado em forma mais definitiva por Gauss em 1813 e 1839–1840, assim como também foi formulado por Ostrogadsky em 1828–1831. Ao redor da década de 1840 ele já era amplamente conhecido. Já o teorema de Stokes foi utilizado em casos particulares por Ampère em 1820–1827, sendo formulado em forma geral pela primeira vez por Kelvin em 1850 e por Stokes em 1854. Ele foi apresentado por Stokes como uma questão de uma prova para o prêmio Smith da Universidade de Cambridge em 1854. Entre os candidatos para o prêmio estava Maxwell, que aprendeu sobre este teorema desta forma e o utilizou em seus artigos tratando do eletromagnetismo que escreveu nos anos seguintes. Ao redor da década de 1870, este teorema era frequentemente empregado nos artigos científicos.<sup>52</sup>

Para se obter as equações de ondas eletromagnéticas basta aplicar o rotacional ( $\nabla \times$ ) em ambos os lados das equações (1.33) e (1.35), além de usar a identidade vetorial dada pela equação (A.29). Desta forma obtemos o seguinte resultado:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_o \nabla \times \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) , \quad (1.44)$$

<sup>52</sup>[Cro85, págs. 146–147, nota 29] e [JM86, volume 1, págs. 66–69].

e

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}). \quad (1.45)$$

Aplicando-se as equações (1.32) a (1.43) nas equações (1.44) e (1.45) temos, após rearranjar os termos:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{B} = -\mu_o \nabla \times \vec{J}, \quad (1.46)$$

e

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_o} \nabla \rho + \mu_o \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \quad (1.47)$$

Estas equações descrevem as ondas eletromagnéticas obtidas a partir das equações de Maxwell.

Nos exercícios 1.7 a 1.8 indica-se como obter a lei de Gauss, equação (1.32), e a lei de Faraday, equação (1.35), a partir do campo elétrico que aparece na força de Maxwell-Lorentz. A dedução da lei circuital magnética (1.33) e da lei da não existência dos monopolos magnéticos (1.34) é assunto do capítulo 3.

## 1.5 Potenciais Retardados

Nesta seção vamos discutir os potenciais retardados e os potenciais de Liénard-Wiechert. A ideia de que a interação entre dois corpos que estão afastados por uma certa distância não é instantânea, tal que deve levar tempo para o sinal, potencial, interação ou força ir de um corpo a outro, é antiga. Mas no eletromagnetismo o primeiro a expressá-la claramente parece ter sido Gauss, em 1845, em uma carta a Weber.<sup>53</sup> Em 1858 Riemann (1826–1866), um estudante e colaborador de Weber e Gauss na Universidade de Göttingen, introduziu a ideia do tempo retardado na física. Esta ideia pode ser expressa dizendo que a força exercida sobre uma carga  $q_1$  localizada em  $\vec{r}_1$  no tempo  $t$  devida a uma outra carga  $q_2$  depende da posição, velocidade e aceleração de  $q_2$  em um tempo anterior  $t - r_{12}/c$ . Nesta expressão  $r_{12}$  é a distância entre as duas cargas e  $c$  a velocidade da interação, que se assume como sendo a velocidade da luz. O trabalho de Riemann só foi publicado postumamente, em 1867, sendo que já se encontra traduzido para a língua inglesa.<sup>54</sup> No mesmo ano Ludwig Lorenz (1829–1891), um físico dinamarquês (que não deve ser confundido com o físico holandês H. A. Lorentz, da força de Maxwell-Lorentz), publicou um trabalho

<sup>53</sup>[Gau77, volume 5, págs. 627–629], [Whi73, pág. 240], [Max54, volume 2, artigo 861, pág. 489] e [O'R65, volume 1, pág. 226].

<sup>54</sup>[Rie67], [Rie77a]; ver ainda [JM86, volume 1, págs. 179–181].

em que desenvolveu independentemente a ideia do tempo retardado. Este trabalho também já está traduzido para a língua inglesa.<sup>55</sup> Desta forma, se pode dizer que Riemann e Lorenz introduziram o tempo retardado na física.

Em 1867 o físico alemão Rudolf Clausius (1822-1888) obteve uma nova lei de força entre cargas e mostrou como deduzir, a partir desta força, uma força entre elementos de corrente similar à força que Grassmann havia publicado em 1845. A chamada força de Grassmann ainda não havia recebido este nome, sendo ela devida a Hermann Günther Grassmann (1809-1877) em 1845, como será discutido na seção 3.3. Em 1867 Clausius ainda não tinha conhecimento do trabalho que Grassmann havia publicado em 1845, embora mais tarde tenha ficado claro para todos que ambos haviam chegado na mesma expressão de força entre elementos de corrente. Clausius também discutiu a ideia do retardamento na interação eletromagnética proposta por Gauss. Dois de seus trabalhos tratando destes tópicos já estão traduzidos para a língua inglesa.<sup>56</sup> Como vimos, Lorentz introduziu sua força em 1895. Sua expressão difere da força de Clausius, já que a força de Lorentz inclui o tempo retardado nos campos, embora com ambas se chegue à mesma força entre elementos de corrente, a de Grassmann.<sup>57</sup> Em 1898 Andre-Marie Liénard (1869-1958) realizou avanços sobre o trabalho de Lorentz ao trabalhar com os potenciais retardados devidos a cargas corpusculares. Este trabalho foi seguido por um outro nas mesmas linhas escrito por Emil Wiechert (1861-1928) em 1900. Por esta razão os potenciais que vamos apresentar recebem usualmente o nome de potenciais de Liénard-Wiechert. Deve ser enfatizado que também Karl Schwarzschild (1873-1916) apresentou avanços importantes ao longo destas linhas (o cálculo do potencial eletrodinâmico etc.) em 1903. Para uma discussão dos trabalhos de Liénard, Wiechert e Schwarzschild sugerimos os livros de Whittaker e O’Rahilly.<sup>58</sup>

Após esta breve introdução, vamos apresentar os resultados mais importantes, sem entrar em todos os detalhes das deduções para obtê-los, já que são muito trabalhosos. A força de Maxwell-Lorentz, equação (1.30), em termos do potencial escalar elétrico  $\phi$  e do potencial vetor magnético  $\vec{A}$ , é dada por:

$$\vec{F}_{21} = -q_1 \left( \nabla_1 \phi_2 + \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} \right) + q_1 \vec{v}_1 \times (\nabla_1 \times \vec{A}_2). \quad (1.48)$$

Nesta expressão  $\nabla_1$  e  $\nabla_1 \times$  são calculados no ponto onde está a carga 1, enquanto que  $\phi_2$  e  $\vec{A}_2$  são os potenciais gerados pela carga  $q_2$ .

Os potenciais retardados são dados por grandezas análogas às equações (1.15) e (1.23), substituindo  $I d\vec{l}$  por  $\rho \vec{v} dV$ , isto é:

---

<sup>55</sup>[Lor67].

<sup>56</sup>[Cla69] e [Cla80]. Ver ainda [Whi73, págs. 234–236].

<sup>57</sup>[Whi73, págs. 392–396].

<sup>58</sup>[Whi73, págs. 392–410] e [O’R65, volume 1, págs. 212–223].

$$\phi_2(\vec{r}_1, t) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \int \int \frac{\rho_2(\vec{r}_2^*, t^*)}{r_{12}} dV_2^* , \quad (1.49)$$

e

$$\vec{A}_2(\vec{r}_1, t) \equiv \frac{\mu_o}{4\pi} \int \int \int \frac{\rho_2(\vec{r}_2^*, t^*) \vec{v}_2(t^*)}{r_{12}} dV_2^* . \quad (1.50)$$

Nestas expressões, o grande avanço é que agora os potenciais no ponto  $\vec{r}_1$  no tempo  $t$  são obtidos em função de onde  $q_2$  estava no tempo retardado  $t^* = t - r_{12}/c$ . As grandezas com asterisco são para ser entendidas como sendo obtidas no tempo retardado, isto é,  $\vec{r}_2^* \equiv \vec{r}_2(t^*)$  etc.

Através dos trabalhos de Liénard, Wiechert e Schwarzschild pode-se obter diretamente a força entre duas cargas pontuais  $q_1$  e  $q_2$  destas expressões. Para fazer isto corretamente não se pode simplesmente substituir  $\rho_2 dV_2$  por  $q_2$ , como já foi discutido por diversos autores.<sup>59</sup> Nos trabalhos destes autores está detalhado como chegar aos potenciais devido a uma carga pontual  $q_2$  começando com os potenciais retardados de L. Lorenz, equações (1.49) e (1.50). O resultado final é dado por

$$\phi_2(\vec{r}_1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_2}{[r_{12} - (\vec{v}_2 \cdot \vec{r}_{12})/c]^*} , \quad (1.51)$$

e

$$\vec{A}_2(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q_2 \vec{v}_2}{[r_{12} - (\vec{v}_2 \cdot \vec{r}_{12})/c]^*} . \quad (1.52)$$

Estes são os potenciais escalar elétrico e vetor magnético devidos a uma carga pontual  $q_2$ . Mais uma vez o asterisco indica o tempo retardado. Estes potenciais foram deduzidos pela primeira vez nesta forma por Liénard e Wiechert. Eles são chamados de potenciais de Liénard-Wiechert.

O caminho correto para chegar ao resultado final para a força envolvendo apenas o tempo presente  $t$ , sem aparecer mais o tempo retardado, é complicado e está além dos objetivos deste livro. O que nos interessa aqui é apenas o resultado final, que é obtido fazendo-se uma expansão em série de Taylor de todas as expressões que contenham  $t^*$  em torno de  $t^* = t$ .

O resultado final para a força pode ser obtido das equações (1.48), (1.51) e (1.52). Este resultado final para a força exercida pela carga pontual  $q_2$  na carga pontual  $q_1$  válido até segunda ordem em  $1/c$ , inclusive, pode ser encontrado em muitos lugares.<sup>60</sup> Ele é dado por:

$$\vec{F}_{21} = q_1 \vec{E}_2^* + q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B}_2^* \simeq q_1 \left\{ \frac{q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}^2} \left[ \hat{r}_{12} \left( 1 + \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}{2c^2} \right) \right. \right.$$

<sup>59</sup>[Whi73, págs. 407–409], [O'R65, volume 1, págs. 212–223], [Gri89, págs. 416–419] e [FLS64, volume 2, seção 21-5, págs. 21-9 a 21-11].

<sup>60</sup>[O'R65, volume 1, págs. 215–223], [PK74] e [EKL76].

$$- \frac{3}{2} \left( \frac{\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_2}{c^2} - \frac{\vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_2}{2c^2} \right) - \frac{r_{12} \vec{a}_2}{2c^2} \Big] + q_1 \vec{v}_1 \times \left\{ \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2} \frac{\vec{v}_2 \times \hat{r}_{12}}{c^2} \right\} . \quad (1.53)$$

A equação (1.53) pode ser denominada de força de Liénard-Schwarzschild.

Um fato extremamente importante a ser enfatizado é que apenas  $\vec{E}_2^*$  e  $\vec{B}_2^*$  na equação (1.53) são calculados no tempo retardado, já que *do lado direito da última igualdade todas as grandezas (inclusive  $r_{12}$ ,  $\hat{r}_{12}$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{a}_2$ ) estão sendo calculadas e medidas no tempo  $t$  e não no tempo retardado  $t^*$*  (lembrar que já foi feita a expansão de Taylor em torno de  $t^* = t$  para se chegar neste valor final). Embora a expressão geral da força tenha termos de infinitas ordens nas potências de  $1/c$ , pegamos apenas até os termos de segunda ordem já que praticamente todos os fenômenos estudados do eletromagnetismo (como a força de Coulomb, a lei circuital magnética, o campo magnético devido a um elemento de corrente, assim como a lei de indução de Faraday) já surgem com precisão suficiente nesta aproximação.

Trocando os índices 1 e 2 e lembrando que  $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$  vem da equação (1.53) que a força exercida por  $q_1$  em  $q_2$  é dada por:

$$\vec{F}_{12} = q_2 \vec{E}_1^* + q_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1^* \simeq q_2 \left\{ \frac{-q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2} \left[ \hat{r}_{12} \left( 1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}{2c^2} - \frac{3}{2} \left( \frac{\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_1}{c^2} + \frac{\vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_1}{2c^2} \right) + \frac{r_{12} \vec{a}_1}{2c^2} \right) \right] + q_2 \vec{v}_2 \times \left\{ \frac{-q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2} \frac{\vec{v}_1 \times \hat{r}_{12}}{c^2} \right\} \right\} . \quad (1.54)$$

Deve ser observado que em geral  $\vec{F}_{21} \neq -\vec{F}_{12}$ . Ou seja, a força de Liénard-Schwarzschild não satisfaz em geral ao princípio de ação e reação.

São estas as expressões fundamentais que vamos comparar com a força de Weber. As equações (1.53) e (1.54) são as forças básicas do eletromagnetismo clássico.

Como veremos na seção 1.6 sobre a lagrangiana de Darwin, as equações (1.53) e (1.54) incluem não apenas os efeitos de tempo retardado e da radiação, mas também as correções relativísticas. Desta forma, elas são realmente completas no que diz respeito à eletrodinâmica clássica, lembrando que elas são válidas apenas até segunda ordem em  $1/c$ , inclusive. Deduziremos também estas forças a partir da lagrangiana de Darwin.

Seguindo O’Rahilly, chamaremos as equações (1.53) e (1.54) de forças de Liénard-Schwarzschild.<sup>61</sup> Embora ele tenha dado este nome à expressão contendo o tempo retardado, manteremos este nome para as equações (1.53) e (1.54), já que estas últimas expressões seguem naturalmente da força original de Liénard-Schwarzschild. As equações (1.53) e (1.54) são análogas à equação (7.17) do livro de O’Rahilly.

---

<sup>61</sup>[O’R65, volume 1, pág. 218].

## 1.6 Lagrangiana de Darwin

Nesta seção apresentamos a lagrangiana de Darwin, a partir da qual se pode deduzir a força de Liénard-Schwarzschild, equação (1.53), usando o formalismo lagrangiano. Vamos tratar aqui de um sistema de duas cargas  $q_1$  e  $q_2$ , de massas  $m_1$  e  $m_2$ , interagindo entre si.

O formalismo lagrangiano foi apresentado por Lagrange em forma completa em seu famoso livro *Mecânica Analítica*, publicado em 1788. As equações de movimento, as forças etc. podem ser obtidas através de uma função  $L$ , chamada hoje em dia de lagrangiana, introduzida por ele. No caso da mecânica clássica ela é dada por  $L = T - S$ . Nesta equação  $T$  é a energia cinética das partículas:  $T = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2 = m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1/2 + m_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2/2$ . Já a função  $S$  que aparece na lagrangiana representa a interação entre as partículas. No caso de forças conservativas e que só dependem da distância entre as partículas, mas não de suas velocidades ou acelerações, resulta que ela é simplesmente a energia potencial usual, que quando somada com a energia cinética das partículas fornece a energia total  $E$  do sistema que se conserva no tempo. Por exemplo, no caso da interação gravitacional na mecânica clássica newtoniana temos que  $S = -Gm_1 m_2/r_{12}$ , sendo que  $E = T + S = \text{constante}$  no tempo. Como veremos a seguir, quando a força depende da velocidade e da aceleração das partículas, a situação já não é tão simples e a função  $S$  deixa de ser a energia potencial do sistema. De qualquer forma em todos estes casos há uma maneira padrão de se obter a força na formulação lagrangiana. Por exemplo, a componente  $x$  da força exercida sobre a partícula 1 é dada por:

$$F_x = -\frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial v_{x1}} . \quad (1.55)$$

Aqui  $v_{x1} = \dot{x}_1$  é a componente ao longo do eixo  $x$  da velocidade da partícula 1, ou seja, a projeção de sua velocidade ao longo deste eixo.

Já a equação de movimento é obtida das equações de Lagrange, ou seja:

$$-\frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 ; \quad k = 1, \dots, 6 . \quad (1.56)$$

Nesta equação  $q_k$  representa cada uma das coordenadas generalizadas das duas partículas e  $\dot{q}_k = dq_k/dt$  as componentes das velocidades. No caso particular das coordenadas cartesianas teríamos:  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = y_1$ ,  $q_3 = z_1$ ,  $q_4 = x_2$ ,  $q_5 = y_2$ ,  $q_6 = z_2$ .

No caso do eletromagnetismo clássico a primeira vez em que se apresentou uma função lagrangiana compatível com a teoria da relatividade de Einstein foi em 1920, com o trabalho de Darwin.<sup>62</sup> O potencial de Darwin é dado por

$$S^D = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left[ 1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_1 \cdot \hat{r}_{12})(\vec{v}_2 \cdot \hat{r}_{12})}{2c^2} \right] . \quad (1.57)$$

---

<sup>62</sup>[Dar20].

Esta expressão é relativisticamente correta até segunda ordem em  $1/c$ , inclusive, sendo muito utilizada hoje em dia.<sup>63</sup> Todas as grandezas como  $r_{12}$ ,  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ ,  $\hat{r}_{12}$  etc. que aparecem nesta expressão são calculadas no tempo presente  $t$  e não no tempo retardado  $t^*$ , pois para chegar a esta expressão Darwin fez uma expansão em série de Taylor dos potenciais em torno do tempo presente  $t$ .

A força de Liénard-Schwarzschild pode ser deduzida desta energia lagrangiana de Darwin utilizando a equação (1.55), ver o exercício 1.11. Isto mostra que a força de Liénard-Schwarzschild não apenas inclui os efeitos do tempo retardado e os fenômenos de radiação eletromagnética, mas que também é relativisticamente correta até segunda ordem em  $1/c$ . Mais uma vez isto demonstra que até termos da ordem  $1/c^2$  esta é a expressão completa da força entre cargas pontuais no eletromagnetismo clássico, já que leva em conta (inclui) todos os efeitos possíveis.

A equação de movimento do eletromagnetismo clássico pode ser obtida através da equação (1.56) junto com  $L = T - S$  e a equação (1.57), ver o exercício 1.12.

A hamiltoniana  $H$  de um sistema de duas partículas é definida por:

$$H = \left( \sum_{k=1}^6 \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - L . \quad (1.58)$$

Aplicando esta definição em  $L = T - S$  e na equação (1.57) obtém-se para duas partículas:  $H = T + V^D$ , onde a grandeza  $V^D$  é dada por:

$$V^D = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left[ 1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_1 \cdot \hat{r}_{12})(\vec{v}_2 \cdot \hat{r}_{12})}{2c^2} \right] \neq S^D . \quad (1.59)$$

A diferença entre  $S^D$  e  $V^D$  está no sinal em frente ao termo com  $1/c^2$ . Como veremos, o mesmo vai ocorrer na eletrodinâmica de Weber.

Observando-se que  $S$  e  $T$  não dependem explicitamente do tempo, resulta que  $\partial L/\partial t = 0$  e  $\partial H/\partial t = 0$ . Disto obtém-se que  $H$  é uma constante do movimento,  $dH/dt = 0$ , que neste caso é a própria energia total do sistema  $E$ . Isto é:  $H = E = T + V^D$ , sendo que  $dE/dt = 0$ . Ou seja, embora a lagrangiana clássica seja dada por  $L = T - S^D$ , a hamiltoniana e a energia que se conservam classicamente são dadas por  $H = E = T + V^D$  e não por  $T + S^D$ . Algo análogo vai ocorrer na eletrodinâmica de Weber.

## 1.7 Exercícios

1. Mostre que  $-\nabla_o\phi$ , com  $\phi$  e dado pela equação (1.12), tem o mesmo valor que o campo elétrico  $\vec{E}$  dado pela equação (1.11).

<sup>63</sup>[Jac75, seção 12.7, págs. 593–595] e [BT64, págs. 150–151].

2. Refaça explicitamente todas as contas indicadas no texto para mostrar que as equações de Maxwell (1.32) e (1.33) são compatíveis com a equação de conservação de cargas, (1.37). Ou seja, deduza a equação (1.37) a partir das equações (1.32) e (1.33).
3. Reobtenha explicitamente as equações de Maxwell na forma integral, equações (1.40) a (1.43), a partir das equações (1.32) a (1.35), usando os teoremas de Gauss e Stokes, equações (A.32) e (A.33), além de usar também as identidades vetoriais (A.27) e (A.26).
4. (A) Prove as relações (A.27) e (A.26) usando as expressões de  $\nabla\varphi$ ,  $\nabla\cdot\vec{G}$  e  $\nabla\times\vec{G}$  em termos das componentes como dadas pelas equações (A.13), (A.20) e (A.17). Para isto suponha funções bem comportadas tal que a ordem das derivadas possa ser invertida.  
(B) Use as equações (A.13) e (A.17) para mostrar que:

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Esta expressão é conhecida como o laplaciano de  $\varphi$ .

5. O objetivo deste exercício é obter as equações de onda no caso geral. Para isto vai-se usar a identidade vetorial (A.29). Nesta expressão o laplaciano é dado pela equação (A.28). Suponha que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são funções bem comportadas tal que se possa inverter as ordens das derivadas.  
(A) Aplique o rotacional de ambos os lados da lei de Faraday, equação (1.35), use a identidade vetorial (A.29), a lei de Gauss, equação (1.32), e a lei circuital magnética, equação (1.33), para obter a seguinte equação de onda:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho + \mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}.$$

- (B) Aplique o rotacional de ambos os lados da lei circuital magnética, equação (1.33), use a identidade vetorial (A.29), a equação (1.34) e a lei de Faraday, equação (1.35), para obter a seguinte equação de onda:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = -\mu_0\nabla\times\vec{J}.$$

6. Neste exercício vamos discutir um pouco da questão dos potenciais  $\phi$  e  $\vec{A}$ . As equações de Maxwell dependem apenas dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e também a força de Maxwell-Lorentz na forma da equação (1.29) só depende de



$\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Isto indica que estes são os campos reais do eletromagnetismo clássico, isto é, aqueles que influenciam na força e no movimento das cargas. Como vimos nas equações (1.24) e (1.28), podemos expressar os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em termos dos potenciais  $\phi$  e  $\vec{A}$ . Como o gradiente de uma constante é zero, podemos adicionar ou subtrair uma constante a  $\phi$  sem alterar o valor do campo elétrico ou da força. Da mesma forma, podemos adicionar ao potencial vetor magnético  $\vec{A}$  o gradiente de uma função escalar  $\varphi$  sem alterar o valor de  $\vec{B}$  (lembre-se da equação (A.26)). Isto permite uma certa liberdade na escolha de  $\vec{A}$  e  $\phi$ . Esta escolha vai definir o chamado calibre ou gauge. Apresentamos a seguir os calibres de Coulomb e de Lorentz, dados pela definição do divergente do potencial vetor magnético,  $\nabla \cdot \vec{A}$ :

$$\text{calibre de Coulomb : } \nabla \cdot \vec{A} \equiv 0 ,$$

e

$$\text{calibre de Lorentz : } \nabla \cdot \vec{A} \equiv -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} .$$

Vale ressaltar que tanto em um calibre quanto no outro a força de Maxwell-Lorentz é exatamente a mesma.

Agora podemos obter as equações satisfeitas por  $\phi$  e  $\vec{A}$ . Neste exercício deve-se usar as equações (A.26) até (A.29).

(A) Aplique as expressões para  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em termos de  $\phi$  e  $\vec{A}$ , dadas pelas equações (1.28) e (1.24), nas equações de Maxwell (1.32) a (1.35). Observe que no caso das equações (1.34) e (1.35) se obtém simplesmente a identidade  $0 = 0$ . Mostre que nos outros dois casos se obtém:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} ,$$

e

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \frac{1}{c^2} \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} .$$

(B) Use então o calibre de Coulomb para chegar em:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} ,$$

e

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} .$$

A primeira destas equações é conhecida como equação de Poisson.

(C) Em vez do calibre de Coulomb, use agora o calibre de Lorentz no resultado obtido na letra (A), para chegar em:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

e

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0 \vec{J}.$$

Numa região sem cargas e sem correntes resulta destas equações, assim como das relações (1.46) e (1.47), que todas as componentes retangulares de  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{A}$  e  $\phi$  satisfazem à mesma equação, ou seja:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\xi = 0.$$

A equação satisfeita pelo potencial  $\phi$  no calibre de Coulomb é diferente da equação satisfeita por  $\phi$  no calibre de Lorentz. Devido a este fato estas equações vão fornecer soluções diferentes para o potencial  $\phi$ , o mesmo acontecendo com as equações para o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  nestes dois calibres. Apesar deste fato, isto não é um problema, já que no eletromagnetismo clássico os campos realmente importantes (aqueles que influenciam na força sobre as cargas de prova) são  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , e não os potenciais  $\phi$  e  $\vec{A}$ . Não estamos considerando nesta análise o efeito Aharonov-Bohm e outros aspectos da mecânica quântica. E tanto no calibre de Coulomb quanto no calibre de Lorentz resulta que  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  satisfazem às mesmas equações, (1.46) e (1.47). A força de Maxwell-Lorentz também tem o mesmo valor nos dois calibres.

7. O campo elétrico que aparece na força de Maxwell-Lorentz é dado em termos dos potenciais pela equação (1.28).

(A) Obtenha daí

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}).$$

(B) Use o calibre de Coulomb e sua correspondente equação de onda para chegar na equação (1.32).

(C) Use agora o calibre de Lorentz e sua correspondente equação de onda no resultado da letra (A), para chegar na equação (1.32).

8. Dedução da lei de Faraday a partir do campo elétrico que aparece na força de Maxwell-Lorentz.

(A) Aplique o rotacional nos dois lados da expressão para o campo elétrico  $\vec{E}$  na equação (1.28).

(B) Use as equações (A.26) e (1.24) para chegar na equação (1.35).

Este exercício ilustra o fato de que apenas a componente  $\partial\vec{A}/\partial t$  do campo elétrico é relevante para a lei de Faraday.

9. Suponha que as funções  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sejam bem comportadas tal que se possa inverter a ordem das derivadas.

(A) Aplique o divergente de ambos os lados da lei de Faraday, equação (1.35), usando também a equação (A.27) para concluir que  $\partial(\nabla \cdot \vec{B})/\partial t = 0$ . Ou seja,  $\nabla \cdot \vec{B}$  não depende explicitamente do tempo. (B) Faça agora a hipótese adicional (isto não vem das equações (1.32) e (1.33) nem da equação (1.35)) de que em algum momento do passado  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  em todos os pontos do espaço. Com esta hipótese adicional se chega então na equação (1.34).

(C) Aplique o divergente de ambos os lados da equação (1.33), assim como a relação (A.27), para concluir que:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E}) .$$

(D) Use agora a equação de conservação de cargas, equação (1.37), mais o fato de que  $\vec{J} = \rho\vec{v}$  para deduzir a lei de Gauss, equação (1.32), a menos de uma constante que pode ser fixada como zero. Deve-se lembrar que a equação (1.37) de conservação de cargas não pode ser deduzida apenas das equações (1.33) a (1.35).

Este exercício ilustra que só se pode deduzir alguma das equações de Maxwell a partir das outras três, caso se façam outras hipóteses adicionais.

10. Neste exercício vamos deduzir a lei de Gauss a partir da força de Coulomb, equação (1.9). Esta força no caso da interação de  $q_o$  com outras  $N$  cargas pode ser escrita como a equação (1.10), com o campo elétrico dado pela equação (1.11). Da equação (1.11) vemos que o campo elétrico de cada carga  $q_j$ , ou seja,  $\vec{E}_j \equiv q_j \hat{r}_{oj} / (4\pi\varepsilon_o r_{oj}^2)$ , aponta radialmente a partir desta carga e varia com o quadrado da distância a partir da carga. Para chegar à lei de Gauss vamos supor inicialmente uma única carga  $q_j$  e uma superfície fechada  $S_o$  como indicado na figura 1.6.

(A) Seja  $d\vec{a}_o$  um elemento de área desta superfície localizado no ponto  $\vec{r}_o$ , normal à superfície em cada ponto, além de apontar sempre para fora, por convenção. Mostre que:

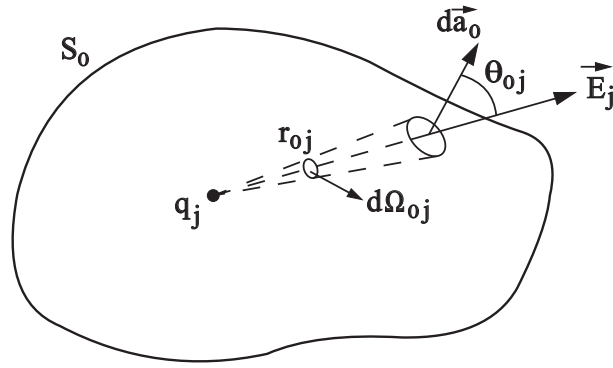


Figura 1.6: Geometria da lei de Gauss.

$$\vec{E}_j \cdot d\vec{a}_o = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_o} \frac{\cos\theta_{oj}}{r_{oj}^2} da_o ,$$

onde  $\theta_{oj}$  é o ângulo entre  $\hat{r}_{oj}$  e  $d\vec{a}_o$ . Como  $\vec{E}_j$  aponta radialmente a partir de  $q_j$ , resulta que  $\cos\theta_{oj} da_o = r_{oj}^2 d\Omega_{oj}$ , onde  $d\Omega_{oj}$  é o elemento de ângulo esférico subentendido por  $da_o$  na posição de  $q_j$  (ver a figura 1.6).

(B) Utilize a definição de  $\theta_{oj}$  para mostrar que:

$$\vec{E}_j \cdot d\vec{a}_o = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_o} d\Omega_{oj} .$$

(C) Integre  $\vec{E}_j \cdot d\vec{a}_o$  sobre toda a superfície  $S_o$  para mostrar que  $\oint d\Omega_{oj} = 4\pi$  se  $q_j$  estiver dentro da superfície  $S_o$ , enquanto que  $\oint d\Omega_{oj} = 0$  se  $q_j$  estiver fora da superfície  $S_o$ .

(D) Use o princípio da superposição para somar a contribuição das  $N$  cargas e concluir o seguinte:

$$\oint_{S_o} \vec{E} \cdot d\vec{a}_o = \frac{1}{\epsilon_o} \sum_{j=1}^m q_j = \frac{1}{\epsilon_o} \int \int \int_{V_o} \rho dV_o ,$$

onde a somatória  $\sum_{j=1}^m$  se estende apenas às cargas que estão dentro de  $S_o$  e a última igualdade é obtida supondo-se uma distribuição contínua de cargas,  $q \rightarrow \rho dV$ , sendo  $V_o$  o volume englobado por  $S_o$ . Esta é a forma integral da lei de Gauss, equação (1.40).

(E) Para se chegar à forma diferencial da lei de Gauss, equação (1.32), basta usar o teorema de Gauss, equação (A.32). Com isto vem:

$$\int \int \int_{V_o} \left( \nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_o} \right) dV_o = 0 .$$

Como esta equação é válida qualquer que seja o volume  $V_o$ , resulta que o integrando tem de ser nulo. Desta forma chegamos então na equação (1.32).

11. Deduza as três componentes da força de Liénard-Schwarzschild, equação (1.53), a partir da energia lagrangiana de Darwin, equação (1.57), utilizando a equação (1.55) e as equações análogas para as outras componentes.
12. Deduza a equação de movimento do eletromagnetismo clássico utilizando a equação (1.56), a energia cinética dada por  $T = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$ , assim como a equação (1.57). O resultado do exercício 1.11 pode ser utilizado aqui.
13. Mostre que a hamiltoniana do eletromagnetismo clássico é dada por  $H = T + V^D$  aplicando a equação (1.58), usando que  $L = T - S$ , utilizando que a energia cinética é dada por  $T = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$ , empregando ainda a equação (1.57).

# Capítulo 2

## Eletrodinâmica de Weber

### 2.1 Wilhelm Weber

Nesta seção apresentamos uma descrição breve da vida de Weber e de algumas de suas pesquisas em eletromagnetismo.<sup>1</sup>

Wilhelm Eduard Weber foi um físico experimental alemão que nasceu em Wittenberg em 1804. Sua família mudou-se para Halle em 1813. Ele entrou na Universidade de Halle em 1822 para estudar ciências e lá apresentou sua tese de doutorado em 1826. Trabalhou sob a orientação de J. S. C. Schweigger em acústica, trabalho experimental e teórico. Tornou-se professor assistente da Universidade de Halle em 1828. Neste ano encontrou-se com C. F. Gauss (1777–1855) em um congresso científico em Berlim. Em 1831 obteve o cargo de professor de física na Universidade de Göttingen, onde Gauss já era professor desde 1807. Foi Gauss quem despertou em Weber o interesse por eletromagnetismo, um assunto sobre o qual nunca tinha trabalhado até então. Weber permaneceu nesta universidade até 1837 e durante este período houve uma colaboração científica muito intensa com Gauss, ficando ambos muito amigos. Neste ano Weber perdeu seu cargo na Universidade de Göttingen por motivos políticos com o novo rei de Hanover, Ernst August. Apesar disso, Weber continuou a trabalhar e morar na cidade de Göttingen em colaboração com Gauss e também viajou a Londres e Paris. Tornou-se um professor de física na Universidade de Leipzig em 1843, ficando lá até 1848. Na Universidade de Leipzig ele realizou pesquisas junto a seus irmãos Ernst Heinrich e Eduard, ambos anatomistas, e também em colaboração com G. T. Fechner, um amigo da família. Ernst Heinrich e Fechner estabeleceram em 1834 e 1860 aquela que é conhecida como a lei de Weber-Fechner na psicologia. Fechner era um atomista e influenciou W. Weber em questões científicas. Foi em Leipzig que Weber formulou sua força entre cargas elétricas, em 1846, e a correspondente energia potencial em 1848. Ele retornou à sua antiga posição na Universidade de Göttingen em

---

<sup>1</sup>[Wie60], [Wie67], [Woo81], [JM86], [Ath89], [Tho85], [O’R65, volume 2, capítulo 11], [Whi73, capítulo 7], [Wis81], [Har82, págs. 32, 96 e 103–107], [Arc89], [Ass91b], [Ass92b], [Ass94], [Ass95], [Fuk03], [AH07], [AH09], [AWW11], [AH13], [AWW14] etc.

1848 após a revolução que aconteceu neste ano na Itália e na Alemanha (a Alemanha se tornou um país independente em 1871). Ele tornou-se diretor do observatório astronômico e colaborou intensamente com Rudolph Kohlrausch, com quem realizou importantes medidas eletromagnéticas em 1855–1856. Weber terminou suas pesquisas na década de 1870, deixou de lecionar em 1873 e morreu com 86 anos em Göttingen, em 1891.

Em 1832 Gauss apresentou um trabalho, escrito com o auxílio de Weber, em que ele introduziu as unidades absolutas no eletromagnetismo. Neste sistema, a medida da intensidade de uma propriedade magnética era reduzida a medidas de comprimento, tempo e massa. Desta maneira, essas medidas podiam ser reproduzidas em qualquer parte do mundo sem ser necessário calibrar qualquer instrumento magnético em particular. Em seu trabalho, Gauss obteve as medidas absolutas do magnetismo em barra (de um ímã metálico usual) e do magnetismo terrestre ou geomagnetismo (força magnética terrestre que orienta a agulha imantada de uma bússola). Este trabalho fundamental de Gauss já se encontra traduzido para a língua portuguesa.<sup>2</sup> Em 1840, Weber definiu a unidade eletromagnética absoluta de corrente em termos da deflexão de uma agulha magnética por um galvanômetro tangente. Ele determinou a quantidade de água decomposta pelo fluxo de uma unidade de corrente durante um segundo, isto é, por uma unidade de carga. Em 1851, ele definiu uma medida absoluta para a resistência elétrica (há uma tradução para a língua inglesa deste trabalho).<sup>3</sup> Em 1855 e 1856 ele colaborou com R. Kohlrausch na medida da razão entre as unidades eletrodinâmicas e eletrostáticas de carga.<sup>4</sup> Maxwell elogiou Weber por estes feitos nas seguintes palavras:<sup>5</sup>

A introdução, por W. Weber, de um sistema de unidades absolutas para a medida de grandezas elétricas é um dos passos mais importantes no progresso da ciência. Tendo já, junto com Gauss, colocado a medida das grandezas magnéticas nos primeiros lugares dos métodos de precisão, Weber continuou em suas *Electrodynamic Measurements* [Medições eletrodinâmicas, título geral de vários trabalhos de Weber tratando deste assunto] não apenas estabelecendo princípios sólidos para fixar as unidades a serem empregadas, mas também fazendo determinações de quantidades elétricas particulares em termos destas grandezas, com um grau de precisão até então nunca alcançado. Ambos os sistemas de unidades, eletromagnético e eletrostático, devem seu desenvolvimento e suas aplicações práticas a estas pesquisas.

Vamos agora citar Weber quando ele descreveu estas unidades absolutas

---

<sup>2</sup>[Ass03b].

<sup>3</sup>[Web61].

<sup>4</sup>[Web55b], [WK56], traduzido para a língua inglesa em [WK03] e para a língua portuguesa em [WK08], [KW57] e [WK68].

<sup>5</sup>[Max54, volume 2, artigo 545, págs. 193–194].

de medida no eletromagnetismo:<sup>6</sup>

Se há medidas para espaço e tempo, uma medida fundamental especial para a velocidade não é necessária; e de maneira semelhante nenhuma medida fundamental especial para a resistência elétrica é necessária se há medidas para a força eletromotriz e para a intensidade de corrente; pois então pode-se tomar como uma unidade de medida de resistência aquela resistência que possui um condutor no qual uma unidade de medida de força eletromotriz produz uma unidade de medida de intensidade de corrente. Disto depende a redução das medidas de resistência elétrica a um padrão absoluto.

Pode ser pensado que esta redução seria efetuada de maneira simplificada voltando às dimensões especiais de comprimento e área de seção reta e nos fixando naquele metal (o cobre) que se adapta melhor e é mais frequentemente utilizado para tais condutores. Neste caso a unidade absoluta de medida da resistência seria a resistência que um condutor de cobre possui cujo comprimento é igual à medida de comprimento e cuja seção reta é igual à medida de superfície, no qual, portanto, além das medidas de comprimento e superfície, a resistência específica do cobre tem de ser dada como unidade para a resistência específica das superfícies condutoras. Assim seria necessária uma medida fundamental especial para as resistências específicas, cuja introdução está aberta a críticas. Em primeiro lugar, porque não haveria ganho no número das medidas fundamentais se, para ficar sem uma medida fundamental para a resistência absoluta, for necessário introduzir uma outra medida fundamental que de outra forma é supérflua. E em segundo lugar, nem o cobre nem qualquer outro metal é adequado para ser usado no estabelecimento de uma medida fundamental para as resistências. Pois Jacobi diz que há diferenças nas resistências mesmo dos metais quimicamente mais puros, que não podem ser explicadas por uma diferença em seus tamanhos; e que, por isto, se um físico referisse seu reostato e seu multiplicador a um fio de cobre com um comprimento de um metro e com uma espessura de um milímetro, outros físicos não poderiam estar certos de que seu fio de cobre e o deles teriam o mesmo coeficiente de resistência, isto é, se a resistência específica [resistividade] de todos estes fios era a mesma. A redução das medidas de resistência galvânica a uma medida absoluta só pode portanto ter uma importância essencial e encontrar uma aplicação prática, se ela ocorrer de acordo com o primeiro método, no qual não se pressupõe nenhuma outra medida a não ser aquelas para a força eletromotriz e para a intensidade de corrente.

---

<sup>6</sup>[Web51] com tradução para o inglês em [Web61].



Surge então a questão, o que são as medidas de força eletromotriz e de intensidade de corrente? Ao medir estas grandezas não são necessárias medidas fundamentais específicas, pois elas podem ser relacionadas a medidas absolutas se forem dadas as medidas magnéticas absolutas para o magnetismo em barra e para o magnetismo terrestre, assim como as medidas de espaço e de tempo.

Pode-se entender como uma unidade absoluta da medida da força eletromotriz, a força eletromotriz exercida pela unidade de medida do magnetismo terrestre sobre um circuito fechado, se este último for girado de tal forma que a área de sua projeção sobre um plano normal à direção do magnetismo terrestre cresce ou decresce durante a unidade de tempo por uma unidade de superfície. Pode-se entender como uma unidade absoluta da intensidade de corrente, a intensidade de corrente que, quando circulando através de um plano cujo tamanho é uma unidade de medida, exerce, de acordo com as leis eletromagnéticas, a mesma ação a distância que um ímã de barra que contém uma unidade de medida do magnetismo em barra. As medidas absolutas do magnetismo em barra e do magnetismo terrestre são conhecidas a partir do tratado de Gauss, *Intensitas Vis Magneticae Terrestris ad mensuram absolutam revocata*, Göttingen, 1833 (Poggendorff's *Annalen*, volume xxviii, págs. 241 e 591).<sup>7</sup> A partir desta afirmação fica claro que as medidas de resistências elétricas podem ser relacionadas a um padrão absoluto, desde que as medidas de espaço, tempo e massa sejam dadas como medidas fundamentais; pois as medidas de magnetismo em barra e de magnetismo terrestre dependem simplesmente destas três medidas fundamentais.

Para uma discussão das medidas absolutas em eletromagnetismo ver ainda o trabalho de Jungnickel e McCormach.<sup>8</sup>

O diamagnetismo foi descoberto por Faraday em 1845, que inicialmente explicou-o pela hipótese da polaridade diamagnética. Mais tarde ele abandonou esta hipótese. Ela foi, contudo, aceita por Weber em 1848, que também demonstrou experimentalmente em 1852 a existência do efeito. Ele também estendeu a teoria do magnetismo de Ampère para incluir os fenômenos do diamagnetismo. Weber postulou uma distinção radical entre as naturezas do paramagnetismo e do diamagnetismo, que foi mais tarde confirmada por muitos fatos experimentais. Já existem traduções para a língua inglesa destes dois artigos de 1848 e 1852.<sup>9</sup> A teoria de Weber sobre o diamagnetismo foi apoiada por Maxwell e até hoje é adotada em seus aspectos principais.<sup>10</sup>

<sup>7</sup>Tradução para a língua portuguesa em [Ass03b].

<sup>8</sup>[JM86, volume 1, págs. 63-75 e 122-145].

<sup>9</sup>[Web66e] e [Web66d].

<sup>10</sup>[Max54, volume 2, capítulo VI: Teoria de Weber sobre o magnetismo induzido, artigos

Weber introduziu seu eletrodinamômetro em 1846.<sup>11</sup> Maxwell afirmou o seguinte sobre as medidas que Weber realizou com este eletrodinamômetro:<sup>12</sup>

Os experimentos que [Weber] realizou com ele fornecem a prova experimental mais completa da precisão da fórmula de Ampère quando aplicada a correntes fechadas e formam uma parte importante das pesquisas pelas quais Weber elevou a um alto grau de precisão as determinações numéricas das grandezas elétricas.

A forma do eletrodinamômetro de Weber, no qual uma espira é suspensa dentro da outra e sofre a ação de um torque que tende a girá-la ao redor do eixo vertical, é provavelmente a mais bem adaptada para medidas absolutas.

Devido a estes fatos por algum tempo se usou o nome “Weber” para designar a unidade de corrente. Em um congresso internacional realizado em Paris em 1881 sobre as unidades elétricas, H. von Helmholtz (1821–1894), o chefe da delegação alemã, propôs o nome “Ampère” para a unidade de corrente em vez de “Weber,” e isto foi aceito. O termo “Weber” foi introduzido oficialmente para a unidade prática de fluxo magnético em 1935, em homenagem a Wilhelm Weber. Weber e Helmholtz foram grandes cientistas da Alemanha no século XIX e suas carreiras foram similares em muitos aspectos (ambos trabalharam com fisiologia, acústica, hidrodinâmica, eletromagnetismo etc.). Apesar deste fato, suas relações pessoais sempre foram difíceis. Talvez esta tenha sido uma das razões pelas quais Helmholtz nunca tenha aceitado a eletrodinâmica de Weber. Mais para a frente discutiremos outros aspectos relacionando Helmholtz e Weber.

A força de Coulomb entre as cargas  $e$  e  $e'$  separadas pela distância  $r$ , de 1785, pode ser escrita em unidades eletrostáticas como:

$$F = \frac{ee'}{r^2} . \quad (2.1)$$

A repulsão ou atração ocorre quando esta expressão tem um valor positivo ou negativo, respectivamente.

Em 1822 Ampère obteve sua força entre os elementos de corrente  $ids$  e  $i'ds'$  quando eles estão separados pela distância  $r$ . No capítulo 3 discutiremos esta expressão em detalhes. Em unidades eletrodinâmicas esta força pode ser expressa como:

$$d^2F = -\frac{ii'dsds'}{r^2} \left( \cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right) . \quad (2.2)$$

---

442–448, págs. 79–94] e [Whi73, págs. 194–195 e 208–211].

<sup>11</sup>[Web48a] com tradução para a língua inglesa em [Web66f], [Max54, volume 2, artigo 725, págs. 367–371, “Eletrodinamômetro de Weber”] e [Har82, págs. 32–33].

<sup>12</sup>[Max54, volume 2, artigo 725, pág. 371].

Novamente, a repulsão ou atração ocorre quando esta força tem um valor positivo ou negativo, respectivamente. Nesta equação  $\varepsilon$  é o ângulo entre as direções positivas das correntes em  $ds$  e  $ds'$ , enquanto que  $\theta$  e  $\theta'$  são os ângulos entre as direções positivas das correntes em  $ds$  e  $ds'$  e a linha reta que une estes elementos. Para unificar a eletrostática (força de Coulomb) com a eletrodinâmica (força de Ampère), Weber propôs em 1846 que cada elemento de corrente em condutores metálicos devia ser considerado como as cargas usuais em movimento. Considerou então a corrente  $i$  como  $eu a$ , onde  $u$  é a velocidade de deslocamento, de migração ou de arraste da carga  $e$  (velocidade das cargas em relação ao metal condutor), sendo  $a$  um fator constante cuja dimensão é  $sm^{-1}$ . Ele também assumiu a hipótese introduzida por Gustav Fechner (1801-1887), de 1845, de acordo com a qual a corrente em condutores metálicos é devida a uma quantidade igual de cargas positivas e negativas movendo-se em direções opostas em relação ao fio, com velocidades iguais.<sup>13</sup> O trabalho no qual Fechner expôs suas ideias, que acabou influenciando Weber já que nesta época ambos tinham bastante contato científico, é seu último trabalho em física.<sup>14</sup> Com estas ideias e trabalhando algebricamente, começando com a força de Ampère, equação (2.2), juntamente com a força de Coulomb, equação (2.1), Weber chegou à seguinte expressão em 1846 para a força entre duas cargas em movimento relativo (novamente em unidades eletrostáticas):

$$F = \frac{ee'}{r^2} \left[ 1 - \frac{1}{c_W^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{c_W^2} r \frac{d^2r}{dt^2} \right]. \quad (2.3)$$

O trabalho fundamental de Weber é de 1846 e já se encontra traduzido para a língua inglesa.<sup>15</sup> Uma versão um pouco reduzida deste artigo, de 1848, na qual Weber introduziu pela primeira vez sua energia que depende da velocidade relativa entre as cargas que estão interagindo, também já se encontra traduzida para a língua inglesa.<sup>16</sup> O procedimento matemático seguido por Weber para chegar a esta força a partir das forças de Coulomb e de Ampère foi discutido por Maxwell e Whittaker, entre outros.<sup>17</sup> No capítulo 3 apresentamos o procedimento inverso, ou seja, começamos com a força de Weber e deduzimos a força de Ampère entre elementos de corrente (a força de Coulomb já sai diretamente da força de Weber nos casos em que não há movimento relativo entre as cargas). O artigo de Weber de 1846 foi o primeiro de oito grandes publicações suas que apareceram entre 1846 e 1878 sob o título geral da série: Determinação das medidas eletrodinâmicas.<sup>18</sup> A oitava Memória só foi publicada postumamente em suas obras completas. Três destas oito

<sup>13</sup>[Fec45].

<sup>14</sup>[JM86, volume 1, págs. 137–138].

<sup>15</sup>[Web46] e [Web07].

<sup>16</sup>[Web48a] e [Web66f].

<sup>17</sup>[Max54, volume 2, capítulo 23, artigos 846–851, págs. 480–483], com tradução para a língua portuguesa em [Ass92g], assim como [Whi73, págs. 201–203].

<sup>18</sup>[Web46], [Web52b], [Web52a], [KW57], [Web64], [Web71], [Web78] e [Web94b].

Memórias principais já foram traduzidas para a língua inglesa, a saber, a primeira, *Determinações de medidas eletrodinâmicas: Sobre uma lei universal da ação elétrica*;<sup>19</sup> a sexta, *Medidas eletrodinâmicas—Sexta Memória, relacionada especialmente ao princípio de conservação da energia*;<sup>20</sup> e a oitava, *Determinações de medidas eletrodinâmicas: Particularmente com relação à conexão das leis fundamentais da eletricidade com a lei da gravitação*.<sup>21</sup>

A constante  $c_W$  que aparece na equação (2.3) é a razão entre as unidades eletrodinâmicas e eletrostáticas de carga. Ela tem as dimensões de uma velocidade ( $m/s$ ). Em seus artigos de 1846 e 1848 Weber a representou por  $4/a$ . Em 1856 ele estava escrevendo  $c$  em vez de  $4/a$ , assim como o estava fazendo Kirchhoff em 1857.<sup>22</sup> Mas a constante que Weber representava pelos símbolos  $c$  ou  $c = 4/a$  não é o nosso  $c$  atual dado por  $c = (\epsilon_o\mu_o)^{-1/2} = 2,998 \times 10^8 m/s$ , mas  $\sqrt{2}$  vezes esta última quantidade. Para evitar confusões escrevemos  $c_W$  na equação (2.3), seguindo o procedimento adotado por Rosenfeld.<sup>23</sup> Assim na equação (2.3) temos:  $c_W = \sqrt{2}c = \sqrt{2}/\sqrt{\epsilon_o\mu_o}$ .

Embora Weber tenha introduzido esta constante em 1846, a primeira medida da razão entre as unidades eletrodinâmica e eletrostática de cargas,  $c_W$ , só aconteceu entre 1855 e 1857.<sup>24</sup> Ela foi realizada por W. Weber em colaboração com R. Kohlrausch.<sup>25</sup> O que eles encontraram foi  $c_W = 4,39 \times 10^8 m/s$ . Isto significa que  $c = c_W/\sqrt{2} = (\epsilon_o\mu_o)^{-1/2}$ , que é a razão entre as unidades eletromagnéticas e eletrostáticas de carga, se encontrou então como sendo  $c = 3,1 \times 10^8 m/s$ . O valor que encontraram era essencialmente o mesmo que o conhecido valor da velocidade da luz no ar. Este resultado de 1856 e a descoberta de Faraday em 1845 da rotação do plano de polarização de um feixe de luz atravessando um material na presença de um campo magnético foram as primeiras provas quantitativas de uma conexão entre a óptica e o eletromagnetismo. Vale a pena citar aqui Kirchner em um artigo em que ele descreveu o procedimento experimental deste trabalho extremamente importante de Weber:<sup>26</sup>

Considerando que esta razão [entre as unidades eletrodinâmicas e eletrostáticas de carga] não era conhecida então nem mesmo quanto à sua ordem de grandeza e que tratamos portanto com um esforço realmente pioneiro e se observamos além disto o equipamento primitivo com o qual tinham de trabalhar, temos de admirar o trabalho de Weber e Kohlrausch como uma obra de arte da física

---

<sup>19</sup>[Web07].

<sup>20</sup>[Web72].

<sup>21</sup>[Web08].

<sup>22</sup>[Kir57a].

<sup>23</sup>[Ros57].

<sup>24</sup>[JM86, volume 1, págs. 145–146].

<sup>25</sup>[Web55b], [WK56], traduzido para a língua inglesa em [WK03] e para a língua portuguesa em [WK08], [KW57] e [WK68].

<sup>26</sup>[Kir57].

experimental, sendo que existem bem poucos exemplos como este na história de nossa ciência.

Logo em seguida a esta medida, Weber e Kirchhoff, trabalhando independentemente um do outro, mas ambos utilizando a eletrodinâmica de Weber, previram a existência de modos de oscilação periódicos da corrente elétrica em circuitos condutores de resistência desprezível, cuja velocidade de propagação tinha o mesmo valor  $c_W/\sqrt{2} = c$  que a velocidade da luz. Este resultado é independente da seção reta do fio, de sua condutividade e da densidade de carga no fio. Os trabalhos de Kirchhoff foram publicados em 1857 e já se encontram traduzidos para a língua inglesa.<sup>27</sup> O trabalho simultâneo e mais amplo de Weber foi publicado com atraso e só apareceu em 1864.<sup>28</sup> Weber e Kirchhoff foram os primeiros a deduzir a equação de onda descrevendo perturbações na corrente que se propaga ao longo de um fio. Para obter esta equação utilizaram a força de Weber, equação (2.3), a equação de conservação de cargas, equação (1.37), e a lei de Ohm generalizada, equação (1.27). Com isto Weber e Kirchhoff chegaram na seguinte equação de onda, também conhecida como a equação do telegrafista:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = K \frac{\partial I}{\partial t} . \quad (2.4)$$

Nesta equação  $I$  é a corrente,  $s$  é uma distância ao longo do fio a partir de uma origem sobre ele fixada arbitrariamente e  $K$  é uma constante proporcional à resistividade do fio. Uma equação similar foi obtida para a densidade de carga livre ao longo da superfície do fio. O que é impressionante é que eles obtiveram este resultado com a força de Weber que é do tipo de ação a distância. Para chegar a esta equação eles não utilizaram os conceitos de éter, da corrente de deslocamento, nem do tempo retardado. E tudo isto foi realizado antes de Maxwell escrever suas equações na forma completa, o que só aconteceu entre 1861–1864. Este é um fato histórico marcante que deve sempre ser mantido em mente. Existem alguns trabalhos recentes discutindo a equação do telegrafista como obtida por Weber e Kirchhoff, assim como novas aplicações para outras geometrias.<sup>29</sup>

Maxwell introduziu em 1861–1862 o termo com a corrente de deslocamento na lei circuital para o campo magnético, ou seja, o termo com  $c^2$  na equação (1.33). Neste artigo, seu segundo trabalho tratando sobre o eletromagnetismo, ele também obteve que uma perturbação eletromagnética se propagaria no meio eletromagnético com a velocidade  $c = (\epsilon_o \mu_o)^{-1/2}$ . Naquela época aqueles que trabalhavam com modelos de éter precisavam de um meio para propagar a

<sup>27</sup>[Kir57a] e [GA94].

<sup>28</sup>[Web64], [Ros57], [Ros81] e [JM86, volume 1, págs. 144-6 e 296-7].

<sup>29</sup>[Ass98a], [Ass00a], [Ass00b], [HA00], [AT00], [HA01], [Ass03a], [AH05], [AH07, apêndice B: Gustav Kirchhoff e as Cargas Superficiais], [AH09, apêndice B: Gustav Kirchhoff e as Cargas Superficiais] e [AH13, apêndice B: Gustav Kirchhoff e as Cargas Superficiais].

luz (o éter luminoso), precisavam de um outro meio para transmitir os efeitos elétricos e magnéticos (o éter eletromagnético), assim como precisavam de um outro meio para transmitir a força gravitacional. Com seu modelo Maxwell conseguiu unificar ao menos dois destes meios (o éter luminoso e o éter eletromagnético). Aqui vão suas palavras (suas ênfases):<sup>30</sup>

A velocidade das ondulações transversas em nosso meio hipotético, calculada a partir dos experimentos eletromagnéticos dos Srs. Kohlrausch e Weber, concorda tão bem com a velocidade da luz calculada a partir dos experimentos ópticos do Sr. Fizeau, que dificilmente podemos impedir a inferência de que *a luz consiste nas ondulações transversas do mesmo meio que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos*.

Analogamente em 1864 Maxwell escreveu o seguinte:<sup>31</sup>

Pelos experimentos eletromagnéticos dos Srs. Weber e Kohlrausch,  $v = 310,740,000$  metros por segundo. [...] A velocidade da luz no ar, pelos experimentos do Sr. Fizeau, é  $V = 314,858,000$ . [...] A concordância destes resultados parece mostrar que a luz e o magnetismo são efeitos da mesma substância e que a luz é uma perturbação eletromagnética que se propaga através do campo de acordo com as leis eletromagnéticas.

Isto indica a grande relação que há entre as medidas de Weber da constante  $c_W$  ou  $c$  com a teoria de Maxwell. Deve ser lembrado que Maxwell só mediu  $c_W$  ou  $c$  em 1868.<sup>32</sup>

Existem diversos trabalhos discutindo outros aspectos deste tópico bem importante.<sup>33</sup>

Os trabalhos completos de Weber já foram publicados, em 6 volumes, entre 1892 e 1894.<sup>34</sup> Já existem traduções para a língua inglesa de alguns de seus artigos mais importantes.<sup>35</sup>

Após esta breve introdução histórica começamos na seção 2.2 a apresentar formalmente a eletrodinâmica de Weber.

<sup>30</sup>[Max65d, ver especialmente a página 500].

<sup>31</sup>[Max65a, ver especialmente as páginas 579–580].

<sup>32</sup>[Max68], [Max65b] e [Max54, volume 2, artigos 786–787, págs. 435–436].

<sup>33</sup>[Kir57], [Ros57], [Wie60], [Wie67], [Woo68], [Woo81], [Wis81], [Ros81], [Har82], [JM86, volume 1, págs. 144–146 e 296–297], [Wie93], [Wie94], [Hec96], [ARW02], [ARW04] e [Wie04].

<sup>34</sup>[Web92b], [Web92a], [Web93], [WW93], [Web94c] e [WW94].

<sup>35</sup>[Ass10c], [WW94] e [WW92], [Web46] e [Web07], [Web71] e [Web72], [Web94b] e [Web08], [Web48a] e [Web66f], [WK56] e [WK03], [Web48b] e [Web66e], [Web52c] e [Web66d], [Web55a], [Web51] e [Web61], [GW66], [Web37] e [Web66b], [Web38] e [Web66c], [Web66a], [GW96], [Web94a] e [Web97].

## 2.2 Força de Weber

Neste capítulo vamos discutir a força de Weber e algumas de suas principais características.

Seja uma carga elétrica pontual  $q_i$  localizada em  $\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$  e uma outra carga  $q_j$  localizada em  $\vec{r}_j = x_j\hat{x} + y_j\hat{y} + z_j\hat{z}$  em relação à origem  $O$  de um sistema de referência inercial. Seja  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}_{ij}|$  a distância entre elas. De acordo com Weber a força exercida pela carga  $q_j$  na carga  $q_i$  é dada por (usando a notação vetorial moderna e no Sistema Internacional de Unidades):

$$\vec{F}_{ji} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_o} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij}\ddot{r}_{ij}}{c^2} \right), \quad (2.5)$$

onde

$$\dot{r}_{ij} \equiv \frac{d}{dt} r_{ij}, \quad (2.6)$$

e

$$\ddot{r}_{ij} \equiv \frac{d^2}{dt^2} r_{ij} = \frac{d}{dt} \dot{r}_{ij}. \quad (2.7)$$

Nesta equação temos ainda que  $r_{ij}$  e  $\hat{r}_{ij}$  são dados pela equação (1.6). A constante  $c$  que aparece nesta equação é a razão entre as unidades eletromagnéticas e eletrostáticas de carga, como já vimos. No Sistema Internacional de Unidades ela pode ser escrita como  $c = (\epsilon_o\mu_o)^{-1/2}$  e o valor medido para esta constante é  $c = 2,998 \times 10^8$  m/s. As velocidades e acelerações das cargas relativas a um sistema de referências arbitrário  $S$  são dadas por  $\vec{v}_m \equiv d\vec{r}_m/dt$  e  $\vec{a}_m \equiv d\vec{v}_m/dt = d^2\vec{r}_m/dt^2$ , com  $m = i, j$ . As velocidades relativas entre elas são definidas por:

$$\vec{v}_{ij} \equiv \vec{v}_i - \vec{v}_j = \frac{d\vec{r}_{ij}}{dt}, \quad (2.8)$$

e

$$\vec{a}_{ij} \equiv \vec{a}_i - \vec{a}_j = \frac{d\vec{v}_{ij}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{ij}}{dt^2}. \quad (2.9)$$

Das equações (2.6) a (2.9) podemos obter por simples derivadas temporais a velocidade *radial* relativa,  $\dot{r}_{ij}$ , assim como a aceleração *radial* relativa,  $\ddot{r}_{ij}$ , que aparecem na força de Weber, equação (2.5). Utilizamos ainda que  $x_{ij} \equiv x_i - x_j$ ,  $y_{ij} \equiv y_i - y_j$ ,  $z_{ij} \equiv z_i - z_j$  e que  $\dot{x}_{ij} \equiv dx_{ij}/dt$ ,  $\dot{y}_{ij} \equiv dy_{ij}/dt$ ,  $\dot{z}_{ij} \equiv dz_{ij}/dt$ ,  $\ddot{x}_{ij} \equiv d^2x_{ij}/dt^2$ ,  $\ddot{y}_{ij} \equiv d^2y_{ij}/dt^2$ ,  $\ddot{z}_{ij} \equiv d^2z_{ij}/dt^2$ . Com isto obtemos então (ver também o exercício 2.1):

$$\dot{r}_{ij} \equiv \frac{dr_{ij}}{dt} = \frac{x_{ij}\dot{x}_{ij} + y_{ij}\dot{y}_{ij} + z_{ij}\dot{z}_{ij}}{r_{ij}} = \hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}, \quad (2.10)$$

e

$$\ddot{r}_{ij} \equiv \frac{d\dot{r}_{ij}}{dt} = \frac{d^2 r_{ij}}{dt^2} = \frac{1}{r_{ij}} \left[ \vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} - (\hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij} \right]. \quad (2.11)$$

Existem situações nas quais  $r_{ij}$  poderá ser diferente de  $\sqrt{\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}} = (\dot{x}_{ij}^2 + \dot{y}_{ij}^2 + \dot{z}_{ij}^2)^{1/2}$ , assim como  $\ddot{r}_{ij}$  poderá ser diferente de  $\sqrt{\vec{a}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}} = (\ddot{x}_{ij}^2 + \ddot{y}_{ij}^2 + \ddot{z}_{ij}^2)^{1/2}$ , além de  $\ddot{r}_{ij}$  também poder ser diferente de  $\hat{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij} = (x_{ij}\ddot{x}_{ij} + y_{ij}\ddot{y}_{ij} + z_{ij}\ddot{z}_{ij})/r_{ij}$ . Uma destas situações é o caso no qual uma das cargas está orbitando ao redor da outra carga, em relação a um certo sistema de referência. Uma outra situação é quando olhamos um sistema de duas cargas em repouso relativo entre si, através de diferentes sistemas de referência, sendo que um destes sistemas de referência está girando em relação ao outro sistema de referência no qual estas duas cargas estão em repouso. Algumas destas situações são analisadas no exercício 2.2. Estes casos foram também discutidos em 2014.<sup>36</sup>

As principais propriedades da força de Weber são:

(A) Ela segue a terceira lei de Newton (a de ação e reação) na forma forte, qualquer que seja o estado de movimento das cargas. Isto é,  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ , além de a força estar sempre ao longo da reta que une as duas cargas, tal que  $\vec{F}_{ji}$  e  $\vec{F}_{ij}$  sempre apontam ao longo de  $\hat{r}_{ij}$ . Na seção 2.4 veremos que este fato implica a conservação do momento linear e do momento angular.

(B) A força de Coulomb é um caso particular da força de Weber, obtida no caso em que as cargas estão paradas uma em relação à outra. Ou seja, quando  $\dot{r}_{ij} = 0$  e  $\ddot{r}_{ij} = 0$  resulta que a equação (2.5) se reduz à equação (1.9). Como a primeira das equações de Maxwell, a lei de Gauss, essencialmente nada mais é do que a força de Coulomb escrita de forma diferencial (ver o exercício 1.10), vem que com a força de Weber pode-se deduzir a primeira das equações de Maxwell, juntamente com a primeira parte da força de Maxwell-Lorentz, ou seja, com o termo  $-q\nabla\phi$  da equação (1.30).

(C) A equação de movimento é obtida juntando-se a equação (2.5) com a segunda lei de Newton, equação (1.4).

(D) A velocidade e aceleração que aparecem na equação (2.5) são apenas as velocidades e acelerações radiais *entre as duas cargas*, como dado pelas equações (2.6) e (2.7). Isto nos leva à última e fundamental propriedade da eletrodinâmica de Weber:

(E) Na força de Weber só aparecem grandezas *relacionais* para especificar a posição e o movimento das cargas. Isto é, as únicas grandezas que vão interessar para saber a força são  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ ,  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ ,  $dr_{ij}/dt$  e  $d^2r_{ij}/dt^2$ . Isto significa que cada termo da força tem o mesmo valor para *todos* os observadores, mesmo se os observadores forem não inerciais. O vetor  $\vec{r}_i$  que liga um observador  $O$  à carga  $i$  pode ser diferente de um vetor  $\vec{r}_i'$  que liga a mesma carga a um outro observador  $O'$ . Mas o vetor  $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$  que liga a carga  $j$  à

<sup>36</sup>[Ass14, Apêndice A: Grandezas Relacionais].



carga  $i$  é o mesmo tanto para  $O$  quanto para  $O'$ , isto é,  $\vec{r}'_{ij} = \vec{r}_{ij}$ . O mesmo vale para  $r_{ij}$ ,  $\dot{r}_{ij}$  e  $\ddot{r}_{ij}$ . Por isso se diz que estas são grandezas relacionais, que dependem apenas das relações entre os corpos que estão interagindo, mas que não dependem de quem está observando. Preferimos o termo “relacional,” em vez de “relativo,” para evitar confusão com as teorias da relatividade de Einstein. Como se mostra no exercício 2.2, as grandezas relacionais são  $\vec{r}_{ij}$ ,  $r_{ij}$ ,  $\hat{r}_{ij}$ ,  $\dot{r}_{ij}$  e  $\ddot{r}_{ij}$ . Por outro lado há algumas grandezas que não são relacionais, tal que podem ter valores simultâneos diferentes para diferentes observadores. Alguns exemplos:  $\vec{r}_i$ ,  $\vec{r}_j$ ,  $\vec{v}_i$ ,  $\vec{v}_j$ ,  $\vec{a}_i$ ,  $\vec{a}_j$ ,  $\vec{v}_{ij}$ ,  $\vec{a}_{ij}$ ,  $\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}$ ,  $\vec{a}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}$ ,  $\hat{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}$ ,  $\vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}$  etc. Estes aspectos serão discutidos nos exercícios 2.2 e 2.8. Este tópico também foi discutido detalhadamente em um livro de 2014.<sup>37</sup>

Foi dada uma ênfase maior neste último aspecto já que a força de Weber é a única formulação já proposta para abranger os fenômenos elétricos e magnéticos que tem esta propriedade. As outras formulações como as concepções e teorias de Gauss, Riemann, Clausius, Lorentz, Maxwell etc. não possuem esta propriedade, já que dependem da velocidade da carga em relação ao observador, dependem da velocidade da carga em relação ao campo magnético, ou dependem da velocidade da carga em relação a um éter.

Vamos ver um exemplo disto no caso da força de Maxwell-Lorentz com a interpretação que se dá atualmente para a velocidade que aparece nesta força. Se em uma certa região do espaço há apenas um campo magnético estacionário (gerado por exemplo por um ímã em repouso em relação a um referencial inercial  $O$ ) e um observador em repouso neste mesmo referencial vê uma carga  $q$  se movendo com velocidade  $\vec{v}$  nesta região do espaço, então ele verá a carga sofrer uma força magnética dada pela equação (1.17),  $\vec{F} = q_o \vec{v}_o \times \vec{B}$ , ou então dada pelo último termo da equação (1.29). Para um outro observador  $O'$  que neste mesmo instante está se movendo com velocidade constante  $\vec{v}$  em relação a  $O$  (logo o referencial  $O'$  é um outro referencial inercial), não vai haver nenhuma força magnética sobre a carga já que em relação a este observador  $O'$  a carga está instantaneamente parada ( $\vec{v}' = \vec{0}$ ), de tal forma que  $q\vec{v}' \times \vec{B}' = \vec{0}$ . Vemos com isto que a força magnética no eletromagnetismo clássico pode ser distinta mesmo para dois observadores inerciais. Voltaremos a discutir este assunto em mais detalhes no capítulo 5.

Usando-se as equações (2.6) e (2.7) pode-se colocar a força (2.5) na seguinte forma (ver os exercícios 2.1 e 2.2):

$$\vec{F}_{ji} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_o} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left[ 1 + \frac{1}{c^2} \left( \vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij} \right) \right]. \quad (2.12)$$

---

<sup>37</sup>[Ass14, Apêndice A: Grandezas Relacionais].

## 2.3 Energia Potencial de Weber

A força de Weber foi o primeiro exemplo histórico que surgiu de uma força entre cargas que dependia não apenas da distância entre elas mas também de suas velocidades. Isto gerou críticas por parte de alguns cientistas da época que achavam que esta força era inconsistente com o princípio de conservação da energia. Dois anos depois, em 1848, Weber apresentou sua energia potencial definida por:

$$U \equiv \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_o r_{ij}} \left( 1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} \right). \quad (2.13)$$

O primeiro termo desta energia é a energia potencial coulombiana usual, enquanto que o segundo termo é uma mistura de energia cinética e potencial já que depende não só da distância entre as cargas mas também de suas velocidades mútuas. Este também foi o primeiro exemplo que surgiu na ciência de uma energia potencial que dependia da velocidade.

Como já mencionamos anteriormente, este trabalho de 1848 é uma versão um pouco reduzida de seu trabalho de 1846, além de apresentar esta novidade que é sua energia potencial. Este trabalho já está traduzido para a língua inglesa e o recomendamos fortemente.<sup>38</sup>

Assim como no caso da energia potencial coulombiana, pode-se pensar na grandeza  $U$  da equação (2.13) como sendo a energia gasta para formar o sistema. Isto é,  $U$  é a energia que tem de ser dispendida para trazer  $q_i$  e  $q_j$  desde o infinito (onde se considera que estão em repouso e a uma distância infinita uma da outra) até chegarem à separação  $r_{ij}$  com velocidade relativa  $\dot{r}_{ij}$ . Esta energia é gasta contra a força de Weber (2.5) atuando entre as duas cargas.

Vamos citar Weber no trecho em que ele apresentou esta energia potencial pela primeira vez. Seu princípio geral fundamental para a teoria da eletricidade, sua força (2.3) ou (2.5), foi escrita por ele neste trabalho como (lembrando que  $a^2/16 = 1/c_W^2 = 1/(2c^2)$ ):

$$\frac{EE'}{RR} \left( 1 - \frac{aa}{16} \frac{dR^2}{dt^2} + \frac{aa}{8} R \frac{ddR}{dt^2} \right),$$

onde  $E$  e  $E'$  são as cargas,  $R$  a distância entre elas,  $dR^2/dt^2 = \dot{r}^2$  e  $ddR/dt^2 = \ddot{r}$ . Então ele disse:<sup>39</sup>

Para uma unidade [magnitude] definida que se assume com o propósito de medir o tempo, na qual  $a = 4$ , esta expressão fica na forma

<sup>38</sup>[Web48a] com tradução para a língua inglesa em [Web66f].

<sup>39</sup>[Web48a] com tradução para a língua inglesa em [Web66f].

$$\frac{EE'}{RR} \left( 1 - \frac{dR^2}{dt^2} + 2R \frac{ddR}{dt^2} \right) .$$

Além do mais, supondo que tanto  $R$  quanto  $dR/dt$  são função de  $t$ , e conseqüentemente que  $dR/dt$  pode ser pensado como uma função de  $R$ , a qual denotaremos por  $[R]$ , podemos também dizer que o *potencial* da massa  $E$ , com relação à situação da massa  $E'$ , é

$$= \frac{E}{R} (1 - [R]^2) ;$$

pois os coeficientes diferenciais parciais desta expressão, com respeito às três coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , geram as componentes da força aceleradora decomposta nas direções dos três eixos coordenados.

A maneira mais simples de deduzir a força desta energia potencial é fazendo

$$\vec{F}_{ji} = -\hat{r}_{ij} \frac{dU}{dr_{ij}} . \quad (2.14)$$

A forma detalhada de chegar na equação (2.5) a partir da equação (2.14) está indicada no exercício 2.3. Uma outra maneira de obter a força a partir do potencial é indicada na seção 2.4. Depois mostraremos também como deduzir a força de Weber a partir do formalismo lagrangiano.

## 2.4 Leis de Conservação

Um dos aspectos de maior importância na física clássica são as três leis básicas de conservação: momento linear, momento angular e energia. Vamos aqui mostrar que a eletrodinâmica de Weber, composta de sua força juntamente com sua energia potencial, satisfaz a estas três leis capitais. Inicialmente vamos tratar do momento linear.

A conservação do momento linear segue diretamente do fato de que a força de Weber satisfaz o princípio de ação e reação. Este fato independe até mesmo da forma da força, bastando que valha  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ , como é o caso da eletrodinâmica de Weber. Desde que haja ação e reação, então vai haver conservação do momento linear, mesmo se as forças não forem centrais.

O momento linear total de um sistema de duas partículas com massas inerciais  $m_i$  e  $m_j$  movendo-se com velocidades  $\vec{v}_i$  e  $\vec{v}_j$  em relação a um referencial inercial é definido por:

$$\vec{P} \equiv m_i \vec{v}_i + m_j \vec{v}_j . \quad (2.15)$$

Derivando esta expressão em relação ao tempo, usando a segunda lei de movimento de Newton, equação (1.4), juntamente com a lei de ação e reação,

equação (1.3), resulta imediatamente que  $d\vec{P}/dt = \vec{0}$ , como queríamos demonstrar.

Este princípio pode ser generalizado para um número qualquer de partículas interagindo por meio de várias forças (Weber, elástica, gravitacional etc.), desde que estas forças satisfaçam o princípio de ação e reação (ver o exercício 2.4).

Em segundo lugar vem a questão da conservação do momento angular. Consideramos novamente um referencial inercial no qual duas partículas interagem entre si através de uma força de Weber. O momento angular total do sistema é definido por

$$\vec{L} \equiv \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) + \vec{r}_j \times (m_j \vec{v}_j) . \quad (2.16)$$

Fazendo a derivada temporal de  $\vec{L}$ ,  $d\vec{L}/dt$ , usando as regras usuais da análise vetorial, lembrando que  $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$ , usando a equação (1.4) e a lei de ação e reação resulta:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} . \quad (2.17)$$

Até o momento não foi utilizada a força de Weber, a não ser no fato de ela satisfazer o princípio de ação e reação. Agora utilizamos o fato que ela satisfaz este princípio na forma forte, ou seja,  $\vec{F}_{ji}$  é não apenas igual a  $-\vec{F}_{ij}$ , mas também é paralela a  $\hat{r}_{ij}$ . Isto faz que a equação (2.17) se reduza a  $d\vec{L}/dt = \vec{0}$ . Novamente este resultado não dependeu da forma explícita da força de Weber, mas apenas de esta força satisfazer o princípio de ação e reação, neste caso na forma forte.

Este resultado pode ser generalizado a um número qualquer de partículas interagindo entre si por forças de qualquer natureza, desde que satisfaçam o princípio de ação e reação na forma forte (ver o exercício 2.5).

Por último vem a conservação de energia. Este tema foi discutido, entre outros, por Wesley.<sup>40</sup> Supondo que temos duas cargas  $q_i$  e  $q_j$ , de massas  $m_i$  e  $m_j$ , interagindo entre si através de uma força de Weber, temos que a energia total do sistema é definida por:

$$E \equiv U + T , \quad (2.18)$$

onde  $U$  é a energia de Weber dada pela equação (2.13) e  $T$  é a energia cinética definida por

$$T \equiv m_i \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2} + m_j \frac{\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j}{2} = \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{m_j v_j^2}{2} , \quad (2.19)$$

onde  $\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt$  é a velocidade da partícula em relação a um referencial inercial qualquer.

---

<sup>40</sup>[Wes87b].

Derivando  $E$  em relação ao tempo, usando a equação (1.4), a terceira lei de Newton, equação (1.3), assim como o resultado do exercício 2.1 sobre o significado de  $\dot{r}_{ij}$  e lembrando da equação (2.5) resulta que obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = (\vec{v}_i \cdot \vec{F}_{ji} + \vec{v}_j \cdot \vec{F}_{ij}) \\ &- \dot{r}_{ij} \left[ \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{ij}^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij}\ddot{r}_{ij}}{c^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pela lei de ação e reação e pela equação (2.10), vem que a equação (2.20) pode ser escrita como:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v}_{ij} \cdot \vec{F}_{ji} - \vec{v}_{ij} \cdot \left[ \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_o} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij}\ddot{r}_{ij}}{c^2} \right) \right]. \quad (2.21)$$

Esta equação (2.21) é obviamente igual a zero pela equação (2.5), de tal forma que a energia é uma constante no tempo:

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad (2.22)$$

como queríamos demonstrar.

Este resultado pode ser generalizado facilmente para um número  $N$  de partículas interagindo entre si por forças do tipo de Weber. Este é o objetivo do exercício 2.6. Obviamente o resultado vai continuar válido se elas interagirem entre si também através de outras forças conservativas (como forças elásticas ou gravitacionais), além da interação eletromagnética de Weber.

Este procedimento sugere uma nova forma de determinar a força a partir da energia potencial: Dada uma energia potencial  $U$ , a força de  $j$  em  $i$ ,  $\vec{F}_{ji}$ , pode ser obtida fazendo (ver o exercício 2.7):

$$\frac{dU}{dt} = -(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \vec{F}_{ji}. \quad (2.23)$$

Se definirmos a força por esta expressão e a aplicarmos na equação (2.13), obteremos a força de Weber (2.5), sem ter de usar a equação (2.14).

Nesta seção mostramos como a eletrodinâmica de Weber é compatível com os principais resultados da física clássica já que podemos deduzir com ela as três leis básicas de conservação da mecânica. Estes são resultados fortes e importantes da eletrodinâmica de Weber.

Como a força de Maxwell-Lorentz, equação (1.29), assim como a força de Liénard-Schwarzschild, equações (1.53) e (1.54), não seguem o princípio de ação e reação nem mesmo na forma fraca, não há conservação do momento linear ou do momento angular para duas cargas interagindo entre si no eletromagnetismo clássico. Para que haja conservação destas grandezas no eletromagnetismo clássico, é necessário que se inclua o momento linear e o momento angular do campo eletromagnético.

## 2.5 Lagrangiana de Weber

Nesta seção apresentamos a lagrangiana e a hamiltoniana da eletrodinâmica de Weber.

Vamos tratar do movimento de duas partículas pontuais com cargas  $q_i$  e  $q_j$ , massas inerciais  $m_i$  e  $m_j$ , interagindo entre si através da força de Weber e sem forças externas atuando sobre elas (a generalização para  $N$  cargas é imediata). A energia cinética clássica  $T$  deste sistema foi definida pela equação (2.19). Definimos uma função  $S^W$  por:

$$S^W \equiv \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{ij}} \left( 1 + \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} \right). \quad (2.24)$$

A lagrangiana  $L$  que dá origem à eletrodinâmica de Weber é definida por:

$$L \equiv T - S^W. \quad (2.25)$$

De acordo com nosso conhecimento, o primeiro a introduzir a equação (2.24) foi Carl Neumann (1832-1925), o filho de Franz Neumann, em 1868.<sup>41</sup> Ele chegou na equação (2.24) empregando a ideia do potencial retardado. B. Riemann, um estudante, assistente e amigo de Weber e Gauss em Göttingen, havia introduzido esta ideia na física em 1858, sendo que seu artigo só foi publicado em 1867. O procedimento seguido por Carl Neumann, que foi inspirado pela leitura do texto de Riemann, foi criticado por Clausius. Já existe uma tradução para a língua inglesa deste artigo de Clausius.<sup>42</sup> Clausius também discutiu a formulação lagrangiana de sua própria eletrodinâmica, assim como a formulação lagrangiana das eletrodinâmicas de Riemann e Weber em seu artigo de 1880, que também já foi traduzido para a língua inglesa.<sup>43</sup> Para uma discussão das ideias de Carl Neumann e Clausius ver o trabalho de Archibald.<sup>44</sup> Não temos conhecimento de que Weber tenha utilizado, ele mesmo, os formalismos lagrangiano ou hamiltoniano em conexão com a sua eletrodinâmica.

Deixando de lado o procedimento de Carl Neumann para chegar na equação (2.24) e as ideias relacionadas de potencial retardado, podemos simplesmente postular as equações (2.24) e (2.25), passando a trabalhar a partir daqui. Esta vai ser a maneira pela qual vamos prosseguir neste livro.

A força de Weber pode ser obtida da maneira usual a partir da formulação lagrangiana utilizando a função  $S^W$ . Isto é, sendo  $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$ , onde  $\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}$  é o vetor posição da carga  $q_i$ , temos que a componente  $x$  da força sobre  $q_i$  é dada por:<sup>45</sup>

---

<sup>41</sup>[Neu80] e [Arc86].

<sup>42</sup>[Cla69].

<sup>43</sup>[Cla80].

<sup>44</sup>[Arc86].

<sup>45</sup>[O'R65, volume 2, capítulo 11, págs. 525–535].

$$F_{ji}^x = \frac{d}{dt} \frac{\partial S^W}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial S^W}{\partial x_i} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_o} \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^3} \left( 1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{c^2} \right). \quad (2.26)$$

De maneira similar podemos obter as componentes  $F_{ji}^y$  e  $F_{ji}^z$ .

Alternativamente, por um outro conjunto de coordenadas generalizadas, podemos obter imediatamente a força de Weber ao longo de  $\hat{r}_{ij}$ , ou seja, a grandeza  $F_{ji}$  definida por  $\vec{F}_{ji} = \hat{r}_{ij} F_{ji}$ , através do seguinte procedimento:<sup>46</sup>

$$F_{ji} = \frac{d}{dt} \frac{\partial S^W}{\partial \dot{r}_{ij}} - \frac{\partial S^W}{\partial r_{ij}} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{ij}^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{c^2} \right). \quad (2.27)$$

As equações de movimento são as equações de Lagrange usuais:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0; \quad \text{com } k = 1, \dots, 6. \quad (2.28)$$

Nestas equações  $q_k$  representa uma das coordenadas:  $x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j$ ; enquanto que  $\dot{q}_k = dq_k/dt$ . Fazendo estas contas e utilizando as equações (2.25) e (2.19) obtém-se:

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_o} \frac{\hat{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \left( 1 - \frac{\dot{r}_{ij}^2}{2c^2} + \frac{r_{ij} \ddot{r}_{ij}}{c^2} \right) = m_i \vec{a}_i, \quad (2.29)$$

assim como se pode obter uma equação análoga para  $m_j$ . A equação (2.29) é exatamente a segunda lei de Newton aplicada à força de Weber, que era o objetivo que queríamos alcançar.

Por outro lado o hamiltoniano  $H$  de um sistema está definido na equação (1.58). As equações de movimento também podem ser obtidas da função  $H$  utilizando-se os procedimentos padrões da formulação hamiltoniana.

Observando que  $S^W$  e  $T$  não dependem explicitamente do tempo resulta que  $\partial L/\partial t = 0$  e  $\partial H/\partial t = 0$ . Isto significa que na eletrodinâmica de Weber o hamiltoniano  $H$  acontece de ter o mesmo valor que a energia total do sistema. Das equações (2.24) até (2.29), mais a equação (1.58), obtém-se:

$$H = T + U = E, \quad (2.30)$$

e

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} = 0. \quad (2.31)$$

Na equação (2.30) a grandeza  $U$  representa a energia potencial de Weber definida pela equação (2.13).

A partir das formulações lagrangiana e hamiltoniana obtemos, portanto, uma outra prova para a conservação da energia na eletrodinâmica de Weber.

---

<sup>46</sup>[Whi73, capítulo 7, págs. 201–211].

Deve ser enfatizado que a grandeza  $S^W$  é diferente da grandeza  $U$ , já que ambas diferem no sinal em frente de  $\dot{r}_{ij}^2$ . Para evitar confusões chamamos  $U$  de energia potencial e  $S^W$  de energia lagrangiana. Estes nomes distinguem claramente onde estas funções devem ser empregadas ( $U$  é a função que adicionada à energia cinética  $T$  fornece a energia total conservada do sistema, enquanto que  $S^W$  é a energia que aparece no lagrangiano junto com  $T$ ). Preferimos estes nomes em vez de outros nomes que algumas vezes são empregados como “potenciais dependentes da velocidade” ou “potenciais generalizados.” O motivo para nossa escolha é que as grandezas  $U$  e  $S^W$  têm dimensão de energia, Joule ( $1J = 1kgm^2s^{-2}$ ), e não devem ser confundidas com o potencial eletrostático  $\phi$ , que tem dimensões de Volt ( $1V = 1kgm^2C^{-1}s^{-2}$ ).

Embora o lagrangiano seja dado por  $L = T - S^W$ , o hamiltoniano e a energia que se conservam são dados por  $H = E = T + U$  e não por  $T + S^W$ . Uma situação análoga surge na mecânica e no eletromagnetismo clássico quando há energias potenciais que dependem não apenas da distância entre os corpos mas também de suas velocidades. Já vimos um exemplo disto ao discutir a lagrangiana de Darwin na seção 1.6.

Como estamos discutindo nesta seção hamiltonianas e lagrangianas que dependem de energias potenciais que são funções das velocidades das cargas, é interessante citar Goldstein em seu livro bem conhecido, *Mecânica Clássica*.<sup>47</sup>

### Potenciais dependentes da velocidade e a função dissipação.

As equações de Lagrange podem ser colocadas na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad [1 - 53]$$

mesmo se o sistema não é conservativo no sentido usual, desde que as forças generalizadas sejam obtidas a partir de uma função  $U(q_j, \dot{q}_j)$  a partir da fórmula

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad [1 - 54]$$

Neste caso as equações [1-53] ainda seguem das equações

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad [1 - 50]$$

com uma lagrangiana dada por

$$L = T - U. \quad [1 - 52']$$

---

<sup>47</sup>[Gol50, pág. 19].



U pode ser chamado de “potencial generalizado,” ou de “potencial dependente da velocidade.” (A história da designação dada a tal potencial é curiosa. Aparentemente estimulado pela eletrodinâmica clássica primitiva (e errônea) de Weber, o matemático alemão E. Schering parece ter sido o primeiro a tentar incluir seriamente estas forças no contexto da mecânica, ver *Gött. Abh.* **18**, 3 (1873). A primeira edição do livro *Analytical Dynamics* do Whittaker (1904) assim se refere ao potencial como “função potencial de Schering,” mas o nome aparentemente não pegou, pois o termo foi eliminado nas edições posteriores. Usaremos preferencialmente o nome “potencial generalizado,” incluindo nesta designação também a energia potencial ordinária, uma função apenas da posição.) A possibilidade de usar um tal “potencial” não é acadêmica; ela se aplica a um tipo de campo de força muito importante, a saber, as forças eletromagnéticas sobre cargas em movimento. Considerando sua importância, uma digressão sobre o assunto vale a pena.

Este trecho continua essencialmente o mesmo na segunda edição do livro de Goldstein.<sup>48</sup>

Este é um dos poucos livros recentes que apresentam a força de Weber e suas formulações hamiltoniana e lagrangiana. Apesar deste fato, esta afirmação de que a eletrodinâmica clássica de Weber é *errônea* é desorientadora. Nós não podemos nem mesmo responder ou criticar esta afirmação, pois não sabemos em que argumentos o autor se baseou para afirmar que a eletrodinâmica de Weber é “errônea.” Afirmações fortes e enfáticas como estas em livros didáticos deveriam ser apresentadas ou defendidas claramente e cuidadosamente, para evitar uma formação deformada dos estudantes. Infelizmente este não foi o caso neste exemplo particular de um livro que é muito bom em todos os outros aspectos.

## 2.6 Exercícios

1. Use as equações (1.6), (2.6) e (2.7) para mostrar que (use também as definições (2.8) e (2.9)):

(A)  $\dot{r}_{ij} = \hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}$  ,

(B)  $\ddot{r}_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} [\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} - (\hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}]$  ,

- (C) Utilize os resultados deste exercício para chegar na equação (2.12) a partir da equação (2.5).

2. Uma outra expressão que às vezes é usada como velocidade relativa,  $u_{ij}$ , é definida por:

---

<sup>48</sup>[Gol80, pág. 21].

$$u_{ij} \equiv (\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^{1/2} = [(\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j)]^{1/2} .$$

Embora na maioria dos casos  $u_{ij}$  dê o mesmo valor que  $\dot{r}_{ij}$ , isto nem sempre ocorre. Em particular  $u_{ij}$  não é verdadeiramente uma grandeza relacional, já que o valor desta grandeza pode variar de observador para observador. As grandezas realmente relacionais são:<sup>49</sup>  $\vec{r}_{ij}$ ,  $r_{ij}$ ,  $\hat{r}_{ij}$ ,  $\dot{r}_{ij}$  e  $\ddot{r}_{ij}$ . Apresentamos também alguns exemplos de grandezas não relacionais:  $\vec{r}_i$ ,  $\vec{r}_j$ ,  $\vec{v}_i$ ,  $\vec{v}_j$ ,  $\vec{a}_i$ ,  $\vec{a}_j$ ,  $u_{ij}$ ,  $\vec{v}_{ij}$ ,  $\vec{a}_{ij}$ ,  $(\vec{a}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij})^{1/2}$ ,  $\hat{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}$ ,  $\vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}$  etc.

(A) Considere um observador ou sistema de referência  $S$  com origem  $O$  no qual a partícula pontual  $i$  está sobre a origem do sistema de coordenadas, em repouso, e no qual a partícula pontual  $j$  está sobre o eixo  $x$  à distância  $\rho$  da origem, também em repouso, figura 2.1.

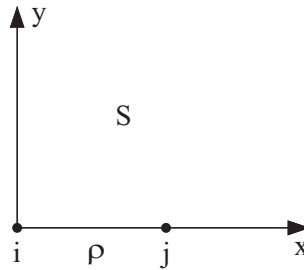


Figura 2.1: Partículas  $i$  e  $j$  em repouso em relação a um sistema de referência  $S$ .

Mostre que:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_j = \vec{v}_{ij} = \vec{0} ,$$

Mostre também que:

$$\dot{r}_{ij} = u_{ij} = 0 .$$

(B) Seja  $S'$  um outro sistema de referência com mesma origem  $O' = O$  que o sistema de referência  $S$ . Considere ainda que no instante inicial  $t = 0$  o sistema de referência  $S'$  tenha seus eixos  $x'y'z'$  paralelos aos eixos  $xyz$  de  $S$ , mas que gire com velocidade angular constante  $w\hat{z}$  no sentido anti-horário em relação ao referencial  $S$ , figura 2.2.

As relações entre os versores unidade  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  do sistema de referência  $S$  e os versores unidade correspondentes  $\hat{x}'$ ,  $\hat{y}'$  e

<sup>49</sup>[Ass14, Apêndice A: Grandezas Relacionais].

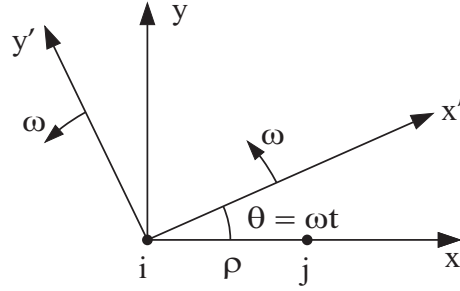


Figura 2.2: Partículas  $i$  e  $j$  em repouso em relação ao referencial  $S$ . O referencial  $S'$  gira ao redor do eixo  $z$  com uma velocidade angular constante  $\omega$  em relação ao referencial  $S$ .

$\hat{z}'$  ao longo dos eixos  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  do sistema de referência  $S'$ , no instante  $t$ , são dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}' \cos \omega t - \hat{y}' \sin \omega t, \\ \hat{y} &= \hat{x}' \sin \omega t + \hat{y}' \cos \omega t, \\ \hat{z} &= \hat{z}'. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

e

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}' &= \hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t, \\ \hat{y}' &= -\hat{x} \sin \omega t + \hat{y} \cos \omega t, \\ \hat{z}' &= \hat{z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

A figura 2.3 (a) mostra a situação da figura 2.2 do ponto de vista do sistema de referência  $S'$ . A partícula  $i$  permanece em repouso no sistema  $S'$ , enquanto que a partícula  $j$  desloca-se em relação ao referencial  $S'$  no sentido horário com uma velocidade angular constante  $\omega$  ao redor do eixo  $z'$ .

Mostre que  $\vec{v}_i' = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_j' = -\rho\omega(\hat{x}' \sin \omega t + \hat{y}' \cos \omega t)$ ,  $\vec{v}_{ij}' = -\vec{v}_j' \neq \vec{0}$ ,  $\vec{v}_{ij}' \neq \vec{v}_{ij}$ , e que  $\dot{r}'_{ij} = 0$ , mas  $u'_{ij} = \rho\omega \neq 0$ .

Este exemplo simples e particular é para mostrar que  $u_{ij}$  não é uma grandeza relacional, enquanto que  $\dot{r}_{ij}$  é relacional (neste caso vimos que  $\dot{r}'_{ij} = \dot{r}_{ij}$ , enquanto que  $u'_{ij} \neq u_{ij}$ ).

(C) Encontre exemplos mostrando situações nas quais  $\vec{a}'_{ij} \neq \vec{a}_{ij}$ ,  $\hat{r}'_{ij} \cdot \vec{a}'_{ij} \neq \hat{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}$  etc.

- Na situação mais geral possível temos que duas partículas  $i$  e  $j$  se movem no tempo quando estão interagindo entre si de tal forma que  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$  e  $\vec{r}_j = \vec{r}_j(t)$ . Isto naturalmente leva a que  $r_{ij} \equiv |\vec{r}_{ij}| = r_{ij}(t)$ . Use a regra da cadeia para mostrar que:

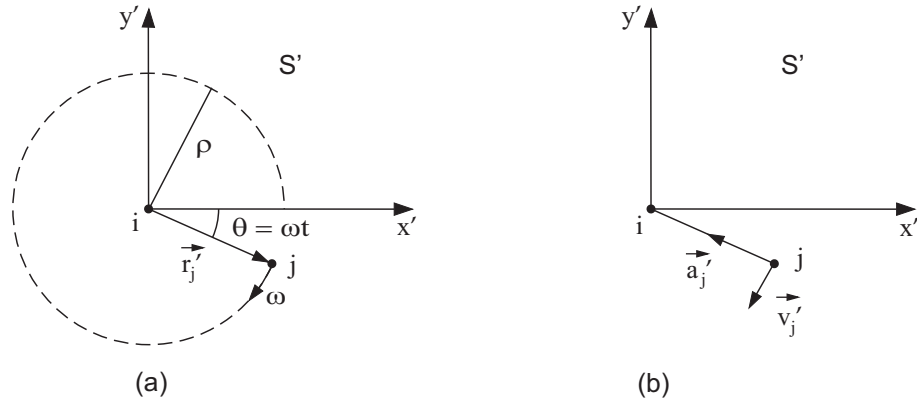


Figura 2.3: (a) Partícula  $i$  em repouso e partícula  $j$  girando no sentido horário ao redor do eixo  $z'$  do sistema de referência  $S'$  com uma velocidade angular constante  $\omega$ . (b) Velocidade  $\vec{v}'_j$  e aceleração  $\vec{a}'_j$  da partícula  $j$  em relação ao referencial  $S'$ .

$$\frac{d\dot{r}_{ij}^2}{dr_{ij}} = 2\ddot{r}_{ij} .$$

Use este resultado juntamente com as equações (2.13) e (2.14) para chegar na equação (2.5).

4. O objetivo deste exercício é generalizar o resultado da conservação do momento linear.

(A) O momento linear de três corpos é definido por  $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^3 m_i \vec{v}_i$ , sendo  $\vec{v}_i$  a velocidade do corpo de massa inercial  $m_i$  em relação a um referencial inercial. Suponha que estes corpos apenas interagem entre si por meio de forças de Weber do tipo da equação (2.5). Mostre que  $d\vec{P}/dt = \vec{0}$  utilizando as equações (1.3), (1.4) e o fato de a força de Weber satisfazer o princípio de ação e reação. Suponha que não haja forças externas.

(B) Generalize o resultado anterior para  $N$  corpos interagindo entre si por forças de Weber e também por outras forças (gravitacionais, elásticas etc.), desde que elas também satisfaçam o princípio de ação e reação. Novamente suponha que não haja forças externas.

5. O objetivo deste exercício é generalizar o resultado da conservação do momento angular.

(A) O momento angular total de um sistema de três corpos é definido por  $\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^3 \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$ . Suponha que estes corpos apenas interagem entre si por meio de forças de Weber do tipo da equação (2.5). Mostre que  $d\vec{L}/dt = \vec{0}$  utilizando as equações (1.3), (1.4) e o fato da força de

Weber satisfazer o princípio de ação e reação na forma forte, tal que  $\vec{F}_{ji}$  seja paralelo a  $\hat{r}_{ij}$ . Suponha que não haja forças externas.

(B) Generalize o resultado anterior para  $N$  cargas.

(C) Generalize o resultado anterior para  $N$  corpos interagindo entre si por forças de Weber e também por outras forças, desde que elas também satisfaçam o princípio de ação e reação na forma forte (como é o caso da força gravitacional newtoniana, da força elástica de Hooke etc.). Novamente suponha que não haja forças externas.

6. O objetivo deste exercício é generalizar a lei de conservação de energia para  $N$  corpos.

(A) Siga novamente a seção 2.4 refazendo todos os cálculos explicitamente, seguindo os passos indicados, até chegar na equação (2.22).

(B) Considere agora o caso de três corpos de cargas  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , e massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ , interagindo entre si por forças de Weber, equação (2.5). Defina a energia total do sistema por:

$$E \equiv U_{12} + U_{13} + U_{23} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2},$$

sendo a grandeza  $U_{ij}$  dada pela equação (2.13).

Mostre que  $dE/dt = 0$  usando as equações (1.3), (1.4), (2.5) e (2.13), além de utilizar um procedimento como o da letra (A).

(C) Generalize o resultado anterior para  $N$  corpos usando como energia total a expressão (lembre-se que  $U_{ji} = U_{ij}$ ):

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N U_{ij} + \sum_{i=1}^N m_i \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2},$$

onde  $U_{ij}$  é dado pela equação (2.13). Mostre então que  $dE/dt = 0$ .

(D) Generalize ainda mais o resultado anterior supondo que as partículas estão interagindo entre si também por meio de outras forças conservativas (como por meio de forças gravitacionais ou elásticas), além da interação eletromagnética de Weber. Suponha para isto que estas outras forças também seguem o princípio de ação e reação e que podem ser deduzidas de uma energia potencial que depende apenas da distância entre elas (como é o caso da força gravitacional newtoniana ou da força elástica hookiana).

7. Seja  $U$  dado pela equação (2.13). Utilize a equação (2.23) como uma definição de  $\vec{F}_{ji}$ . Fazendo então  $dU/dt$  e utilizando o exercício 2.1 mostre que se pode chegar na força de Weber dada pela equação (2.5). Esta é então uma maneira alternativa de chegar na força de Weber sem passar pela equação (2.14).

8. Neste exercício vamos provar que a força e energia de Weber têm o mesmo valor em todos os referenciais, mesmo para referenciais acelerados e não inerciais. Para isto o que vamos fazer é mostrar que  $r_{ij}$ ,  $\dot{r}_{ij}$  e  $\ddot{r}_{ij}$  têm o mesmo valor para todos os referenciais.

Suponha que temos dois sistemas de referência  $S$  e  $S'$  que têm origens em  $O$  e  $O'$ , respectivamente. Suponha que no tempo  $t$  a origem  $O'$  esteja localizada na posição  $\vec{R}$  em relação a  $O$ , movendo-se em relação ao referencial  $S$  com uma velocidade  $\vec{V} = d\vec{R}/dt$  e com uma aceleração translacional  $\vec{A}_t = d\vec{V}/dt = d^2\vec{R}/dt^2$ . Suponha além disto que  $S'$  esteja rodando relativo a  $S$  com uma velocidade angular  $\vec{\omega}$  ao redor de um eixo passando por  $O'$ , figura 2.4.

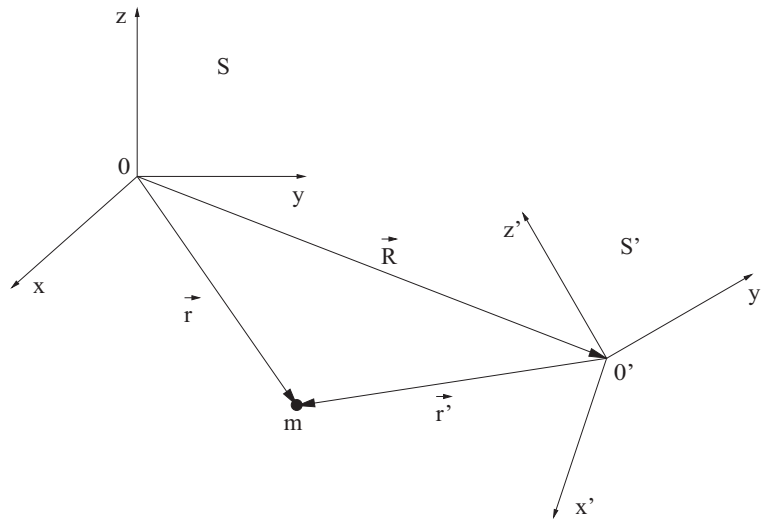


Figura 2.4: Sistemas de referência  $S$  e  $S'$  com origens  $O$  e  $O'$  separadas pelo vetor  $\vec{R}$ , deslocando-se entre si com uma velocidade  $\vec{V}$  e aceleração  $\vec{A}$ . O sistema  $S'$  gira em relação ao referencial  $S$  com uma velocidade angular  $\vec{\omega}$  ao redor de um eixo passando por  $O'$ .

Se  $\vec{A}_t \neq \vec{0}$  ou  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  então pelo menos um destes sistemas de referência é não-inercial do ponto de vista da mecânica clássica. A posição, velocidade e aceleração da partícula  $j$  ( $j = 1, 2$ ) em relação a  $S$  são, respectivamente:  $\vec{r}_j$ ,  $\vec{v}_j$  e  $\vec{a}_j$ . Já em relação a  $S'$  a posição, velocidade e aceleração de  $j$  são:  $\vec{r}'_j$ ,  $\vec{v}'_j$  e  $\vec{a}'_j$ . Em geral:  $\vec{r}_j = x_j\hat{x} + y_j\hat{y} + z_j\hat{z}$ ,  $\vec{r}'_j = x'_j\hat{x}' + y'_j\hat{y}' + z'_j\hat{z}'$ ,  $\vec{v}_j = d\vec{r}_j/dt = \dot{x}_j\hat{x} + \dot{y}_j\hat{y} + \dot{z}_j\hat{z}$  etc. As relações entre estas grandezas dos dois sistemas de referência se encontram em vários livros de mecânica clássica, como no de Symon por exemplo.<sup>50</sup> Elas são dadas por:

$$\vec{r}_j = \vec{r}'_j + \vec{R},$$

<sup>50</sup>[Sym71, capítulo 7] e [Sym82, capítulo 7].

$$\vec{v}_j = \vec{v}_j' + \vec{\omega} \times \vec{r}_j' + \vec{V} ,$$

e

$$\vec{a}_j = \vec{a}_j' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_j') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_j' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_j' + \vec{A}_t .$$

(A) A partir destes resultados e das definições  $\vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$ ,  $r_{ij} \equiv |\vec{r}_{ij}|$  e  $\hat{r}_{ij} \equiv \vec{r}_{ij}/r_{ij}$ , mostre que:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{ij} &= \vec{r}_{ij}' , \\ r_{ij} &= r_{ij}' , \\ \hat{r}_{ij} &= \hat{r}_{ij}' . \end{aligned}$$

Este resultado mostra que embora  $\vec{r}_1$  possa ser diferente de  $\vec{r}_1'$  (o mesmo ocorrendo com  $\vec{r}_2$  e  $\vec{r}_2'$ ) sempre teremos  $r_{12} = r_{12}'$  etc. Ou seja, as grandezas relacionais que têm sempre os mesmos valores em todos os sistemas de referência são:  $\vec{r}_{ij}$ ,  $r_{ij}$  e  $\hat{r}_{ij}$ .

(B) Usando os resultados anteriores, assim como as definições  $\vec{v}_{ij} \equiv \vec{v}_i - \vec{v}_j$  e  $\dot{r}_{ij} \equiv dr_{ij}/dt$ , mostre que:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{ij} &= \vec{v}_{ij}' + \vec{\omega} \times \vec{r}_{ij}' , \\ \dot{r}_{ij} = \frac{dr_{ij}}{dt} = \hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} &= \hat{r}_{ij}' \cdot \vec{v}_{ij}' = \frac{dr_{ij}'}{dt} = \dot{r}_{ij}' . \end{aligned}$$

Este resultado mostra que sempre teremos  $\dot{r}_{ij} = \dot{r}_{ij}'$ . Esta igualdade vai valer mesmo nos casos para os quais  $\vec{v}_{ij} \neq \vec{v}_{ij}'$  (o que vai ocorrer quando  $\vec{\omega} \times \vec{r}_{ij}' \neq \vec{0}$ ). A grandeza  $\dot{r}_{ij}$  sempre vai continuar igual à grandeza  $\dot{r}_{ij}'$  mesmo nos casos para os quais  $\sqrt{\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}} \neq \sqrt{\vec{v}_{ij}' \cdot \vec{v}_{ij}'}$ .

(C) Usando os resultados anteriores, juntamente com as definições  $\vec{a}_{ij} \equiv \vec{a}_i - \vec{a}_j$  e  $\ddot{r}_{ij} \equiv d\dot{r}_{ij}/dt = d^2r_{ij}/dt^2$ , mostre que:

$$\vec{a}_{ij} = \vec{a}_{ij}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{ij}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{ij}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{ij}' ,$$

$$\vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij} = \vec{r}_{ij}' \cdot \vec{a}_{ij}' + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{ij}')(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{ij}') - (\vec{r}_{ij}' \cdot \vec{r}_{ij}')(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) + 2\vec{r}_{ij}' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}_{ij}') ,$$

$$\begin{aligned}\ddot{r}_{ij} &= \frac{d^2 r_{ij}}{dt^2} = \frac{1}{r_{ij}} \left[ \vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij} - (\hat{r}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^2 + \vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{r'_{ij}} \left[ \vec{v}'_{ij} \cdot \vec{v}'_{ij} - (\hat{r}'_{ij} \cdot \vec{v}'_{ij})^2 + \vec{r}'_{ij} \cdot \vec{a}'_{ij} \right] = \frac{d^2 r'_{ij}}{dt^2} = \ddot{r}'_{ij}.\end{aligned}$$

Este resultado mostra que sempre teremos  $\ddot{r}_{ij} = \ddot{r}'_{ij}$ . Esta igualdade vai valer mesmo nos casos para os quais  $\vec{a}_{ij} \neq \vec{a}'_{ij}$ ,  $\sqrt{\vec{a}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}} \neq \sqrt{\vec{a}'_{ij} \cdot \vec{a}'_{ij}}$ ,  $\vec{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij} \neq \vec{r}'_{ij} \cdot \vec{a}'_{ij}$  e  $\sqrt{\hat{r}_{ij} \cdot \vec{a}_{ij}} \neq \sqrt{\hat{r}'_{ij} \cdot \vec{a}'_{ij}}$ .

Como a força e a energia de Weber só dependem de  $\hat{r}_{ij}$ ,  $r_{ij}$ ,  $\dot{r}_{ij}$  e  $\ddot{r}_{ij}$ , o resultado deste exercício mostra que a lei de Weber tem sempre o mesmo valor em *todos* os referenciais, mesmo para referenciais não inerciais.

9. Deduza as três componentes da força de Weber, equação (2.5) ou equação (2.12), a partir da energia lagrangiana de Weber, equação (2.24), utilizando a equação (2.26) e as equações análogas para as outras componentes.
10. Deduza a componente radial da força de Weber, equação (2.5), utilizando a equação (2.27).
11. Deduza a equação de movimento da eletrodinâmica de Weber utilizando as equações (2.28), (2.26),  $T = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$  e (2.24). O resultado do exercício 2.10 pode ser utilizado aqui.
12. Mostre que a hamiltoniana da eletrodinâmica de Weber é dada pela equação (2.30) aplicando a equação (1.58), usando que  $L = T - S$ ,  $T = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$  e também a equação (2.24).





## Capítulo 3

# Forças de Ampère e Grassmann entre Elementos de Corrente

### 3.1 Força de Ampère entre Elementos de Corrente

Apresentamos aqui algumas informações sobre a vida e a obra de André-Marie Ampère (1775-1836).<sup>1</sup> Ele nasceu em Pleymieux, perto de Lyon, na França, em 1775. Ele nunca foi para a escola já que seu pai, que admirava Jean-Jacques Rousseau, queria que Ampère aprendesse tudo sozinho guiado apenas por suas leituras e por seus interesses. Em 1801 ele escreveu seu primeiro trabalho importante, sobre a teoria matemática dos jogos, e o sucesso deste livro deu a ele uma posição na Escola Politécnica de Paris (1804). Lá ele se tornou professor de análise em 1809. Ele se tornou um membro da Academia Francesa de Ciências em 1814. Entre 1807 e 1816 ele trabalhou intensamente em química e estabeleceu experimentalmente que o flúor, o cloro e o iodo são elementos químicos elementares. Além de seus interesses em matemática e química ele também trabalhou com psicologia e filosofia. Ele se casou duas vezes, teve um filho e uma filha. Morreu em 1836.

Até 1820, quando estava com 45 anos, ele não tinha realizado nenhuma pesquisa séria em eletrodinâmica (um nome que ele cunhou mais tarde). E após 1827 ele não mais retornou a este assunto. Seu interesse surgiu a partir da descoberta da deflexão de uma agulha magnética colocada próxima e paralela a um fio com corrente. Esta descoberta de importância fundamental no eletromagnetismo, por mostrar sem sombra de dúvidas a ligação do magnetismo com o galvanismo (corrente elétrica em fios), foi realizada por H. C. Oersted em 1820. Este trabalho extremamente importante de Oersted já está traduzido para a língua portuguesa.<sup>2</sup> Para uma excelente discussão do trabalho

---

<sup>1</sup>[Lau25], [Pou64], [Wil81], [Blo82], [Hof96], [Cha09] e [AC11].

<sup>2</sup>[Ørs86].

de Oersted, seus antecedentes e influência, sugerimos o trabalho de Martins.<sup>3</sup> Esta descoberta foi anunciada publicamente em julho de 1820 e foi descrita em uma reunião da Academia Francesa de Ciências em 11 de setembro de 1820 por Arago, que tinha acabado de voltar do exterior. Biot e Savart interpretaram a experiência de Oersted como mostrando que a corrente elétrica tinha magnetizado o fio que então interagiu com a agulha magnética como se fosse um ímã comum. Ampère, por outro lado, interpretou a experiência de maneira diferente. De acordo com ele o que era fundamental eram as interações diretas entre correntes, o que significava que deveriam existir correntes microscópicas dentro dos ímãs. Como ele próprio enfatizou, isto não era óbvio ou necessário já que, embora uma barra de ferro também interaja com um ímã, não há interação entre duas barras de ferro. Para provar sua interpretação, Ampère mostrou na Academia, uma semana após a apresentação de Arago, que dois fios paralelos carregando corrente atraem um ao outro se as correntes estão no mesmo sentido e se repelem se as correntes estão em sentidos opostos. As duas partes de seu primeiro artigo sobre eletrodinâmica já se encontram traduzidas para a língua portuguesa.<sup>4</sup>

Nos próximos sete anos ele ficou completamente envolvido com pesquisas experimentais para encontrar a expressão matemática correta descrevendo a força entre elementos de corrente. Seu envolvimento apaixonado é bem descrito por suas próprias palavras em uma carta para seu filho de 25 de setembro de 1820 na qual ele se desculpou por não ter escrito antes, afirmando então logo em seguida:<sup>5</sup>

mas todo o meu tempo tem sido tomado por uma circunstância importante na minha vida. Desde que ouvi falar pela primeira vez sobre a linda descoberta do Sr. Oersted ... tenho pensado sobre ela continuamente [e] não tenho feito outra coisa que não escrever uma grande teoria sobre estes fenômenos e sobre todos aqueles já conhecidos sobre os ímãs.

Para chegar a seu objetivo Ampère criou o método de força zero ou de torque nulo entre correntes. Neste método ele não media forças nem torques diretamente (o primeiro a medir forças diretamente para testar a força de Ampère foi Weber, com seu eletrodinômetro). Em vez disto, duas forças ou dois torques devidos a uma mesma origem mas em condições diferentes (um fio reto e um fio em ziguezague; ou então uma corrente em um sentido e outra corrente no sentido oposto etc.) agiam simultaneamente sobre um terceiro corpo que já estava em equilíbrio mas que era livre para se mover, de tal forma que nenhum movimento era produzido. Isto mostrava em que situações específicas estas forças ou estes torques opostos estavam em equilíbrio e a

---

<sup>3</sup>[Mar86].

<sup>4</sup>[Amp20a] e [CA07], [Amp20b] e [CA09].

<sup>5</sup>[Amp], [Lau36, pág. 562], [Can80], [Cha09, págs. 5 e 29] e [AC11, págs. 15 e 32].

partir daí conclusões importantes podiam ser obtidas. Por este método, ele descobriu quatro casos independentes de equilíbrio a partir dos quais deduziu as seguintes leis:

- A força exercida por um fio com corrente elétrica ao atuar sobre um outro fio com corrente elétrica muda de sentido quando a corrente em apenas um dos fios muda de sentido.
- A força de uma corrente fluindo em um circuito deformado em pequenas sinuosidades, ao atuar sobre um segundo fio com corrente, é a mesma que se o circuito estivesse liso.
- A força exercida por um circuito fechado com corrente de forma arbitrária sobre um elemento de um outro circuito é ortogonal a este elemento.
- A força entre dois elementos de circuito não é modificada quando todas as dimensões lineares são aumentadas proporcionalmente (ou seja, aumentando seus comprimentos, assim como a distância entre eles), com a intensidade das correntes permanecendo inalteradas.

A partir destes resultados e assumindo que a força entre os elementos de corrente estava ao longo da linha que os conecta, Ampère chegou na seguinte força entre os elementos de corrente  $I_2 d\vec{l}_2$  e  $I_1 d\vec{l}_1$  (em linguagem vetorial moderna e no Sistema Internacional de Unidades):

$$d^2 \vec{F}_{21}^A = -\frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[ 2(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) - 3(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) \right] = -d^2 \vec{F}_{12}^A . \quad (3.1)$$

Talvez o principal aspecto a ser ressaltado na força de Ampère seja o fato de ela satisfazer a lei de ação e reação na forma forte, qualquer que seja a posição e orientação relativa entre os dois elementos de corrente. Isto é,  $d^2 \vec{F}_{21}^A = -d^2 \vec{F}_{12}^A$  e  $d^2 \vec{F}_{21}^A$  é paralelo a  $\hat{r}_{12}$  qualquer que seja o valor de  $d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2$ ,  $\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1$  e  $\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2$ .

Os resultados finais de Ampère descrevendo suas pesquisas, seu trabalho principal, estão nas Memórias da Academia de Paris do ano de 1823. Apesar desta data, este volume só foi publicado em 1827. Na versão publicada foram incorporadas comunicações que ocorreram após 1823. Com certeza pelo menos parte do artigo de Ampère foi escrito em 1826, embora ele contivesse resultados que haviam sido obtidos anteriormente, pois ele mencionou neste artigo a data de sua composição: 30 de agosto de 1826. Este trabalho também foi publicado na forma de livro.<sup>6</sup> Existe uma tradução parcial para a língua inglesa,<sup>7</sup> assim como uma tradução completa e comentada em língua portuguesa.<sup>8</sup>

---

<sup>6</sup>[Amp26] e [Amp23].

<sup>7</sup>[Amp65].

<sup>8</sup>[Cha09] e [AC11].

De acordo com Whittaker,<sup>9</sup> este trabalho de Ampère “é uma das memórias mais célebres na história da filosofia natural.” A admiração de Maxwell pelo trabalho de Ampère e por sua força entre elementos de corrente apresentada na equação (3.1) foram expressas nestas palavras (nossa ênfase):<sup>10</sup>

A investigação experimental pela qual Ampère estabeleceu as leis da ação mecânica entre correntes elétricas é um dos feitos mais brilhantes na ciência. O conjunto de teoria e experiência parece como que se tivesse pulado, crescido e armado, do cérebro do ‘Newton da eletricidade’. Ele é perfeito na forma, e de acurácia irrefutável, e *está resumido em uma fórmula a partir da qual todos os fenômenos podem ser deduzidos, e que tem de sempre permanecer como a fórmula cardinal [mais importante] da eletrodinâmica.*

Infelizmente os livros didáticos modernos que tratam do eletromagnetismo tanto em níveis de graduação quanto de pós-graduação não seguiram este ponto de vista de Maxwell, já que a equação (3.1) não aparece em praticamente nenhum deles.

Existem diversos trabalhos com uma biografia de Ampère e com uma discussão detalhada de seu trabalho.<sup>11</sup>

## 3.2 Deduzindo a Força de Ampère entre Elementos de Corrente a Partir da Força de Weber entre Cargas

Weber partiu da força de Ampère entre elementos de corrente, equação (3.1), assim como da força de Coulomb, equação (1.9), para chegar em sua força entre cargas pontuais em 1846. Usou também a hipótese de Fechner<sup>12</sup> de que a corrente elétrica em cada elemento de corrente é constituída de cargas positivas fluindo em relação ao fio na direção da corrente e de cargas negativas de mesma magnitude que as cargas positivas ( $dq_{1-} = -dq_{1+}$  e  $dq_{2-} = -dq_{2+}$ ), fluindo na direção oposta em relação ao fio, com uma velocidade de mesma intensidade ( $\vec{v}_{1-} = -\vec{v}_{1+}$  e  $\vec{v}_{2-} = -\vec{v}_{2+}$ ). O caminho seguido por Weber para chegar em sua força está descrito em diversos trabalhos.<sup>13</sup>

<sup>9</sup>[Whi73, pág. 83].

<sup>10</sup>[Max54, volume 2, artigo 528, pág. 175], [Cha09, pág. 5] e [AC11, págs. 15, 32 e 545].

<sup>11</sup>[Lau25], [MS54b], [MS54a], [MS54c], [Tri62], [Pou64], [Tri65], [Wil81], [Blo82], [Gra85a, págs. 7–22], [Can80], [Whi73, págs. 81–88], [Max54, volume 2, artigos 502–507, págs. 158–174] e [O’R65, volume 1, págs. 102–113 e volume 2, págs. 518–523], [Hof96], [Cha09] e [AC11].

<sup>12</sup>[Fec45].

<sup>13</sup>[Web48a] com tradução para a língua inglesa em [Web66f], [Max54, volume 2, capítulo 23] com tradução para a língua portuguesa em [Ass92g], assim como [Whi73, págs. 200–211].

No exercício 3.1 está indicado o caminho oposto, ou seja, *deduzir* a força de Ampère dada pela equação (3.1) a partir da força de Weber dada pelas equações (2.5) ou (2.12). Para isto, tem-se de usar a relação usual entre um elemento de corrente e as cargas em movimento, relação também introduzida por Fechner e Weber, e dada por (no caso de elementos de corrente filiformes neutros eletricamente):

$$I_1 d\vec{l}_1 = dq_{1+}\vec{v}_{1+} + dq_{1-}\vec{v}_{1-} = dq_{1+}(\vec{v}_{1+} - \vec{v}_{1-}) , \quad (3.2)$$

e

$$I_2 d\vec{l}_2 = dq_{2+}\vec{v}_{2+} + dq_{2-}\vec{v}_{2-} = dq_{2+}(\vec{v}_{2+} - \vec{v}_{2-}) . \quad (3.3)$$

Nestas expressões  $dq_{1+}$  e  $dq_{2+}$  ( $dq_{1-}$  e  $dq_{2-}$ ) são as densidades de carga positiva (negativa) nos elementos de corrente  $I_1 d\vec{l}_1$  e  $I_2 d\vec{l}_2$ , respectivamente. As velocidades  $\vec{v}_{1+}$  e  $\vec{v}_{2+}$  ( $\vec{v}_{1-}$  e  $\vec{v}_{2-}$ ) são as velocidades das cargas positivas (negativas) em relação ao fio, se houver. Isto é, estas são as velocidades de deslocamento, de migração ou de arraste das cargas elétricas em relação ao fio condutor.

O ponto mais importante deste exercício é que se consegue deduzir a equação (3.1) sem usar a hipótese de Fechner de que as cargas positivas e negativas em uma corrente se movem em direções contrárias com velocidades de mesma magnitude. Hoje em dia sabe-se que esta hipótese não é correta e que em um fio metálico usual apenas as cargas negativas (os elétrons) se movem em relação ao fio. Ou seja, partindo da lei de Weber, da equação (3.2) e da equação (3.3), chega-se na equação (3.1) mesmo quando apenas uma das cargas se move em relação ao fio (como no caso de um fio metálico comum em que  $\vec{v}_{1+} = \vec{v}_{2+} = \vec{0}$ , mas  $\vec{v}_{1-} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v}_{2-} \neq \vec{0}$ ), ou quando ambas se movem em sentido contrário em relação ao meio, mas com velocidades de diferente magnitude (como em um plasma gasoso usual em que a razão entre a velocidade dos íons e dos elétrons está como o inverso da razão entre as massas, isto é,  $v_1 \simeq -(m_2/m_1)v_2$ ). Isto mostra que a força de Ampère pode ser usada não apenas em correntes metálicas, mas também em plasmas gasosos, situações de eletrólise etc.

Um desenvolvimento mais completo deste tema pode ser encontrado em um trabalho de 1990.<sup>14</sup>

Na época de Fechner, Weber e Maxwell não se conhecia a natureza das correntes e então a hipótese de Fechner era uma das possibilidades plausíveis. Em 1879 Edwin Herbert Hall (1855-1938) descobriu que surgia uma diferença de potencial em um condutor elétrico, transversal ao fluxo de corrente e a um campo magnético externo que era aplicado perpendicular à corrente. A partir do efeito Hall concluiu-se que a corrente nos fios metálicos era devida ao movimento apenas das cargas negativas, tal que os íons positivos ficavam fixos em relação ao metal.<sup>15</sup> Este fato foi fortalecido com a descoberta do elétron

<sup>14</sup>[Ass90a].

<sup>15</sup>[O'R65, volume 2, págs. 512–518] e [Whi73, págs. 289–291].

em 1897 por Joseph John Thomson (1856-1940). Isto mostrou que a hipótese de Fechner era insustentável. Para muitos cientistas esta descoberta indicava uma falha na teoria de Weber, já que eles pensavam que a hipótese de Fechner estava necessariamente relacionada com a eletrodinâmica de Weber através da força de Ampère. Mas como veremos no exercício 3.1, se assumirmos apenas a neutralidade dos elementos de corrente então conseguimos deduzir a força de Ampère a partir da força de Weber sem usar a hipótese de Fechner. Este exercício mostra então que não existe esta limitação que alguns apontavam na teoria de Weber.

Para dar um exemplo de como esta visão errada e deformada da eletrodinâmica de Weber tem sobrevivido, citamos aqui um trecho do livro do Rohrlisch de 1965, no único parágrafo em que ele cita a teoria de Weber:<sup>16</sup>

A maior parte das ideias neste tempo eram sobre a eletricidade como algum tipo de fluido ou pelo menos como um meio contínuo. Em 1845, contudo, Gustav T. Fechner sugeriu que as correntes elétricas podiam ser devidas a *partículas* de cargas opostas que se moviam com iguais velocidades em direções opostas no fio. A partir desta ideia Wilhelm Weber (1804–1890) desenvolveu a primeira *eletrodinâmica de partículas* (1846). Ela era baseada em uma lei de força entre duas partículas de cargas  $e_1$  e  $e_2$  separadas por uma distância  $r$ ,

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2} \left[ 1 + \frac{r}{c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2c^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right].$$

Esta força parecia explicar os experimentos (lei de Ampère, lei de Biot-Savart) mas teve dificuldades teóricas e eventualmente teve de ser descartada quando, entre outras coisas, ficou insustentável manter a hipótese básica de velocidades iguais em direções opostas.

Como acabamos de ver, não precisamos descartar a lei de Weber pelo fato de a hipótese de Fechner para as correntes metálicas estar errada. Não há uma conexão necessária entre a hipótese de Fechner e a eletrodinâmica de Weber, embora historicamente ambas estivessem ligadas.

Um outro aspecto importante que se pode observar ao realizar este exercício é que a expressão (3.1) continua válida em situações em que as cargas estão aceleradas (não apenas devido à curvatura dos fios, quando há aceleração centrípeta, mas também quando a intensidade das correntes é uma função do tempo). Isto é, não é necessário impor que os termos de aceleração são nulos na equação (2.12) para se chegar na equação (3.1). Isto indica que a força de Ampère pode ser aplicada mesmo em situações não estacionárias quando as

---

<sup>16</sup>[Roh65, pág. 9].

correntes estão variando no tempo (como em circuitos com corrente alternada ou quando se liga ou desliga a corrente em um circuito).

Deve ser ressaltado que foi utilizada nesta dedução a neutralidade dos elementos de corrente. Isto significa que a força de Ampère não precisa ser válida, por exemplo, em situações envolvendo dois feixes de elétrons. Neste caso, temos de começar com a força de Weber e não utilizar a neutralidade dos elementos de corrente. Este caso mais geral não será discutido aqui.

Em geral não existe uma neutralidade elétrica dos elementos de corrente de um fio resistivo, mesmo quando a corrente é constante.<sup>17</sup> Apesar deste fato, em geral é possível supor esta neutralidade já que a componente da força entre elementos de corrente que surge desta não neutralidade é em geral muito menor do que a componente da força que dá origem à força de Ampère.

O fato de se poder deduzir a força de Ampère entre elementos de corrente a partir da força de Weber é um dos principais resultados da eletrodinâmica de Weber.

### 3.3 Força de Grassmann entre Elementos de Corrente

Apesar dos elogios de Maxwell, Whittaker e outros, a força de Ampère dada pela equação (3.1) é pouco conhecida hoje em dia e não aparece mais em quase nenhum livro didático (nem nos elementares em nível de graduação, nem nos avançados em nível de pós-graduação). Em vez disto só aparece a força de Grassmann. Seja um elemento de corrente  $I_1 d\vec{l}_1$  localizado no vetor posição  $\vec{r}_1$  em relação à origem  $O$  de um sistema de referência inercial  $S$ , juntamente com um outro elemento de corrente  $I_2 d\vec{l}_2$  localizado em  $\vec{r}_2$ . A força de Grassmann exercida por 2 em 1 é dada por:

$$d^2 \vec{F}_{21}^G = I_1 d\vec{l}_1 \times d\vec{B}_2, \quad (3.4)$$

com

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r_{12}^2} (I_2 d\vec{l}_2 \times \hat{r}_{12}). \quad (3.5)$$

Nesta última expressão  $d\vec{B}_2$  é o campo magnético no ponto  $\vec{r}_1$  gerado pelo elemento  $I_2 d\vec{l}_2$ . Esta expressão de força foi primeiro apresentada por Grassmann em 1845 e seu artigo já foi traduzido para a língua inglesa.<sup>18</sup>

Grassmann nunca teve uma educação formal em física e matemática (estudou como curso superior filologia e teologia). Durante toda a vida foi professor de matemática no segundo grau e nunca chegou a lecionar em uma universidade, embora sempre almejasse isso. Seu principal trabalho científico foi o

<sup>17</sup>[AH07], [AH09] e [AH13].

<sup>18</sup>[Gra45] e [Gra65].



desenvolvimento de uma álgebra generalizada em que não necessariamente valiam as propriedades comutativa e a de existência do inverso na multiplicação. Publicou suas descobertas algébricas em um livro em 1844 (apenas um ano depois da descoberta dos quatérnions por Hamilton) e em uma segunda versão ampliada e melhorada em 1862. É no seu primeiro livro que apareceram claramente pela primeira vez os modernos produtos escalares e vetoriais. Em 1845 publicou sua lei de força entre elementos de corrente como sendo uma aplicação importante de sua álgebra generalizada. Aparentemente Grassmann nunca realizou experiências em física, nem mesmo relacionadas com eletrodinâmica.<sup>19</sup>

Biot e Savart anunciaram em 30 de outubro de 1820 sua expressão para a força magnética exercida por um elemento de corrente ao atuar sobre um polo magnético.<sup>20</sup> Obtiveram este resultado estudando a interação de um longo fio retilíneo com corrente ao agir sobre um ímã permanente. Fizeram estas experiências motivados, assim como Ampère, pelo anúncio da descoberta de Oersted, anúncio este feito em 11 de setembro de 1820, por Arago, na Academia Francesa de Ciências.

Usando a equação (A.7) podemos colocar a força de Grassmann na forma:

$$d^2 \vec{F}_{21}^G = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} [(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \hat{r}_{12} - (d\vec{l}_1 \cdot \hat{r}_{12}) d\vec{l}_2]. \quad (3.6)$$

Trocando-se os índices 1 e 2, observando que  $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$  e que  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$  resulta:

$$\begin{aligned} d^2 \vec{F}_{12}^G &= I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1 = -I_2 d\vec{l}_2 \times \left[ \frac{\mu_o}{4\pi} \left( I_1 d\vec{l}_1 \times \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} [(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \hat{r}_{12} - (d\vec{l}_2 \cdot \hat{r}_{12}) d\vec{l}_1] \neq -d^2 \vec{F}_{21}^G. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A primeira coisa que se pode observar nestas expressões é que embora o primeiro termo da força satisfaça o princípio de ação e reação e seja paralelo a  $\hat{r}_{12}$ , o mesmo não acontece com o segundo termo que é paralelo a  $d\vec{l}_2$  ou a  $d\vec{l}_1$ . Este segundo termo não satisfaz o princípio de ação e reação a não ser em alguns casos bem particulares. Isto faz que em muitos casos  $d^2 \vec{F}_{21}^G \neq -d^2 \vec{F}_{12}^G$  quando usamos a expressão da força de Grassmann entre elementos de corrente. Ou seja, quando se usam elementos de corrente, há casos em que a expressão de Grassmann não satisfaz o princípio de ação e reação nem mesmo na forma fraca. Estamos aqui restringindo a análise ao caso de elementos de corrente, contudo mais para frente discutiremos o caso de circuitos fechados.

<sup>19</sup>[Cro85].

<sup>20</sup>[BS20] com tradução para a língua portuguesa em [AC06], [BS24], [BS65b], [BS65a], [Whi73, págs. 81–88], [Tri62, especialmente as páginas 453–455], [Cha09, capítulo 5: As contribuições de Biot e Savart] e [AC11, capítulo 6: As contribuições de Biot e Savart].

### 3.4 Deduzindo a Força de Grassmann entre Elementos de Corrente a Partir da Força de Maxwell-Lorentz

Nesta seção vamos mostrar como se chega na equação (3.4) usando a força de Maxwell-Lorentz dada pela equação (1.29). Novamente o caminho histórico foi o inverso, já que Maxwell e Lorentz conheciam a força de Grassmann e partiram dela fazendo a substituição de  $I d\vec{l}$  por  $q\vec{v}$  para chegar na componente magnética de suas forças, embora Lorentz, em particular, não tenha citado o nome de Grassmann em seus trabalhos.<sup>21</sup>

Assim como no caso de Weber e do exercício 3.1 supomos que nos dois elementos de corrente haja cargas positivas e negativas  $dq_{1+}$ ,  $dq_{1-}$ ,  $dq_{2+}$  e  $dq_{2-}$ . Vamos supor que o elemento de corrente  $I_2 d\vec{l}_2$  gere um campo elétrico  $d\vec{E}_2$  (caso ele não seja neutro) e um campo magnético  $d\vec{B}_2$ . Somando as forças (1.29) sobre as cargas positivas e negativas de  $I_1 d\vec{l}_1$  resulta:

$$d^2 \vec{F}_{21} = (dq_{1+} + dq_{1-})d\vec{E}_2 + (dq_{1+}\vec{v}_{1+} + dq_{1-}\vec{v}_{1-}) \times d\vec{B}_2. \quad (3.8)$$

Impondo a neutralidade elétrica dos elementos de corrente ( $dq_{1-} = -dq_{1+}$  e  $dq_{2-} = -dq_{2+}$ ) resulta que o primeiro termo da equação (3.8) se anula já que  $dq_{1+} + dq_{1-} = 0$  e também  $d\vec{E}_2 = \vec{0}$ . Usando a equação (3.2) se chega então na equação (3.4), que era o que queríamos provar. Para se chegar na equação (3.6) é necessário ainda algo como o campo magnético devido a um elemento de corrente dado pela equação (3.5). Esta equação relaciona as correntes nas fontes com os campos magnéticos que elas geram. Ver ainda o exercício 3.2.

Uma dedução da força de Grassmann a partir da força de Liénard-Schwarzschild se encontra no exercício 3.3.

### 3.5 A Força de Ampère Contra a Força de Grassmann

Nesta seção vamos comparar as forças entre elementos de corrente obtidas por Ampère e Grassmann.

O primeiro aspecto a ser salientado e que já foi comentado anteriormente é que a força de Ampère dada pela equação (3.1) sempre satisfaz a terceira lei de Newton (ação e reação). Além disso, ela satisfaz a lei de ação e reação na forma forte, já que a força entre os elementos de corrente sempre aponta

<sup>21</sup>[Max, pág. 342, equação (77)], [Max65d, equação (77)], [Max65, pág. 484, equação (D)], [Max65a, equação (D)], [Max54, Vol. 2, §§598-599, págs. 238-241, equações (B) e (10)], [Lor95], [Lor15, págs. 14 e 15] e [O'R65, volume 2, pág. 561], [Ass13, Seção 14.5: Origens e Significados da Velocidade  $\vec{v}$  que Aparece na Força Magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$ ] e [Ass14, Seção 15.5: Origens e Significados da Velocidade  $\vec{v}$  que Aparece na Força Magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$ ].

ao longo da reta que os une, não importando a orientação dos elementos de corrente. Já a lei de Grassmann dada pelas equações (3.6) e (3.7) não satisfaz em geral o princípio de ação e reação nem mesmo na forma fraca. Um exemplo em que isto ocorre está apresentado na figura 3.1 (ver o exercício 3.4).

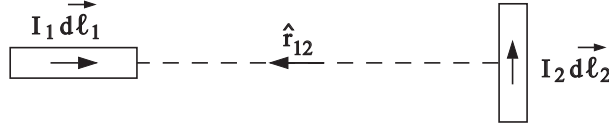


Figura 3.1: Elementos de corrente ortogonais.

Pela força de Ampère temos:

$$d^2 \vec{F}_{21}^A = d^2 \vec{F}_{12}^A = \vec{0}. \quad (3.9)$$

Já por Grassmann resulta que

$$d^2 \vec{F}_{21}^G = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} dl_1 d\vec{l}_2 \neq \vec{0}, \quad (3.10)$$

e

$$d^2 \vec{F}_{12}^G = \vec{0}. \quad (3.11)$$

Isto é, de acordo com a força de Grassmann o elemento  $I_1 d\vec{l}_1$  não fará força em  $I_2 d\vec{l}_2$ , enquanto que  $I_2 d\vec{l}_2$  fará uma força não-nula em  $I_1 d\vec{l}_1$ .

Apesar de alguns livros didáticos apresentarem este exemplo, é usualmente argumentado que elementos de corrente não existem e que na realidade temos apenas correntes fechadas, quando então também Grassmann satisfaria o princípio de ação e reação. Como veremos neste capítulo, a situação real pode não ser bem assim.

O próximo aspecto que vamos discutir aqui é o caso da força entre dois elementos de corrente paralelos e colineares, ver a figura 3.2.

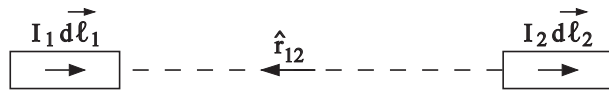


Figura 3.2: Elementos de corrente colineares e paralelos.

Usando as equações (3.1) até (3.7) obtemos (ver o exercício 3.4):

$$d^2 \vec{F}_{21}^A = \frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \frac{dl_1 dl_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} = -d^2 \vec{F}_{12}^A, \quad (3.12)$$

e

$$d^2 \vec{F}_{21}^G = \vec{0} = d^2 \vec{F}_{12}^G. \quad (3.13)$$

Neste caso particular vemos que a expressão de Grassmann satisfaz o princípio de ação e reação não prevendo nenhuma força de um elemento sobre o outro. Por outro lado, a expressão de Ampère também satisfaz o princípio de ação e reação mas prevê uma força de repulsão entre os elementos de corrente. E é usando exatamente este fato que tem sido realizada recentemente uma série de experiências com circuito único para se tentar distinguir experimentalmente estas duas forças.

Antes de chegar a este ponto, vamos discutir um fato importante que mostra o motivo pelo qual se pensou por muito tempo serem indistinguíveis estas duas forças.

Este fato pode ser expresso assim: A força de um circuito fechado de forma arbitrária atuando em um elemento de corrente de um outro circuito é a mesma quando calculada pela força integrada de Ampère ou pela força integrada de Grassmann. A principal razão explicando este fato é que a diferença entre as forças de Ampère e de Grassmann, ou seja, a equação (3.1) menos a equação (3.6), gera uma diferencial exata, cuja integral ao longo de todo o circuito  $C_2$  é nula.

Uma prova deste fato marcante se encontra no livro de Tricker.<sup>22</sup> Uma outra prova, usando propriedades mais avançadas do cálculo vetorial, se encontra delineada no exercício 3.7.

Seguem a seguir alguns teoremas (ver o exercício 3.5) e resultados importantes utilizados no exercício 3.7:

$$\nabla_1 \frac{1}{r_{12}} = -\nabla_2 \frac{1}{r_{12}} = -\frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}, \quad (3.14)$$

$$\nabla_1 \times \hat{r}_{12} = \nabla_2 \times \hat{r}_{12} = \vec{0}, \quad (3.15)$$

$$\nabla_2(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) = -\frac{d\vec{l}_1}{r_{12}} + (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (3.16)$$

$$\nabla_1(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) = \frac{d\vec{l}_2}{r_{12}} - (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (3.17)$$

$$\nabla_1(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) = \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}} - (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}}$$

$$+ \frac{1}{r_{12}} [(x_1 - x_2)\nabla_1 dl_{1x} + (y_1 - y_2)\nabla_1 dl_{1y} + (z_1 - z_2)\nabla_1 dl_{1z}], \quad (3.18)$$

$$\nabla_2(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) = -\frac{d\vec{l}_2}{r_{12}} + (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}}$$

---

<sup>22</sup>[Tri65, págs. 55-58].

$$+ \frac{1}{r_{12}} [(x_1 - x_2) \nabla_2 dl_{2x} + (y_1 - y_2) \nabla_2 dl_{2y} + (z_1 - z_2) \nabla_2 dl_{2z}] , \quad (3.19)$$

$$\nabla_1 (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) = dl_{2x} \nabla_1 dl_{1x} + dl_{2y} \nabla_1 dl_{1y} + dl_{2z} \nabla_1 dl_{1z} , \quad (3.20)$$

e

$$\nabla_2 (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) = dl_{1x} \nabla_2 dl_{2x} + dl_{1y} \nabla_2 dl_{2y} + dl_{1z} \nabla_2 dl_{2z} . \quad (3.21)$$

Embora possa parecer que  $\nabla_1 dl_{1x} = \vec{0}$ , isto nem sempre é verdade. Por exemplo, vamos supor uma espira circular de raio  $R = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}$  centrada na origem e na qual circula uma corrente no sentido anti-horário. Logo, usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned} d\vec{l}_1 &= (Rd\theta) \hat{\theta}_1 = Rd\theta (\hat{y} \cos \theta_1 - \hat{x} \sin \theta_1) \\ &= Rd\theta \left[ \frac{-y_1}{(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}} \hat{x} + \frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2)^{1/2}} \hat{y} \right] \\ &= -d\theta (y_1 \hat{x} - x_1 \hat{y}) = \hat{x} dl_{1x} + \hat{y} dl_{1y} . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Com a equação (A.13) resulta então:

$$\nabla_1 dl_{1x} = -d\theta \left( \hat{x} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \hat{y} \frac{\partial y_1}{\partial y_1} \right) = d\theta \left( \hat{x} \frac{x_1}{y_1} - \hat{y} \right) \neq \vec{0} . \quad (3.23)$$

Concluindo esta seção, vimos que a força de um circuito *fechado*  $C_2$  de forma arbitrária agindo sobre um elemento de corrente  $I_1 d\vec{l}_1$  de um outro circuito tem o mesmo valor de acordo com as expressões de Ampère e de Grassmann (ver o exercício 3.7). Isto significa que neste caso podemos escrever:

$$d\vec{F}_{C_2 \text{ em } I_1 d\vec{l}_1}^A = d\vec{F}_{C_2 \text{ em } I_1 d\vec{l}_1}^G = I_1 d\vec{l}_1 \times \left( \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right) . \quad (3.24)$$

Nesta última forma pode-se ver facilmente que a força de um circuito fechado atuando em um elemento de corrente é ortogonal a este elemento, já que se  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  então o vetor  $\vec{C}$  é ortogonal tanto ao vetor  $\vec{A}$  quanto ao vetor  $\vec{B}$ . Este fato marcante foi obtido experimentalmente pela primeira vez por Ampère e representa seu terceiro caso de equilíbrio, sendo que Ampère também foi o primeiro a chegar nesta conclusão teoricamente utilizando a forma integrada de sua força.<sup>23</sup> Em suas próprias palavras:<sup>24</sup>

<sup>23</sup>[Cha09, seção 7.3, págs. 131] e [AC11, seções 7.6, 10.1 e 10.4, págs. 151, 177 e 191].

<sup>24</sup>[Amp26, pág. 25], [Amp23, pág. 197], [Tri65, pág. 170], [Cha09, pág. 189] e [AC11, pág. 381].

Disto tiraremos esta consequência geral, [a saber,] que a ação de um circuito fechado, ou de um conjunto qualquer de circuitos fechados, sobre um elemento infinitamente pequeno de corrente elétrica é perpendicular a esse elemento.

### 3.6 Deduzindo as Equações de Maxwell

Nesta seção vamos tratar da dedução da lei circuital magnética a qual, como vimos na seção 1.4, é usualmente chamada de lei circuital de “Ampère.” Este é o nome dado à equação (1.41), algumas vezes sem o termo em  $d\Phi_E/dt$ . Vamos também deduzir outra das equações de Maxwell, isto é, a lei de não existência de monopolos magnéticos, equação (1.42). Para deduzir estas duas leis vamos seguir o procedimento apresentado por Jackson.<sup>25</sup>

Como já vimos na seção 1.4 (ver também o exercício 1.3), esta lei circuital magnética (1.41) pode ser deduzida diretamente da equação (1.33). Vamos então nos concentrar na dedução desta lei e da equação (1.34) a partir da força entre elementos de corrente. O principal resultado a que Ampère chegou em suas extensas e precisas pesquisas experimentais foi na sua força entre elementos de corrente dada pela equação (3.1). Tudo o mais que ele fez foi a partir desta força. Veremos que se pode deduzir as equações (1.33) e (1.34) a partir desta força desde que se assuma também a equação de conservação de cargas dada pela equação (1.37).

Na formulação de Maxwell há apenas correntes fechadas (ímãs interagindo com ímãs, ímãs interagindo com correntes fechadas, correntes fechadas interagindo com outras correntes fechadas etc.). Vamos então tratar com a equação (3.24), que é deduzida tanto da força de Ampère, equação (3.1), quanto da força de Grassmann, equação (3.6). A equação (3.24) pode ser escrita como

$$d\vec{F}_{C_2 \text{ em } I_1 d\vec{l}_1} = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2, \quad (3.25)$$

onde definimos o campo magnético  $\vec{B}_2$  devido a um circuito fechado  $C_2$  por:

$$\vec{B}_2 \equiv \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2}. \quad (3.26)$$

Em geral temos muitos circuitos interagindo com  $I_1 d\vec{l}_1$ . Em muitas situações teremos correntes distribuídas sobre um volume como nos circuitos reais que não são filiformes.

Substituindo então  $I_2 d\vec{l}_2$  por  $\vec{J} dV_2$  e integrando a expressão do campo magnético gerado pelo circuito 2 em todo o espaço, podemos obter o campo magnético atuando no ponto onde se encontra o elemento  $I_1 d\vec{l}_1$  (ou  $\vec{J}_1 dV_1$ ) como sendo dado por:

---

<sup>25</sup>[Jac75, seção 5.3].

$$\vec{B}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \int \int \vec{J}(\vec{r}_2, t) \times \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} dV_2 . \quad (3.27)$$

Nesta expressão deixamos  $\vec{J}$  depender não só da posição no circuito mas também do tempo já que queremos tratar do caso geral das intensidades das correntes podendo variar explicitamente no tempo. Apesar disto, vamos supor os circuitos fixos no espaço de tal forma que  $\hat{r}_{12}$ ,  $\vec{r}_{12}$  e  $r_{12}$  não dependam do tempo.

Da equação (A.15) resulta que podemos escrever  $\hat{r}_{12}/r_{12}^2$  como  $-\nabla_1(1/r_{12})$ . Como  $\nabla_1$  só atua na variável 1, este operador gradiente pode ser tirado da integral. Utilizando as equações (A.4) e (A.21) resulta que:

$$\vec{B}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla_1 \times \left( \int \int \int \frac{\vec{J}(\vec{r}_2, t)}{r_{12}} dV_2 \right) . \quad (3.28)$$

Aplicando o divergente em ambos os lados desta equação e usando a equação (A.27) obtemos a equação (1.34) da não existência de monopolos magnéticos. Ou seja, deduzimos uma das equações de Maxwell a partir da força entre elementos de corrente de Ampère depois de integrada para um circuito fechado. Deve-se observar que para chegar a este resultado não foi necessário utilizar a equação de conservação de cargas.

Agora seguimos a mesma linha de raciocínio para deduzir outra das equações de Maxwell, a lei circuital magnética, a partir da força de Ampère.

Aplicando agora o rotacional em ambos os lados desta equação e usando as equações (A.29) e (A.18) obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1, t) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla_1 \left( \int \int \int \vec{J} \cdot \nabla_1 \frac{1}{r_{12}} dV_2 \right) \\ &\quad - \frac{\mu_o}{4\pi} \int \int \int \vec{J}(\vec{r}_2, t) \nabla_1^2 \frac{1}{r_{12}} dV_2 . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para resolver esta segunda integral é necessário usar um outro resultado da análise vetorial, a equação (A.38). Usando também a equação (3.14) na primeira integral da equação (3.29) obtemos:

$$\nabla_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1, t) = \mu_o \vec{J}(\vec{r}_1, t) - \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla_1 \int \int \int \vec{J}(\vec{r}_2, t) \cdot \nabla_2 \frac{1}{r_{12}} dV_2 . \quad (3.30)$$

Só falta agora obter a última integral. Usando novamente a equação (A.18) junto com o teorema de Gauss, equação (A.32), obtemos:

$$\int \int \int \vec{J}(\vec{r}_2, t) \cdot \nabla_2 \frac{1}{r_{12}} dV_2 = \int \int \frac{\vec{J}(\vec{r}_2, t)}{r_{12}} \cdot d\vec{a}_2 - \int \int \int \frac{1}{r_{12}} \nabla_2 \cdot \vec{J}(\vec{r}_2, t) dV_2 . \quad (3.31)$$

Lembrando que estamos integrando em todo o espaço, resulta que a integral de superfície que aparece na equação (3.31) é feita no infinito. Supondo que o circuito 2 é limitado no espaço e que não se estende ao infinito, vem então que esta integral é nula.

A equação (3.30) fica então na seguinte forma:

$$\nabla_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1, t) = \mu_o \vec{J}(\vec{r}_1, t) + \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla_1 \int \int \int \frac{1}{r_{12}} \nabla_2 \cdot \vec{J}(\vec{r}_2, t) dV_2 . \quad (3.32)$$

Até aqui estamos seguindo o procedimento apresentado por Jackson na seção 5.3 de seu livro *Eletrodinâmica Clássica*.<sup>26</sup> Neste ponto Jackson afirmou o seguinte:<sup>27</sup>

Mas para fenômenos magnéticos de equilíbrio [*steady-state*]  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ , de tal forma que obtemos  $\nabla \times \vec{B} = 4\pi \vec{J}/c$ . Esta é a segunda equação da magnetostática, correspondendo a  $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$  na eletrostática.

Então na seção 6.3 de seu livro, Jackson afirmou que o sistema de equações de Maxwell com a lei circuital de “Ampère” na forma  $\nabla \times \vec{B} = 4\pi \vec{J}/c$  é inconsistente no que diz respeito à equação de conservação de cargas. Jackson<sup>28</sup> afirmou que “a equação com defeito é a lei de Ampère.” Então ele disse que:<sup>29</sup>

Foi necessário o gênio de J. C. Maxwell, estimulado pelas observações de Faraday, para ver a inconsistência destas equações e para modificá-las em um conjunto consistente.

De acordo com Jackson, Maxwell substituiu então  $\vec{J}$  na lei circuital de “Ampère” por  $\vec{J} + (\partial \vec{D}/\partial t)/4\pi$  de tal forma que ela ficou matematicamente consistente com a equação de conservação de cargas  $\nabla \cdot \vec{J} + \partial \rho/\partial t = 0$ .

A impressão que ficamos com estas afirmativas do Jackson (algo semelhante se encontra na maioria dos livros didáticos) é que Ampère chegou em  $\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}$  e que Maxwell modificou esta expressão para  $\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + (\partial \vec{E}/\partial t)/c^2$ , de tal forma que esta equação ficasse consistente com a equação de conservação de cargas  $\nabla \cdot \vec{J} + \partial \rho/\partial t = 0$  através da lei de Gauss  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_o$ .

Mas esta não é a situação real. Em primeiro lugar, Ampère nunca chegou à equação  $\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J}$ . O primeiro a chegar a esta equação foi o próprio Maxwell, em 1855, vinte anos após a morte de Ampère.<sup>30</sup> Então Maxwell

<sup>26</sup>[Jac75, seção 5.3].

<sup>27</sup>[Jac75, pág. 174]. Deve ser lembrado que Jackson utiliza o sistema de unidades Gaussiano.

<sup>28</sup>[Jac75, pág. 217].

<sup>29</sup>[Jac75, pág. 217].

<sup>30</sup>[Max65c] e [Whi73, págs. 242–245].



generalizou ou corrigiu a si mesmo em 1861 e 1864 escrevendo  $\nabla \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} + (\partial \vec{E} / \partial t) / c^2$ .

Voltando onde Jackson havia parado na seção 5.3 de seu livro, ou seja, na equação (3.32), vamos utilizar agora a equação de continuidade ou conservação de cargas, (1.37). Como vimos na seção 1.4, Kirchhoff já havia trabalhado com a equação de conservação de cargas em 1857, ou seja, em uma época anterior aos principais trabalhos de Maxwell sobre eletromagnetismo. Utilizando que  $\vec{J} = \rho \vec{v}$  e que  $\partial / \partial t$  pode sair da integral pois não atua em  $r_{12}$ , já que os circuitos estão fixos no espaço e esta é apenas uma derivada parcial, resulta das equações (1.37) e (3.32) que:

$$\nabla_1 \times \vec{B} = \mu_o \vec{J} - \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_1 \int \int \int \frac{\rho(\vec{r}_2, t)}{r_{12}} dV_2 . \quad (3.33)$$

Das equações (1.13), (1.15) e (1.36) obtemos:

$$\nabla_1 \times \vec{B}(\vec{r}_1, t) = \mu_o \vec{J}(\vec{r}_1, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{r}_1, t) . \quad (3.34)$$

E esta é a equação (1.33) que queríamos deduzir.

Esta dedução assumiu circuitos estacionários. Não pretendemos tratar aqui do caso de fontes e detectores em movimento. Existem outros trabalhos com uma discussão geral do tema desta seção incluindo muitas referências a artigos importantes.<sup>31</sup>

O fato que deve ser ressaltado nesta dedução é que para se chegar na equação (1.33) foi usada, além da força de Ampère entre elementos de corrente, a equação de conservação para cargas elétricas. Isto mostra que a lei circuital magnética pode ser deduzida ou do campo magnético devido a um elemento de corrente, equações (1.18) e (3.5), ou da força de Ampère na forma das equações (3.25), (3.26) e (3.24), desde que se assuma também a equação de conservação de cargas. É importante ressaltar que a corrente de deslocamento, o termo em  $\partial \vec{E} / \partial t$  nas equações (1.33) ou (3.34), já surge naturalmente nesta dedução. E já vimos no capítulo 1 como se chega à lei circuital magnética integrada, ou seja, na equação (1.41), a partir desta forma diferencial.

Recapitulando, no capítulo 2 havíamos visto que da força de Weber se chega à força de Coulomb e que a partir da força de Coulomb se chega à lei de Gauss, a primeira das equações de Maxwell. Neste capítulo vimos que da força de Weber entre cargas se chega na força de Ampère entre elementos de corrente. Acabamos de ver que a partir da força de Ampère se chega nas outras equações de Maxwell: a lei circuital magnética e a lei de não existência de monopolos magnéticos. Para completar a prova da compatibilidade da força de Weber com as equações de Maxwell só falta deduzir a partir de Weber a lei de indução de Faraday. Este é o assunto do capítulo 4.

---

<sup>31</sup>[WM89], [Jef90] e [GH91].

### 3.7 Experiências

Nesta seção discutimos rapidamente aspectos experimentais relacionados com a controvérsia força de Ampère versus força de Grassmann.

Neste capítulo vimos que a força de um circuito fechado sobre um elemento de corrente de um outro circuito é a mesma de acordo com Ampère e com Grassmann, equação (3.24). Isto significa que se estamos considerando a interação entre dois ou mais circuitos fechados, entre dois ou mais ímãs, ou entre circuitos fechados e ímãs, não podemos distinguir entre Ampère e Grassmann. Esta semelhança das duas forças neste caso levou muitos cientistas a pensarem que ambas as forças sempre dariam o mesmo resultado em todas as situações experimentais. Aliando-se a isto o fato de que a força de Grassmann é muitas vezes mais fácil de integrar do que a força de Ampère, fez com que ao longo do tempo a força de Ampère fosse sendo deixada de lado em favor da força de Grassmann.

Creemos que outro motivo para a força de Ampère entre elementos de corrente ter sido praticamente abandonada na maioria dos livros didáticos atuais, não sendo nem mesmo mencionada, é que a teoria da relatividade restrita é baseada no conjunto das equações de Maxwell mais a força de Maxwell-Lorentz. Acontece que a força de Grassmann é compatível com a força de Maxwell-Lorentz (basta substituir  $I_1 d\vec{l}_1$  por  $q_1 \vec{v}_1$  na equação (3.4)), enquanto que a força de Ampère não o é. Devido ao sucesso e popularidade da relatividade restrita, tudo aquilo que não era compatível com a força de Maxwell-Lorentz foi abandonado. Só que nos últimos anos as forças de Ampère e de Weber têm voltado a ser consideradas seriamente por motivos experimentais que indicamos neste livro. No que diz respeito à força de Ampère, a situação começou a mudar com um trabalho experimental publicado no periódico *Nature* em 1982 que demonstrou a propulsão por jatos na direção em que a corrente flui na interface entre condutores líquidos e sólidos.<sup>32</sup> Este artigo mostrando experiências que só podiam ser explicadas em termos de forças longitudinais (que não podiam existir de acordo com a força de Grassmann) renovou o interesse na força de Ampère e estimulou um grande número de novas experiências relacionadas com este assunto extremamente importante.

A existência de forças longitudinais havia sido enfatizada pelo próprio Ampère que elaborou o assim chamado experimento da ponte de Ampère para mostrar a existência destas forças. A experiência da ponte de Ampère tem sido discutida ao longo dos anos por diversos autores.<sup>33</sup>

Hoje em dia há várias experiências que tentam evidenciar a existência de forças longitudinais. Para muitos cientistas esta evidência experimental seria uma prova irrefutável da força de Ampère e uma refutação da força de Grass-

---

<sup>32</sup>[Gra82b].

<sup>33</sup>[Max54, volume 2, artigos 686–688, págs. 318–320], [GG93], [Gra94], [GG96], [BA98], [BA01], [Cha09, seção 7.2: A experiência da ponte de Ampère] e [AC11, seção 8.2: A experiência da ponte de Ampère].

mann. Outros acham que mesmo no caso de circuitos únicos em que se estuda a força de parte do circuito no restante dele mesmo, a força de Ampère vai dar o mesmo resultado que a força de Grassmann.<sup>34</sup> Se este for o caso, então as forças longitudinais demonstradas por estas experiências teriam de ter uma origem diferente (que não seja a força de Ampère), só que esta outra origem é até agora desconhecida.

Existem vários autores que apresentam experiências e discussões teóricas sobre este tema, com vários pontos de vista diferentes.<sup>35</sup>

Terminamos este capítulo com o julgamento de Maxwell sobre todo este assunto. Ele conhecia não apenas a força de Ampère, equação (3.1), mas também a força de Grassmann, equações (3.4) a (3.6), que é de 1845.<sup>36</sup> Ele também conhecia o resultado da equação (3.24) segundo o qual a força de um circuito fechado de forma arbitrária ao atuar sobre um elemento de corrente de um outro circuito tem o mesmo valor de acordo com Ampère e com Grassmann. Há muitas outras forças entre elementos de corrente que diferem da força de Ampère por uma diferencial exata de tal forma que elas também chegam na equação (3.24) após serem integradas para circuitos fechados. O próprio Maxwell apresentou duas outras leis de força entre elementos de corrente que eram diferentes da força de Ampère e da força de Grassmann mas que chegavam na equação (3.24) para a força de um circuito fechado sobre um elemento de corrente de um outro circuito. Após discutir as forças de Ampère, de Grassmann e suas duas expressões para a força entre elementos de corrente, Maxwell apresentou a seguinte análise.<sup>37</sup>

Destas quatro suposições a de Ampère é sem dúvida a melhor, já que ela é a única que faz com que a força nos dois elementos seja não apenas igual e oposta mas ao longo da reta que os une.

## 3.8 Exercícios

1. Neste exercício vai-se deduzir a força de Ampère entre elementos de corrente, equação (3.1), a partir da força de Weber entre cargas elétricas. Este exercício está baseado em um trabalho de 1990.<sup>38</sup>

---

<sup>34</sup>[BA98] e [BA01].

<sup>35</sup>[Rie66], [Nor07], [Her11], [Her21], [Her23], [Gra90a], [Gra82b], [Gra82a], [Gra83a], [Gra83b], [Gra84], [Gra85b], [Gra86], [Gra87d], [Gra87c], [Gra87a], [GG85], [GG86], [GG92], [GTM90], [Moy89b], [Moy89a], [Moy89c], [Wes87b], [Wes87a], [Wes89], [Wes90b], [Wes91], capítulo 6, [Nas85], [Nas85], [Pap83], [Pap90], [Ass92f], [RS92], [Phi90a], [Phi93], [PP90], [RS92], [Aze86], [Asp86], [PM85], [Jol85], [Ter85a], [Ter85b], [Chr87], [Chr89], [Peo88], [Str89], [Cor89], [Whi88], [Ram91], [Sau91], [Sau92], [GG93], [Gra94], [GG96], [BA98], [BA01], [Cha09], [AC11] etc.

<sup>36</sup>[Max54, volume 2, artigo 526, pág. 174].

<sup>37</sup>[Max54, volume 2, artigo 527, pág. 174].

<sup>38</sup>[Ass90a].

A forma mais fácil de fazê-lo é usando a força de Weber na forma da equação (2.12). Suponha então cada elemento de corrente  $I_i d\vec{l}_i$  como consistindo de cargas positivas e negativas,  $dq_{i+}$  e  $dq_{i-}$ , o mesmo valendo para o elemento de corrente  $I_j d\vec{l}_j$ , figura 3.3.

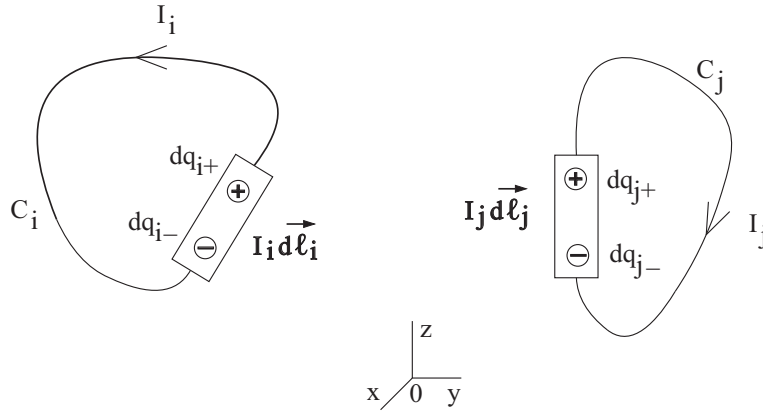


Figura 3.3: Elementos de corrente.

Suponha ainda que estas cargas estejam deslocando-se em relação a um referencial inercial com velocidades  $\vec{v}_{i+}$  e  $\vec{v}_{i-}$ , e acelerações  $\vec{a}_{i+}$  e  $\vec{a}_{i-}$ , respectivamente:

Vamos supor circuitos filiformes tais que as densidades lineares de carga sejam dadas por  $\lambda_{1+}$ ,  $\lambda_{1-}$ ,  $\lambda_{2+}$  e  $\lambda_{2-}$ . Isto significa que a quantidade de carga em cada elemento de corrente é dada por  $dq_{1+} = \lambda_{1+} dl_1$ ,  $dq_{1-} = \lambda_{1-} dl_1$ ,  $dq_{2+} = \lambda_{2+} dl_2$  e  $dq_{2-} = \lambda_{2-} dl_2$ . Suponha também que eles são neutros eletricamente, isto é,  $dq_{i-} = -dq_{i+}$ , ou  $\lambda_{i-} = -\lambda_{i+}$ . Embora esta suposição não seja verdade em geral para condutores resistivos,<sup>39</sup> os efeitos que surgem da não neutralidade dos elementos de corrente são em geral pequenos e podem ser desprezados neste exercício. Como os elementos de corrente têm tamanho ou comprimento infinitesimal (podendo ser, por exemplo, do tamanho típico de um átomo ou do espaçamento da rede cristalina, o que é algo muito pequeno) resulta:  $\vec{r}_{i+} = \vec{r}_{i-} = \vec{r}_i$ .

(A) Obtenha a força do elemento 2 no elemento 1 somando as quatro componentes da força:

$$d^2 \vec{F}_{21} = d^2 \vec{F}_{2+, 1+} + d^2 \vec{F}_{2+, 1-} + d^2 \vec{F}_{2-, 1+} + d^2 \vec{F}_{2-, 1-} .$$

Observe que no resultado final a parte coulombiana e a parte de aceleração na equação (2.12) vão a zero.

(B) Finalmente, utilize as equações (3.2) e (3.3) para colocar o resultado da parte (A) na forma da equação (3.1).

<sup>39</sup>[AH07], [AH09] e [AH13].

2. Neste exercício vai-se deduzir a força de Grassmann dada pela equação (3.4) a partir da força de Maxwell-Lorentz dada pela equação (1.29).
- (A) Suponha as mesmas coisas que no exercício 3.1.
- (B) Obtenha a força do elemento 2 no elemento 1 somando as quatro componentes da força, como no exercício 3.1, mas agora usando a equação (1.29) em vez da força de Weber.
- (C) Use a equação (3.2) para colocar este resultado na forma da força de Grassmann dada pela equação (3.4).
3. Agora vamos deduzir a força de Grassmann a partir da força de Liénard-Schwarzschild.

(A) O campo magnético do eletromagnetismo clássico é dado pela segunda chave da equação (1.53) em função da velocidade da carga fonte. Suponha elementos de corrente neutros eletricamente,  $dq_{2-} = -dq_{2+}$  e  $dq_{2+} = \lambda_{2+} dl_2$ , onde  $dl_2$  é o comprimento do elemento de corrente. Some as contribuições das cargas positivas e negativas ao campo magnético e use a equação (3.3) para chegar ao campo magnético devido a um elemento de corrente dado pela equação (3.5).

(B) Agora vai-se usar toda a expressão (1.53). Suponha elementos de corrente neutros e que  $dq_{2-} = -dq_{2+} = -\lambda_{2+} dl_2$ ,  $dq_{1-} = -dq_{1+} = -\lambda_{1+} dl_1$ . Some então as forças entre os pares de carga usando a equação (1.53) para chegar à força de Grassmann, isto é:

$$d^2 \vec{F}_{21}^G = d^2 \vec{F}_{2+,1+} + d^2 \vec{F}_{2+,1-} + d^2 \vec{F}_{2-,1+} + d^2 \vec{F}_{2-,1-} .$$

Nesta expressão  $d^2 \vec{F}_{21}^G$  é dado pelas equações (3.4) e (3.5), ou pela equação (3.6). Para chegar a este resultado use ainda as equações (3.2) e (3.3).

Este exercício ilustra mais uma vez que a partir da força de Maxwell-Lorentz ou da força de Liénard-Schwarzschild se chega à força de Grassmann e não à força de Ampère.

4. (A) Use as expressões (3.1) e (3.6) para calcular a força exercida pelo elemento  $I_2 d\vec{l}_2$  no elemento  $I_1 d\vec{l}_1$  usando Ampère e Grassmann na situação mostrada na figura 3.1. Em seguida use as equações (3.1) e (3.7) para calcular a força de  $I_1 d\vec{l}_1$  em  $I_2 d\vec{l}_2$  e confirme que enquanto para Ampère vale o princípio de ação e reação, o mesmo já não ocorre com Grassmann.
- (B) Repita o procedimento anterior no caso da figura 3.2. Nesta situação, apesar de haver ação e reação tanto para Ampère quanto para Grassmann, vai haver uma repulsão entre os elementos de corrente de acordo com Ampère e nenhuma repulsão ou atração de acordo com Grassmann.
5. Prove usando componentes retangulares cartesianas as relações (3.14) a (3.21).

6. Uma função que vai ser usada no próximo exercício e no capítulo 4 é dada por:

$$G \equiv \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} .$$

- (A) Use o teorema de Stokes, equação (A.33), e as relações (A.21) e (3.15) para colocar  $G$  na forma

$$G = \int \int_{S_2} \left\{ \left[ \nabla_2 \left( \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)}{r_{12}} \right) \right] \times \hat{r}_{12} \right\} \cdot d\vec{a}_2 .$$

- (B) Use  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ , a relação (3.16) e o fato de  $\hat{r}_{12} \times \hat{r}_{12} = \vec{0}$ , para mostrar que:

$$G = - \int \int_{S_2} \left( d\vec{l}_1 \times \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right) \cdot d\vec{a}_2 .$$

- (C) Use a segunda igualdade da equação (3.14), a equação (A.21) e novamente o teorema de Stokes dado pela equação (A.33) para mostrar finalmente que:

$$G = \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} .$$

- (D) Mostre que

$$H \equiv \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} = \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} .$$

7. O objetivo deste exercício é mostrar que a força de um circuito fechado sobre um elemento de corrente de um outro circuito é a mesma quando calculada pela força de Ampère ou pela força de Grassmann.

Após integrar no circuito 2, as equações (3.1) e (3.6) podem ser escritas como:

$$d\vec{F}_{\mathcal{C}_2 \text{ em } I_1 d\vec{l}_1}^A = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 (2\vec{A}_1 - 3\vec{A}_2) ,$$

e

$$d\vec{F}_{\mathcal{C}_2 \text{ em } I_1 d\vec{l}_1}^G = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 (\vec{A}_1 - \vec{A}_3) ,$$

onde

$$\vec{A}_1 \equiv \oint_{\mathcal{C}_2} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2},$$

$$\vec{A}_2 \equiv \oint_{\mathcal{C}_2} (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2},$$

e

$$\vec{A}_3 \equiv \oint_{\mathcal{C}_2} (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) \frac{d\vec{l}_2}{r_{12}^2}.$$

(A) Usando a equação (3.14), o fato de que  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ , assim como as relações (3.17) e (3.18), mostre que  $\vec{A}_2$  pode ser expressa como (lembre-se de que como  $\nabla_1$  só atua na variável 1, este operador  $\nabla_1$  pode sair da integral  $\oint_{\mathcal{C}_2}$ ):

$$\begin{aligned} \vec{A}_2 &= -\nabla_1 \left[ \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} \right] - 2\vec{A}_2 + \vec{A}_3 \\ &+ \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}^2} \left[ (x_1 - x_2)\nabla_1 dl_{1x} + (y_1 - y_2)\nabla_1 dl_{1y} + (z_1 - z_2)\nabla_1 dl_{1z} \right] \\ &+ \oint_{\mathcal{C}_2} \left( \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \cdot d\vec{l}_2 \right) d\vec{l}_1. \end{aligned}$$

(B) Use o fato de  $d\vec{l}_1$  poder sair da última integral, mais o teorema de Stokes, assim como as relações (3.14) e (A.26), para mostrar que a última integral do lado direito da expressão anterior é nula.

(C) Use os exercícios 3.5, 3.6 e aplique novamente  $\nabla_1$  em  $G$  para mostrar que (usando a equação (3.20)):

$$\nabla_1 G = -\vec{A}_1 + \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{r_{12}} [dl_{2x}\nabla_1 dl_{1x} + dl_{2y}\nabla_1 dl_{1y} + dl_{2z}\nabla_1 dl_{1z}].$$

(D) Jogue os resultados das letras (B) e (C) na letra (A) para mostrar que:

$$3\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \vec{A}_3 + \vec{A}_4,$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{A}_4 \equiv & \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{r_{12}} \left\{ \left[ (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) \frac{(x_1 - x_2)}{r_{12}} - dl_{2x} \right] \nabla_1 dl_{1x} \right. \\ & + \left[ (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) \frac{(y_1 - y_2)}{r_{12}} - dl_{2y} \right] \nabla_1 dl_{1y} \\ & \left. + \left[ (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) \frac{(z_1 - z_2)}{r_{12}} - dl_{2z} \right] \nabla_1 dl_{1z} \right\}. \end{aligned}$$

(E) Lembrando que tudo que tem a ver apenas com a variável 1 pode sair da integral sobre  $\mathcal{C}_2$ , resulta que a primeira integral de  $\vec{A}_4$  pode ser escrita como:

$$(\nabla_1 dl_{1x}) \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{r_{12}} [(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) (\hat{r}_{12} \cdot \hat{x}) - (d\vec{l}_2 \cdot \hat{x})].$$

Use o teorema de Stokes, equação (A.33), as relações (A.4), (A.21), (3.14) e (3.15), assim como os fatos de que  $\nabla_2 \times \hat{x} = \vec{0}$ ,  $\hat{r}_{12} \times \hat{r}_{12} = \vec{0}$  e  $\nabla_2(\hat{r}_{12} \cdot \hat{x}) = [-\hat{x} + (\hat{r}_{12} \cdot \hat{x})\hat{r}_{12}]/r_{12}$ , para mostrar que esta integral é nula.

(F) Mostre que as outras duas integrais de  $\vec{A}_4$  também são nulas. Desta forma se pode concluir que  $\vec{A}_4 = \vec{0}$ .

(G) Jogue o resultado da letra (F) na letra (D) para concluir que são iguais as forças de Ampère e Grassmann exercidas por um circuito fechado ao atuar sobre um elemento de corrente de um outro circuito. Este fato é um resultado da relação  $3\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \vec{A}_3$ , de tal forma que  $2\vec{A}_1 - 3\vec{A}_2 = \vec{A}_1 - \vec{A}_3$ . Estas relações significam que:

$$d\vec{F}_{\mathcal{C}_2}^A \text{ em } I_1 d\vec{l}_1 = d\vec{F}_{\mathcal{C}_2}^G \text{ em } I_1 d\vec{l}_1 = I_1 d\vec{l}_1 \times \left( \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right).$$





# Capítulo 4

## Lei de Indução de Faraday

### 4.1 Lei de Faraday

Usualmente se produz corrente elétrica através de uma voltagem ou diferença de potencial, como quando ligamos os terminais de uma pilha ou bateria por um condutor metálico. Uma outra maneira de gerar corrente elétrica completamente independente da anterior foi descoberta em 1831 por Michael Faraday (1791–1867). Este é o assunto deste capítulo.

Faraday nunca teve uma educação formal em ciência e sempre foi um autodidata. Chegou a assistir a algumas palestras públicas do químico e físico inglês Humphry Davy (1778–1829), sendo que aos 21 anos passou a ser assistente de Davy no seu laboratório de química da Instituição Real de Ciências de Londres. Foi nesta instituição que Faraday trabalhou a vida inteira. A partir da morte de Davy se tornou o diretor do laboratório. Faraday sempre foi essencialmente um químico e físico experimental, sendo que seus conhecimentos matemáticos eram muito restritos. Faraday sempre foi muito influenciado por Davy e durante uns 10 anos se ocupou principalmente de química (eletrólise, decomposição de elementos etc.). Foi a partir de 1820, em seguida à descoberta fundamental de Oersted, que passou a se dedicar mais ao eletromagnetismo.

A inspiração para suas pesquisas experimentais foi a tentativa de encontrar fenômenos na eletrodinâmica análogos ao que ocorre na eletrostática. Ele sabia que quando se aproxima uma carga elétrica de um condutor neutro (por exemplo, um metal), a carga induzia uma polarização no metal. A parte do metal mais afastada da carga externa ficava eletrizada com uma carga de mesmo sinal que a carga externa, enquanto que a parte do metal mais próxima da carga externa ficava eletrizada com uma carga de sinal oposto ao sinal da carga externa, figura 4.1. Recentemente discutimos os fundamentos experimentais e históricos da eletricidade, reproduzindo com materiais de baixo custo não apenas esta experiência que influenciou a Faraday, mas diversas outras.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>[Ass10b] e [Ass10a].

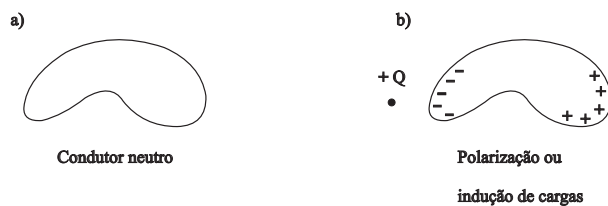


Figura 4.1: Indução de cargas.

Sua ideia inicial foi a de que se mantivesse uma corrente elétrica próxima de um outro fio fechado ou próxima de uma chapa metálica, a primeira corrente poderia induzir uma corrente elétrica nestes corpos vizinhos, acreditando ainda que esta corrente induzida permaneceria enquanto houvesse corrente no primeiro circuito. Viu experimentalmente que esta ideia não funcionava, mas em 1831 fez a grande descoberta de que uma corrente era induzida no circuito secundário desde que variasse a corrente no circuito primário. Em seguida, observou que mesmo que houvesse uma corrente constante no circuito primário, podia induzir uma corrente no secundário desde que houvesse um movimento relativo entre os dois circuitos. Também se a área de um dos circuitos fosse alterada seria gerada uma corrente enquanto estivesse havendo a variação da área. O trabalho fundamental de Faraday já se encontra traduzido para a língua portuguesa.<sup>2</sup>

Estes casos de indução de correntes em um circuito secundário  $C_2$  estão representados na figura 4.2.

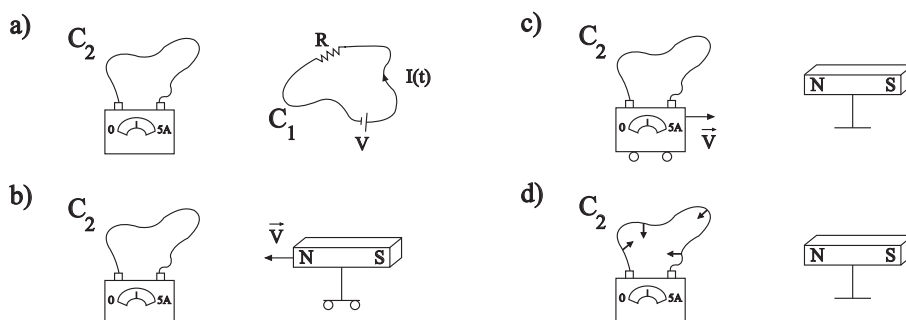


Figura 4.2: Exemplos de indução de correntes. (A) Variação de intensidade da corrente no circuito primário. (B) Ímã permanente se aproximando de um circuito. (C) Circuito se aproximando de um ímã. (D) Variação da área de um circuito em uma região de campo magnético.

Nas figuras 4.2 (A) os circuitos estão em planos paralelos. Nas figuras (B) até (D) o eixo norte-sul do ímã é normal ao plano do circuito secundário.

Em outros trabalhos Faraday expressou seus resultados dizendo que a corrente induzida  $I_2$  era devida a uma força eletromotriz induzida, que representaremos por  $fem_{12}$ , sendo que esta  $fem_{12}$  surgiria quando houvesse uma variação

<sup>2</sup>[Far11].

do fluxo magnético sobre a área do circuito secundário em que estava ocorrendo a indução. Deve-se lembrar que a *fem*, embora seja chamada de força, é uma voltagem não eletrostática cuja dimensão é o Volt ( $1V = 1kgm^2C^{-1}s^{-2}$ ). Por analogia com a lei de Ohm ( $I = V/R$ ), podemos escrever a lei de Faraday (quando não há baterias ligadas ao circuito) na seguinte forma:

$$I_2 = \frac{fem_{12}}{R_2}, \quad (4.1)$$

e

$$fem_{12} \equiv -\frac{d}{dt}\Phi_B \equiv -\frac{d}{dt} \int \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{a}_2. \quad (4.2)$$

Na equação (4.2) o sinal de menos foi colocado para deixar esta lei compatível com a descoberta de Lenz de 1834, que tem a ver com o sentido da corrente induzida. A lei de Lenz afirma que quando se varia o fluxo magnético sobre um circuito, a corrente induzida ocorre em um certo sentido tal que a força resultante sobre o circuito tende a se opor à variação do fluxo. Por exemplo, suponhamos que haja uma espira circular de raio  $r$  centrada na origem, sobre o plano  $XY$ , sem corrente. Caso um ímã permanente localizado sobre o eixo  $Z$ , na região  $z > 0$ , com o polo norte para baixo e o polo sul para cima comece a se aproximar da espira, a corrente induzida será na direção anti-horária. Ou seja, é como se a espira se transformasse em um pequeno ímã com o polo norte para cima tal que tende a repelir o ímã permanente que está se aproximando dela. Pode-se dizer que a lei de Lenz exprime o fato de que, no caso da indução de correntes, a natureza se comporta de maneira a evitar instabilidades. Neste exemplo em particular, caso a corrente induzida fosse no sentido horário, haveria uma atração entre o ímã e a espira, o que se configuraria como uma situação instável já que qualquer perturbação na posição do ímã tenderia a crescer indefinidamente.

Maxwell apresentou a lei de Lenz como segue:<sup>3</sup>

Se uma corrente constante flui no circuito primário  $A$  e se, pelo movimento de  $A$ , ou do circuito secundário  $B$ , for induzida uma corrente em  $B$ , a direção desta corrente induzida será tal que, por sua ação eletromagnética sobre  $A$ , ela tenderá a se opor ao movimento relativo dos circuitos.

Os trabalhos de Faraday em eletromagnetismo podem ser facilmente encontrados.<sup>4</sup> Uma boa discussão de seu trabalho pode ser encontrada nos livros de Tricker e Whittaker.<sup>5</sup> O trabalho fundamental de Faraday descrevendo sua descoberta da indução eletromagnética já se encontra traduzido para a língua portuguesa.<sup>6</sup>

<sup>3</sup>[Max54, volume 2, artigo 542, pág. 190].

<sup>4</sup>[Far52].

<sup>5</sup>[Tri66] e [Whi73, capítulo 6: Faraday].

<sup>6</sup>[Far11].

## 4.2 Franz Neumann

Além de Faraday e Lenz, outra pessoa importante no desenvolvimento da lei de indução foi Franz Neumann. Ele e Weber foram os primeiros a matematizar a lei de Faraday. O objetivo de Neumann era deduzir a lei de Faraday, equações (4.1) a (4.2), partindo da força de Ampère, equação (3.1). Foi durante suas pesquisas que introduziu pela primeira vez o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  definido por:

$$\vec{A}(\vec{r}_2) \equiv \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} I_1 \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}} . \quad (4.3)$$

Este é o potencial vetor no ponto  $\vec{r}_2$  devido ao circuito  $\mathcal{C}_1$  no qual flui a corrente  $I_1$ . Aplicando o rotacional  $\nabla_2 \times$  em ambos os lados da equação (4.3), se obtém o seguinte resultado (usando as equações (A.21) e (3.14), lembrando ainda que o operador  $\nabla_2$  só atua nas variáveis 2 e, portanto, pode entrar em  $\oint_{\mathcal{C}_1}$ , não atuando sobre  $I_1 d\vec{l}_1$ ):

$$\nabla_2 \times \vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \times I_1 d\vec{l}_1 . \quad (4.4)$$

Mas este é justamente o campo magnético devido ao circuito 1 (equação (3.26) trocando os índices 1 e 2, e lembrando que  $\hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$ ), isto é:

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \nabla_2 \times \vec{A} , \quad (4.5)$$

com  $\vec{A}$  dado pela equação (4.3). Aplicando este resultado na equação (4.2) e usando o teorema de Stokes, equação (A.33), resulta que se pode escrever a lei de Faraday dada pela equação (4.1) com a força eletromotriz induzida  $fem_{12}$  dada na forma (ver o exercício 4.1):

$$fem_{12} = -\frac{d}{dt} \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}_2 = \oint_{\mathcal{C}_2} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{l}_2 . \quad (4.6)$$

Ou seja, Neumann conseguiu expressar a lei de indução sem precisar falar no campo magnético, utilizando apenas seu potencial vetor  $\vec{A}$ , dado pela equação (4.3).

Neumann também introduziu aquilo que se chama de coeficiente de indutância mútua,  $M$ , dado por:

$$M \equiv \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} . \quad (4.7)$$

Este coeficiente é independente da intensidade das correntes  $I_1$  e  $I_2$ . Ele é, portanto, apenas um fator geométrico que relaciona os dois circuitos. Utilizando-se o coeficiente de indutância mútua  $M$  observa-se que a lei de indução também pode ser expressa na forma da equação (4.1) com a  $fem$  dada por (ver o exercício 4.2):

$$fem_{12} = -\frac{d}{dt}(I_1 M) . \quad (4.8)$$

Há ainda uma outra maneira de ver a lei de indução. Um dipolo elétrico é constituído por duas cargas de mesma magnitude mas de sinais opostos separadas pela distância  $\ell$ . O momento de dipolo elétrico é definido por:

$$\vec{p} \equiv q\vec{\ell} , \quad (4.9)$$

onde  $q$  é a carga positiva e  $\vec{\ell}$  é o vetor que aponta da carga negativa para a positiva e cujo módulo é a distância entre as duas cargas. A energia potencial deste dipolo em uma região de campo elétrico  $\vec{E}$  (isto é, a energia gasta para trazer este dipolo lentamente do infinito até este ponto sem alterar a distância  $\ell$  e supondo que  $\vec{E}$  não dependa do tempo) é dada por:

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E} . \quad (4.10)$$

Em analogia com estes resultados, é possível definir o momento magnético de uma pequena espira de área  $a$  e corrente  $I$  como:

$$\vec{m} \equiv Ia\hat{u} , \quad (4.11)$$

onde  $\hat{u}$  é o vetor unitário perpendicular à área  $a$  e apontando de acordo com a regra da mão direita. Esta espira funciona como um dipolo magnético. A energia potencial deste dipolo magnético em uma região onde há um campo magnético  $\vec{B}$  (isto é, a energia gasta para trazer este dipolo lentamente do infinito até esta região supondo que  $\vec{B}$  não depende do tempo e que  $I$  e  $a$  permanecem constantes) é dada por:

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B} . \quad (4.12)$$

No caso de um circuito macroscópico  $\mathcal{C}_1$  na presença de um campo magnético  $\vec{B}$  resulta ao se generalizar o resultado anterior que sua energia potencial é dada por:

$$W = -I_1 \int \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{a}_1 = -I_1 I_2 M . \quad (4.13)$$

Este resultado faz com que a força eletromotriz induzida seja dada por:

$$fem_{12} = \frac{d}{dt} \left( \frac{W}{I_2} \right) . \quad (4.14)$$

Na equação (4.13) a grandeza  $W$  pode ser vista como o trabalho que tem de ser feito contra a força entre os dois circuitos  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  para separá-los a uma distância infinita, supondo que as intensidades das correntes permaneçam constantes.

Antes de prosseguir, vale lembrar que a força eletromotriz induzida,  $fem$ , representa uma voltagem ao longo de todo o circuito. Portanto, ela pode ser representada por  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Usando este resultado na equação (4.2) obtém-se:

$$fem_{12} = \oint_{c_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}_2 = \int \int_{S_2} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{a}_2 . \quad (4.15)$$

Do teorema de Stokes, equação (A.33), resulta então:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \quad (4.16)$$

Esta é a lei de Faraday na forma diferencial, equação (1.35). Comparando ainda a equação (4.15) com a equação (4.6), vê-se que a componente do campo elétrico responsável pela lei de indução não é a componente de Poisson dada por  $-\nabla\phi$ , mas sim a componente dada por  $-\partial\vec{A}/\partial t$ , ver o exercício 1.8.

Terminamos esta seção com as palavras de Maxwell comentando o trabalho de Franz Neumann (nossa ênfase):<sup>7</sup>

Baseado nesta lei [ou seja, na lei de Lenz] F. E. Neumann<sup>8</sup> fundou sua teoria matemática da indução, na qual ele estabeleceu as leis matemáticas da indução de correntes devidas ao movimento do circuito primário ou secundário. Ele mostrou que a grandeza  $M$ , que chamamos de potencial de um circuito sobre o outro, é a mesma grandeza que o potencial eletromagnético de um circuito sobre o outro, o qual já investigamos em conexão com a fórmula de Ampère. *Podemos considerar F. E. Neumann, portanto, como tendo completado para a indução de correntes o tratamento matemático que Ampère tinha aplicado para as suas ações mecânicas.*

### 4.3 Derivando a Lei de Faraday a Partir da Força de Weber

Agora que já detalhamos alguns aspectos da lei de indução, vamos deduzi-la partindo da força de Weber. Há vários procedimentos para esta dedução, cada um deles com suas peculiaridades e características próprias.<sup>9</sup> Vamos seguir mais de perto o procedimento de Maxwell nesta dedução, embora utilizando a linguagem vetorial moderna e o Sistema Internacional de Unidades.

Inicialmente citamos as palavras de Maxwell:<sup>10</sup>

<sup>7</sup>[Max54, volume 2, artigo 542, pág. 190].

<sup>8</sup>*Berlin Akad.*, 1845 e 1847.

<sup>9</sup>[Whi73, capítulo 7], [O'R65, volume 2, capítulo 11], [Wes87b], [Wes90b], [Wes90c], [Max54, volume 2, capítulo 23] (ver sua tradução para a língua portuguesa em [Ass92g]).

<sup>10</sup>[Max54, artigo 856, pág. 486].

Após deduzir da fórmula de Ampère para a ação [força] entre elementos de corrente, sua própria fórmula para a ação [força] entre partículas elétricas que se movem, Weber procedeu para aplicar sua fórmula à explicação da produção de correntes elétricas por indução eletromagnética. Nisto ele foi eminentemente bem-sucedido e indicaremos o método pelo qual as leis de indução de correntes podem ser deduzidas da fórmula de Weber.

Queremos então calcular a força eletromotriz induzida sobre o circuito 2 devida à corrente no circuito primário nas duas situações estudadas por Faraday: (a) Quando o circuito 1 translada como um todo em relação a um referencial inercial, se aproximando ou se afastando do circuito 2; e (b) quando a corrente no primário varia no tempo,  $I_1(t)$ . Apresentamos novamente a força de Weber exercida por  $dq_2$  sobre  $dq_1$ , equação (2.12):

$$d^2 \vec{F}_{21} = \frac{dq_1 dq_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[ 1 + \frac{1}{c^2} \left( \vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} \right) \right]. \quad (4.17)$$

A força eletromotriz, *fem*, é uma voltagem que gera uma corrente. Podemos pensar em uma voltagem como sendo devida a um campo elétrico. No caso de cargas livres no espaço sabemos que as cargas positivas se deslocam do maior para o menor potencial, isto é, na mesma direção em que aponta o campo elétrico, enquanto que as negativas seguem em sentido contrário. Caso ocorram estes movimentos, então ambas contribuirão com o aumento da corrente.

Em muitas situações a força sobre uma carga pode ser expressa como  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Se temos cargas positivas e negativas,  $dq_{2+}$  e  $dq_{2-}$ , localizadas no vetor posição  $\vec{r}_2$  em relação à origem  $O$  de um referencial inercial, na presença do mesmo campo elétrico  $d\vec{E}_1(\vec{r}_2)$ , obtemos:

$$d\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{d^2 \vec{F}_{2+}}{dq_{2+}} = \frac{d^2 \vec{F}_{2-}}{dq_{2-}} = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 \vec{F}_{2+}}{dq_{2+}} + \frac{d^2 \vec{F}_{2-}}{dq_{2-}} \right). \quad (4.18)$$

Nesta expressão  $d^2 \vec{F}_{2+}$  representa a força resultante agindo em  $dq_{2+}$ , enquanto que  $d^2 \vec{F}_{2-}$  representa a força resultante agindo em  $dq_{2-}$ . Se estas forças forem devidas a cargas positivas e negativas,  $dq_{1+}$  e  $dq_{1-}$ , teremos:  $d^2 \vec{F}_{2+} = d^2 \vec{F}_{1+,2+} + d^2 \vec{F}_{1-,2+}$  e  $d^2 \vec{F}_{2-} = d^2 \vec{F}_{1+,2-} + d^2 \vec{F}_{1-,2-}$ . Utilizando estas expressões na equação (4.18) e utilizando também a neutralidade dos elementos de corrente,  $dq_{2-} = -dq_{2+}$ , chegamos ao seguinte resultado:

$$d\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{(d^2 \vec{F}_{1+,2+} + d^2 \vec{F}_{1-,2+}) - (d^2 \vec{F}_{1+,2-} + d^2 \vec{F}_{1-,2-})}{2dq_{2+}}. \quad (4.19)$$

Para a indução de correntes as únicas componentes que interessam da corrente, do campo elétrico ou da força, são as componentes paralelas ao fio em



cada ponto, ou seja, paralelas a  $d\vec{l}_2$ . Utilizando todos estes resultados podemos obter a força eletromotriz que o elemento de corrente  $I_1 d\vec{l}_1$  induz no elemento de corrente  $I_2 d\vec{l}_2$ , que representaremos por  $d^2 fem_{12}$ , como sendo dada por:<sup>11</sup>

$$d^2 fem_{12} \equiv \left[ \frac{(d\vec{F}_{1+, 2+} + d\vec{F}_{1-, 2+}) - (d\vec{F}_{1+, 2-} + d\vec{F}_{1-, 2-})}{2dq_{2+}} \right] \cdot d\vec{l}_2 . \quad (4.20)$$

As velocidades das cargas positivas e negativas em cada elemento de corrente são dadas por

$$\vec{v}_{1+} \equiv \frac{d\vec{r}_{1+}}{dt} = \vec{v}_{1+d} + \vec{V}_1 , \quad (4.21)$$

$$\vec{v}_{1-} \equiv \frac{d\vec{r}_{1-}}{dt} = \vec{v}_{1-d} + \vec{V}_1 , \quad (4.22)$$

$$\vec{v}_{2+} \equiv \frac{d\vec{r}_{2+}}{dt} = \vec{v}_{2+d} + \vec{V}_2 , \quad (4.23)$$

e

$$\vec{v}_{2-} \equiv \frac{d\vec{r}_{2-}}{dt} = \vec{v}_{2-d} + \vec{V}_2 . \quad (4.24)$$

Nestas expressões o subíndice  $d$  significa a velocidade da carga em relação ao fio, isto é, a velocidade de *deslocamento*, de arraste ou de migração. Ou seja, a velocidade das cargas em relação ao fio metálico, sendo esta velocidade a responsável pela corrente elétrica. As velocidades  $\vec{V}_1$  e  $\vec{V}_2$  são as velocidades de translação dos circuitos  $C_1$  e  $C_2$  (considerados como sendo rígidos para simplificar as contas) relativas a um sistema de referência  $S$ , figura 4.3.

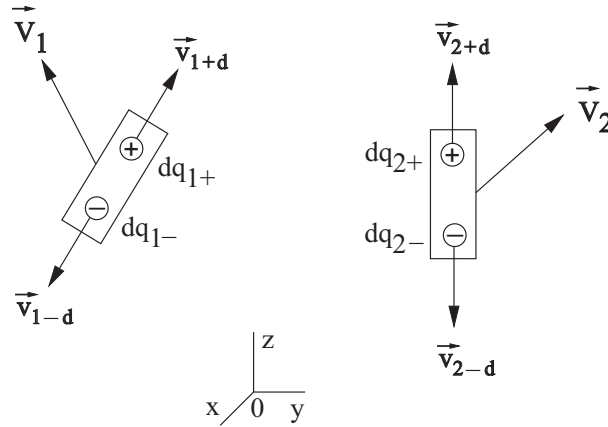


Figura 4.3: Velocidades das cargas em relação aos fios, juntamente com as velocidades dos elementos de corrente em relação a um referencial inercial.

<sup>11</sup>[Max54, volume 2, capítulo 23], com tradução para a língua portuguesa em [Ass92g].

Também definimos a velocidade relativa entre os circuitos por  $\vec{V}_{12} \equiv \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ .

Nesta seção vamos assumir a hipótese de Fechner, isto é,  $\vec{v}_{1-d} = -\vec{v}_{1+d}$  e  $\vec{v}_{2-d} = -\vec{v}_{2+d}$ . Esta hipótese era comum no século XIX e foi usada tanto por Weber quanto por Maxwell (lembrar que o elétron só foi descoberto em 1897). Apesar disto não vamos impor nenhuma relação entre  $\vec{v}_{1+d}$  e  $\vec{v}_{2+d}$  ou entre  $\vec{v}_{1-d}$  e  $\vec{v}_{2-d}$ .

Assumindo então a hipótese de Fechner e as relações (4.21) a (4.24) na equação (4.20) obtemos então o seguinte resultado (ver o exercício 4.3):

$$d^2 fem_{12} = -\frac{dq_{1+}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}^2 c^2} \left\{ 2\vec{V}_{12} \cdot (\vec{v}_{1+d} - \vec{v}_{1-d}) - 3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{V}_{12})[\hat{r}_{12} \cdot (\vec{v}_{1+d} - \vec{v}_{1-d})] + \vec{r}_{12} \cdot (\vec{a}_{1+} - \vec{a}_{1-}) \right\}. \quad (4.25)$$

Seguindo Maxwell mais uma vez, vamos considerar todas as grandezas do sistema, como  $r_{12}$  por exemplo, como funções de apenas três variáveis independentes:  $l_1$ ,  $l_2$  e  $t$ . A grandeza  $l_1$  representa um comprimento medido sobre o circuito 1 a partir de uma certa origem arbitrária preestabelecida  $O_1$ , com sentido positivo ao longo da direção da corrente, o mesmo ocorrendo com  $l_2$  em relação à origem  $O_2$  do circuito 2, figura 4.4. A grandeza  $t$  representa o tempo.

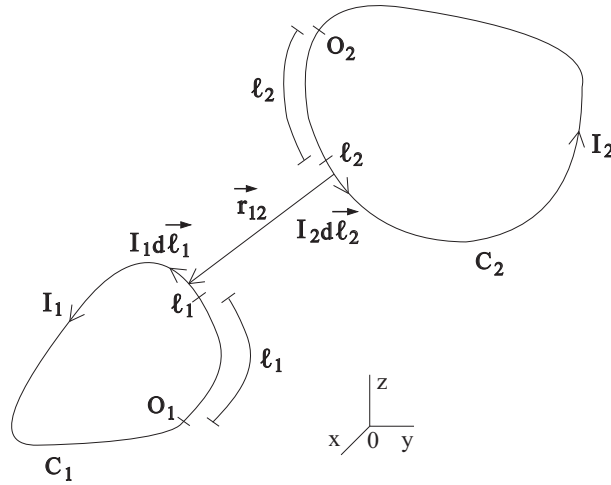


Figura 4.4: Geometria dos circuitos.

Este procedimento é claramente correto e leva a que, por exemplo,  $r_{12} = r_{12}(l_1, l_2, t)$  e  $dr_{12} = dl_1(\partial r_{12}/\partial l_1) + dl_2(\partial r_{12}/\partial l_2) + dt(\partial r_{12}/\partial t)$ .

Da equação (3.2) resulta que:

$$I_1 d\vec{l}_1 = dq_{1+}(\vec{v}_{1+} - \vec{v}_{1-}) = dq_{1+}(\vec{v}_{1+d} - \vec{v}_{1-d}). \quad (4.26)$$

Em geral quando se varia a intensidade da corrente em um fio metálico, o que muda é a velocidade de migração das cargas, mas não o número ou

densidade de portadores (elétrons livres). Utilizando este fato na equação (4.26) leva a que (ver o exercício 4.4):

$$\begin{aligned} dq_{1+}(\vec{a}_{1+} - \vec{a}_{1-}) &= \frac{d}{dt} [dq_{1+}(\vec{v}_{1+} - \vec{v}_{1-})] = \frac{d}{dt} (I_1 d\vec{l}_1) \\ &= \frac{dI_1}{dt} d\vec{l}_1 = \frac{\partial I_1}{\partial t} d\vec{l}_1 . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para chegar a este resultado, estamos assumindo que os circuitos têm apenas velocidades de translação, mas não de rotação. Este fato significa que podemos colocar  $\partial(d\vec{l}_1)/\partial t = \vec{0}$ . Também estamos assumindo que as correntes são uniformes ao longo do comprimento do circuito de tal forma que  $\partial I_1/\partial l_1 = 0$ .

Jogando as equações (4.26) e (4.27) na equação (4.25) obtém-se, usando que  $c^2 = (\mu_o \varepsilon_o)^{-1}$  e integrando sobre os dois circuitos:

$$\begin{aligned} fem_{12} &= -\frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}^2} \left[ 2I_1 (\vec{V}_{12} \cdot d\vec{l}_1) - 3I_1 (\hat{r}_{12} \cdot \vec{V}_{12}) (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) \right. \\ &\quad \left. + r_{12} \frac{\partial I_1}{\partial t} (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) \right] . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Usando a regra da cadeia (regra de Leibniz) no último termo resulta que:

$$\begin{aligned} fem_{12} &= -\frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \left\{ 2I_1 \frac{(\vec{V}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}^2} \right. \\ &\quad \left. - 3I_1 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot \vec{V}_{12})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left[ I_1 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} \right] - I_1 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) \right. \\ &\quad \left. - I_1 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)}{r_{12}} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) + I_1 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}^2} \frac{\partial r_{12}}{\partial t} \right\} . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Vamos agora mostrar algumas relações que seguem na dedução de Maxwell da ideia de considerar as grandezas importantes do problema como funções de  $l_1$ ,  $l_2$ , e  $t$ . Se  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  são os vetores posição dos elementos de corrente  $I_1 d\vec{l}_1$  e  $I_2 d\vec{l}_2$  relativos à origem  $O$  do sistema de coordenadas  $S$ , figura 4.4, resulta que:

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \equiv \vec{r}_{12} = \vec{r}_{12}(l_1, l_2, t) . \quad (4.30)$$

Então segue-se que:

$$\frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}_{12}}{\partial l_1} \frac{dl_1}{dt} + \frac{\partial\vec{r}_{12}}{\partial l_2} \frac{dl_2}{dt} + \frac{\partial\vec{r}_{12}}{\partial t} . \quad (4.31)$$

Como estamos utilizando a hipótese de Fechner, podemos definir  $|\vec{v}_{1+d}| = |\vec{v}_{1-d}| \equiv v_{1d}$ , assim como  $|\vec{v}_{2+d}| = |\vec{v}_{2-d}| \equiv v_{2d}$ . Temos então:

$$\frac{dl_1}{dt} = v_{1d} , \quad \frac{dl_2}{dt} = v_{2d} . \quad (4.32)$$

Também temos que:

$$\vec{v}_{1\pm d} \equiv \pm v_{1d} \hat{l}_1 , \quad \vec{v}_{2\pm d} \equiv \pm v_{2d} \hat{l}_2 , \quad (4.33)$$

onde  $\hat{l}_1$  e  $\hat{l}_2$  são os vetores unitários paralelos a  $d\vec{l}_1$  e  $d\vec{l}_2$ , ou seja:  $\hat{l}_1 \equiv d\vec{l}_1/|d\vec{l}_1|$  e  $\hat{l}_2 \equiv d\vec{l}_2/|d\vec{l}_2|$ .

Mas das equações (4.21) a (4.24) podemos também escrever:

$$\frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \vec{v}_{12} = \vec{v}_{1d} - \vec{v}_{2d} + \vec{V}_{12} . \quad (4.34)$$

Comparando as equações (4.31) a (4.34) resulta que:

$$\frac{\partial\vec{r}_{12}}{\partial l_1} = \hat{l}_1 , \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial\vec{r}_{12}}{\partial l_2} = -\hat{l}_2 , \quad (4.36)$$

e

$$\frac{\partial\vec{r}_{12}}{\partial t} = \vec{V}_{12} . \quad (4.37)$$

Analogamente, temos  $r_{12} = r_{12}(l_1, l_2, t)$ , de tal forma que:

$$\frac{dr_{12}}{dt} = \frac{\partial r_{12}}{\partial l_1} \frac{dl_1}{dt} + \frac{\partial r_{12}}{\partial l_2} \frac{dl_2}{dt} + \frac{\partial r_{12}}{\partial t} . \quad (4.38)$$

Mas das equações (2.10) e (4.21) também temos que:

$$\frac{dr_{12}}{dt} = \dot{r}_{12} = \hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12} = \hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{1d} - \hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{2d} + \hat{r}_{12} \cdot \vec{V}_{12} . \quad (4.39)$$

Utilizando as equações (4.32) e (4.33), e comparando as expressões (4.38) e (4.39), obtemos que:

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial l_1} = \hat{r}_{12} \cdot \hat{l}_1 , \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial l_2} = -\hat{r}_{12} \cdot \hat{l}_2 , \quad (4.41)$$

e

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial t} = \hat{r}_{12} \cdot \vec{V}_{12} . \quad (4.42)$$

Como os circuitos não giram mas apenas transladam em relação a um referencial inercial, também temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\vec{l}_1) = \frac{\partial}{\partial t}(d\vec{l}_2) = \vec{0} . \quad (4.43)$$

Com as equações (4.37), (4.42) e (4.43) obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) = \frac{\vec{V}_{12} \cdot d\vec{l}_1}{r_{12}} - \frac{(\hat{r}_{12} \cdot \vec{V}_{12})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)}{r_{12}} , \quad (4.44)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) = \frac{\vec{V}_{12} \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} - \frac{(\hat{r}_{12} \cdot \vec{V}_{12})(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} . \quad (4.45)$$

Com estes valores na equação (4.29) se obtém:

$$\begin{aligned} fem_{12} = & -\frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ I_1 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} \right] \right. \\ & \left. + I_1 \frac{(\vec{V}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}^2} - I_1 \frac{(\vec{V}_{12} \cdot d\vec{l}_2)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)}{r_{12}^2} \right\} . \end{aligned} \quad (4.46)$$

Lembrando que  $I_1(\vec{V}_{12} \cdot d\vec{l}_1)$  pode sair da integral em  $\mathcal{C}_2$ , pode-se mostrar que a segunda integral é nula (ver o exercício 3.7, letra (B)). Da mesma maneira, pode-se mostrar que a terceira integral é nula fazendo-se primeiro a integral em  $\mathcal{C}_1$ . Desta maneira ficamos então com o seguinte resultado:

$$fem_{12} = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{d}{dt} \left[ I_1 \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} \right] . \quad (4.47)$$

Do exercício 3.6 e da definição (4.7) resulta finalmente que a partir da força de Weber se chega à seguinte relação:

$$fem_{12} = -\frac{d}{dt}(I_1 M) , \quad (4.48)$$

que é exatamente uma das maneiras de se expressar a lei de Faraday, como vimos na equação (4.8).

Isto completa a prova de que a lei de indução de Faraday pode ser deduzida da força de Weber.

## 4.4 Deduzindo a Lei de Faraday da Força de Weber Sem Usar a Hipótese de Fechner

Nesta seção generalizamos nosso resultado anterior. Em primeiro lugar, vamos considerar a indução em fios metálicos nos quais apenas os elétrons se movem com relação ao fio ( $\vec{v}_{1+d} = \vec{v}_{2+d} = \vec{0}$  e  $\vec{a}_{1+d} = \vec{a}_{2+d} = \vec{0}$ ). Como os íons positivos estão sempre fixos à rede cristalina e não estão livres para se mover, precisamos considerar apenas as forças nos elétrons do elemento de corrente  $I_2 d\vec{l}_2$ , sendo estas forças devidas às cargas positivas e negativas do elemento de corrente  $I_1 d\vec{l}_1$ . Em analogia com a equação (4.20) temos agora:

$$d^2 em f_{12} = \frac{d^2 \vec{F}_{1+,2-} + d^2 \vec{F}_{1-,2-}}{dq_{2-}} \cdot d\vec{l}_2. \quad (4.49)$$

Com a equação (4.17), juntamente com as equações (4.21) até (4.24), obtemos o seguinte resultado utilizando ainda que  $dq_{2-} = -dq_{2+}$ :

$$\begin{aligned} em f_{12} = & - \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{dq_{1+} \hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2 c^2} \left\{ \left[ 3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{V}_{12})(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{1-d}) \right. \right. \\ & - 2\vec{V}_{12} \cdot \vec{v}_{1-d} - \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{1-d} \left. \right] + [2\vec{v}_{1-d} \cdot \vec{v}_{2-d} \\ & - v_{1-d}^2 + \frac{3}{2}(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{1-d})^2 - 3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{1-d})(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{2-d}) \left. \right\}. \quad (4.50) \end{aligned}$$

Como vimos na seção 4.3, o integrando com o primeiro colchete gera a lei de Faraday dada pela equação (4.48). O que precisaria ser mostrado é que a integral dupla do integrando com o segundo colchete na equação (4.50) é exatamente nula.

Fomos capazes de mostrar isto nos três casos representados na figura 4.5.<sup>12</sup>

---

<sup>12</sup>[Tho93].

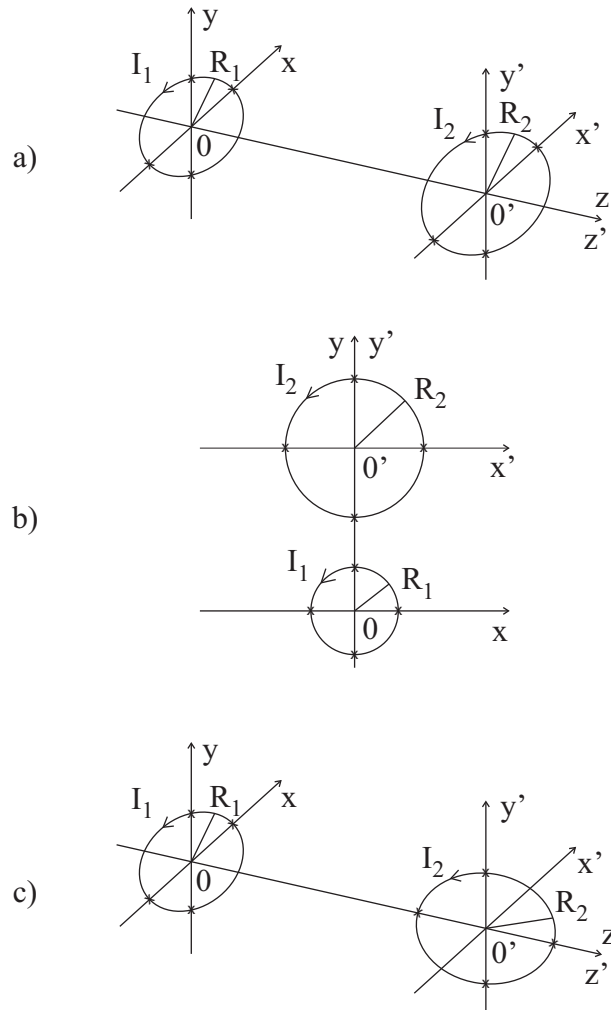


Figura 4.5: Três geometrias simétricas.

Nesta figura temos duas espiras circulares de raios  $R_1$  e  $R_2$  interagindo entre si. Nelas circulam as correntes elétricas  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente. No caso (A) as espiras estão nos planos  $xy$  e  $x'y'$  paralelos entre si e estão centradas ao longo do mesmo eixo  $z' = z$ . No caso (B) elas estão no mesmo plano  $x'y' = xy$ . No caso (C) seus planos são ortogonais um ao outro ( $xy$  e  $y'z'$ ) e seus centros estão ao longo do mesmo eixo  $z' = z$ .

Em circuitos de formas e orientações arbitrárias como na figura 4.6, é muito difícil resolver as integrais (4.50) para o segundo colchete.

Em vez de resolver diretamente estas integrais na situação geral, apresentamos dois raciocínios diferentes que provam que estas integrais precisam ser exatamente nulas.

Calculamos inicialmente a energia potencial entre dois elementos de corrente neutros eletricamente  $I_1 d\vec{l}_1$  e  $I_2 d\vec{l}_2$  de acordo com a lei de Weber, utilizando a equação (2.13). Seu valor é o mesmo que o trabalho necessário para

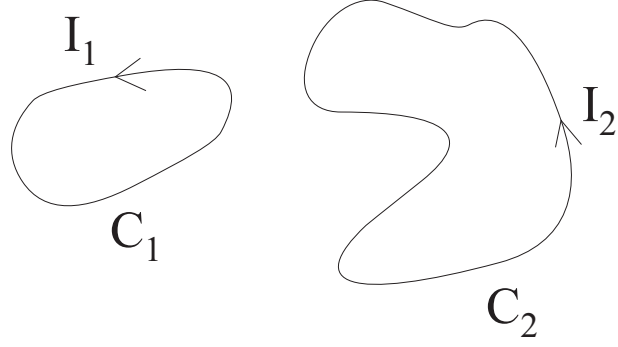


Figura 4.6: Circuitos de forma arbitrária.

trazer os dois elementos de corrente desde uma distância infinita até as posições e orientações finais, sendo dado por:

$$d^2U = d^2U_{2+, 1+} + d^2U_{2+, 1-} + d^2U_{2-, 1+} + d^2U_{2-, 1-} . \quad (4.51)$$

Utilizando as equações (3.2) e (3.3) podemos escrever esta expressão como:

$$d^2U = \frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} . \quad (4.52)$$

Este resultado continua válido mesmo quando não vale a hipótese de Fehner, como por exemplo nos casos em que os íons positivos ficam presos no metal e apenas os elétrons se movem em relação ao condutor, sendo os responsáveis pela corrente.

Logo a energia total de interação entre os dois circuitos,  $U_{12}$ , de acordo com a eletrodinâmica de Weber é dada por:

$$U_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}} . \quad (4.53)$$

Usando o exercício 3.6 e a definição (4.7) do coeficiente de indutância mútua,  $M$ , resulta que a energia total de interação entre os dois circuitos de acordo com a eletrodinâmica de Weber também pode ser escrita como:

$$U_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} = I_1 I_2 M . \quad (4.54)$$

Poderíamos ter calculado similarmente a energia para formar cada circuito integrando a equação (4.52) para cada um dos circuitos. As energias para formar os circuitos 1 e 2,  $U_1$  e  $U_2$ , seriam então dadas por:

$$U_1 = \frac{I_1^2 L_1}{2} \quad \text{e} \quad U_2 = \frac{I_2^2 L_2}{2} . \quad (4.55)$$

Nesta equação os fatores geométricos  $L_1$  e  $L_2$  são os chamados coeficientes de auto-indutância dos circuitos 1 e 2, sendo dados por:



$$L_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}'_1}{r_{11'}} \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}'_2}{r_{22'}} , \quad (4.56)$$

tomando cuidado com as divergências.

O fator 1/2 na equação (4.55) é devido ao fato de que na equação (4.56) cada par 11' (ou 22') contribui duas vezes para  $L_1$  (ou para  $L_2$ ), já que integramos duas vezes ao longo do mesmo circuito  $C_1$  (ou duas vezes sobre  $C_2$ ).

Assim a energia magnética total para formar os dois circuitos de acordo com a eletrodinâmica de Weber é dada por:

$$U = U_1 + U_{12} + U_2 = \frac{L_1 I_1^2}{2} + M I_1 I_2 + \frac{L_2 I_2^2}{2} . \quad (4.57)$$

Esta expressão concorda com a expressão dada em todos os livros didáticos que tratam com o eletromagnetismo clássico.

No exercício 4.9 mostramos como deduzir a lei de indução de Faraday a partir desta expressão, seguindo o que Maxwell apresentou em seu livro *Um Tratado de Eletricidade e Magnetismo*.<sup>13</sup> O importante a ser enfatizado neste exercício é que para chegar à lei de indução de Faraday a partir da energia de Weber por este caminho não é necessário usar a hipótese de Fechner.

A segunda prova de como se deriva a lei de Faraday a partir da eletrodinâmica de Weber sem usar a hipótese de Fechner está esquematizada no exercício 4.10. Esta prova é parcialmente devida a Helmholtz em 1847, a William Thomson em 1848–1853 e foi generalizada por J. J. Thomson em 1891. Esta prova se encontra como uma nota de rodapé do artigo 544, pág. 192, do livro de Maxwell.<sup>14</sup>

Sugerimos enfaticamente a leitura dos livros de O'Rahilly, Maxwell e Whittaker nas páginas indicadas anteriormente para que seja feito um aprofundamento histórico e crítico da lei de indução.

## 4.5 Exercícios

### 1. Lei de indução.

(A) Seja o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  definido pela equação (4.3). Aplique o rotacional  $\nabla_2 \times$  em ambos os lados desta equação para encontrar que o campo magnético é dado por  $\vec{B}(\vec{r}_2) = \nabla_2 \times \vec{A}$ , sendo  $\vec{B}(\vec{r}_2)$  obtido pela equação (3.26) trocando-se os índices 1 e 2.

(B) Use este resultado e o teorema de Stokes para mostrar que:

$$C_A = \oint_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}_2 = \int \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{a}_2 = \Phi_B .$$

<sup>13</sup>[Max54, volume 2, capítulos 6 e 7, artigos 568 a 584, págs. 211-228].

<sup>14</sup>[Max54, volume 2, artigos 543–544, págs. 190–193].

(C) Conclua então que no caso em que não há baterias ligadas ao circuito, a lei de indução de Faraday pode ser expressa como:

$$R_2 I_2 = -\frac{d}{dt} \left[ \int \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{a}_2 \right] = -\frac{d}{dt} \left[ \oint_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}_2 \right].$$

2. Coeficiente de indutância mútua.

(A) Seja  $M$  definido pela equação (4.7). Use os resultados do exercício 4.1 para mostrar que:

$$\Phi_B \text{ através de } C_2 = I_1 M.$$

(B) Comece tudo novamente para mostrar que

$$\Phi_B \text{ através de } C_1 = I_2 M.$$

(C) Use o resultado da letra (A) para colocar a lei de indução de Faraday na forma da equação (4.8).

3. Use as equações (4.17) e (4.24), juntamente com a hipótese de Fechner  $\vec{v}_{i-} = -\vec{v}_{i+}$ , para chegar na equação (4.25). Observe que mais uma vez o termo coulombiano na força de Weber não vai influenciar em nada na lei de indução (ver também o exercício 1.8).

4. Aqui vamos deduzir a equação (4.27) a partir da equação (4.26).

(A) Mostre que das equações (3.2) e (3.3) obtemos o seguinte resultado (lembrando que as velocidades das cargas são paralelas aos fios):

$$I_i = \lambda_{i+}(v_{i+} - v_{i-}); \quad \text{com } i = 1, 2.$$

(B) Como a variação da corrente em fios metálicos muda apenas a velocidade de migração das cargas, mas não suas densidades de carga, obtemos:

$$\lambda_{i+}(a_{i+} - a_{i-}) = \frac{dI_1}{dt} = \frac{\partial I_1}{\partial t}.$$

A partir deste resultado se chega na equação (4.27).

(C) Outra maneira de chegar a esta conclusão é considerando as variáveis como sendo funções da posição no fio e do tempo.

Mostre então da equação (4.26) que, supondo a constância das cargas:

$$dq_{1+}(\vec{a}_{1+} - \vec{a}_{1-}) = \frac{d}{dt}(I_1 d\vec{l}_1) = \frac{dI_1}{dt} d\vec{l}_1 + I_1 \frac{d(d\vec{l}_1)}{dt} .$$

(D) Como a corrente é constante ao longo de todo o fio, resulta que  $\partial I_1 / \partial l_1 = 0$  e, portanto,  $dI_1 / dt = \partial I_1 / \partial t$ . Por outro lado temos que naturalmente  $\partial \vec{l}_1 / \partial l_1 = \vec{0}$ , embora como vimos no capítulo 3 não necessariamente tenhamos  $\partial \vec{l}_1 / \partial x_1 = \vec{0}$ . Como a situação que está sendo estudada é apenas a de translação do circuito em relação a um referencial inercial, sem que haja rotação do circuito, resulta que  $\partial(d\vec{l}_1) / \partial t = \vec{0}$ . Junte todos estes resultados para chegar então na equação (4.27).

5. (A) Prove que

$$\frac{\partial \vec{r}_{12}}{\partial t} = \vec{V}_{12} ,$$

usando que  $\vec{r}_{12}$  é função de  $l_1$ ,  $l_2$  e  $t$ .

(B) Prove que

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial t} = \hat{r}_{12} \cdot \vec{V}_{12} ,$$

usando que  $r_{12}$  é função de  $l_1$ ,  $l_2$  e  $t$ .

(C) Prove a relação da letra (B) usando a letra (A) e o fato de que  $r_{12} = (\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{12})^{1/2}$ .

6. Prove as equações (4.44) até (4.45) usando os resultados do exercício 4.5, usando ainda que  $\partial(d\vec{l}_1) / \partial t = \partial(d\vec{l}_2) / \partial t = \vec{0}$ , com estes resultados vindo do fato de os circuitos não girarem, além de usar a regra da cadeia para a derivada de um produto escalar.

7. Refaça toda a seção 4.3, da equação (4.17) até chegar na equação (4.48).

8. Agora vamos obter a energia potencial entre dois elementos de corrente de acordo com a lei de Weber.

(A) Suponha dois elementos de corrente que sejam neutros eletricamente:  $dq_{2-} = -dq_{2+}$  e  $dq_{1-} = -dq_{1+}$ .

(B) Obtenha a energia potencial entre dois elementos de corrente eletricamente neutros a partir da equação (2.13), adicionando as contribuições dos grupos de cargas:

$$d^2U = d^2U_{2+, 1+} + d^2U_{2+, 1-} + d^2U_{2-, 1+} + d^2U_{2-, 1-} .$$

(C) Utilize as equações (3.2) e (3.3) no resultado anterior para colocá-lo na forma da equação (4.52).

9. Neste exercício e no seguinte vamos utilizar o resultado (4.57) que se obtém da eletrodinâmica de Weber para deduzir a lei de indução de Faraday, sem usar a hipótese de Fechner de que as cargas positivas e negativas em correntes de circuitos metálicos se movem em relação ao fio com velocidades opostas de igual magnitude. A prova deste exercício é devida a Maxwell.<sup>15</sup> Neste exercício em particular mostramos também como calcular a força e o torque entre circuitos utilizando o coeficiente de indutância mútua.

(A) Mostre novamente como se chega na equação (4.54) a partir da eletrodinâmica de Weber, sem usar a hipótese de Fechner. Após isto, é fácil entender como a energia total para formar os dois circuitos, ou seja, a energia magnética do sistema, é dada pela equação (4.57).

(B) De acordo com a formulação lagrangiana podemos dizer que a grandeza  $U$  na equação (4.57) é uma função de  $I_1$ ,  $I_2$  e  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), onde os  $\xi_i$ 's são variáveis geométricas independentes das correntes (distância entre os circuitos, um ângulo representando suas orientações relativas etc.). A força generalizada  $Y$  na formulação lagrangiana é dada por:

$$Y = -\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial U}{\partial y_i},$$

onde  $\dot{y}_i \equiv dy_i/dt$  e os  $y_i$ 's são as coordenadas generalizadas ( $y_i = I_1, I_2$ , ou  $y_i = \xi_i$ ).

Calcule agora a força eletromagnética (força de Ampère) entre os dois circuitos tendendo a aumentar  $x$ , onde  $x$  é qualquer uma das variáveis geométricas que dependem da forma e da posição relativa entre os circuitos ( $x$  pode ser a distância entre eles ao longo de um certo eixo etc.). Para isto faça  $y_i = x$  na força generalizada e na equação (4.57) e observe que  $U$  não depende de  $\dot{x}$ , lembrando ainda que  $I_1$  e  $I_2$  são independentes de  $x$ . Com isto mostre que esta força é dada por:

$$F = \frac{I_1^2}{2} \frac{\partial L_1}{\partial x} + I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{I_2^2}{2} \frac{\partial L_2}{\partial x}.$$

Se os circuitos são rígidos, então  $L_1$  e  $L_2$  são independentes de  $x$ . Neste caso mostre que a força de Ampère entre os circuitos se reduz a:

$$F = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Esta inclusive é a maneira prática que se usa para calcular a força entre circuitos. Isto é, em vez de integrar diretamente as forças de Ampère ou

<sup>15</sup>[Max54, volume 2, capítulos 6 a 7, artigos 568–584, págs. 211–228].

de Grassmann entre elementos de corrente, toma-se o valor da indutância mútua entre dois circuitos que se quer saber a força (em muitos casos estas indutâncias mútuas já estão calculadas) e faz-se simplesmente uma derivada.

(C) Siga um raciocínio análogo fazendo  $y_i = \theta$ , onde  $\theta$  é qualquer ângulo descrevendo a orientação relativa entre os dois circuitos rígidos, para mostrar que o torque de um circuito sobre o outro tendendo a aumentar  $\theta$  é dado por:

$$T = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial \theta} .$$

(D) Considere agora  $\dot{y}_i = I_2$ , de tal forma que  $Y$  será a força eletromotriz agindo sobre o circuito 2,  $emf_2$ . Use então que  $L_1$ ,  $M$  e  $L_2$  são independentes das correntes. Utilize também que  $U$  depende das correntes mas não da carga ou quantidade de eletricidade ( $y_i = q_i$ ) que atravessou uma dada seção reta do condutor  $C_i$  desde o começo do tempo ( $y_i = q_i = \int_0^t I_i dt$ , com  $i = 1, 2$ ). Utilizando então a expressão da força generalizada e a equação (4.57) mostre que a força eletromotriz sobre o circuito 2 é dada por:

$$emf_2 = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) = -\frac{d}{dt} (L_2 I_2 + M I_1) .$$

Esta é exatamente a lei de indução de Faraday que queríamos obter, levando em consideração a auto-indutância dos circuitos.

(E) Faça um cálculo análogo para a força eletromotriz sobre o circuito 1.

O importante a observar neste exercício e no seguinte é que para chegar a estes resultados a partir da eletrodinâmica de Weber não foi empregada a hipótese de Fechner. O único resultado que empregamos foi a equação (4.54), que foi deduzida da equação (4.52). E para chegar na equação (4.52) utilizamos apenas a energia potencial de Weber dada pela equação (2.13) e a neutralidade dos elementos de corrente. Isto significa que os resultados representados pela equação (4.52) e a consequente dedução da lei de Faraday a que chegamos na letra (D) são válidos para quaisquer valores das velocidades dos íons positivos, mesmo quando eles permanecem fixos em relação ao fio e apenas os elétrons se movem em relação ao fio gerando a corrente elétrica.

10. Neste exercício apresentamos uma outra prova de que a partir da energia potencial de Weber se chega à lei de indução de Faraday, sem usar a hipótese de Fechner. Esta prova é devida a J. J. Thomson e se encontra no livro de Maxwell.<sup>16</sup>

<sup>16</sup>[Max54, volume 2, nota de rodapé do artigo 544, pág. 192].

(A) Sejam  $L_1$  e  $L_2$  os coeficientes de auto-indutância do primeiro e do segundo circuitos e  $M$  o coeficiente de indutância mútua entre eles. A energia magnética dos dois circuitos de acordo com a eletrodinâmica de Weber e também de acordo com o eletromagnetismo clássico é dada pela equação (4.57). Podemos escrever a variação de  $U$  como:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial U}{\partial I_2} dI_2 + \sum \frac{\partial U}{\partial x} dx ,$$

onde  $x$  é uma coordenada de qualquer tipo que define as posições dos circuitos (distância entre eles, um ângulo que especifica suas orientações, etc.). A partir da equação (4.57) obtenha que:

$$\frac{\partial U}{\partial I_1} = L_1 I_1 + M I_2 ,$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial I_2} = L_2 I_2 + M I_1 .$$

(B) Multiplique a primeira destas equações por  $I_1$  e a segunda por  $I_2$ , some-as e utilize o resultado da equação (4.57) para mostrar que:

$$I_1 \frac{\partial U}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial U}{\partial I_2} = 2U .$$

(C) Mostre que a variação desta equação gera:

$$2dU = (dI_1) \frac{\partial U}{\partial I_1} + I_1 d \frac{\partial U}{\partial I_1} + (dI_2) \frac{\partial U}{\partial I_2} + I_2 d \frac{\partial U}{\partial I_2} .$$

(D) Subtraia  $dU$  desta equação para chegar ao seguinte resultado:

$$dU = I_1 d \frac{\partial U}{\partial I_1} + I_2 d \frac{\partial U}{\partial I_2} - \sum \frac{\partial U}{\partial x} dx .$$

A força  $F_x$  ao longo da componente  $x$  agindo no sistema é dada por  $-\partial U / \partial x$ . Como estamos supondo que não há forças externas atuando no sistema, a grandeza  $\sum \frac{\partial U}{\partial x} dx$  representará o aumento na energia cinética  $T$  devido ao movimento do sistema, ou seja, será dada por  $dT$ . Esta última equação pode então ser escrita como:

$$d(U + T) = I_1 d \frac{\partial U}{\partial I_1} + I_2 d \frac{\partial U}{\partial I_2} .$$

(E) Sejam  $A_1$  e  $A_2$  as forças eletromotrizes (*fem's*) agindo nos circuitos 1 e 2, respectivamente, devidas a baterias químicas usuais. Se estes circuitos 1 e 2 têm resistências  $R_1$  e  $R_2$ , a potência dissipada nestes circuitos devida a atritos internos é dada de acordo com a lei de Joule por  $R_1 I_1^2$  e  $R_2 I_2^2$ , respectivamente. O trabalho  $dW$  fornecido por estas baterias em um tempo  $dt$  é dado por:

$$dW = A_1 I_1 dt + A_2 I_2 dt .$$

O calor  $dQ$  produzido durante este mesmo tempo  $dt$  é dado de acordo com a lei de Joule por:

$$dQ = R_1 I_1^2 dt + R_2 I_2^2 dt .$$

Utilize a conservação de energia (o trabalho feito pelas baterias tem de ser igual ao calor produzido no circuito mais o aumento na energia do sistema) para mostrar que:

$$A_1 I_1 dt + A_2 I_2 dt = (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) dt + d(U + T) .$$

(F) Substitua o valor de  $d(U + T)$  que havia sido obtido na letra (D) para chegar em:

$$I_1 \left( A_1 - R_1 I_1 - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial I_1} \right) + I_2 \left( A_2 - R_2 I_2 - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) = 0 .$$

Pelo resultado da letra (A) obtenha então:

$$I_1 \left[ A_1 - R_1 I_1 - \frac{d}{dt} (L_1 I_1 + M I_2) \right] \\ + I_2 \left[ A_2 - R_2 I_2 - \frac{d}{dt} (L_2 I_2 + M I_1) \right] = 0 .$$

J. J. Thomson concluiu aqui suas deduções dizendo que o princípio de conservação de energia nos leva apenas até esta equação.

Para chegar à lei de indução (os dois colchetes iguais a zero), precisamos de mais alguma coisa. O melhor princípio a utilizar é a segunda lei de Kirchhoff para circuitos elétricos. Sua primeira regra afirma que a soma das correntes algébricas em qualquer nó de um circuito tem de ser nula. De acordo com sua segunda regra, a soma das quedas de voltagem

ao redor de qualquer malha fechada é nula.<sup>17</sup> Kirchhoff derivou estas leis em 1844–1845, independentemente de uma outra dedução destas leis em forma simplificada que havia sido feita por Weber.<sup>18</sup> A soma das quedas de voltagem ao redor do circuito 1 é dada pelo primeiro colchete da última equação, enquanto que a soma das quedas de voltagem do circuito 2 é dada pelo segundo colchete desta equação. Com a segunda regra de Kirchhoff obtemos então:

$$A_1 - R_1 I_1 - \frac{d}{dt}(L_1 I_1 + M I_2) = 0 ,$$

e

$$A_2 - R_2 I_2 - \frac{d}{dt}(L_2 I_2 + M I_1) = 0 .$$

Esta é a lei de indução de Faraday como aplicada a cada circuito, como queríamos demonstrar. Este procedimento completa a prova de que da eletrodinâmica de Weber podemos deduzir a lei de Faraday mesmo quando a hipótese de Fechner não é válida.

---

<sup>17</sup>[FLS64, volume 2, seção 22.3, págs. 22-7 a 22-10].

<sup>18</sup>[JM86, volume 1, págs. 87, 125 e 152–155].





# Capítulo 5

## Comparação entre a Força de Weber e a Força de Maxwell-Lorentz

### 5.1 Introdução

Como vimos nos capítulos anteriores, a lei de Weber segue todos os princípios de conservação da física clássica: momento linear, momento angular e energia. Com ela se deduz também a força de Ampère entre elementos de corrente. Por último vimos que também se deduz a partir dela o conjunto das equações de Maxwell (lei de Gauss, lei circuital magnética, lei da não existência de monopolos magnéticos e lei de indução de Faraday). No caso particular da lei circuital magnética foi necessário, além da força de Weber, introduzir a equação de conservação de cargas para se obter a corrente de deslocamento de Maxwell. O inverso foi mostrado no exercício 1.2, isto é, a partir da lei de Gauss e da lei circuital magnética, com corrente de deslocamento, pode-se deduzir a equação de conservação de cargas. O importante a ser enfatizado aqui é que a força de Weber é compatível com as equações de Maxwell.

Resulta deste fato que a principal diferença da eletrodinâmica de Weber em relação ao eletromagnetismo clássico é na força que atua sobre as cargas. Lembramos que esta força não é fornecida pelas equações de Maxwell. As equações de Maxwell fornecem apenas os campos gerados pelas cargas, não fornecendo como as cargas sentem ou reagem à presença de campos externos. No caso do eletromagnetismo clássico, esta força é dada pela expressão de Maxwell-Lorentz, enquanto que na eletrodinâmica de Weber temos a própria força de Weber.

Neste capítulo vamos comparar estas duas forças.

## 5.2 Força de Weber Versus Força de Maxwell-Lorentz

A força de Weber é dada pelas equações (2.5) ou (2.12), isto é:

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[ 1 + \frac{1}{c^2} \left( \vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} \right) \right] = -\vec{F}_{12} \quad (5.1)$$

Já a força de Maxwell-Lorentz é dada por:

$$\vec{F}_{21} = q_1 \vec{E}_2 + q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B}_2 = -q_1 \left( \nabla \phi_2 + \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} \right) + q_1 \vec{v}_1 \times (\nabla \times \vec{A}_2) \quad (5.2)$$

Quando expandimos a expressão de Maxwell-Lorentz em torno do tempo presente  $t$  e vamos apenas até segunda ordem em  $1/c$ , obtemos desta equação a força de Liénard-Schwarzschild dada por:

$$\vec{F}_{21} = q_1 \left\{ \frac{q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}^2} \left[ \hat{r}_{12} \left( 1 + \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}{2c^2} - \frac{3}{2} \frac{(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2}{c^2} - \frac{\vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_2}{2c^2} \right) - \frac{r_{12} \vec{a}_2}{2c^2} \right] + q_1 \vec{v}_1 \times \left\{ \frac{q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}^2} \frac{\vec{v}_2 \times \hat{r}_{12}}{c^2} \right\} \right\} \quad (5.3)$$

O primeiro aspecto a ser observado na comparação entre a expressão de Weber e a expressão de Maxwell-Lorentz (ou de Liénard-Schwarzschild) é que a força de Weber sempre satisfaz o princípio de ação e reação na forma forte, enquanto que a força de Maxwell-Lorentz e a de Liénard-Schwarzschild não satisfazem este princípio nem mesmo na forma fraca, a não ser em alguns casos bem específicos. Isto pode ser visto somando as equações (1.53) e (1.54), observando ainda que os termos restantes não vão necessariamente se cancelar.

A parte coulombiana é a mesma nas forças de Weber e na força de Maxwell-Lorentz (ou na força de Liénard-Schwarzschild). Vamos agora analisar as componentes que dependem das velocidades e acelerações. Vamos nos concentrar em  $\vec{F}_{21}$  e chamaremos de fonte à carga  $q_2$  e a tudo aquilo que tiver o índice 2 na equação (5.3) e na primeira igualdade da equação (5.1). Chamaremos de carga de teste ou carga de prova (isto é, a carga que sente a força) à carga  $q_1$  e a tudo aquilo que tiver o índice 1 na equação (5.3) e na primeira igualdade da equação (5.1).

Em termos das cargas fontes, observa-se que a força de Liénard-Schwarzschild tem um termo dependente linearmente da velocidade  $\vec{v}_2$ , termos este proporcional a  $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \hat{r}_{12})$ . Este termo vem das cargas que geram o campo magnético devido a um elemento de corrente, equação (3.5). Este termo também aparece na força de Grassmann, equação (3.6). A força de Liénard-Schwarzschild possui também termos que dependem do quadrado da velocidade

$\vec{v}_2$ , isto é, proporcionais a  $[\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 / 2 - 3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 / 2] \hat{r}_{12}$ . Existem ainda termos que dependem da aceleração  $\vec{a}_2$ , isto é, proporcionais a  $-[(\vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_2) \hat{r}_{12} + r_{12} \vec{a}_2] / 2$ . São estes os termos que vão fornecer a componente da lei de indução de Faraday proporcional à variação da corrente secundária,  $dI_2/dt$ .

A força de Weber também apresenta termos com este comportamento geral, embora com peculiaridades próprias. Os termos proporcionais à velocidade  $\vec{v}_2$  da carga fonte são  $[-2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + 3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_1)(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_2)] \hat{r}_{12}$ . Estes são os termos responsáveis pelos efeitos magnéticos e pela força de Ampère entre elementos de corrente. Os termos proporcionais ao quadrado da velocidade  $\vec{v}_2$  da carga fonte são  $[\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 - 3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_2)^2 / 2] \hat{r}_{12}$ . Já o termo proporcional à aceleração  $\vec{a}_2$  da carga fonte é dado por  $-(\vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_2) \hat{r}_{12}$ . Como já vimos, este é o termo responsável pela componente da lei de indução de Faraday proporcional à variação temporal da corrente secundária,  $dI_2/dt$ .

Embora as duas forças não sejam exatamente iguais nestes aspectos, o comportamento geral é parecido e em geral elas vão dar os mesmos resultados, em particular quando há circuitos fechados. Uma exceção a este fato é nos termos proporcionais ao quadrado da velocidade  $\vec{v}_2$  das fontes. Discutiremos um caso particular desta não equivalência entre estas duas formulações na seção 5.4.

Em termos das cargas de prova, as que sentem a força, observa-se que a força de Maxwell-Lorentz tem um termo proporcional à velocidade  $\vec{v}_1$  dado por  $-\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \hat{r}_{12})$ . Como já vimos, os termos proporcionais à velocidade  $\vec{v}_1$  na força de Weber são  $[-2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + 3(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_1)(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_2)] \hat{r}_{12}$ . Na situação geral de circuitos fechados o termo de Maxwell-Lorentz será equivalente aos termos de Weber.

Por outro lado, a força de Weber possui termos proporcionais ao quadrado da velocidade  $\vec{v}_1$  da carga de prova dados por  $[\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 - (3/2)(\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_1)^2] \hat{r}_{12}$ . A possível relevância destes termos é discutida na seção 5.5. Não existem termos proporcionais ao quadrado da velocidade  $\vec{v}_1$  da carga de prova na força de Maxwell-Lorentz.

Uma distinção fundamental que ocorre entre a força de Weber e a força de Maxwell-Lorentz é que enquanto a força de Weber depende da aceleração  $\vec{a}_1$  da carga de prova na forma  $(\hat{r}_{12} \cdot \vec{a}_1) \hat{r}_{12}$ , não há tais termos na força de Maxwell-Lorentz ou na força de Liénard-Schwarzschild. Discutimos este tópico em detalhes e apresentamos sugestões de experimentos para testar a existência destes termos em artigos de 1992 e 1993.<sup>1</sup> Waldron também discutiu este tópico e concluiu que forças deste tipo eram incompatíveis com a segunda lei de movimento de Newton.<sup>2</sup> Mostramos posteriormente que os argumentos de Waldron estão incorretos e resultaram de um simples erro matemático.<sup>3</sup>

Recentemente aplicamos uma força de Weber à gravitação e mostramos a importância do termo da força de Weber que depende da aceleração  $\vec{a}_1$  do corpo

<sup>1</sup>[Ass92a] e [Ass93a].

<sup>2</sup>[Wal91].

<sup>3</sup>[Ass92d].

ou partícula de prova. Uma força de Weber aplicada à gravitação, juntamente com o princípio de equilíbrio dinâmico, dá origem à Mecânica Relacional.<sup>4</sup> Em particular, indicamos como é possível deduzir a partir da mecânica relacional uma lei equivalente à segunda lei do movimento de Newton e a precessão do periélio dos planetas. Também conseguimos *deduzir* neste modelo, sem ser necessário postular isto inicialmente, a proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais. Com isto foi possível implementar quantitativamente o princípio de Mach, proposto pelo filósofo e físico experimental austríaco Ernst Mach (1838–1916) em 1883.<sup>5</sup> A base deste princípio é a afirmação de que as forças “fictícias” (força centrífuga, de Coriolis etc.) são de fato reais e têm origem gravitacional na interação de qualquer corpo de prova com os outros corpos distantes do universo (estrelas e galáxias). O modelo que apresentamos tenta trazer elementos novos na discussão do princípio de Mach. Parece-nos relevante chamar a atenção para estes novos caminhos e suas linhas de pesquisa. Ver também a este respeito um trabalho importante de Erwin Schrödinger de 1925 que já se encontra traduzido para as línguas portuguesa e inglesa.<sup>6</sup> Neste trabalho Schrödinger introduziu heurísticamente uma energia de Weber para a gravitação, sem conhecer o trabalho anterior de Weber, com o intuito de implementar o princípio de Mach.

Uma outra maneira de analisar a força de Weber é olhando para sua forma dada pela equação (2.5). Nesta expressão vemos que a força é uma soma de três termos. O primeiro termo é a força coulombiana usual, responsável pela eletrostática e pela lei de Gauss. O segundo termo é o que fornece os efeitos magnéticos e a lei circuital magnética. E o terceiro termo dado por  $q_i q_j \ddot{r}_{ij} \hat{r}_{ij} / (4\pi \epsilon_0 c^2 r_{ij})$  é o responsável pela lei de indução de Faraday e pelos efeitos de inércia quando aplicados à gravitação.<sup>7</sup> É este termo também que fornece os efeitos de radiação eletromagnética a partir da lei de Weber (lembrar que a intensidade da radiação de dipolo, ou de uma antena, varia como  $1/r$  a grandes distâncias).

Há um outro aspecto que pode ser visto claramente pela força de Weber ou pela força de Maxwell-Lorentz. Este aspecto se refere às ordens de grandeza entre as forças elétricas, magnéticas e os fenômenos de indução. Das equações (5.1) e (5.3) vê-se que todos os termos, exceto o termo de Coulomb, têm  $c^2$  no denominador. Já no numerador apresentam termos da ordem  $v_1^2$ ,  $v_1 v_2$ ,  $v_2^2$ ,  $r_{12} a_1$  e  $r_{12} a_2$ . Mas são exatamente estes termos os responsáveis pelo campo magnético, pela força de Ampère, pela lei circuital magnética e pelos efeitos de indução. Logo, para velocidades e acelerações baixas como as que existem usualmente (corrente de algumas dezenas de Ampères, campos magnéticos da ordem de alguns Gauss etc.), os efeitos magnéticos e de indução

<sup>4</sup>[Ass89a], [Ass92e], [Ass92c], [Ass93b], [Ass93c], [Ass98b], [Ass99b], [Ass13] e [Ass14].

<sup>5</sup>[Mac60] e [Bar89].

<sup>6</sup>[Sch25], com tradução comentada para a língua portuguesa em [XA94] e com tradução para a língua inglesa em [Sch95].

<sup>7</sup>[Ass89a], [Ass92e], [Ass92c], [Ass93b], [Ass93c], [Ass98b], [Ass99b], [Ass13] e [Ass14].

de corrente são de segunda ordem em relação aos efeitos eletrostáticos. Isto é, se dois sistemas estão interagindo entre si e há uma carga elétrica líquida (isto é, não nula) nos dois sistemas, então usualmente a força coulombiana suplanta os efeitos magnéticos e indutivos. Embora estes efeitos existam nestas situações, eles ficam mascarados pelos efeitos eletrostáticos. Para que estes efeitos apareçam com clareza, em geral é necessário que nos sistemas não haja carga líquida, ou que esta carga líquida seja extremamente pequena. Neste caso, quase não haverá força coulombiana e os efeitos magnéticos e indutivos aparecerão como os fenômenos principais. Exemplos deste último caso: (a) Quando um ímã permanente (neutro eletricamente) interage com uma corrente elétrica em um fio, (b) quando este ímã interage com outro ímã, ou (c) quando dois fios com corrente interagem entre si.

Nas próximas seções deste capítulo discutiremos em maiores detalhes as distinções entre a força de Weber e a força de Maxwell-Lorentz.

### 5.3 Problema de Dois Corpos

Nesta seção estudamos o movimento de duas cargas pontuais interagindo uma com a outra através da força de Weber. No exercício 1 tratamos do problema de duas cargas em movimento retilíneo uniforme, *MRU*, em relação a um referencial inercial. Este movimento retilíneo uniforme só pode ocorrer quando a força eletromagnética entre as duas cargas, devida à força de Weber ou devida à força de Maxwell-Lorentz, é contrabalançada por uma força externa. Comparamos então nesta situação a força de Weber com a força de Maxwell-Lorentz (ou com a força de Liénard-Schwarzschild).

Já nesta seção tratamos de outro caso. Agora não há mais forças externas e as cargas não vão então permanecer em *MRU*, já que em geral cada uma vai ser acelerada pela outra carga. Vamos nos concentrar apenas no movimento radial no qual as duas cargas estão se aproximando ou se afastando. Não vamos tratar nesta seção do problema geral de dois corpos orbitando um ao redor do outro, em relação a um referencial inercial. Este problema geral (análogo ao espalhamento de Rutherford, às órbitas elípticas da gravitação e do eletromagnetismo clássico, levando também à precessão do periélio dos planetas) foi tratado com a eletrodinâmica de Weber em diversos trabalhos.<sup>8</sup>

Começamos mais uma vez com as palavras de Maxwell. Após mostrar que a lei de Weber é consistente com o princípio de conservação de energia, Maxwell disse:<sup>9</sup>

<sup>8</sup>[See] com tradução para a língua alemã em [See24], [Tis72], [Zol76, págs. xi-xii], [Zol83, págs. 126-128], [Ser], [Tis95], [Ger98], [Ger17], [Sch25] (com tradução para a língua portuguesa em [XA94] e para a língua inglesa em [Sch95]), [Nor65, pág. 46], [Whi73, págs. 207-208], [Eby77], [Ass89a], [CA91], [Ass94, Seções 7.1 e 7.5], [Ass98b], [Ass99b] etc.

<sup>9</sup>[Max54, volume 2, artigo 854, págs. 484-485] e [Ass92g] para uma tradução em português de todo este capítulo do livro de Maxwell.

Mas Helmholtz, em seu trabalho muito influente sobre as “equações de movimento da eletricidade em condutores em repouso,”<sup>10</sup> enquanto mostra que a fórmula de Weber não é inconsistente com o princípio de conservação de energia, no que diz respeito apenas ao trabalho feito durante uma operação cíclica completa, mostra que ela leva à conclusão de que duas partículas eletrificadas, que se movem de acordo com a lei de Weber, podem ter de início velocidades finitas e todavia, enquanto ainda a uma distância finita uma da outra, podem adquirir uma energia cinética infinita e podem perfazer uma quantidade infinita de trabalho.

A isso, Weber<sup>11</sup> replica que a velocidade inicial relativa das partículas no exemplo de Helmholtz, embora finita, é maior que a velocidade da luz; e que a distância na qual a energia cinética torna-se infinita, embora finita, é menor que qualquer magnitude que podemos perceber, de tal forma que pode ser fisicamente impossível trazer duas moléculas para ficarem tão próximas. O exemplo, portanto, não pode ser testado por qualquer método experimental.

O trabalho de Helmholtz a que Maxwell se referiu é de 1870.<sup>12</sup> O trabalho de Weber citado por Maxwell já está traduzido para a língua inglesa.<sup>13</sup>

Seguimos aqui nossa discussão deste tópico apresentada em 1992,<sup>14</sup> para clarificar estes pontos de vista de Helmholtz e de Weber.

Duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  de massas inerciais  $m_1$  e  $m_2$  interagem entre si através da lei de Weber. Se elas se movem com velocidades  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  em relação a um sistema de referência inercial  $S$ , a energia total conservada do sistema é dada classicamente pela soma das energias cinética e potencial,  $T$  e  $U$ , ou seja:

$$E = T + U = m_1 \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}{2} + m_2 \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2} \right), \quad (5.4)$$

onde  $r$  é a distância entre as duas cargas e  $\dot{r} = dr/dt$ .

No exercício 5.2 mostra-se que a solução desta equação é dada por:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2E}{\mu}} \sqrt{\frac{r - r_1}{r - r_2}}. \quad (5.5)$$

Nesta equação  $\mu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  é a massa reduzida,  $\alpha \equiv q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0$ ,  $r_1 \equiv \alpha/E$  e  $r_2 \equiv \alpha/\mu c^2$ . Definimos ainda que  $r_o$  é a distância inicial entre as duas cargas, sendo  $\dot{r}_o$  a velocidade radial inicial entre elas.

Uma análise desta equação para  $E \neq \mu c^2$  é apresentada nas figuras 5.1 até 5.6. Nestas figuras apresentamos  $\dot{r}$  contra  $r$ . Elas foram retiradas de um

<sup>10</sup> *Crelle's Journal*, volume 72, págs. 57–129 (1870).

<sup>11</sup> *Elektr. Maasb. insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie*.

<sup>12</sup> [Hel70].

<sup>13</sup> [Web71] e [Web72].

<sup>14</sup> [AC92].

trabalho de 1992.<sup>15</sup> Temos as seguintes situações em cada caso: (A)  $\alpha < 0$  e  $E > \mu c^2$ , figura 5.1; (B)  $\alpha < 0$  e  $0 \leq E \leq \mu c^2$ , figura 5.2; (C)  $\alpha < 0$ ,  $E < 0$ ,  $r_o \leq r_1$  e  $\alpha > 0$ ,  $E > \mu c^2$ ,  $r_2 > r_1 \geq r_o$ , figura 5.3; (D)  $\alpha > 0$ ,  $E > \mu c^2$  e  $r_o > r_2 > r_1$ , figura 5.4; (E)  $\alpha > 0$ ,  $0 < E < \mu c^2$  e  $r_2 < r_1 < r_o$ , figura 5.5; e (F)  $\alpha > 0$ ,  $0 < E < \mu c^2$ ,  $r_o < r_2 < r_1$  e  $\alpha > 0$ ,  $E \leq 0$ ,  $r_o < r_2$ , figura 5.6.

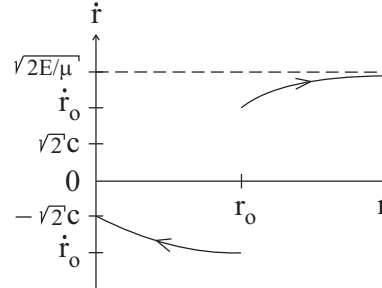


Figura 5.1: Duas cargas em movimento radial. Situação em que  $\alpha < 0$  e  $E > \mu c^2$ .

Nas figuras 5.1 até 5.3 temos atração ( $\alpha < 0$ ) e podemos ver que a velocidade radial relativa  $\dot{r}$  é sempre menor do que  $\sqrt{2}c$  ou do que  $\sqrt{2E/\mu}$ , não importando se as cargas estão inicialmente se aproximando ( $\dot{r}_o < 0$ ) ou se afastando ( $\dot{r}_o > 0$ ). A figura 5.3 também representa o caso repulsivo  $\alpha > 0$ ,  $E > \mu c^2$ ,  $r_2 > r_1 \geq r_o$ .

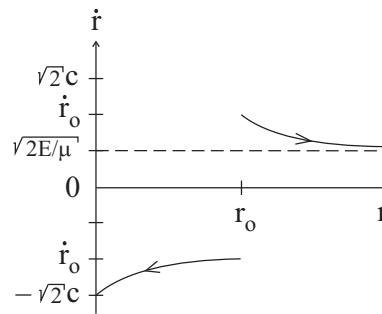


Figura 5.2: Duas cargas em movimento radial. Situação em que  $\alpha < 0$  e  $0 \leq E \leq \mu c^2$ .

Nas figuras 5.4 até 5.6 temos repulsão ( $\alpha > 0$ ). Nos casos das figuras 5.4 e 5.6 podemos ver que a velocidade radial relativa pode ir para infinito em  $r = r_2$ , já que o denominador da equação (5.5) vai a zero. Como  $r \geq 0$  isto só ocorre para  $r_2 > 0$  ou para  $\alpha > 0$ .

Podemos entender agora facilmente a resposta de Weber à crítica de Helmholtz. Nas figuras 5.2, 5.3 e 5.5 temos  $|\dot{r}_o| < \sqrt{2}c$ . Em todos estes casos  $|\dot{r}|$  permanece menor ou igual a  $\sqrt{2}c$ , não importando se é atração ou repulsão,

<sup>15</sup>[AC92].



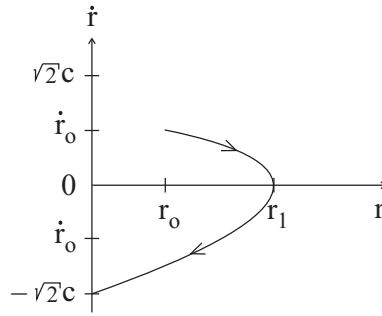


Figura 5.3: Duas cargas em movimento radial. Situação em que  $\alpha < 0$ ,  $E < 0$ ,  $r_o \leq r_1$  e  $\alpha > 0$ ,  $E > \mu c^2$ ,  $r_2 > r_1 \geq r_o$ .

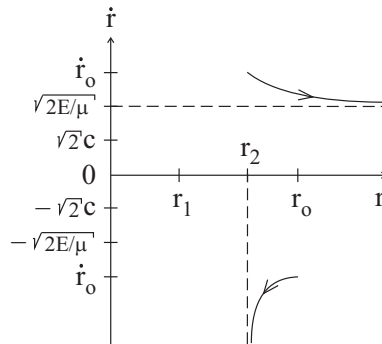


Figura 5.4: Duas cargas em movimento radial. Situação em que  $\alpha > 0$ ,  $E > \mu c^2$  e  $r_o > r_2 > r_1$ .

ou se as cargas estão inicialmente se aproximando ou se afastando. Por outro lado, se  $|\dot{r}_o| > \sqrt{2}c$ , então  $|\dot{r}|$  sempre permanecerá maior do que  $\sqrt{2}c$ , como está representado nas figuras 5.1, 5.4 e 5.6. A velocidade radial relativa  $\dot{r}$  só iria para infinito neste modelo se  $|\dot{r}_o| > \sqrt{2}c$ , como vemos nos casos das figuras 5.4 e 5.6. Além do mais, isto só aconteceria quando elas estivessem muito próximas uma da outra. Por exemplo, se tivéssemos dois elétrons ou dois pósitrons ( $q_1 = q_2 = \pm e$ ,  $m_1 = m_2 = m$ ) então  $r_2 = 2r_e$ , onde  $r_e$  é o chamado raio clássico do elétron definido por:

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2,8 \times 10^{-15} \text{ m} . \quad (5.6)$$

Se  $q_1 = q_2 = \pm e$ ,  $m_1 = m$  e  $m_2 \gg m$  (como no caso de um pósitron e de um próton), então  $r_2 = r_e$ .

Na época de Helmholtz e Weber o elétron ainda não havia sido descoberto, mas de qualquer forma é impressionante que a distância caracterizada pelo raio clássico do elétron apareça naturalmente na eletrodinâmica de Weber. Obviamente a razão para isto é que a constante  $c$  surgiu pela primeira vez nesta teoria e quando associamos a ela os valores da massa e carga do elétron podemos construir naturalmente um comprimento característico manipulando

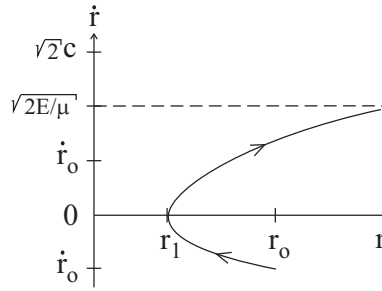


Figura 5.5: Duas cargas em movimento radial. Situação em que  $\alpha > 0$ ,  $0 < E < \mu c^2$  e  $r_2 < r_1 < r_o$ .

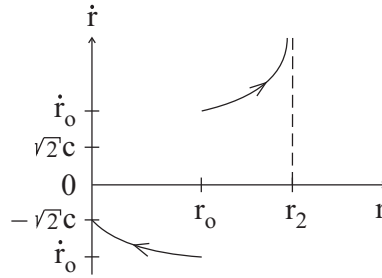


Figura 5.6: Duas cargas em movimento radial. Situação em que  $\alpha > 0$ ,  $0 < E < \mu c^2$ ,  $r_o < r_2 < r_1$  e  $\alpha > 0$ ,  $E \leq 0$ ,  $r_o < r_2$ .

estas constantes.

Concordamos com Weber e Maxwell que esta predição de uma velocidade infinita não pode ser testada experimentalmente. A razão é não apenas devido à distância extremamente curta entre as cargas em que esta divergência ocorreria, mas também devido ao fato de que a velocidade radial inicial entre as duas cargas teria de ser maior do que a velocidade da luz. E até hoje não conseguimos acelerar nenhuma partícula a velocidades superiores à da luz, de tal forma que não podemos realizar a experiência. Mesmo se isto fosse possível, a distâncias curtas como  $r_e$  outras forças podem passar a ser importantes, como as forças nucleares. Estas outras forças alterariam então a predição do que esperar da experiência.

Uma outra coisa deve ser mencionada aqui. Para chegar a estes resultados utilizamos não apenas a eletrodinâmica de Weber mas também a energia cinética clássica  $mv^2/2$ . Hoje em dia parece que esta última expressão só é válida para baixas velocidades comparadas com  $c$ . Para  $v \approx c$  ou  $\dot{r} \approx c$  pode ser que tenhamos de utilizar

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2, \tag{5.7}$$

ou alguma expressão similar. Mais uma vez isto alteraria as previsões desta experiência.

No artigo de 1992 também estudamos<sup>16</sup> o problema de dois corpos com a energia potencial de Phipps dada por:<sup>17</sup>

$$U^P = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left(1 - \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (5.8)$$

Esta expressão se reduz à energia potencial de Weber quando a expandimos até segunda ordem em  $\dot{r}/c$ . Neste caso a velocidade limite passa a ser  $c$  em vez de  $\sqrt{2}c$ . Não entraremos nos detalhes desta análise neste livro.

A resposta de Weber a Helmholtz pode ser encontrada na seção 21 de seu artigo de 1871.<sup>18</sup>

## 5.4 Campo Elétrico Devido a uma Corrente Constante

Nesta seção trataremos de uma diferença específica entre a força de Weber e a força de Maxwell-Lorentz que pode em princípio ser testada no laboratório. Esta diferença tem a ver com a componente da força proporcional ao quadrado da velocidade  $\vec{v}_2$  das cargas fontes. Este é um assunto que desenvolvemos em um artigo de 1991.<sup>19</sup>

Supomos então um fio reto infinito colocado em repouso em relação a um referencial inercial ao longo do eixo  $Z$ . Neste fio supomos haver uma corrente estacionária  $I_2$  que é constante no tempo. Supondo que o fio seja um condutor metálico usual temos que apenas os elétrons se movem em relação ao fio. A partir destas suposições podemos então escrever o seguinte:  $\vec{v}_{2+} = \vec{0}$ ,  $\vec{a}_{2+} = \vec{0}$ ,  $\vec{v}_{2-} \equiv v_{2-}\hat{z} = -V_D\hat{z}$ , e  $\vec{a}_{2-} = \vec{0}$  (designamos pelo índice 2 às cargas do fio e  $|\vec{v}_{2-}| = V_D$  é a velocidade de *deslocamento*, de arraste ou de migração dos elétrons em relação ao fio). Todas as velocidades e acelerações são relativas ao sistema de referência inercial no qual o fio macroscópico está em repouso. Supomos ainda que este fio seja eletricamente neutro, o que significa que  $\lambda_{2-} = -\lambda_{2+}$ , onde  $\lambda$  é a densidade linear de carga. Esta suposição de neutralidade não é válida em geral para fios resistivos.<sup>20</sup> Mas como os efeitos da não neutralidade de um fio resistivo são muitas vezes pequenos, de tal forma que possam ser desprezados, faremos a suposição de neutralidade neste exercício.

Calculamos então a força que este fio exerce sobre uma carga  $q_1$  situada no vetor posição  $\vec{r}_1$  em relação à origem  $O$  do sistema de referência inercial que está sendo considerado aqui, deslocando-se em relação a este referencial com velocidade  $\vec{v}_1$  e aceleração  $\vec{a}_1$ , figura 5.7.

<sup>16</sup>[AC92].

<sup>17</sup>[Phi90b], [Phi90c] e [Phi92].

<sup>18</sup>[Web71] e [Web72].

<sup>19</sup>[Ass91a].

<sup>20</sup>[AH07], [AH09] e [AH13].

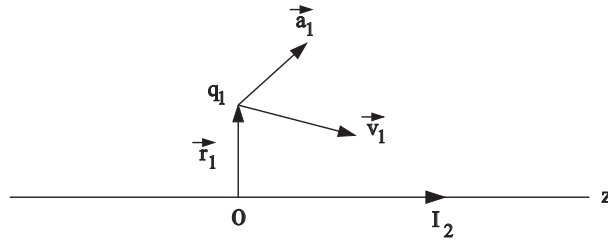


Figura 5.7: Carga se movendo perto de um fio parado no qual flui uma corrente constante.

Fazendo os cálculos a partir do eletromagnetismo clássico resulta que a força de Maxwell-Lorentz resultante neste caso é dada por (ver o exercício 5.3):

$$\vec{F}_{ML} = q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B}_2 \quad . \quad (5.9)$$

Nesta equação o campo magnético  $\vec{B}_2(\vec{r}_1)$  é devido à corrente  $I_2$  fluindo no fio. Seu valor no ponto  $\vec{r}_1$  onde se encontra a carga teste  $q_1$  é dado por:

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_o I_2}{2\pi \rho_1} \hat{\varphi}_1 \quad . \quad (5.10)$$

Nestas expressões usamos coordenadas cilíndricas ( $\vec{r}_1 = \rho_1 \hat{\rho}_1 + z_1 \hat{z}$ ,  $z_1 = 0$ ,  $\varphi_1$  é o ângulo azimutal e  $\rho_1$  é a distância de  $q_1$  ao fio). Temos ainda que  $I_2 = \lambda_{2-} V_D = -\lambda_{2+} V_D$ , onde  $\lambda_{2-}$  é a densidade linear de carga dos elétrons livres no fio. Vemos então que segundo a expressão de Maxwell-Lorentz o fio não gera campo elétrico, mas apenas um campo magnético poloidal que varia inversamente com a distância ao fio.

Por outro lado, usando a força de Weber, equação (5.1), obtemos que a força resultante do fio em  $q_1$  é dada por:<sup>21</sup>

$$\vec{F}_W = q_1 \vec{E}_M + q_1 \vec{v}_1 \times \vec{B}_2 \quad , \quad (5.11)$$

onde  $\vec{B}_2$  é dado pela equação (5.10) e  $\vec{E}_M$  é dado por:<sup>22</sup>

$$\vec{E}_M = -\frac{\mu_o |I_2 V_D|}{4\pi \rho_1} \hat{\rho}_1 \quad . \quad (5.12)$$

Vemos então que a única diferença entre a força de Weber e a força de Maxwell-Lorentz é que a força de Weber prevê uma força adicional em  $q_1$  dada por  $q_1 \vec{E}_M$ . Esta força é independente da velocidade  $\vec{v}_1$  da carga  $q_1$  e então podemos chamar  $\vec{E}_M$  de um campo elétrico. Só que este não é um campo elétrico usual, pois foi suposto inicialmente nesta dedução que o fio era neutro eletricamente. Este campo elétrico só surge devido ao fato de os elétrons no fio

<sup>21</sup>Ver exercício 5.4 e [Ass91b].

<sup>22</sup>[Wes87b], [Wes90b], [Wes90c], [Wes90d], [Wes91, capítulo 6], [Ass91a] e [Ass91b].

se moverem enquanto os íons positivos ficam parados em relação ao fio, de tal forma que a força de Weber exercida pelos íons positivos ao atuarem sobre a carga teste  $q_1$  é diferente em módulo ou magnitude da força de Weber exercida pelos elétrons no fio ao atuarem sobre a carga teste  $q_1$ . Vemos então que este campo elétrico surge devido ao movimento das cargas-fontes, é proporcional ao quadrado da corrente e aponta sempre na mesma direção independente do sentido da corrente. Ele pode então ser chamado de *campo elétrico devido ao movimento*, sendo esta a origem do subíndice  $M$  nas equações (5.11) e (5.12).

Embora esta força  $q_1 \vec{E}_M$  não tenha análogo no eletromagnetismo clássico, não é fácil de ser testada experimentalmente pois é muito pequena, de segunda ordem. Ou seja, ele é proporcional ao quadrado da velocidade  $\vec{v}_2 = \vec{V}_D$  das cargas fontes, sendo proporcional à grandeza  $V_D^2/c^2$ . Por exemplo, se tivermos uma corrente de  $10^3 A$  e uma carga elétrica  $q_1$  típica de laboratório, com valor  $q_1 \simeq 10^{-10} C$ , então esta força será da ordem de  $10^{-13} N$  para uma separação  $\rho_1 \simeq 10 cm$ . Esta força é extremamente pequena e difícil de detectar.

De qualquer forma temos uma característica que pode distinguir um conjunto (A) de teorias de um outro conjunto (B) de teorias, a saber: (A) Teorias que predizem uma força não nula atuando sobre uma carga estacionária colocada perto de um fio condutor neutro e estacionário no qual circula uma corrente constante. (B) Teorias que não predizem esta força. Na primeira categoria temos, por exemplo, as forças de Weber, Riemann e Gauss. Todas estas teorias predizem forças de segunda ordem do tipo  $V_D^2/c^2$ . Como usualmente temos  $V_D^2/c^2 \approx 10^{-20}$ , vemos que este efeito é pequeno. Na outra classe temos, por exemplo, a força de Maxwell-Lorentz (ou a força de Liénard-Schwarzschild), assim como a força de Clausius. Uma boa discussão deste tópico também se encontra em outros trabalhos.<sup>23</sup>

Surge naturalmente a questão de saber se esta força existe ou não. Historicamente a predição desta força exercida por um fio com corrente constante ao atuar sobre uma carga em repouso tem sido considerada como uma falha da teoria de Weber, já que as pessoas pensavam que esta força não existia experimentalmente. Maxwell, por exemplo, afirmou<sup>24</sup> que “tal ação [força] nunca foi observada.” Apesar desta afirmativa, ele não citou um único experimento em que se tenha tentado detectar esta força. Um outro exemplo: Pearson e Kilambi têm um trabalho muito interessante no qual mostram que a força de Weber constitui uma analogia clássica para as forças dependentes da velocidade da física nuclear, sendo a analogia fornecida pela força de Weber bem melhor que a analogia fornecida pela força de Liénard-Schwarzschild. Em uma seção deste artigo eles discutem o campo elétrico devido ao movimento e concluem:<sup>25</sup>

O fato de que  $F_y^W$  [força de Weber exercida em uma carga parada

<sup>23</sup>[O’R65, volume 2, págs. 288–290], [EKL76], [Whi73, págs. 205–206 e 234–236] e [Bus26].

<sup>24</sup>[Max54, volume 2, artigo 848, pág. 482].

<sup>25</sup>[PK74].

perto de um longo fio retilíneo com corrente] é não-nula significa que a eletrodinâmica de Weber dá origem a efeitos de indução espúrios. Este é provavelmente o defeito mais óbvio da teoria e a única maneira de evitá-lo é supor que as cargas positivas no fio se movem com uma velocidade igual  $v_2$  na direção oposta, o que é óbvio que elas não fazem.

A velocidade a que se referem aqui é a velocidade de deslocamento, de arraste ou de migração dos elétrons de condução em relação ao fio.

Mais uma vez eles não citaram um único experimento que tentou observar ou medir estes efeitos de indução “espúrios” e não os encontrou.

Contudo nenhum experimento foi realizado até a década de 1970 para tentar medir este efeito. A melhor experiência que conhecemos que foi realizada para pesquisar a existência deste efeito é devida a Edwards e outros autores.<sup>26</sup> Eles mediram uma diferença de potencial associada com este campo elétrico devido ao movimento e encontraram um valor não nulo compatível com a ordem de grandeza prevista pela eletrodinâmica de Weber. Além do mais eles concluíram que o campo era radial e apontava para a corrente, independente do sentido da corrente, além de terem encontrado que este campo elétrico devido ao movimento era proporcional ao quadrado da corrente. Apesar de todas estas evidências concordando com a eletrodinâmica de Weber, ainda não se pode dizer que estas experiências sejam conclusivas. Mais pesquisas experimentais são necessárias antes de se chegar a uma conclusão definitiva.

Existem diversos artigos experimentais recentes que apareceram na literatura tratando deste assunto estimulante.<sup>27</sup> Existem também diversos trabalhos teóricos sobre este tema.<sup>28</sup>

## 5.5 Força de Weber e Variação da Massa

Uma outra componente da força de Weber que não tem componente análoga no eletromagnetismo clássico é aquela que depende apenas do quadrado da velocidade  $\vec{v}_1$  da carga teste que sente a força, mas que não depende da velocidade  $\vec{v}_2$  das cargas-fontes. A seguir ilustramos uma situação em que esta componente aparece explicitamente. A situação discutida aqui foi analisada com a força de Weber e com outras forças similares por muitos autores.<sup>29</sup>

Vamos supor um capacitor ideal parado em relação a um referencial inercial  $S$ . Seja então um capacitor de placas retangulares paralelas, de lado  $L$ , com separação entre as placas  $d$  muito menor do que o tamanho  $L$  das placas,

<sup>26</sup>[EKL76].

<sup>27</sup>[BW77], [San85], [BM90], [KE91] e [LEK92].

<sup>28</sup>[Wes87b], [Wes90d], [Wes91, capítulo 6], [Bon81], [Cur82], [Gra88], págs. 1–4 e 1–5; [Hay90], [BE90], [Ive90], [Ive91], [Ass91a], [Bil92], [Sin92], [Str92] etc.

<sup>29</sup>[Bus26], [MS55], [O’R65, volume 2, págs. 613–622], [Ass89b], [Wes90d], [Wes90a], [Wes91, capítulo 6] e [AC91].

$d \ll L$ , de tal forma que para os cálculos possamos supor as placas infinitas (ou seja, vamos desprezar os efeitos de borda). Supondo as placas situadas nos planos  $x = x_o$  e  $x = -x_o$ , com densidades superficiais de carga  $\sigma_A$  e  $-\sigma_A$ , respectivamente, resulta que o campo elétrico clássico no interior do capacitor é dado por (como calculado facilmente com a lei de Gauss):

$$\vec{E}_c = -\frac{\sigma_A}{\varepsilon_o} \hat{x} \quad , \quad (5.13)$$

onde  $\hat{x}$  é um versor apontando da placa negativa à positiva:

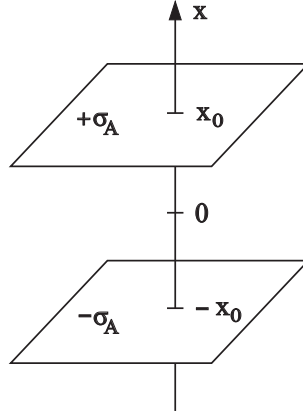


Figura 5.8: Capacitor.

Como o capacitor não gera nenhum campo magnético e a situação é estacionária no tempo, resulta pela força de Maxwell-Lorentz que a única força que pode atuar sobre uma carga  $q_1$  que se move em seu interior é dada por  $q_1 \vec{E}_c$ .

Já com a força de Weber a situação não é tão simples. Usando a equação (5.1) pode-se calcular a força em  $q_1$  neste caso. Vamos supor que a carga teste esteja no interior do capacitor, localizada ao longo do eixo  $x$  de simetria,  $\vec{r}_1 = x_1 \hat{x}$ , com  $-x_o < x_1 < x_o$ . Vamos supor ainda que a carga teste pode estar em movimento em relação ao referencial inercial  $S$ , deslocando-se com velocidade  $\vec{v}_1$  e aceleração  $\vec{a}_1$  em relação às placas do capacitor. Neste caso a força de Weber exercida pelo capacitor e atuando na carga teste é dada por:<sup>30</sup>

$$\vec{F} = -q_1 \frac{\sigma_A}{\varepsilon_o} \left\{ \hat{x} + \frac{1}{c^2} \left[ \frac{v_1^2}{2} \hat{x} - v_{1x}(v_{1y} \hat{y} + v_{1z} \hat{z}) + 2x_1 a_{1x} \hat{x} - x_1 \vec{a}_1 \right] \right\} \quad . \quad (5.14)$$

Em primeiro lugar observamos que esta expressão só recai no caso clássico quando  $\vec{v}_1 = \vec{0}$  e  $\vec{a}_1 = \vec{0}$ . Os termos a mais que aparecem nesta expressão e que não têm similar em nenhuma das componentes da força de Maxwell-Lorentz são os termos que estão entre colchetes. Vemos que eles dependem do quadrado

<sup>30</sup>Ver exercício 5.5 e a referência [Ass89b].

da velocidade  $\vec{v}_1$  da carga teste que sente a força e também de sua aceleração  $\vec{a}_1$ . Nenhum destes termos aparece na força de Maxwell-Lorentz.

Não conhecemos nenhum experimento feito especificamente para determinar a existência ou não dos termos que aparecem dentro dos colchetes na equação (5.14). Em 1989 discutimos<sup>31</sup> como estes termos fornecem uma explicação alternativa aos famosos experimentos de Kaufmann e Bucherer de variação da massa com a velocidade. As duas explicações alternativas, (A) e (B), são as seguintes: (A) A força dentro do capacitor é dada por  $q_1 \vec{E}_c$ , com o campo elétrico dado pela equação (5.13), qualquer que seja a velocidade da partícula e a massa varia relativisticamente como  $m = m_o / \sqrt{1 - v_1^2/c^2}$ . (B) A força dentro do capacitor é dada pela equação (5.14) e a massa da partícula é uma constante qualquer que seja sua velocidade.

Embora estas duas explicações sejam fisicamente bem distintas, ambas fornecem a mesma expressão para aquilo que é observado nos experimentos de Bucherer, pelo menos até segunda ordem, inclusive, em  $v_1/c$ . Após escrevermos este artigo, descobrimos que as experiências de Kaufmann e Bucherer não tiveram precisão além da segunda ordem em  $v_1/c$ . Para a análise destes experimentos e desta informação ver os trabalhos de Zahn, Spees, Farago e Janossy.<sup>32</sup> O que se pode concluir atualmente é que para esta situação experimental específica, as duas explicações são igualmente satisfatórias. Além disto, Wesley mostrou recentemente<sup>33</sup> que no caso deste experimento<sup>34</sup> as velocidades obtidas da lei de Weber e do eletromagnetismo clássico são funções diferentes dos campos  $\vec{E}_c$  e  $\vec{B}$ . Expressando o que é medido experimentalmente não mais em função das velocidades, mas sim em função das grandezas  $\vec{E}_c$  e  $\vec{B}$ , Wesley obteve que a lei de Weber também apresenta termos de quarta ordem e que estes termos são praticamente os mesmos que os termos fornecidos pela teoria da relatividade de Einstein. Ou seja, mesmo que estes experimentos houvessem tido precisão até quarta ordem em  $v_1/c$ , inclusive, não seria possível distinguir as duas explicações alternativas.

## 5.6 Comentários Gerais sobre a Lei de Weber

Neste livro vimos vários aspectos positivos da força de Weber: É uma lei completamente relacional (tem o mesmo valor para todos os observadores), satisfaz o princípio de ação e reação na forma forte, além de satisfazer os princípios de conservação do momento linear, do momento angular e da energia. Além disto é possível deduzir com a eletrodinâmica de Weber a força de Coulomb e a força entre elementos de corrente de Ampère. Vimos também como se pode deduzir a partir da força de Weber as equações de Maxwell: lei de Gauss, lei da não

---

<sup>31</sup>[Ass89b].

<sup>32</sup>[ZS38] e [FJ57].

<sup>33</sup>[Wes90b] e [Wes90c].

<sup>34</sup>Descrito em [Ros64, pág. 193].



existência de monopolos magnéticos, lei circuital magnética e lei de indução de Faraday. Apresentamos e discutimos os principais pontos da controvérsia entre a força de Ampère e a força de Grassmann. Então comparamos a força de Weber com a força de Maxwell-Lorentz. Mostramos que a única diferença é que a lei de Weber prevê alguns termos adicionais que não aparecem na força de Maxwell-Lorentz. Discutimos alguns experimentos ligados com estes termos e como eles ainda não são conclusivos para decidir a questão. Para uma discussão mais aprofundada destes e de outros experimentos ver um artigo de 1990.<sup>35</sup>

Apesar destes aspectos positivos da lei de Weber, devemos ressaltar que a força de Weber é apenas um modelo de interação entre cargas que descreve uma certa classe de fenômenos. Como tal, ela pode estar sujeita a limitações e seu grau de validade pode não ser ilimitado. Por exemplo, pode ser que um modelo de interação mais completo que a lei de Weber inclua também termos de quarta ordem em  $v/c$ , do tipo  $\dot{r}^4/c^4$ , ou termos como  $d^3r/dt^3$  etc. Caso isto seja verdade então a validade da lei de Weber iria apenas até a segunda ordem em  $v/c$ , inclusive. Isto é, para cargas que se movem a velocidades extremamente próximas à velocidade da luz, pode ser que a lei de Weber não se aplique como tal. No momento, não sabemos se a lei de Weber tem ou não esta limitação de validade, mas nos parece importante alertar para esta possibilidade provável. Phipps, por exemplo,<sup>36</sup> propôs uma energia potencial dada por  $U^p = (q_1q_2/4\pi\epsilon_0r_{12})(1 - \dot{r}^2/c^2)^{1/2}$  para resolver os problemas que Helmholtz havia apontado na teoria de Weber, a saber, a existência do assim chamado “comportamento de massa negativa.” Este problema está discutido por diversos autores.<sup>37</sup> Embora com este potencial Phipps tenha superado as críticas de Helmholtz, obviamente seu potencial não é o único que pode responder a estas críticas. De qualquer forma este é um exemplo específico de como generalizar a eletrodinâmica de Weber para ordens superiores em  $v/c$ .

Deve ser observado que o comportamento de massa negativa que aparece em algumas situações na eletrodinâmica de Weber, que havia sido criticado por Helmholtz, é uma das bases do modelo planetário de Weber para o átomo.<sup>38</sup> Em particular, cargas de mesmo sinal passam a se atrair quando estão a distâncias muito pequenas entre si, pois se comportam como se tivessem massa inercial efetiva negativa. Com base nesta propriedade fascinante Weber foi capaz de prever, antes das experiências de Rutherford e bem antes do modelo planetário de Bohr, um modelo de átomo no qual cargas negativas descreviam órbitas elípticas ao redor de um núcleo composto de cargas positivas. O mais interessante de seu modelo é que o núcleo era mantido estável apenas pelas forças eletrodinâmicas de Weber. No modelo planetário de hoje em dia, ao

---

<sup>35</sup>[Ass90b].

<sup>36</sup>[Phi90b], [Phi90c] e [Phi92].

<sup>37</sup>[Hel72], [Max54, volume 2, capítulo 23, artigo 854, pág. 485] e [Ass92g], assim como [Whi73, págs. 203–204].

<sup>38</sup>[AWW11] e [AWW14].

contrário, foi necessário postular a existência de forças nucleares para garantir a estabilidade do núcleo em função da repulsão coulombiana entre suas cargas positivas.

Um outro aspecto que tem de ser lembrado é que apesar de a força de Weber incluir termos de velocidade e aceleração, ainda assim ela é uma lei de ação a distância. Outras forças deste tipo são a força gravitacional newtoniana e a força elétrica coulombiana. Vamos supor que temos um corpo  $A$  parado em relação a um outro corpo  $B$ , com ambos parados em relação a um referencial inercial  $S$ . Vamos supor que em um certo instante inicial  $t_o$  o corpo  $A$  é deslocado em relação a este referencial inercial (devido a uma força externa, por exemplo). De acordo com as leis de ação à distância, o outro corpo  $B$  sentirá instantaneamente uma mudança de força, qualquer que seja sua distância do primeiro corpo  $A$ . Isto pode ser um aspecto positivo.<sup>39</sup> Pode ser que esta seja a maneira de a natureza se comportar ou agir. Por outro lado, pode ser que todas as interações viajem em relação a um referencial inercial com uma velocidade finita (por exemplo, com a velocidade da luz). Mas a lei de Weber, como tal, não descreve esta última ideia.

Para descrever ondas eletromagnéticas e um retardo na propagação das interações a partir de teorias de ação a distância há algumas alternativas. Uma delas é utilizando a lei de indução de Faraday em um sistema de muitos corpos.<sup>40</sup> Uma outra maneira de obter ondas eletromagnéticas ou efeitos retardados com a lei de Weber é usando simultaneamente a equação de conservação de cargas (1.37). Um exemplo deste fato foi a obtenção da corrente de deslocamento na seção 3.5 usando esta equação. Deve-se lembrar que para a obtenção de ondas eletromagnéticas foi fundamental para Maxwell este termo da corrente de deslocamento.

Uma outra maneira de obter ondas eletromagnéticas com uma teoria de ação a distância é introduzir diretamente na lei de Weber o tempo retardado. Isto é, substitui-se  $t$  por  $t - r_{12}/c$  em todos os termos da lei de Weber. A aplicação do tempo retardado especificamente na lei de Weber é devida a Moon e Spencer, assim como a Wesley.<sup>41</sup> Para uma discussão suplementar sobre os diferentes modelos de propagação do potencial ver ainda os trabalhos de Clausius e Archibald.<sup>42</sup> Neste livro não discutiremos estes aspectos já que eles estão além da eletrodinâmica de Weber em sua forma original.

Devemos mencionar ainda que Kirchhoff e Weber obtiveram a equação de onda conhecida como equação do telegrafista em 1857, antes dos trabalhos de Maxwell. Tanto Kirchhoff quanto Weber trabalharam com a força eletrodinâmica de Weber, baseada na ação a distância, como discutimos na seção 2.1.<sup>43</sup>

<sup>39</sup>[Gra90d], [Gra90b], [Gra90c], [Gra90e] e [Ass99a].

<sup>40</sup>[Gra87b].

<sup>41</sup>[MS54c], [Wes87a], [Wes90b], [Wes90c] e [Wes91, capítulo 6].

<sup>42</sup>[Cla69] e [Arc86].

<sup>43</sup>[Ass98a], [Ass00a], [Ass00b], [HA00], [AT00], [HA01], [Ass03a], [AH05], [AH07, apêndice

Iniciamos este livro com as palavras de Maxwell. Vamos terminá-lo com as palavras de O’Rahilly, escritas em sua obra máxima, *Teoria Eletromagnética - Um Exame Crítico dos Fundamentos*. Neste trecho temos um resumo das coisas que Weber realizou e das ideias que defendeu (entre colchetes vão nossas palavras):<sup>44</sup>

Se qualquer homem merece crédito pela ideia sintética que unifica os vários ramos da ciência elétrica e magnética, este homem é Wilhelm Weber. Hoje, mesmo aqueles que defendem a teoria do éter ou que professam serem relativistas aceitam estes princípios introduzidos ou desenvolvidos por ele: que a ideia de Ampère do magnetismo como sendo devido a correntes microscópicas pode explicar fenômenos relevantes; que a eletricidade tem uma estrutura atômica [isto é, granular ou corpuscular]; que as correntes são fluxos de partículas; que as forças de Ampère [entre elementos de corrente] agem diretamente entre estas partículas e não entre os condutores; que a lei de Coulomb deve ser modificada para cargas em movimento; que, como disse Gauss, a ação não é instantânea; que as leis da eletrodinâmica [força entre elementos de corrente de Ampère] e da indução [lei de Faraday] podem ser deduzidas por uma soma estatística, a partir de uma fórmula de força para partículas [cargas] elétricas. Mesmo seu princípio balístico, submerso por tanto tempo pelos eteristas e relativistas, parece que provavelmente desafiará os físicos mais uma vez na forma desenvolvida dada a ele por Walther Ritz.

## 5.7 Exercícios

1. Para perceber a diferença de enfoque ao tratarmos de um problema pela força de Maxwell-Lorentz ou pela força de Weber, vamos discutir aqui casos simples da interação entre duas cargas. As situações que vamos tratar aqui são de cargas em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, *MRU*, deslocando-se com velocidades constantes em relação a um referencial inercial.

(A) Cargas em repouso.

No primeiro caso temos duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  separadas pela distância  $\vec{r}_{12} = r_{12}\hat{y}$  e que estão paradas em relação a um referencial inercial  $S$ , ver a figura 5.9.

Para que elas permaneçam em repouso, apesar da interação eletrostática entre elas, podemos supor que a força coulombiana é contrabalançada por

---

B: Gustav Kirchhoff e as Cargas Superficiais], [AH09, apêndice B: Gustav Kirchhoff e as Cargas Superficiais] e [AH13, apêndice B: Gustav Kirchhoff e as Cargas Superficiais].

<sup>44</sup>[O’R65, volume 2, pág. 535].

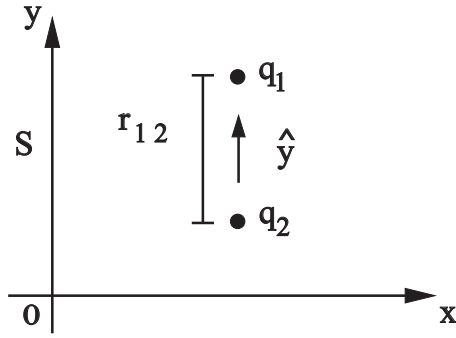


Figura 5.9: Cargas em repouso.

alguma outra força como, por exemplo, por uma força elástica (supondo as duas cargas ligadas por uma mola dielétrica feita de um material não condutor de eletricidade). Neste caso, como não há nenhum movimento das cargas, mostre que as forças de Liénard-Schwarzschild (LS) e de Weber (W) ficam com a mesma forma, isto é, como uma força coulombiana dada por:

$$\vec{F}_{21}^{LS} = \vec{F}_{21}^W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} = -\vec{F}_{12}^{LS} = -\vec{F}_{12}^W \quad .$$

(B) Cargas em movimento retilíneo uniforme paralelo.

Vamos supor agora a mesma situação vista por um outro referencial inercial  $S'$  que se move em relação a  $S$  com uma velocidade constante  $-V\hat{x}$ , onde supomos  $V \ll c$ . A situação como vista neste referencial  $S'$  está representada na figura 5.10.

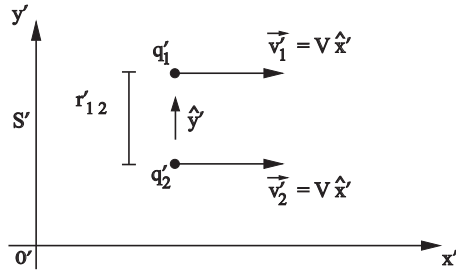


Figura 5.10: Cargas em MRU ortogonal à separação.

Naturalmente temos  $q'_1 = q_1$ ,  $q'_2 = q_2$ ,  $\hat{x}' = \hat{x}$ ,  $\hat{y}' = \hat{y}$  e  $r'_{12} = r_{12}$ . Como estamos supondo uma velocidade constante, resulta que  $\vec{a}'_1 = \vec{a}'_2 = \vec{O}$ . Vamos representar pelo índice ' às forças vistas no referencial  $S'$ . Use a equação (5.1) para mostrar que:

$$\vec{F}_{21}^{W'} = \vec{F}_{21}^W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} = -\vec{F}_{12}^{W'} = -\vec{F}_{12}^W \quad .$$

De acordo com a força de Weber, não há então diferença em estarmos no referencial  $S$  ou no referencial  $S'$ , já que não há movimento relativo entre as cargas nos dois casos. Isto ilustra mais uma vez o caráter relacional da força de Weber, já que esta força tem sempre o mesmo valor em qualquer referencial.

Como estamos supondo  $V^2 \ll c^2$ , podemos usar as equações (1.53) e (1.54) como expressões corretas da força de Maxwell-Lorentz válidas até segunda ordem em  $1/c$ . Use as equações (1.53) e (1.54) para mostrar que:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21}^{LS'} &= -\vec{F}_{12}^{LS'} = q_1 \left[ \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( 1 + \frac{V^2}{2c^2} \right) \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} \right] + q_1 V \hat{x} \times \left[ \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{V \hat{z}}{c^2 r_{12}^2} \right] \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( 1 - \frac{V^2}{2c^2} \right) \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} .\end{aligned}$$

Várias coisas se observam desta equação. A primeira é que a força de Liénard-Schwartzschild satisfaz neste caso bem específico o princípio de ação e reação no referencial  $S'$ . No primeiro colchete desta equação temos o campo elétrico devido à carga  $q_2$  no referencial  $S'$ , que é maior pelo fator  $(1 + V^2/2c^2)$  do que o campo elétrico visto no referencial  $S$ . No segundo colchete temos o campo magnético no referencial  $S'$  devido ao movimento de  $q_2$ , campo este que não existia no referencial  $S$ . O resultado combinado destas duas modificações é que a força eletromagnética resultante no referencial  $S'$  sofre uma diminuição pelo fator  $(1 - V^2/2c^2)$  em relação à força resultante de Maxwell-Lorentz ou de Liénard-Schwartzschild no referencial  $S$ .

É por este motivo que se diz no eletromagnetismo clássico que os campos elétrico e magnético se transformam um no outro dependendo do referencial. Por isto também se afirma que não há realidade física em nenhum destes campos separadamente, mas apenas na força eletromagnética como um todo.

(C) Cargas em movimento retilíneo uniforme alinhado com a separação entre elas.

Apresentamos uma outra situação típica na figura 5.11.

Neste caso duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  estão alinhadas paralelamente ao eixo  $y$  e se movem ao longo deste eixo em relação ao sistema inercial  $S$  com uma velocidade constante  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = V\hat{y}$ , de tal forma que  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{0}$ . Se a separação entre elas é  $r_{12}$ , então mostre que a força mútua entre elas de acordo com a expressão de Weber é dada por:

$$\vec{F}_{21}^W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} = -\vec{F}_{12}^W .$$

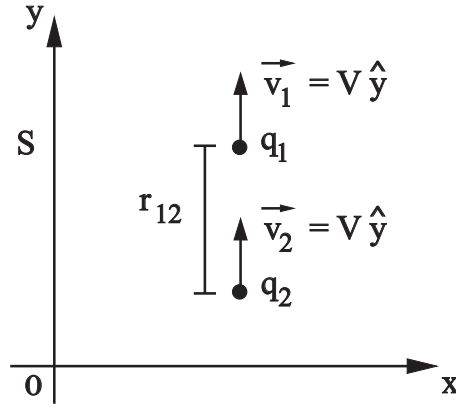


Figura 5.11: Cargas em *MRU* alinhado com a separação.

Mais uma vez estamos supondo  $V \ll c$ . Use então as equações (1.53) e (1.54) de Liénard-Schwarzschild para chegar ao seguinte resultado:

$$\vec{F}_{21}^{LS} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = -\vec{F}_{12}^{LS} .$$

Mais uma vez observamos que a expressão de Weber prevê uma força diferente do que a expressão de Liénard-Schwarzschild.

(D) Cargas em movimento retilíneo uniforme inclinado relativo à separação entre elas.

Uma outra situação está representada na figura 5.12.

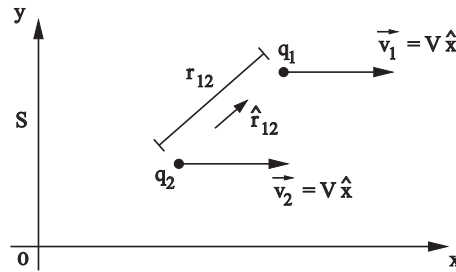


Figura 5.12: Cargas em *MRU* inclinado com a separação.

Duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  estão separadas por uma distância  $r_{12}$ . A linha conectando-as está inclinada em relação ao eixo  $x$  por um ângulo  $\theta$ :  $\hat{r}_{12} \cdot \hat{x} = \cos \theta$ . Elas se movem em relação ao sistema de referência  $S$  com uma velocidade constante  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = V \hat{x}$  de tal forma que  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{0}$ .

Mostre que de acordo com a expressão de Weber as forças que estas cargas exercem entre si são dadas por:

$$\vec{F}_{21}^W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} = -\vec{F}_{12}^W .$$

Por outro lado mostre que as forças de Liénard-Schwarzschild dadas pelas equações (1.53) e (1.54) fornecem as seguintes forças mútuas, supondo  $V \ll c$  e  $\hat{r}_{12} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta$ :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21}^{LS} &= q_1 \left[ \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left( 1 + \frac{V^2}{2c^2} - \frac{3V^2 \cos^2 \theta}{2c^2} \right) \right] \\ &+ q_1 V \hat{x} \times \left( \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2} \frac{V \sin \theta \hat{z}}{c^2} \right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left( 1 + \frac{V^2}{2c^2} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{3V^2 \cos^2 \theta}{2c^2} \right) - \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} \frac{V^2 \sin \theta}{c^2} \right] = -\vec{F}_{12}^{LS} . \end{aligned}$$

Mais uma vez a força de Weber prevê um resultado diferente comparado com a força de Liénard-Schwarzschild.

O que é mais interessante agora é que de acordo com o resultado de Liénard-Schwarzschild tem de haver um torque eletromagnético  $\vec{T}$  agindo no sistema de duas cargas devido a forças internas! Isto pode ser visto facilmente calculando o torque com esta equação. Mostre então que este torque  $\vec{T}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_{21} \\ &= - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{V^2 \sin \theta}{c^2} \frac{\hat{r}_{12} \times \hat{y}}{r_{12}} = - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{V^2 \sin \theta \cos \theta}{c^2} \frac{\hat{z}}{r_{12}} . \end{aligned}$$

Este é um resultado muito estranho já que a situação da figura 5.12 é a mesma que a situação da figura 5.9, apenas vista a partir de um sistema de referência  $S'$  que está inclinado em relação ao referencial  $S$  da figura 5.9 por um ângulo  $\theta$ , movendo-se em relação ao referencial  $S$  com uma velocidade constante  $\vec{V} = -V(\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta)$ , ver a figura 5.13.

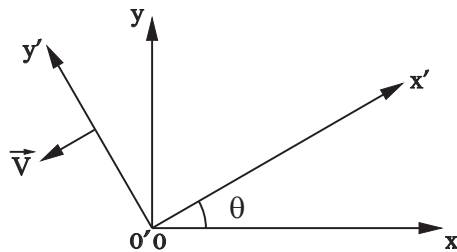


Figura 5.13: Rotação dos referenciais.

Como não há torque na situação da figura 5.9, não deveria haver torque na situação da figura 5.12. E apesar disto a força de Liénard-Schwarzschild prevê este torque na segunda situação, mas não prevê este torque na primeira situação. A existência deste torque no eletromagnetismo clássico também pode ser facilmente vista utilizando a força de Maxwell-Lorentz, equação (5.2).

Obviamente nenhum destes problemas e paradoxos surge na eletrodinâmica de Weber. Se não há torque em um sistema de referência, então não vai haver nenhum torque em qualquer outro sistema de referência devido ao aspecto relacional da força de Weber.

(E) Cargas em movimento retilíneo uniforme ortogonal.

Vamos agora supor uma situação física diferente. Agora ainda temos duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  deslocando-se com velocidades constantes  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  em relação a um referencial inercial. Estas velocidades constantes podem ser obtidas através de forças mecânicas externas ao sistema, equilibrando as forças eletromagnéticas que elas exercem entre si. Suas acelerações são nulas,  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{0}$ . Vamos supor ainda que elas estejam posicionadas e deslocando-se no instante  $t$  na situação mostrada pela figura 5.14.

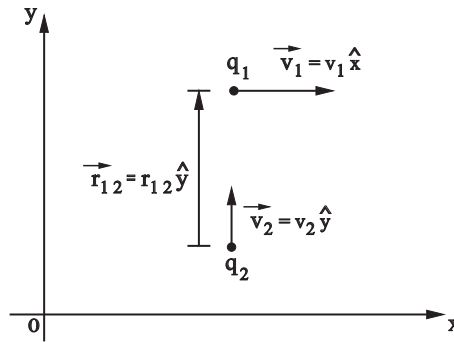


Figura 5.14: Cargas com velocidades ortogonais.

Aplicando a força de Weber (5.1) neste caso mostre que:

$$\vec{F}_{21}^W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} \left[ 1 + \frac{1}{c^2} \left( v_1^2 - \frac{v_2^2}{2} \right) \right] = -\vec{F}_{12}^W .$$

Já no caso de Liénard-Schwarzschild, mostre que das equações (1.53) e (1.54) obtemos as seguintes forças mútuas:

$$\vec{F}_{21}^{LS} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{y}}{r_{12}^2} \left( 1 - \frac{v_2^2}{c^2} \right) ,$$

e



$$\vec{F}_{12}^{LS} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}^2} \left[ \left(1 + \frac{v_1^2}{2c^2}\right) \hat{y} + \frac{v_1 v_2}{c^2} \hat{x} \right].$$

Este exemplo ilustra mais uma vez que a força de Weber sempre satisfaz o princípio de ação e reação na forma forte, enquanto que a força de Maxwell-Lorentz não o satisfaz nem mesmo na forma fraca em alguns casos. A situação da figura 5.14 representa, para cargas, a situação análoga da figura 3.1 para elementos de corrente neutros.

2. Neste problema vamos tratar do problema de duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  de massas inerciais  $m_1$  e  $m_2$  interagindo entre si através da lei de Weber sem a presença de forças externas. Vamos nos restringir ao movimento radial no qual as cargas se deslocam apenas ao longo da reta que as une. A energia total conservada deste sistema é dada por:

$$E = T + U = m_1 \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}{2} + m_2 \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}{2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2}\right),$$

onde  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são as velocidades destas cargas em relação a um sistema de referência inercial  $S$ .

Na eletrodinâmica de Weber há conservação do momento linear quando não há forças externas aplicadas ao sistema, como é o caso aqui. É mais fácil analisar este problema no sistema de referência no qual o centro de massa está em repouso. A posição do centro de massa  $\vec{R}$  é definida por:  $\vec{R} \equiv (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)/(m_1 + m_2)$ , onde  $\vec{r}_1$  ( $\vec{r}_2$ ) é a posição de  $q_1$  ( $q_2$ ) no tempo  $t$  em relação a  $S$ . A velocidade do centro de massa neste sistema de referência  $S$  é dada por:  $\vec{V} \equiv (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)/(m_1 + m_2)$ . A massa reduzida é definida por  $\mu \equiv m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ .

(A) No referencial do centro de massa temos  $\vec{V} = \vec{0}$ . Mostre então que a energia cinética é dada simplesmente neste referencial por  $T = \mu v^2/2$ , onde  $v \equiv |\vec{v}_{12}|$ . Neste exemplo particular há apenas movimento radial, de tal forma que  $\vec{v}_{12}$  é paralelo a  $\hat{r}_{12}$ . Isto significa que  $v^2 = \dot{r}^2$ .

(B) Conclua então que a energia total conservada pode ser escrita neste sistema de referência do centro de massa como:

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \frac{\alpha}{r} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{2c^2}\right),$$

onde  $\alpha \equiv q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_o$ .

Se  $E = \mu c^2$ , então as duas cargas vão se aproximar ou se afastar uma da outra com uma velocidade constante  $\dot{r} = \pm\sqrt{2}c$ , qualquer que seja  $r$ ,

como se elas não sentissem uma à outra. Esta energia  $E = \mu c^2$  representa então uma energia característica do problema, que se parece com a energia relativística, mas que surgiu naturalmente na eletrodinâmica de Weber, muito antes das teorias de Einstein.

(C) Definindo as grandezas  $A \equiv \pm\sqrt{2E/\mu}$ ,  $r_1 \equiv \alpha/E$  e  $r_2 \equiv \alpha/\mu c^2$ , mostre que chegamos nos seguintes resultados:

$$\dot{r} = A\sqrt{\frac{r-r_1}{r-r_2}},$$

e

$$\ddot{r} = \frac{\alpha}{\mu} \frac{1-r_2/r_1}{(r-r_2)^2}.$$

(D) Mostre que o problema análogo de duas cargas interagindo radialmente através da força de Coulomb na mecânica clássica se reduz ao caso anterior com  $r_2 = 0$ . Isto indica que a distância característica na qual a lei de Weber apresenta uma mudança significativa em relação à de Coulomb ocorre em  $r \approx r_2$ .

3. Dedução da equação (5.9).

(A) Supondo que o fio é neutro eletricamente, resulta que  $\phi_2 = 0$ . Como a corrente é estacionária, constante no tempo, resulta que  $\partial\vec{A}_2/\partial t = \vec{0}$ . Da equação (1.28) resulta que o campo elétrico é nulo, ou seja,  $\vec{E}_2 = \vec{0}$ . Use então a força de Maxwell-Lorentz dada pela equação (1.29) e o campo magnético devido a um circuito fechado, equação (1.19), para chegar na equação (5.9). Para isto tem-se de calcular a integral (1.19) e pode-se usar, sem perda de generalidade,  $z_1 = 0$ , tal que  $\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y}$ . Tem-se ainda:  $d\vec{l}_2 = dz_2\hat{z}$ .

(B) Uma outra maneira de calcular o campo magnético  $\vec{B}_2$  é usando a lei circuital magnética (1.41). Como a situação é estacionária, resulta que  $d\Phi_E/dt = 0$ . Use como circuito  $\mathcal{C}$  um círculo centrado no eixo  $Z$ , onde passa a corrente  $I_2$ . Como por simetria  $\vec{B}_2$  é poloidal, resulta que  $\vec{B}_2$  é paralelo a  $d\vec{l}_2$  em cada ponto deste circuito. Como  $\int \vec{J}_2 \cdot d\vec{a}_2 = I_2$ , resulta que se pode obter  $\vec{B}_2$  da equação (1.41). Calcule-o para ver que é dado pela equação (5.10).

4. Dedução da equação (5.11).

(A) Parta da equação (5.1) para calcular a força de um elemento de corrente em  $q_1$ . Substitua  $q_2$  por  $dq_2 = \lambda_2 dz_2$ . Suponha um elemento de corrente neutro eletricamente, isto é,  $\lambda_{2-} = -\lambda_{2+}$ . Some as forças de  $\lambda_{2+}dz_2$  e  $\lambda_{2-}dz_2$  em  $q_1$ , lembrando que  $\vec{r}_2 = z_2\hat{z}$ ,  $\vec{v}_{2+} = \vec{0}$ ,  $\vec{a}_{2+} = \vec{0}$ ,

$\vec{v}_{2-} = -V_D \hat{z}$ ,  $\vec{a}_{2-} = \vec{0}$ . Use ainda  $\vec{r}_1 = x_1 \hat{x} + y_1 \hat{y}$ ,  $\vec{v}_1 = v_{1x} \hat{x} + v_{1y} \hat{y} + v_{1z} \hat{z}$ , assim como  $\vec{a}_1 = a_{1x} \hat{x} + a_{1y} \hat{y} + a_{1z} \hat{z}$ .

(B) Integre o resultado anterior em  $z_2$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

(C) Use os seguintes fatos para colocar o resultado anterior na forma das equações (5.11) e (5.12):  $x_1 = \rho_1 \cos \varphi_1$ ,  $y_1 = \rho_1 \sin \varphi_1$ ,  $\hat{\rho}_1 = \hat{x} \cos \varphi_1 + \hat{y} \sin \varphi_1$ ,  $\hat{\varphi}_1 = -\hat{x} \sin \varphi_1 + \hat{y} \cos \varphi_1$ , e que  $\vec{G}_1 \times \vec{G}_2 = (G_{1y}G_{2z} - G_{1z}G_{2y})\hat{x} + (G_{1z}G_{2x} - G_{1x}G_{2z})\hat{y} + (G_{1x}G_{2y} - G_{1y}G_{2x})\hat{z}$ .

5. Dedução da equação (5.14).

(A) Use a equação (5.1) para calcular a força de um elemento das placas em  $q_1$ . Substitua  $q_2$  por  $dq_2 = \pm \sigma_A da_2$ , onde  $\sigma_A$  é a densidade superficial de carga na chapa de cima e  $da_2$  um elemento de área. Sem perda de generalidade, já que as placas são infinitas, coloque  $y_1 = z_1 = 0$  no tempo  $t$ . Deixe as velocidades e acelerações gerais de tal forma que  $\vec{v}_1 = \hat{x}v_{1x} + \hat{y}v_{1y} + \hat{z}v_{1z}$  e  $\vec{a}_1 = \hat{x}a_{1x} + \hat{y}a_{1y} + \hat{z}a_{1z}$ . Use coordenadas “cilíndricas” mas com o eixo de simetria sendo o eixo  $x$ . Some as contribuições de  $dq_{2+}$  e  $dq_{2-}$  localizadas em  $(\pm x_o, y_2, z_2)$ .

(B) Integre o resultado anterior primeiro em  $\varphi_2$  de 0 até  $2\pi$ , em seguida integre em  $\rho_2 = (x_2^2 + y_2^2)^{1/2}$  de 0 até  $R$ .

(C) Faça o limite em que  $R$  tende a infinito.

(D) Obtenha então a equação (5.14) rearranjando os termos.

# Apêndice A

## Análise Vetorial

Neste apêndice vamos rever brevemente as principais ideias e resultados relacionados com a análise vetorial que são utilizados neste livro. Como este é um assunto bem conhecido da maior parte dos estudantes e profissionais, não apresentamos um desenvolvimento formal nem provas gerais, já que tudo isto se encontra em vários livros dedicados a este assunto.

### A.1 Definições e Notação

A maior parte dos conceitos físicos com os quais lidamos neste livro podem ser expressos matematicamente em termos de grandezas escalares e vetoriais. Um escalar é uma grandeza que fica completamente caracterizada por um número e sua unidade de medida. Exemplos são a carga elétrica  $q$ , massa  $m$ , tempo  $t$ , temperatura  $T$  etc. Um vetor é uma grandeza que fica completamente caracterizada por três números e suas dimensões: o módulo ou magnitude do vetor, sua direção e seu sentido. Exemplos de vetores são a posição de uma partícula a partir de uma certa origem,  $\vec{r}$ , sua velocidade  $\vec{v}$  em relação a um referencial inercial, sua aceleração  $\vec{a}$  em relação a um referencial inercial, uma força  $\vec{F}$ , o campo elétrico  $\vec{E}$ , o campo magnético  $\vec{B}$ , etc. Neste livro representamos os escalares por letras usuais, enquanto os vetores são representados por letras com flechas em cima. Os vetores unitários (aqueles com magnitude ou medida igual a um) são representados por letras com um acento circunflexo em cima, como  $\hat{r}$ . O módulo ou magnitude de um vetor arbitrário  $\vec{G}$  é representado por  $|\vec{G}|$  ou simplesmente por  $G$ .

Ampliações destas grandezas são os campos escalares e vetoriais. Um campo escalar é uma função de posição que fica totalmente especificada por seu valor em todos os pontos do espaço. Por exemplo, a temperatura de um corpo rígido pode mudar de ponto para ponto dentro do corpo. Um campo escalar arbitrário  $\phi$  é representado por  $\phi(\vec{r})$ . Um campo vetorial é uma função de posição que fica totalmente especificada por seu módulo, direção e sentido em todos os pontos do espaço. Por exemplo, a velocidade da água de um rio

em relação às margens deste rio pode mudar de ponto para ponto ao longo do rio. Um campo vetorial arbitrário  $\vec{G}$  é representado por  $\vec{G}(\vec{r})$ .

## A.2 Álgebra Vetorial

Usualmente os vetores são representados em um sistema de coordenadas cartesiano tridimensional. Este sistema de coordenadas está representado na figura A.1 (a).

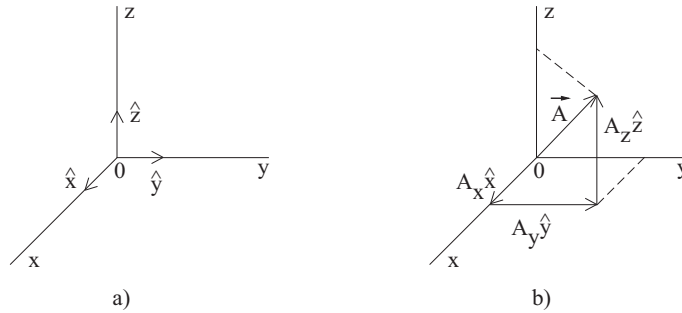


Figura A.1: Sistema de coordenadas cartesiano.

Este sistema tem uma origem  $O$  e três eixos ortogonais entre si:  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Os vetores unitários ao longo destes eixos são representados por  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ . Um vetor arbitrário  $\vec{A}$  é especificado por suas componentes ao longo destes eixos, a saber,  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ . Seu módulo é dado por  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ . As componentes do vetor  $\vec{A}$  são suas projeções ao longo dos três eixos de coordenadas:  $A_x = A \cos \alpha_x$ ,  $A_y = A \cos \alpha_y$ ,  $A_z = A \cos \alpha_z$ , onde os  $\alpha$ 's são os ângulos entre o vetor  $\vec{A}$  e os eixos de coordenadas apropriados. O vetor  $\vec{A}$  pode também ser escrito como  $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ , figura A.1 (b).

A soma e subtração de dois vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  estão representadas na figura A.2. Pode-se observar facilmente que  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$ . Isto é equivalente à regra do paralelogramo para a adição de vetores. Temos também que  $\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{x} + (A_y - B_y)\hat{y} + (A_z - B_z)\hat{z}$ . A multiplicação de  $\vec{A}$  por um escalar  $c$  é dada por  $c\vec{A} = (cA_x)\hat{x} + (cA_y)\hat{y} + (cA_z)\hat{z}$ .

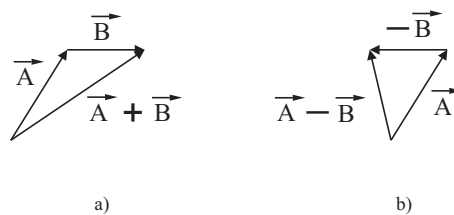


Figura A.2: Adição e subtração de vetores.

O produto escalar de dois vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , representado por  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ , é dado por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z . \quad (\text{A.1})$$

Nesta expressão  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , figura A.3 (a).

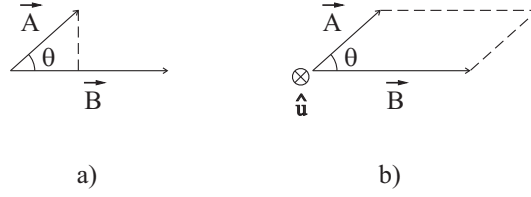


Figura A.3: Produtos escalar e vetorial.

O produto vetorial de dois vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , representado por  $\vec{A} \times \vec{B}$ , é dado por:

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \text{ sen } \theta \hat{u} , \quad (\text{A.2})$$

onde  $\hat{u}$  é um vetor unitário perpendicular a  $\vec{A}$  e a  $\vec{B}$ , apontando de acordo com a regra da mão direita usual, figura A.3 (b). O módulo de  $\vec{A} \times \vec{B}$ , supondo que  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  tenham unidades de comprimento, é a área do paralelogramo gerado por  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ . Em termos das componentes cartesianas temos que (simbolicamente):

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z} . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A partir das equações (A.2) e (A.3) podemos ver que o produto vetorial não é comutativo, isto é:

$$\vec{B} \times \vec{A} = - \vec{A} \times \vec{B} . \quad (\text{A.4})$$

Utilizando estas regras podemos obter os resultados do produto escalar triplo e mostrar que:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) . \quad (\text{A.5})$$

Além disto:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} . \quad (\text{A.6})$$

O produto vetorial triplo é dado por:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) , \quad (\text{A.7})$$

e

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = -\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) + \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) . \quad (\text{A.8})$$

### A.3 Gradiente

Um campo escalar arbitrário  $\phi = \phi(\vec{r})$  pode também ser escrito como  $\phi(x, y, z)$ . Uma variação infinitesimal de  $\phi$  pode então ser escrita como:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz . \quad (\text{A.9})$$

O vetor posição  $\vec{r}$  de uma partícula pontual em relação à origem 0 de um sistema de coordenadas e uma variação infinitesimal  $d\vec{r}$  são representados em coordenadas cartesianas por:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} , \quad (\text{A.10})$$

e

$$d\vec{r} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz . \quad (\text{A.11})$$

Podemos então escrever a equação (A.9) como:

$$d\phi = (\nabla\phi) \cdot d\vec{r} = |\nabla\phi||d\vec{r}|\cos\theta . \quad (\text{A.12})$$

Nesta equação  $\nabla\phi$  (ou *grad*  $\phi$ , como se representa às vezes) é chamado de gradiente de  $\phi$ , sendo definido por:

$$\nabla\phi \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z} . \quad (\text{A.13})$$

Na equação (A.12) temos que  $\theta$  representa o ângulo entre  $\nabla\phi$  e  $d\vec{r}$ . Como  $|\cos\theta|$  tem um valor mínimo de zero e um valor máximo de 1, o valor da grandeza  $d\phi$  será maximizado quando  $\theta = 0$  e  $\cos\theta = 1$ . Ele será minimizado quando  $\theta = 90^\circ$  e  $\cos\theta = 0$ . Isto significa que  $\nabla\phi$  é um vetor que aponta na direção de maior crescimento de  $\phi$  e cujo módulo é a derivada de  $\phi$  ao longo desta direção de aumento máximo.

Podemos ver facilmente que para dois campos escalares  $f(\vec{r})$  e  $g(\vec{r})$  vale a seguinte relação:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f . \quad (\text{A.14})$$

Se  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  é a distância desde a origem até o ponto  $\vec{r} = (x, y, z)$  e  $\hat{r} \equiv \vec{r}/r$  é um vetor unitário na direção de  $\vec{r}$ , pode ser mostrado que:

$$\nabla(r^n) = nr^{n-1}\hat{r} . \quad (\text{A.15})$$

Podemos definir um operador vetorial  $\nabla$  por:

$$\nabla \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} . \quad (\text{A.16})$$

Ele é chamado de *nabla* ou *del*. Podemos pensar em  $\nabla\phi$  como sendo o operador  $\nabla$  atuando em uma função ou campo escalar  $\phi$ . Embora  $\nabla$  não seja um vetor, já que ele não tem um significado isolado, mas apenas quando atua em uma função, ele se comporta algebricamente em muitas situações como um vetor. Esta é uma notação útil que simplifica muitas expressões.

## A.4 Divergente, Rotacional e Laplaciano

O divergente de um campo vetorial arbitrário  $\vec{G}(\vec{r})$ , representado por  $\nabla \cdot \vec{G}$  ou por *div*  $\vec{G}$ , é definido pela seguinte relação:

$$\nabla \cdot \vec{G} \equiv \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} = \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{x}G_x + \hat{y}G_y + \hat{z}G_z) . \quad (\text{A.17})$$

O resultado desta operação é claramente um campo escalar.

Podemos mostrar que se  $\phi(\vec{r})$  é um campo escalar arbitrário, então:

$$\nabla \cdot (f\vec{G}) = f(\nabla \cdot \vec{G}) + (\nabla f) \cdot \vec{G} . \quad (\text{A.18})$$

Também pode ser mostrado que:

$$\nabla \cdot (r^n \hat{r}) = (2 + n)r^{n-1} , \text{ para } n \neq -2 . \quad (\text{A.19})$$

Na seção A.6 tratamos do caso  $n = -2$ .

O rotacional de um campo vetorial arbitrário  $\vec{G}(\vec{r})$ , representado por  $\nabla \times \vec{G}$  ou por *rot*  $\vec{G}$ , é um outro campo vetorial. Ele é definido por:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{G} &\equiv \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right) \hat{z} . \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Podemos também mostrar que se  $\vec{H}(\vec{r})$  é um outro campo vetorial arbitrário, então:

$$\nabla \times (\phi\vec{G}) = \phi(\nabla \times \vec{G}) - \vec{G} \times (\nabla\phi) , \quad (\text{A.21})$$

$$\nabla \cdot (\vec{G} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{G}) - \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{H}) , \quad (\text{A.22})$$

$$\nabla(\vec{G} \cdot \vec{H}) = \vec{G} \times (\nabla \times \vec{H}) + \vec{H} \times (\nabla \times \vec{G}) + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{H} + (\vec{H} \cdot \nabla)\vec{G} , \quad (\text{A.23})$$



e

$$\nabla \times (\vec{G} \times \vec{H}) = (\vec{H} \cdot \nabla)\vec{G} - (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{H} + \vec{G}(\nabla \cdot \vec{H}) - \vec{H}(\nabla \cdot \vec{G}) . \quad (\text{A.24})$$

Podemos também ser mostrado que:

$$\nabla \times (r^n \hat{r}) = \vec{0} . \quad (\text{A.25})$$

Podemos ter derivadas segundas destes campos ao aplicar o operador  $\nabla$  duas vezes. Podemos então mostrar que se  $\phi(\vec{r})$  e  $\vec{G}(\vec{r})$  são campos arbitrários mas razoavelmente bem comportados (tal que podemos trocar a ordem das derivadas), então:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \vec{0} , \quad (\text{A.26})$$

e

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0 . \quad (\text{A.27})$$

O divergente do gradiente de uma função,  $\nabla \cdot (\nabla \phi)$ , aparece frequentemente na física e recebeu o nome de laplaciano de  $\phi$ . Ele também é representado por  $\nabla^2 \phi$ , sendo dado em coordenadas cartesianas por:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \phi) &\equiv \nabla^2 \phi = \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} . \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Também temos que:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{G}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{G}) - \nabla^2 \vec{G} . \quad (\text{A.29})$$

Esta expressão é utilizada para definir o laplaciano de um vetor,  $\nabla^2 \vec{G}$ , em outros sistemas de coordenadas.

## A.5 Cálculo Integral

Há três teoremas principais relacionados com o gradiente, divergente e rotacional de campos escalares e vetoriais.

O teorema para o gradiente afirma que a integral de linha de  $\nabla \phi$  a partir de um ponto no espaço  $a = (a_x, a_y, a_z)$  até um ponto  $b = (b_x, b_y, b_z)$  através de um caminho arbitrário de integração  $C$  depende apenas dos valores de  $\phi$  nos pontos extremos  $a$  e  $b$ , veja a figura A.4.

Este teorema é escrito matematicamente como:

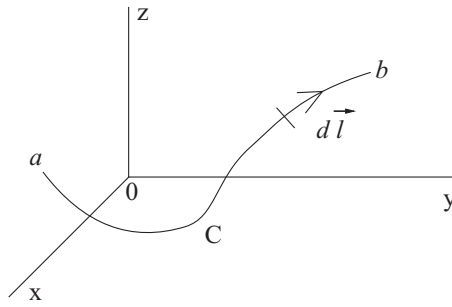


Figura A.4: Integral de linha.

$$\int_a^b (\nabla\phi) \cdot d\vec{l} = \phi(b) - \phi(a) , \tag{A.30}$$

onde  $d\vec{l}$  é um deslocamento infinitesimal ao longo do caminho de integração  $C$ . Este teorema afirma que esta integral de linha é independente do caminho seguido de  $a$  até  $b$ .

Considere agora um caminho fechado, figura A.5.

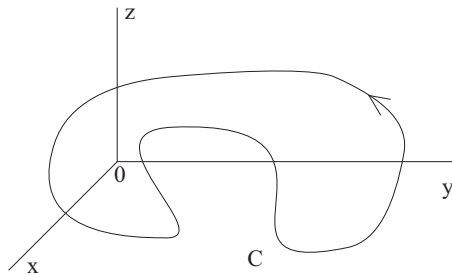


Figura A.5: Caminho fechado.

Um corolário do teorema (A.30) é o de que a integral de linha de  $\nabla\phi$  em um caminho fechado de forma arbitrária é zero:

$$\oint_C (\nabla\phi) \cdot d\vec{l} = 0 . \tag{A.31}$$

O segundo teorema é chamado de teorema de Gauss ou teorema da divergência. Considere um volume  $V$  cercado por uma superfície  $S$ , figura A.6.

De acordo com o teorema de Gauss, a integral de superfície da componente normal de um campo vetorial arbitrário  $\vec{G}(\vec{r})$  sobre uma superfície fechada  $S$  cercando um volume  $V$  é igual à integral de volume do divergente de  $\vec{G}$  no volume  $V$ :

$$\oint_S \vec{G} \cdot d\vec{a} = \int \int \int_V (\nabla \cdot \vec{G}) dV . \tag{A.32}$$

Nesta equação  $dV$  é um elemento de volume e  $d\vec{a}$  é um elemento infinitesimal de área, que tem o tamanho da área deste elemento e cuja direção é perpendicular

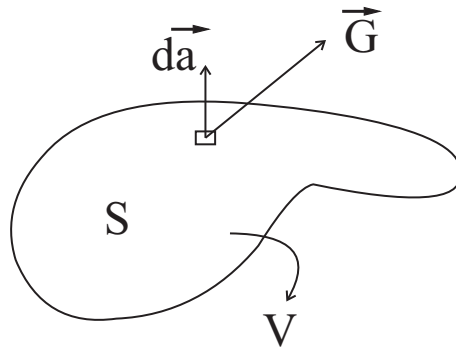


Figura A.6: Integral de superfície.

à superfície  $S$  em cada ponto, apontando para fora do volume  $V$  por convenção, figura A.6.

O lado esquerdo da equação (A.32) representa o fluxo do vetor  $\vec{G}$  sobre a superfície  $S$ . Isto mostra que o divergente de uma grandeza vetorial está ligado com a quantidade desta grandeza que passa através de  $S$ .

O terceiro teorema está relacionado com o rotacional de  $\vec{G}(\vec{r})$  e é conhecido como o teorema de Stokes. Considere um caminho  $C$  fechado ao redor de uma superfície aberta  $S$ , figura A.7:

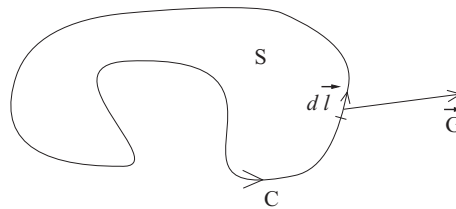


Figura A.7: Integral de linha.

De acordo com o teorema de Stokes, a integral de linha do vetor  $\vec{G}$  ao redor de um caminho fechado  $C$  é igual à integral da componente normal de  $\nabla \times \vec{G}$  sobre *qualquer* superfície  $S$  cercada por esta curva  $C$ , figura A.7:

$$\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{l} = \int \int_S (\nabla \times \vec{G}) \cdot d\vec{a} . \quad (\text{A.33})$$

Nesta equação o elemento de área infinitesimal  $d\vec{a}$  é normal à superfície *aberta*  $S$  em cada ponto e está relacionado com o deslocamento infinitesimal  $d\vec{l}$  ao longo da curva de integração  $C$  pela regra da mão direita, por convenção.

O lado esquerdo da equação (A.33) indica a circulação do vetor  $\vec{G}$  ao longo da curva fechada  $C$ . Isto significa que o rotacional de  $\vec{G}$  está relacionado com sua circulação ao redor de um caminho fechado.

Um corolário deste teorema é que a integral de superfície de  $\nabla \times \vec{G}$  sobre uma superfície fechada de forma arbitrária é nula:

$$\oint_S (\nabla \times \vec{G}) \cdot d\vec{a} = 0 . \quad (\text{A.34})$$

## A.6 A Função Delta de Dirac

A função  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_o)$  é conhecida como a função delta de Dirac tridimensional. Suas principais propriedades:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_o) = 0 \text{ para } \vec{r}_o \neq \vec{r}, \quad (\text{A.35})$$

e

$$\int \int \int_V \phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_o) dV = \begin{cases} 0, & \text{se } V \text{ não contém } \vec{r}_o, \\ \phi(\vec{r}_o), & \text{se } V \text{ contém } \vec{r}_o. \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Um exemplo importante onde ela aparece no eletromagnetismo e na gravitação é dado por:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi \delta(\vec{r}). \quad (\text{A.37})$$

Isto completa a relação (A.19) para todos os  $n$ 's.

Com as equações (A.15) e (A.28) obtemos:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}). \quad (\text{A.38})$$

Podemos ver que  $\nabla \cdot (\hat{r}/r^2)$  não pode ser nulo em todo lugar aplicando o teorema da divergência ao volume  $V$  e área  $S$  de uma esfera de raio  $R$  centrada na origem. Neste caso  $d\vec{a} = \hat{r} da$ , de tal forma que:

$$\int \int \int_V \left( \nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) dV = \oint_S \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \hat{r} da = \frac{1}{R^2} \oint_S da = \frac{S}{R^2} = 4\pi, \quad (\text{A.39})$$

onde  $S = 4\pi R^2$  é a área da esfera de raio  $R$ . Se  $\nabla \cdot (\hat{r}/r^2)$  fosse nulo (isto aconteceria se a equação (A.19) fosse válida para  $n = -2$ ) mesmo na origem, obteríamos  $0 = 4\pi$ , o que não é verdade. Com as equações (A.36) e (A.37) obtemos que a integral tripla na equação (A.39) é de fato igual a  $4\pi$ , como devia ser.

## A.7 Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Em problemas nos quais há simetrias cilíndricas ou esféricas é útil utilizar as coordenadas cilíndricas (figura A.8) ou as coordenadas esféricas.

As coordenadas de um ponto  $P$  em coordenadas cilíndricas são  $(\rho, \varphi, z)$ . Suas relações com as coordenadas cartesianas são:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (\text{A.40})$$

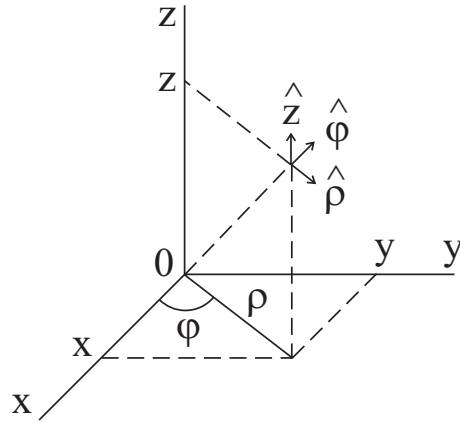


Figura A.8: Coordenadas cilíndricas  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$ .

As relações inversas são:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z. \quad (\text{A.41})$$

Um elemento de volume infinitesimal  $dV$  é representado em coordenadas cartesianas e cilíndricas por:

$$dV = dx dy dz, \quad (\text{A.42})$$

e

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (\text{A.43})$$

Os vetores unitários  $\hat{\rho}$  e  $\hat{\varphi}$  ao longo das direções de  $\rho$  e  $\varphi$  estão relacionados com  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  por:

$$\hat{\rho} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad (\text{A.44})$$

e

$$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi. \quad (\text{A.45})$$

A partir destas relações podemos ver que  $\hat{\rho} = \hat{\rho}(\varphi)$  e  $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\varphi)$ .

As relações opostas são dadas por:

$$\hat{x} = \hat{\rho} \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi, \quad (\text{A.46})$$

e

$$\hat{y} = \hat{\rho} \sin \varphi + \hat{\varphi} \cos \varphi. \quad (\text{A.47})$$

O vetor posição  $\vec{r}$  de um ponto  $P$  em relação à origem  $0$  de um sistema de coordenadas inercial, assim como um deslocamento infinitesimal  $d\vec{r}$ , são representados em coordenadas cilíndricas por:

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} , \quad (\text{A.48})$$

e

$$d\vec{r} = \hat{\rho} d\rho + \hat{\varphi} \rho d\varphi + \hat{z} dz . \quad (\text{A.49})$$

Seja  $t$  o tempo e  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  a posição de uma partícula ou ponto material que se move no espaço. Sua velocidade  $\vec{v}$  e aceleração  $\vec{a}$  relativas a um sistema de referência  $S$  inercial são dadas em coordenadas cartesianas por (ver as equações (A.10) e (A.11)):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{x} \frac{dx}{dt} + \hat{y} \frac{dy}{dt} + \hat{z} \frac{dz}{dt} \equiv \hat{x} v_x + \hat{y} v_y + \hat{z} v_z \equiv \hat{x} \dot{x} + \hat{y} \dot{y} + \hat{z} \dot{z} . \quad (\text{A.50})$$

e

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \hat{x} \frac{d^2x}{dt^2} + \hat{y} \frac{d^2y}{dt^2} + \hat{z} \frac{d^2z}{dt^2} \\ &\equiv \hat{x} a_x + \hat{y} a_y + \hat{z} a_z \equiv \hat{x} \ddot{x} + \hat{y} \ddot{y} + \hat{z} \ddot{z} . \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Em coordenadas cilíndricas a velocidade  $\vec{v}$  e a aceleração  $\vec{a}$  da partícula são representadas por:

$$\vec{v} = \hat{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \hat{\varphi} \rho \frac{d\varphi}{dt} + \hat{z} \frac{dz}{dt} \equiv \hat{\rho} \dot{\rho} + \hat{\varphi} \rho \dot{\varphi} + \hat{z} \dot{z} . \quad (\text{A.52})$$

e

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left[ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \hat{\rho} + \left( \rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \hat{\varphi} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{z} \\ &\equiv (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{\varphi} + \ddot{z} \hat{z} . \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

As componentes de um ponto  $P$  no sistema de coordenadas esféricas são dadas por  $(r, \theta, \varphi)$ , figura A.9.

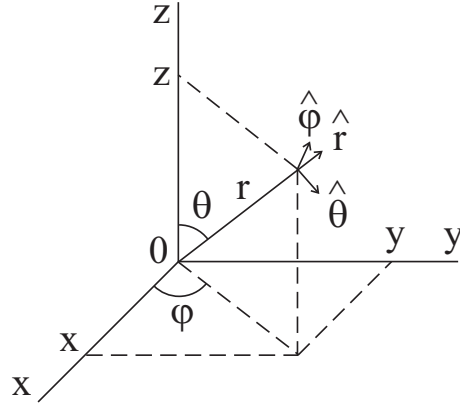
As relações análogas às equações (A.40) até (A.53) são, respectivamente:

$$x = r \sen \theta \cos \varphi, \quad y = r \sen \theta \sen \varphi, \quad z = r \cos \theta , \quad (\text{A.54})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} , \quad (\text{A.55})$$

$$dV = r^2 \sen \theta dr d\theta d\varphi , \quad (\text{A.56})$$

$$\hat{r} = \hat{x} \sen \theta \cos \varphi + \hat{y} \sen \theta \sen \varphi + \hat{z} \cos \theta , \quad (\text{A.57})$$

Figura A.9: Coordenadas esféricas  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ .

$$\hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi - \hat{z} \sin \theta , \quad (\text{A.58})$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi , \quad (\text{A.59})$$

$$\hat{x} = \hat{r} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi , \quad (\text{A.60})$$

$$\hat{y} = \hat{r} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \varphi - \hat{\varphi} \cos \varphi , \quad (\text{A.61})$$

$$\hat{z} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta , \quad (\text{A.62})$$

$$\vec{r} = r \hat{r} , \quad (\text{A.63})$$

$$d\vec{r} = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\varphi} r \sin \theta d\varphi , \quad (\text{A.64})$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\varphi} , \quad (\text{A.65})$$

e

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$- r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + (r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) \hat{\varphi} . \quad (\text{A.66})$$

Os intervalos máximos de integração em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas são, respectivamente:

$$x : -\infty \text{ a } \infty , y : -\infty \text{ a } \infty , z : -\infty \text{ a } \infty , \quad (\text{A.67})$$

$$\rho : 0 \text{ a } \infty, \varphi : 0 \text{ a } 2\pi, z : -\infty \text{ a } \infty, \quad (\text{A.68})$$

$$r : 0 \text{ a } \infty, \theta : 0 \text{ a } \pi, \varphi : 0 \text{ a } 2\pi. \quad (\text{A.69})$$

Isto completa uma apresentação muito breve das principais ferramentas matemáticas utilizadas neste livro.





# Apêndice B

## Origens da Força

## Eletromagnética $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ e os Diferentes Significados Dados para a Velocidade $\vec{v}$

### B.1 Força Eletromagnética nos Livros Atuais

Como vimos no capítulo 1, a componente elétrica da força de Maxwell-Lorentz ( $\vec{F}_E = q\vec{E}$ , com  $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$ ) já era usada desde pelo menos 1857 com Kirchhoff, quando ele escreveu a lei de Ohm de maneira generalizada incluindo os efeitos de auto-indutância. O potencial vetor magnético  $\vec{A}$  havia sido introduzido por Franz Neumann em 1845. Vimos também que o campo magnético  $\vec{B}$  devido a um circuito fechado de corrente está relacionado com o potencial vetor  $\vec{A}$  através da equação  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . Já a expressão para a força magnética teve uma origem posterior e bem mais tortuosa. Este é o assunto deste apêndice. Discutimos este assunto em diversas publicações.<sup>1</sup>

Apresentamos agora como é introduzida na maioria dos livros didáticos atuais a força magnética  $\vec{F}_M$  dada por:

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} . \quad (\text{B.1})$$

Algumas vezes os livros didáticos não apresentam esta componente  $\vec{F}_M$  separadamente, mas apenas a força de Maxwell-Lorentz total (que usualmente denominam apenas como sendo a força de Lorentz), a saber:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = -q\nabla\phi - q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + q\vec{v} \times \vec{B} . \quad (\text{B.2})$$

---

<sup>1</sup>[Ass92b, Apêndice (A): As Origens e os Significados da Força Magnética  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ], [AP92], [Ass94, Apêndice A: “As Origens e os Significados da Força Magnética  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ”], [Ass95, Apêndice B: “Força magnética” ], [Ass13, seções 2.9 e 14.5] e [Ass14, seções 3.1 e 15.5].

A maioria dos livros quando apresenta uma destas equações diz apenas o seguinte:

Seja uma carga  $q$  deslocando-se com velocidade  $\vec{v}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ , então a força magnética atuando nesta carga é dada por  $q\vec{v} \times \vec{B}$ .

Ou então afirmam o seguinte:

Seja uma carga  $q$  deslocando-se com velocidade  $\vec{v}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ , então a força eletromagnética atuando nesta carga é dada por  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ .

Em geral os livros não dizem se a força magnética  $\vec{F}_M$  é um resultado experimental ou se é uma definição de campo magnético. Ela seria uma lei experimental caso fossem medidos de maneira independente as grandezas  $\vec{F}_M$ ,  $q$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ , vindo então de um conjunto de experiências que estas grandezas estariam relacionadas como  $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Por outro lado, esta expressão poderia ser considerada como uma definição do campo magnético  $\vec{B}$  caso fossem medidas de maneira independente as grandezas  $\vec{F}_M$ ,  $q$  e  $\vec{v}$ , afirmando-se então que o campo magnético é definido como sendo a grandeza que satisfaz à equação  $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$ .

De qualquer forma, este não é o aspecto principal que queremos discutir neste apêndice. O ponto fundamental que queremos analisar é sobre o significado da velocidade  $\vec{v}$  que aparece nas equações (B.1) e (B.2). A maioria dos livros didáticos não especifica o significado desta velocidade, dizendo apenas que a carga teste está deslocando-se com esta velocidade. Mas obviamente velocidade é uma grandeza relativa, sendo uma relação entre a partícula carregada e um certo corpo em relação ao qual ela se move. Por isto é que para uma mesma carga podem existir várias velocidades diferentes simultaneamente (por exemplo, ela pode estar ao mesmo tempo parada em relação à Terra, se aproximando de uma outra carga, se afastando com uma velocidade maior de um certo ímã etc.) Infelizmente os livros didáticos usuais quando apresentam a relação  $q\vec{v} \times \vec{B}$  não especificam em relação a qual corpo ou objeto deve ser entendida a velocidade da carga teste. Ou seja, não especificam claramente em relação a que corpo, objeto, observador ou sistema de referência é para ser entendida a velocidade  $\vec{v}$  da carga  $q$  que aparece nas equações (B.1) e (B.2).

Ilustramos as várias possibilidades de interpretação na figura B.1.

Nesta figura as velocidades são em relação à Terra ou laboratório. Temos uma carga  $q$  que se move com velocidade  $\vec{v}_q$ , um observador  $O$  que se move com velocidade  $\vec{V}_O$ , um ímã que se move com velocidade  $\vec{v}_i$ , um fio com corrente que se move com  $\vec{v}_e$ , um elétron típico deste fio que se move com velocidade  $\vec{v}_e$  em relação ao fio, assim como um detector ou medidor de campo magnético que se move com velocidade  $\vec{v}_d$ . Qual destas velocidades devemos colocar na força de Maxwell-Lorentz  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ ? Devemos usar  $\vec{v}_q$ ,  $\vec{v}_d$  ou  $\vec{v}_O$ ? Ou

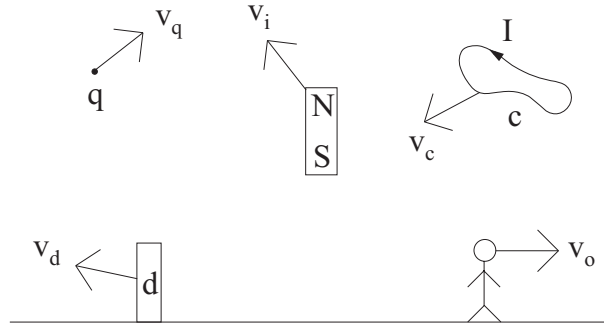


Figura B.1: Força Magnética.

será que temos de usar alguma combinação, tal como  $\vec{v}_q - \vec{v}_i$ ,  $\vec{v}_q - \vec{V}_O$ ,  $\vec{v}_q - \vec{v}_d$ , ...?

Deve-se lembrar ainda que a própria Terra está girando uma vez por dia ao redor de seu eixo, em relação ao referencial das estrelas fixas. A Terra também orbita uma vez por ano ao redor do Sol, em relação ao referencial das estrelas fixas. E o próprio sistema solar orbita ao redor do centro da nossa galáxia, a Via Láctea, em relação ao referencial das galáxias distantes.

Exemplos desta situação inicial vaga na definição da velocidade  $\vec{v}$  podem ser vistos em vários livros.<sup>2</sup> Diante desta indefinição, o estudante em geral fica confuso entre várias possibilidades para a velocidade  $\vec{v}$  que aparece nas equações (B.1) ou (B.2): velocidade da carga em relação ao ímã, em relação ao fio com corrente que gera o campo magnético  $\vec{B}$ ; em relação à Terra ou laboratório; em relação a um referencial inercial arbitrário; em relação a um observador qualquer, mesmo que não inercial; em relação ao campo magnético; em relação a um éter ou meio onde existe e se propaga o campo magnético; em relação ao medidor do campo magnético (aparelho de medida que pode estar em movimento em relação ao laboratório ou em relação ao próprio ímã que gera o campo); em relação à velocidade média das cargas microscópicas (elétrons) que geram o campo magnético  $\vec{B}$ , etc.

Apenas quando se entra em tópicos da relatividade restrita nestes livros é que se percebe o significado da velocidade que aparece em  $q\vec{v} \times \vec{B}$ . Para o eletromagnetismo clássico que estamos analisando nesta seção, a grandeza  $\vec{v}$  é usualmente interpretada hoje em dia como sendo a velocidade da carga teste em relação a um observador ou sistema de referência. Ou seja, atualmente esta velocidade não é interpretada como sendo a velocidade da carga teste em relação ao ímã, nem como sendo a velocidade da carga teste em relação ao campo magnético.

O fato de a velocidade que aparece em  $q\vec{v} \times \vec{B}$  ser interpretada atualmente como sendo a velocidade da carga teste em relação a um referencial e, portanto,

<sup>2</sup>[Tip84, volume 2a, pág. 731], ([HR84, pág. 164]), ([Sea67, volume II, pág. 264]), ([FLS64, págs. 1-2 e 13-1]), ([Jac75, págs. 2 e 238]), ([Sym71, pág. 140]) e [Sym82, págs. 165-166], ([PP62, pág. 182]), ([Pur65, pág. 150]), ([RM67, pág. 148]) etc.

variar de observador para observador, é o que gera muitas das características típicas do eletromagnetismo clássico que discutimos neste livro, assim como infundáveis paradoxos da teoria atual.

## B.2 Origens Históricas da Força Eletromagnética e os Diferentes Significados de Sua Velocidade

Agora vamos discutir como surgiu historicamente esta expressão da força magnética, coisa que não se discute em praticamente nenhum livro didático de eletromagnetismo.

O primeiro a ter obtido uma expressão análoga à equação (B.2) parece ter sido James Clerk Maxwell.<sup>3</sup> Seus trabalhos neste tópico vão de 1861 até 1873.<sup>4</sup>

Maxwell interpretou esta velocidade como sendo a velocidade da carga teste em relação ao campo magnético. Vejamos algumas citações suas. No artigo de 1861 ele afirmou:<sup>5</sup>

O primeiro e segundo termos de cada equação indicam o efeito do movimento de qualquer corpo no campo magnético.

No artigo de 1865 expressou-se da seguinte maneira:<sup>6</sup>

O primeiro termo no lado direito de cada equação representa a força eletromotriz surgindo do movimento do próprio condutor. Esta força eletromotriz é perpendicular à direção do movimento e às linhas de força magnética [linhas de  $\vec{B}$ ]; e se for traçado um paralelogramo cujos lados representam em módulo e direção a velocidade do condutor e a indução magnética naquele ponto do campo, então a área do paralelogramo representará a força eletromotriz devida ao movimento do condutor, e a direção da força é perpendicular ao plano do paralelogramo.

Já no *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*, publicado em 1873, Maxwell afirmou o seguinte após apresentar as equações da força eletromotriz na equação (B), nossa ênfase:<sup>7</sup>

<sup>3</sup>[Mar90, pág. 31], [Rib08], [Cur09, seção 4.6: Sobre a paternidade da força de Lorentz, págs. 122-128], [Hur10, pág. 22], [toma], [tomb], [Ass13, Seção 14.5: Origens e Significados da Velocidade  $\vec{v}$  que Aparece na Força Magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$ ] e [Ass14, Seção 15.5: Origens e Significados da Velocidade  $\vec{v}$  que Aparece na Força Magnética  $q\vec{v} \times \vec{B}$ ].

<sup>4</sup>[Max, pág. 342, equação (77)], [Max65d, equação (77)], [Max65, pág. 484, equação (D)], [Max65a, equação (D)] e [Max54, Vol. 2, §§598-599, págs. 238-241, equações (B) e (10)].

<sup>5</sup>[Max, pág. 342, logo abaixo da equação (77)].

<sup>6</sup>[Max65, pág. 484, logo abaixo da equação (D)].

<sup>7</sup>[Max54, Vol. 2, §598, págs. 238-241, abaixo da equação (B), nossa ênfase].

O vetor  $\mathcal{A}^8$  é a força eletromotriz atuando no elemento móvel  $ds$ . Sua direção e magnitude dependem da posição e do movimento de  $ds$ , e da variação do campo magnético, mas não dependem da direção de  $ds$ . Portanto, podemos desconsiderar agora a circunstância de que  $ds$  é parte de um circuito, e considerá-lo simplesmente como uma porção de um corpo em movimento, que está sob a ação de uma força eletromotriz  $\mathcal{A}$ . A força eletromotriz em um ponto já foi definida no Artigo 68.<sup>9</sup> Ela também é chamada de força elétrica resultante, sendo a força que seria sentida por uma unidade de eletricidade positiva colocada neste ponto. Obtivemos agora o valor mais geral desta grandeza *no caso de um corpo deslocando-se em um campo magnético* devida a um sistema elétrico variável.

Se o corpo for um condutor, a força eletromotriz produzirá uma corrente; se ele for um dielétrico, a força eletromotriz produzirá apenas um deslocamento elétrico [isto é, uma polarização elétrica do dielétrico].

A força eletromotriz em um ponto, ou sobre uma partícula, tem de ser distinguida cuidadosamente da força eletromotriz ao longo do arco de uma curva, sendo esta última grandeza a integral de linha da grandeza anterior. Ver o Artigo 69.

599.] A força eletromotriz, cujas componentes são definidas pelas equações (B), dependem de três circunstâncias. *A primeira destas é o movimento da partícula através do campo magnético.* A parte da força dependendo deste movimento é expressa pelos dois primeiros termos à direita de cada equação. Ela depende da velocidade da partícula transversa às linhas de indução magnética [isto é, depende das componentes da velocidade que são ortogonais ao campo magnético  $\vec{B}$ ]. Se  $\mathbf{v}$  é um vetor representando a velocidade, e  $\mathbf{B}$  um outro vetor representando a indução magnética, então se  $\mathcal{A}_1$  é a parte da força eletromotriz dependendo do movimento,<sup>10</sup>

$$\mathcal{A}_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} , \quad (7)$$

ou, a força eletromotriz é a parte vetorial do produto da indução magnética multiplicada pela velocidade, isto é, a magnitude da

<sup>8</sup>Maxwell utiliza um outro símbolo. Como não conseguimos encontrar este símbolo no editor de textos LaTeX, o substituímos pelo símbolo  $\mathcal{A}$ .

<sup>9</sup>Neste Artigo 68 Maxwell definiu a força eletromotriz como sendo a força por unidade de carga.

<sup>10</sup>Isto é, em notação moderna,

$$\vec{E}_1 = \vec{v} \times \vec{B} . \quad (\text{B.3})$$

força eletromotriz é representada pela área do paralelogramo, cujos lados representam a velocidade e a indução magnética, e sua direção é normal a este paralelogramo, traçado de tal forma que a velocidade, a indução magnética, e a força eletromotriz estejam em uma ordem cíclica destrógiara.

Existem dois pontos importantes a serem enfatizados aqui relacionados com estas citações: (A) Maxwell parece ter sido a primeira pessoa a deduzir a força eletromagnética representada pela equação (B.2), publicando seus trabalhos a este respeito entre 1861 e 1873. (B) Maxwell interpretava a velocidade  $\vec{v}$  que aparece na componente magnética desta força como sendo a velocidade do corpo eletrizado em relação ao campo magnético  $\vec{B}$ .

Depois de Maxwell, outros pesquisadores que chegaram na força magnética foram J. J. Thomson (1856–1940) e O. Heaviside (1850–1925), em 1881 e 1889, respectivamente.

Um dos objetivos do trabalho de Thomson de 1881,<sup>11</sup> era saber de que forma um corpo carregado eletricamente é afetado por um ímã. Thomson seguiu a teoria de Maxwell e em particular usou a ideia de que uma corrente de deslocamento ( $\varepsilon\partial\vec{E}/\partial t$ ) produzia os mesmos efeitos que uma corrente de condução  $\vec{J}$  usual, isto é, de que também gerava um campo magnético  $\vec{B}$ . Supôs então uma esfera uniformemente carregada se movendo em um certo meio com constante dielétrica  $\varepsilon$  e permeabilidade magnética  $\mu$  e calculou a corrente de deslocamento em um ponto externo  $Q$ . Depois calculou em um outro ponto externo  $P$  o valor do potencial vetor magnético  $\vec{A}$  devido a esta corrente de deslocamento em  $Q$ , integrando seu resultado para todos os pontos  $Q$  do espaço. Contudo observou que o valor da grandeza  $\nabla \cdot \vec{A}$  neste ponto  $P$  era diferente de zero. Maxwell sempre assumia  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ . Logo, para satisfazer esta condição, Thomson supôs a existência de uma outra componente em  $\vec{A}$ , adicionando esta componente ao que já havia obtido para  $\vec{A}$ . Thomson não justificou qual a origem física desta componente adicional de  $\vec{A}$ . Através de  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , Thomson obteve então o valor de  $\vec{B}$  no ponto  $P$ . Calculou então o valor de  $\vec{H}$  neste meio, sendo  $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ . Em seguida calculou a força de um ímã (que gera  $\vec{B}$ ) em um corpo carregado eletricamente que se deslocava por este meio. Para isto calculou a energia de interação  $E = \int \int (\vec{B} \cdot \vec{H}/2)dV$  e usou as equações de Lagrange para obter a força. Seu resultado final:

$$\vec{F} = q \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{2} . \quad (\text{B.4})$$

Este valor é metade do aceito no eletromagnetismo clássico hoje em dia. O aspecto mais importante que queremos ressaltar aqui é o significado da velocidade que aparece na equação (B.4). Neste ponto Thomson foi bem cuidadoso.

---

<sup>11</sup>[Tho81].

Ele chamava esta velocidade de *velocidade real* (*actual velocity*) da partícula. Na página 248 de seu artigo ele afirmou (nosso grifo):<sup>12</sup>

Deve ser observado que aquilo que por conveniência chamamos de velocidade real da partícula é, de fato, a *velocidade da partícula relativa ao meio através do qual ela está se movendo*, [...], meio cuja permeabilidade magnética é  $\mu$ .

Ou seja, para Thomson a velocidade  $\vec{v}$  na equação (B.4) não era a velocidade da carga em relação ao campo magnético  $\vec{B}$ , como pensava Maxwell. Para Thomson esta velocidade também não era relativa ao éter (já que este meio de permeabilidade magnética  $\mu$  e a Terra poderiam estar se movendo em relação ao éter, sem levar o éter com eles em seu movimento), nem em relação ao ímã e nem a velocidade em relação ao observador.

Thomson estendeu suas pesquisas nesta direção com um artigo publicado em 1889, em que não modificou sua interpretação do significado da velocidade  $\vec{v}$  que aparece nesta fórmula.<sup>13</sup>

Em 1889, em um outro artigo teórico, Heaviside obteve:<sup>14</sup>

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} . \quad (\text{B.5})$$

A diferença principal de seu trabalho em relação ao de Thomson é que ele incluiu, seguindo Fitzgerald em 1881, a corrente de convecção como fonte de campo magnético. Fora isto há o fato de que Heaviside seguiu o trabalho de Thomson (um dos objetivos de seu artigo era corrigir o trabalho de Thomson). Como ele não faz nenhum comentário adicional sobre a velocidade  $\vec{v}$  na equação (B.5), pode-se assumir que também para ele aquela era a velocidade da carga  $q$  em relação ao meio de permeabilidade magnética  $\mu$  e constante dielétrica  $\varepsilon$ . O título de seu artigo, *Sobre os efeitos eletromagnéticos devidos ao movimento da eletrificação [cargas elétricas] através de um dielétrico*, indica que de fato ele mantinha esta interpretação para o significado da velocidade.<sup>15</sup>

Uma discussão detalhada dos trabalhos de Thomson e Heaviside se encontra no livro de Buchwald.<sup>16</sup>

Em 1895 o físico teórico H. A. Lorentz apresentou a conhecida expressão:<sup>17</sup>

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} . \quad (\text{B.6})$$

Lorentz não citou em relação a esta força especificamente os trabalhos anteriores de Maxwell, Thomson e Heaviside. Aparentemente ele chegou na parte magnética desta expressão a partir da força de Grassmann substituindo  $I d\vec{l}$

<sup>12</sup>[Tho81, pág. 248].

<sup>13</sup>[Tho89].

<sup>14</sup>[Hea89].

<sup>15</sup>[Hea89].

<sup>16</sup>[Buc85, apêndice I: Maxwellian Analysis of Charge Convection, págs. 269–277].

<sup>17</sup>[Lor95], [Pai82, pág. 125] e [Pai86, pág. 76].



por  $q\vec{v}$ , embora ele também não tenha citado o trabalho de Grassmann de 1845. O procedimento adotado por Lorentz para chegar nesta força ser visto em seu livro mais famoso, *A Teoria dos Elétrons*.<sup>18</sup> Este livro é baseado em um curso que ministrou em 1906 na Universidade de Columbia e foi editado pela primeira vez em 1909. Infelizmente, quando apresentou a equação (B.6), Lorentz não especificou em relação a que corpo, meio ou sistema de referência devia ser entendida esta velocidade  $\vec{v}$  da carga  $q$ . Como Lorentz ainda aceitava o éter de Maxwell (isto é, um meio em repouso absoluto em relação ao referencial das estrelas fixas, e através do qual a Terra se move como se fosse transparente a ele, sem empurrá-lo ou arrastá-lo),<sup>19</sup> é natural que para ele esta velocidade fosse em relação ao éter. Ou seja, para Lorentz esta não seria a velocidade da carga teste em relação ao ímã, em relação ao campo magnético  $\vec{B}$ , em relação a qualquer outro meio de permeabilidade magnética  $\mu$  e constante dielétrica  $\varepsilon$ , nem em relação a qualquer observador. Em suporte a esta interpretação temos as próprias palavras de Lorentz nesta mesma página 14 de seu livro, na qual afirmou:<sup>20</sup>

Agora, de acordo com os princípios gerais da teoria de Maxwell, vamos considerar esta força como causada pelo estado do éter e mesmo, como este meio penetra os elétrons [nome que Lorentz usava para as cargas elétricas em geral], como exercida pelo éter sobre todos os pontos internos destas partículas onde há uma carga.

Uma prova conclusiva desta interpretação se encontra em outro trabalho de Lorentz, *Palestras sobre Física Teórica*.<sup>21</sup> Nesta obra Lorentz afirmou que se um fio com corrente elétrica (e portanto gerando  $\vec{B}$ ) e uma carga estão parados em relação ao éter, então não vai haver força magnética. Por outro lado, se ambos estivessem transladando com a mesma velocidade  $\vec{v}$  em relação ao éter (sendo que o observador e o laboratório também transladariam com esta mesma velocidade  $\vec{v}$ , já que Lorentz forneceu, como exemplo desta velocidade, a velocidade da Terra em relação ao éter), então afirmou que iria haver uma força magnética atuando na carga teste. Ou seja, como na segunda parte deste exemplo não há velocidade relativa da carga em relação ao fio, nem em relação ao laboratório, nem em relação ao observador, mas há apenas uma velocidade relativa da carga em relação ao éter e ainda assim há uma força magnética, se conclui que para Lorentz aquela velocidade que aparece na equação (B.6) era realmente a velocidade da carga  $q$  em relação ao éter.

Por outro lado hoje em dia se usa a expressão (B.6) com  $\vec{v}$  sendo a velocidade da carga  $q$  em relação a um observador. A mudança ocorreu a partir do trabalho teórico da relatividade restrita de Einstein de 1905.<sup>22</sup> Neste trabalho,

---

<sup>18</sup>[Lor15, págs. 14 e 15].

<sup>19</sup>[Pai82, pág. 111].

<sup>20</sup>[Lor15, pág. 14].

<sup>21</sup>[Lor31, volume 3, pág. 306], ver também [O'R65, volume 2, pág. 566].

<sup>22</sup>[Ein78].

após obter as transformações de coordenadas de Lorentz, Einstein as aplicou para a força descrita na equação (B.6). Einstein passou então a interpretar a velocidade como sendo a velocidade em relação ao observador ou sistema de referência inercial. Por exemplo, neste trabalho ele apresentou a diferença entre o velho paradigma do eletromagnetismo e o novo paradigma baseado em sua teoria da relatividade nos seguintes termos (nas notas de rodapé vão nossas palavras para auxiliar na compreensão de algumas passagens):<sup>23</sup>

Para interpretarmos estas equações,<sup>24</sup> consideremos uma carga elétrica pontual que apresente o valor “um” quando é medida no sistema em repouso,<sup>25</sup> isto é, uma carga que, estando imóvel no sistema em repouso, exerce a força de 1 dine sobre uma carga igual, colocada a distância de 1 cm dela. De acordo com o princípio da relatividade, a mesma carga elétrica apresentará também o valor “um” se for medida no sistema em movimento. Estando a carga em repouso em relação ao sistema imóvel, o vetor  $(X, Y, Z)$ <sup>26</sup> é, por definição, igual a força que atua sobre ela; mas, estando a carga em repouso relativamente ao sistema que se move (pelo menos no instante que se está considerando), então a força que atua sobre ela será igual, se for medida neste sistema móvel, ao vetor  $(X', Y', Z')$ . Conseqüentemente, as primeiras três equações acima<sup>27</sup> podem ser traduzidas em enunciados das duas seguintes maneiras:

1. Se um polo elétrico unidade,<sup>28</sup> puntiforme, se move num campo eletromagnético, exercer-se-á sobre ele, além da força elétrica,<sup>29</sup> uma força “eletromotriz”<sup>30</sup> que, desprezando termos em que entram como fatores potências de  $v/c$  de grau igual ou superior a 2, é igual ao quociente pela velocidade da luz do produto vetorial formado com a velocidade do polo unidade com a força magnética.<sup>31</sup> (Antigo enunciado.)

---

<sup>23</sup>[Ein78, pág. 71].

<sup>24</sup>A saber, as equações que fornecem as transformações de Lorentz para os campos elétricos e magnéticos.

<sup>25</sup>Sistema de coordenadas em que são válidas as equações da mecânica de Newton, isto é, sistema de referência inercial onde não se precisa introduzir a força fictícia de Coriolis e a força fictícia centrífuga.

<sup>26</sup>Este vetor  $(X, Y, Z)$  é o vetor da força elétrica por unidade de carga. Ou seja, é o vetor campo elétrico, que hoje em dia seria expresso da seguinte maneira:  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ .

<sup>27</sup>Ou seja, equações que fornecem as transformações dos campos entre dois sistemas inerciais diferentes que transladam em relação um ao outro.

<sup>28</sup>Ou seja, uma carga elétrica  $q$  de valor unitário.

<sup>29</sup>Ou seja, além da força  $q\vec{E}$ .

<sup>30</sup>Ou seja, uma força dada por  $q\vec{v} \times \vec{B}$ .

<sup>31</sup>Isto é, uma força eletromotriz que é igual ao produto vetorial da velocidade  $\vec{v}$  com o campo magnético  $\vec{B}$ , sendo a força dada por  $q\vec{v} \times \vec{B}$ . A força resultante neste enunciado antigo é então dada por  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ .

2. Se um polo elétrico puntiforme unidade se move num campo eletromagnético, exerce-se sobre ele uma força idêntica à força elétrica que se obtém no ponto ocupado pelo polo quando se submete o campo a uma transformação de coordenadas, a fim de o referir a um sistema de eixos que esteja imóvel em relação ao referido polo. (Novo enunciado.)

Isto é, de acordo com Einstein, no enunciado antigo temos  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ , enquanto que no novo enunciado temos  $\vec{F} = q\vec{E}' + q\vec{v}' \times \vec{B}' = q\vec{E}'$ , já que agora  $\vec{v}' = \vec{0}$ . A velocidade  $\vec{v}'$  da carga em relação ao novo sistema de referência  $S'$  que está em repouso em relação à própria carga é, obviamente, nula, de tal forma que  $q\vec{v}' \times \vec{B}' = \vec{0}$ .

Com esta nova interpretação do significado da velocidade  $\vec{v}$  que aparece na força eletromagnética dada pela equação (B.2), Einstein passou a introduzir na física forças que dependem do sistema de referência. Isto é, forças cujos valores dependem do estado de movimento entre o corpo de teste e o observador. Esta introdução de forças físicas que passam a depender do estado de movimento do observador criou muitos problemas para a interpretação de experiências simples e, infelizmente, passou a fazer parte de toda a física teórica desde então. Nenhuma experiência sugeria ou obrigava que se fizesse esta nova interpretação. Tudo isto partiu da cabeça de Einstein. Poderia se manter a expressão usual da força magnética com  $\vec{v}$  sendo a velocidade da carga  $q$  em relação ao ímã, ou a velocidade da carga em relação ao fio com corrente, sem que houvesse contradição com qualquer dado experimental. Em vez de adotar este ponto de vista razoável, Einstein resolveu mudar o significado desta velocidade, gerando uma grande confusão em toda a física teórica desde então.

É instrutivo ver esta mudança conceitual em uma das leis mais utilizadas na física. Mais uma vez lembramos que todas estas deduções e análises realizadas por Maxwell, Thomson, Heaviside, Lorentz e Einstein foram teóricas. Estes autores não se basearam em uma série de experimentos específicos que pudessem testar estas interpretações para o significado da velocidade. Esta mudança de significado da velocidade  $\vec{v}$  da carga  $q$  na equação (B.2) é muito estranha, confusa e completamente diferente de tudo o que se faz na física usualmente.

# Apêndice C

## Formulações Alternativas do Eletromagnetismo

Neste livro tratamos principalmente com a eletrodinâmica de Weber e com a teoria eletromagnética clássica (equações de Maxwell, força de Maxwell-Lorentz, potenciais retardados, potenciais de Liénard-Wiechert etc.). Neste apêndice apresentamos outros modelos e formulações para a eletrodinâmica que foram propostos por cientistas importantes como Gauss, Riemann, Clausius e Ritz. Utilizaremos a notação padrão dos capítulos 1 e 2. Todas as velocidades e acelerações são relativas a um sistema de referência inercial  $S$ .

### C.1 Força de Gauss

Gauss (1777–1855) descobriu em 1833 uma força a partir da qual podia deduzir as forças de Coulomb e de Ampère como casos especiais.<sup>1</sup> A força de Gauss  $\vec{F}_{21}^G$  exercida pela carga  $q_2$  em  $q_1$  é dada por:

$$\vec{F}_{21}^G = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[ 1 + \frac{1}{c^2} \left[ \vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 \right] \right] = -\vec{F}_{21}^G. \quad (\text{C.1})$$

Se  $\vec{v}_{12} = \vec{0}$  reobtemos a força de Coulomb. Adicionando as forças exercidas pelas cargas positivas e negativas do elemento de corrente  $I_2 d\vec{l}_2$  atuando sobre as cargas positivas e negativas do elemento de corrente  $I_1 d\vec{l}_1$  obtemos a força de Ampère  $d^2\vec{F}_{21}$  dada por:

$$d^2\vec{F}_{21}^A = -\frac{\mu_o}{4\pi} I_1 I_2 \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[ 2(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) - 3(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) \right] = -d^2\vec{F}_{12}^A. \quad (\text{C.2})$$

A força de Gauss só foi publicada em 1877, em suas obras completas, após a sua morte. Ela se parece muito com a força de Weber, que é dada por:

---

<sup>1</sup>[Gau77, volume 5, seção 13, págs. 616–617], [Max54, volume 2, artigo 851, pág. 483], [O’R65, volume 1, pág. 226] e [JM86, volume 1, págs. 130 e 140].

$$\vec{F}_{21}^W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \left[ 1 + \frac{1}{c^2} \left( \vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 + \vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12} \right) \right] = -\vec{F}_{12}^W . \quad (\text{C.3})$$

Vemos que a única diferença entre as duas expressões é que na força de Gauss não aparece o termo de aceleração em  $\vec{a}_{12}$ . Por esta razão não podemos deduzir a lei de indução completa de Faraday a partir da força de Gauss, pois ela não vai gerar o termo de indução que depende da variação temporal da corrente, proporcional a  $dI/dt$ . A lei de Gauss também é inconsistente com o princípio de conservação de energia pois ela não pode ser deduzida de uma energia potencial. Apesar destes fatos negativos, ela segue o princípio de ação e reação e além disto a força atua ao longo da reta que une as cargas. A força não apresenta retardação no tempo. Ela depende das distâncias, assim como das velocidades mútuas e instantâneas entre as cargas que estão interagindo. Mas Gauss acreditava que a verdadeira pedra angular da eletrodinâmica seria uma interação que dependesse das distâncias, das velocidades relativas entre as cargas que estão interagindo, mas que também incluísse um retardamento no tempo.

Nos dias de hoje os principais seguidores deste programa geral gaussiano para a eletrodinâmica são Moon, Spencer e colaboradores.<sup>2</sup>

## C.2 Força de Riemann

B. Riemann (1826–1866) propôs uma lei de força entre cargas elétricas que só foi publicada postumamente, em 1876. Já foi publicada uma tradução para a língua inglesa deste trabalho.<sup>3</sup> Sua força eletrodinâmica é dada por:

$$\vec{F}_{21}^R = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \left[ \left( 1 + \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12}}{2c^2} \right) \hat{r}_{12} - \frac{\dot{r}_{12}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{c^2} + \frac{r_{12}(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)}{c^2} \right] = -\vec{F}_{21}^R . \quad (\text{C.4})$$

Como esta força segue o princípio de ação e reação, vai haver conservação do momento linear. Contudo, esta não é uma força central. Logo, o momento angular não será conservado em todos os casos.

Por outro lado, há conservação da energia, pois a força de Riemann pode ser deduzida a partir de uma energia potencial dada por:

$$U_{12}^R = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \left( 1 - \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12}}{2c^2} \right) . \quad (\text{C.5})$$

A força de Riemann pode também ser deduzida usando o procedimento padrão a partir de uma energia lagrangiana dada por:

<sup>2</sup>[MS54c], [MSUM91] e [SU91].

<sup>3</sup>[Rie67] e [Rie77a]. Ver ainda [Rie77b] e [O'R65, volume 2, pág. 527].

$$S_{12}^R = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}} \left( 1 + \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12}}{2c^2} \right). \quad (\text{C.6})$$

Como sempre, há a mudança usual do sinal na frente de  $\vec{v}_{12}$  ao comparar  $U^R$  e  $S^R$ .

Começando com a força de Riemann e seguindo o procedimento usual podemos deduzir sua força entre elementos de corrente que é dada por:

$$d^2 \vec{F}_{21}^R = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} \left[ (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \hat{r}_{12} - (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) d\vec{l}_2 - (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) d\vec{l}_1 \right] = -d^2 \vec{F}_{12}^R. \quad (\text{C.7})$$

A força de um circuito fechado sobre um elemento de corrente de um outro circuito a partir desta expressão tem o mesmo valor que o obtido a partir das forças de Ampère e de Grassmann, ou seja:

$$d\vec{F}_{C_2 \text{ sobre } I_1 d\vec{l}_1} = I_1 d\vec{l}_1 \times \left( \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \right). \quad (\text{C.8})$$

Hoje em dia alguns dos principais seguidores do programa geral riemanniano para a eletrodinâmica, que inclui a existência de campos e potenciais com o tempo retardado, são White e colaboradores.<sup>4</sup>

### C.3 Força de Clausius

Clausius (1822–1888) propôs sua força entre cargas elétricas em 1876.<sup>5</sup> A força de Clausius  $\vec{F}_{21}^C$  exercida por  $q_2$  em  $q_1$ , assim como a força  $\vec{F}_{12}^C$  exercida por  $q_1$  em  $q_2$ , são dadas por, respectivamente:

$$\vec{F}_{21}^C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}^2} \left[ \left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right) \hat{r}_{12} + \frac{\dot{r}_{12} \vec{v}_2}{c^2} - \frac{r_{12} \vec{a}_2}{c^2} \right] \neq -\vec{F}_{12}^C, \quad (\text{C.9})$$

e

$$\vec{F}_{12}^C = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}^2} \left[ \left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right) \hat{r}_{12} - \frac{\dot{r}_{12} \vec{v}_1}{c^2} + \frac{r_{12} \vec{a}_1}{c^2} \right] \neq -\vec{F}_{21}^C. \quad (\text{C.10})$$

Esta força não segue o princípio de ação e reação. Logo, não há, em geral, conservação do momento linear e do momento angular. Contudo, esta força pode ser deduzida de uma energia potencial dada por:

$$U_{12}^C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}} \left( 1 + \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right). \quad (\text{C.11})$$

<sup>4</sup>[Whi77].

<sup>5</sup>[Cla80] e [O'R65, volume 1, pág. 222].

A força de Clausius também pode ser deduzida de uma energia lagrangiana  $S^C$  seguindo o procedimento-padrão. Ela é dada por:

$$S_{12}^C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}} \left( 1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c^2} \right). \quad (\text{C.12})$$

Mais uma vez há a troca de sinal diante das velocidades ao comparar  $U^C$  com  $S^C$ .

Calculando pelos procedimentos usuais a força entre elementos de corrente e começando com a força de Clausius, equação (C.9), obtemos a força de Grassmann, ou seja:

$$d^2 \vec{F}_{21}^G = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} [(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \hat{r}_{12} - (d\vec{l}_1 \cdot \hat{r}_{12}) d\vec{l}_2] \neq -d^2 \vec{F}_{12}^G. \quad (\text{C.13})$$

e

$$d^2 \vec{F}_{12}^G = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} [(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \hat{r}_{12} - (d\vec{l}_2 \cdot \hat{r}_{12}) d\vec{l}_1] \neq -d^2 \vec{F}_{21}^G. \quad (\text{C.14})$$

É curioso observar que Clausius chegou a este resultado para a força entre elementos de corrente sem saber dos resultados anteriores e idênticos obtidos por Grassmann em 1845. Em 1877 Grassmann teve de publicar um artigo enfatizando corretamente sua prioridade sobre o trabalho de Clausius. Foi apenas a partir daí que o trabalho de Grassmann em eletrodinâmica passou a ser amplamente conhecido.<sup>6</sup>

Não temos conhecimento de ninguém seguindo atualmente as ideias de Clausius no eletromagnetismo.

## C.4 Força de Ritz

Walter Ritz (1878-1909) publicou sua teoria balística para a luz em 1908. Sua força entre duas cargas pontuais pode ser encontrada, por exemplo, no livro de O’Rahilly.<sup>7</sup> Até segunda ordem em  $1/c$  sua força é dada por (com todas as quantidades sendo medidas e calculadas no tempo presente  $t$ ):

$$\vec{F}_{21}^{Ritz} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{3 - \lambda}{4} \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12}}{c^2} - \frac{3(1 - \lambda)}{4} \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} - \frac{\vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_2}{2c^2} \right] \hat{r}_{12} - \frac{1 + \lambda}{2} \frac{\dot{r}_{12}(\vec{v}_{12})}{c^2} - \frac{r_{12} \vec{a}_2}{2c^2} \right\} \neq -\vec{F}_{12}^{Ritz}, \quad (\text{C.15})$$

e

<sup>6</sup>[Cro85, págs. 80, 93–94 e 152–155].

<sup>7</sup>[O’R65, volume 2, págs. 501–505 e 520].

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12}^{Ritz} = & -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{3 - \lambda}{4} \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12}}{c^2} - \frac{3(1 - \lambda)}{4} \frac{\dot{r}_{12}^2}{c^2} + \frac{\vec{r}_{12} \cdot \vec{a}_{12}}{2c^2} \right] \hat{r}_{12} \right. \\ & \left. - \frac{1 + \lambda}{2} \frac{\dot{r}_{12}(\vec{v}_{12})}{c^2} + \frac{r_{12}\vec{a}_1}{2c^2} \right\} \neq -\vec{F}_{21}^{Ritz} . \end{aligned} \quad (C.16)$$

Nestas equações  $\lambda$  é uma constante adimensional cujo valor não foi especificado por Ritz. De acordo com O'Rahilly,<sup>8</sup> seu valor é provavelmente 3.

Esta força não segue o princípio de ação e reação. Logo, os momentos lineares e angulares não são conservados em geral. Também não há conservação de energia. Também não há uma energia lagrangiana a partir da qual se possa deduzir esta força pelos procedimentos usuais.

Seguindo os procedimentos usuais se encontra a seguinte força entre elementos de corrente:

$$\begin{aligned} d^2 \vec{F}_{21}^{Ritz} = & -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} \left\{ \left[ \frac{3 - \lambda}{2} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) - \frac{3(1 - \lambda)}{2} (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1)(\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) \right] \hat{r}_{12} \right. \\ & \left. - \frac{1 + \lambda}{2} \left[ (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_1) d\vec{l}_2 + (\hat{r}_{12} \cdot d\vec{l}_2) d\vec{l}_1 \right] \right\} = -d^2 \vec{F}_{12}^{Ritz} . \end{aligned} \quad (C.17)$$

Ao calcular a força de um circuito fechado sobre um elemento de corrente de um outro circuito se obtém o mesmo resultado que aquele obtido com as forças de Ampère e Grassmann, equação (C.8), independente do valor de  $\lambda$ .

O principal seguidor das ideias de Ritz foi O'Rahilly, que escreveu um livro excelente explorando as ideias de Ritz. Ele analisou criticamente e com grande profundidade os fundamentos da teoria eletromagnética. Poucos livros em ciência são tão críticos e cheios de ideias como este. Recomendamos enfaticamente este livro pela sua grande quantidade de informações históricas, pela sua sinceridade e coragem em expressar livremente suas ideias.<sup>9</sup>

---

<sup>8</sup>[O'R65, volume 2, págs. 588–589 e 616].

<sup>9</sup>[O'R65].





# Apêndice D

## Maxwell sobre Weber

Weber apresentou poucos comentários sobre o trabalho de Maxwell.<sup>1</sup> Já Maxwell citou bastante a obra de Weber. Neste apêndice discutimos os pontos de vista de Maxwell sobre a eletrodinâmica de Weber.

Desde seu primeiro trabalho sobre eletromagnetismo, publicado no ano de 1855, Maxwell sempre elogiou a teoria de Weber. Por exemplo, após apresentar as ideias de Faraday que ele estava tentando seguir, Maxwell disse:<sup>2</sup>

Há contudo uma teoria da eletrodinâmica que é manifestamente física, que é tão elegante, tão matemática, e tão inteiramente diferente de qualquer outra coisa neste artigo, que tenho de apresentar seus axiomas, correndo o risco de repetir o que tem de ser bem conhecido. Ela está contida nas *Electro-dynamic Measurements* [Medições Eletrodinâmicas] do Sr. W. Weber e pode ser encontrada nas Transactions of the Leibnitz-Society e da Royal Society of Sciences in Saxony.<sup>3</sup> As suposições são [...]. A partir destes axiomas se deduzem as leis de atração de condutores de Ampère e as de Neumann e outros, para a indução de correntes. Esta então é uma teoria realmente física, satisfazendo as condições necessárias melhor talvez do que qualquer outra já inventada e apresentada por um filósofo cujas pesquisas experimentais formam uma base ampla para suas investigações matemáticas.

No artigo famoso de 1864 no qual Maxwell completou sua teoria eletromagnética da luz ele apresentou pontos de vista semelhantes. Após mencionar que as teorias mais naturais do eletromagnetismo são baseadas em forças

---

<sup>1</sup>[AW03].

<sup>2</sup>[Max65c, ver especialmente as páginas 208–209].

<sup>3</sup>Quando isto foi escrito, eu [Maxwell] não estava ciente de que parte da Memória do Sr. Weber está traduzida nas *Scientific Memoirs* de Taylor, volume V, artigo XIV. O valor destas pesquisas, tanto experimentais quanto teóricas, tornam o estudo desta teoria necessário a todo estudioso da eletricidade.

agindo entre os corpos que estão interagindo, sem qualquer consideração sobre o meio ao redor deles, Maxwell afirmou o seguinte:<sup>4</sup>

Estas teorias assumem, mais ou menos explicitamente, a existência de substâncias cujas partículas têm a propriedade de agir umas sobre as outras a distância por atração e repulsão. O desenvolvimento mais completo de uma teoria deste tipo é a do Sr. W. Weber, que fez a mesma teoria incluir fenômenos eletrostáticos e eletromagnéticos. Contudo ao fazer isto ele achou necessário assumir que a força entre duas partículas elétricas depende da velocidade relativa entre elas, assim como da distância entre elas. Esta teoria, como desenvolvida pelos Srs. W. Weber e C. Neumann, é altamente engenhosa e maravilhosamente compreensiva em suas aplicações aos fenômenos da eletricidade estática, atrações eletromagnéticas, indução de correntes e fenômenos diamagnéticos; e ela vem a nós com mais autoridade, pois ela serviu para guiar as especulações daquele que fez um avanço tão grande na parte prática da ciência elétrica, por introduzir um sistema consistente de unidades nas medidas elétricas e por determinar [medir] de fato grandezas elétricas com uma precisão até então desconhecida.

Mas se Maxwell conhecia tão bem a eletrodinâmica de Weber e a apreciava tanto, por qual motivo ele não trabalhou com ela desenvolvendo suas propriedades e aplicações? Apenas um ano depois de Weber ter apresentado sua lei de força em 1846, Helmholtz publicou seu trabalho famoso e influente sobre a conservação de energia (neste artigo ele empregava o termo “força” para aquilo que hoje em dia chamaríamos de “energia”). Já existe uma tradução para a língua inglesa deste trabalho de Helmholtz.<sup>5</sup> O princípio de conservação da energia havia sido estabelecido por J. R. Meyer (1814–1878) em 1842 e também por J. P. Joule (1818–1889) em 1843. Em seu trabalho de 1847 Helmholtz colocou este princípio em uma base teórica sólida ao desenvolver as consequências matemáticas de forças centrais. Naquele tempo o nome usual para a quantidade  $mv^2$  era *vis viva* [força viva], mas neste artigo Helmholtz afirmou explicitamente que vai chamar  $mv^2/2$  (nossa energia cinética) de *vis viva*, já que esta última quantidade aparecia mais frequentemente na mecânica e parecia mais útil. Aquilo que hoje em dia chamamos de energia potencial (como  $mgh$  etc.) ele chamava de tensão. Os resultados principais de seu trabalho foram apresentados assim (entre colchetes vão nossas palavras):<sup>6</sup>

As proposições precedentes podem ser agrupadas como segue:

1. Sempre que os corpos naturais agem uns sobre os outros por forças atrativas ou repulsivas, que são independentes do tempo e

<sup>4</sup>[Max65a, ver especialmente as páginas 526–527].

<sup>5</sup>[Hel66].

<sup>6</sup>[Hel66].

da velocidade, a soma de suas *vires vivae* [energias cinéticas] e tensões [energias potenciais] tem de ser uma constante; a quantidade máxima de trabalho que pode ser obtida é portanto uma quantidade limitada.

2. Se, ao contrário, os corpos naturais possuem forças que dependem do tempo e da velocidade, ou que agem em outras direções que não as linhas retas que unem cada par separado de pontos materiais, como por exemplo, forças rotatórias, então seriam possíveis combinações de tais corpos nas quais se poderia ganhar ou perder força *ad infinitum* [energia *ao infinito*].

Esta afirmação de Helmholtz foi entendida por Maxwell, entre outros, como significando que a eletrodinâmica de Weber não obedecia ao princípio de conservação da energia. O motivo foi que embora a força de Weber fosse central (direcionada ao longo da reta que une as cargas), ela dependia da velocidade das cargas. Helmholtz, Maxwell e diversos cientistas concluíram então que havia um problema com a eletrodinâmica de Weber, por acreditarem que ela não satisfazia à conservação da energia. Por exemplo, na sequência das afirmações de Maxwell apresentadas anteriormente, ele apresentou este aspecto como sendo o único problema na eletrodinâmica de Weber. Na sequência de seu trabalho de 1855 Maxwell afirmou o seguinte:<sup>7</sup>

Há também objeções em fazer quaisquer forças básicas da natureza depender das velocidades dos corpos entre os quais elas agem. Se é para reduzir as forças da natureza a forças agindo entre as partículas, então o princípio de Conservação da Força [Energia] obriga que estas forças devem estar ao longo da linha reta que liga estas partículas e funções apenas da distância.

Já na sequência de seu trabalho de 1864, Maxwell expressou-se da seguinte maneira (nossa ênfase):<sup>8</sup>

*As dificuldades mecânicas*, contudo, que estão envolvidas em assumir partículas agindo a distância com forças que dependem de suas velocidades são tais que me impedem de considerar esta teoria como a final [*the ultimate one*], embora ela possa ter sido, e pode ainda continuar a ser útil em levar à coordenação dos fenômenos.

Maxwell estava errado a este respeito, como vimos no capítulo 2. Embora Weber tenha apresentado sua energia potencial em 1848, um ano após o trabalho de Helmholtz, ele não provou nesta época a conservação da energia. Foi apenas em 1869 e 1871 que ele provou em detalhes que sua lei de força seguia

<sup>7</sup>[Max65c, ver especialmente a página 208].

<sup>8</sup>[Max65a, ver especialmente a página 527].

o princípio de conservação de energia (este importante artigo de 1871 já se encontra traduzido para a língua inglesa).<sup>9</sup> Maxwell só mudou de ponto de vista em 1871, após a prova de Weber. No livro de Harman<sup>10</sup> há a reprodução de um cartão postal de Maxwell para Tait, datado de 1871, no qual ele informa a Tait que Weber estava certo ao afirmar que a sua [de Weber] eletrodinâmica seguia o princípio de conservação da energia.

A prova de Helmholtz não se aplica à força de Weber, já que esta força depende não apenas da distância e da velocidade das partículas, mas também de suas acelerações. E este caso mais geral não havia sido considerado por Helmholtz.

Quando Weber discutiu a conservação da energia com sua força, ele disse:<sup>11</sup>

A lei de ação elétrica anunciada na Primeira Memória sobre Medidas Eletrodinâmicas (*Elektrodynamische Maasbestimmungen*, Leipzig, 1846) tem sido testada de várias maneiras e tem sido modificada de muitas formas. Ela também já foi o assunto de observações e especulações de um tipo mais geral; estas, contudo, não podem ainda ser consideradas de forma alguma como levando a considerações conclusivas. A Primeira Parte da Memória seguinte é limitada a uma discussão da relação que esta lei apresenta com o Princípio de Conservação da Energia, cuja grande importância e alto significado foram colocados em proeminência em conexão com a Teoria Mecânica do Calor. Em consequência de haver sido afirmado que a lei a que nos referimos está em contradição com este princípio, fazemos aqui uma tentativa para mostrar que não há tal contradição. Ao contrário, a lei nos permite fazer uma adição ao Princípio de Conservação de Energia e alterá-lo de tal forma que sua aplicação a cada par de partículas não fica mais limitada simplesmente ao tempo durante o qual o par não sofre aumento ou diminuição da *vis viva* através da ação de outros corpos, mas vale sempre independentemente das numerosas relações com outros corpos com os quais estas partículas podem entrar.

Além disto, na Segunda Parte a lei é aplicada ao desenvolvimento das equações de movimento de duas partículas elétricas sujeitas apenas a suas ações mútuas. Apesar de este desenvolvimento não levar diretamente a quaisquer comparações ou controles exatos por meio de referência a experiências existentes (em relação às quais a lei tem recebido pouca atenção), ele leva contudo a vários resultados que parecem ser de importância ao fornecer pistas para a investigação dos movimentos dos corpos e das condições moleculares que têm adquirido um significado especial em relação com

---

<sup>9</sup>[Web71] e [Web72].

<sup>10</sup>[Har82, páginas 96 e 97].

<sup>11</sup>[Web71] e [Web72].

a química e com a teoria do calor e para oferecer para uma investigação posterior relações interessantes nestas áreas ainda obscuras.

Quando Maxwell escreveu seu *Tratado de Eletricidade e Magnetismo* em 1873, ele apresentou o novo ponto de vista de que a força de Weber era consistente com o princípio de conservação de energia. No último capítulo de seu livro Maxwell discutiu a eletrodinâmica de Weber e outros modelos que haviam sido propostos para o eletromagnetismo baseados na ideia de ação a distância. Ele já se encontra traduzido para a língua portuguesa, com uma introdução histórica e muitas notas explicativas.<sup>12</sup> Na parte referente à conservação da energia Maxwell afirmou o seguinte, após apresentar as forças entre cargas de Weber e de Gauss:<sup>13</sup>

852] As duas expressões levam precisamente ao mesmo resultado quando elas são aplicadas à determinação da força mecânica entre duas correntes elétricas e este resultado é idêntico ao de Ampère. Mas quando elas são consideradas como expressões da lei física de ação entre duas partículas carregadas, somos levados a perguntar se elas são consistentes com outros fatos da natureza já conhecidos.

Ambas as expressões envolvem a velocidade relativa das partículas. Ora, ao estabelecer por raciocínio matemático o princípio bem conhecido da conservação da energia, é geralmente assumido que a força agindo entre duas partículas é uma função apenas da distância e é comumente afirmado que se é função de qualquer outra coisa, tal como o tempo ou a velocidade das partículas, a prova não se manteria.

Portanto, uma lei de ação elétrica, envolvendo a velocidade das partículas, tem sido suposta algumas vezes ser inconsistente com o princípio da conservação da energia.

853] A fórmula de Gauss é inconsistente com este princípio e deve, portanto, ser abandonada, pois ela leva à conclusão de que a energia poderia ser gerada indefinidamente em um sistema finito por meios físicos. Esta objeção não se aplica à fórmula de Weber, pois ele mostrou<sup>14</sup> que se assumimos como energia potencial de um sistema de duas partículas elétricas,

$$\Psi = \frac{ee'}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2c^2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right],$$

<sup>12</sup>[Ass92g].

<sup>13</sup>[Max54, volume 2, artigos 852 e 853, pág. 484] e [Ass92g].

<sup>14</sup>*Pogg. Ann.*, lxxiii, pág. 229, 1848.

a repulsão entre elas, que é encontrada na diferenciação desta quantidade com respeito a  $r$  e mudando o sinal, é aquela dada pela fórmula

$$\frac{ee'}{r^2} \left[ 1 + \frac{1}{c^2} \left( r \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 \right) \right].$$

Portanto o trabalho feito sobre uma partícula em movimento pela repulsão de uma partícula fixa é  $\Psi_o - \Psi_1$ , onde  $\Psi_o$  e  $\Psi_1$  são os valores de  $\Psi$  no começo e no fim de sua trajetória. Agora  $\Psi$  depende apenas da distância,  $r$ , e da velocidade na direção de  $r$ . Se, portanto, a partícula descreve qualquer caminho fechado, de tal forma que sua posição, velocidade e direção de movimento são os mesmos ao final como no começo,  $\Psi_1$  será igual a  $\Psi_o$  e nenhum trabalho será feito durante o ciclo completo de operações.

Então uma quantidade indefinida de trabalho não pode ser gerada por uma partícula em movimento periódico sob a ação da força assumida por Weber.

Deve ser enfatizado que a grandeza que Maxwell escrevia como  $\partial r / \partial t$  seria escrito hoje em dia como  $dr / dt$ , como é evidente pelo que ele escreveu no artigo [847] de seu livro.<sup>15</sup>

Em seguida a esta citação, Maxwell apresentou outras críticas de Helmholtz contra a eletrodinâmica de Weber. Já discutimos estas críticas em outras partes deste livro.

Para uma discussão adicional sobre este assunto ver o trabalho de Archibald.<sup>16</sup>

Vemos então que no único aspecto em que ele criticava negativamente a lei de Weber, Maxwell estava errado. Ele acabou se corrigindo no final, como acabamos de ver. Concluímos por todas as citações de Maxwell que vimos neste livro que ele sempre teve uma profunda admiração pelo trabalho experimental e teórico de Weber.

---

<sup>15</sup>[Max54].

<sup>16</sup>[Arc89].

# Referências Bibliográficas

- [AC91] A. K. T. Assis and J. J. Caluzi. A limitation of Weber's law. *Physics Letters A*, 160:25–30, 1991.
- [AC92] A. K. T. Assis and R. A. Clemente. The ultimate speed implied by theories of Weber's type. *International Journal of Theoretical Physics*, 31:1063–1073, 1992.
- [AC06] A. K. T. Assis and J. P. M. C. Chaib. Nota sobre o magnetismo da pilha de Volta — tradução comentada do primeiro artigo de Biot e Savart sobre eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 16:303–306, 2006.
- [AC11] A. K. T. Assis and J. P. M. d. C. Chaib. *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*. Editora da Unicamp, Campinas, 2011. ISBN: 9788526809383.
- [Aep79] F. U. T. Aepinus. *Aepinus's Essay on the Theory of Electricity and Magnetism*. Princeton University Press, Princeton, 1979. Tradução de P. J. Connor. Introdução e notas de R. W. Home.
- [AH05] A. K. T. Assis and J. A. Hernandez. Telegraphy equation from Weber's electrodynamics. *IEEE Transactions on Systems and Circuits II*, 52:289–292, 2005.
- [AH07] A. K. T. Assis and J. A. Hernandez. *The Electric Force of a Current: Weber and the Surface Charges of Resistive Conductors Carrying Steady Currents*. Apeiron, Montreal, 2007. ISBN: 9780973291155. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [AH09] A. K. T. Assis and J. A. Hernandez. *A Força Elétrica de uma Corrente: Weber e as Cargas Superficiais de Condutores Resistivos com Correntes Constantes*. Edusp e Edufal, São Paulo e Maceió, 2009. Volume 73 da Coleção Acadêmica. ISBNs: 9788531411236 e 9788571774315.



- [AH13] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *Elektrischer Strom und Oberflächenladungen: was Wilhelm Weber schon vor mehr als 150 Jahre wußte*. Apeiron, Montreal, 2013. Tradução de H. Härtel. ISBN: 9780992045609. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [Amp] A.-M. Ampère. Lettre de André-Marie Ampère à Jean-Jacques Ampère. Carta L590, de 19 e 25 de setembro de 1820.
- [Amp20a] A.-M. Ampère. Mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences, le 2 octobre 1820, où se trouve compris le résumé de ce qui avait été lu à la même Académie les 18 et 25 septembre 1820, sur les effets des courans électriques. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:59–76, 1820.
- [Amp20b] A.-M. Ampère. Suite du Mémoire sur l'Action mutuelle entre deux courans électriques, entre un courant électrique et un aimant ou le globe terrestre, et entre deux aimants. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:170–218, 1820.
- [Amp23] A.-M. Ampère. Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 21 novembre 1825. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6:175–387, 1823. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1827.
- [Amp26] A.-M. Ampère. *Théorie des Phénomènes Électro-dynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience*. Méquignon-Marvis, Paris, 1826.
- [Amp65] A.-M. Ampère. On the Mathematical Theory of Electrodynamical Phenomena, Experimentally Deduced. In R. A. R. Tricker, editor, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 155–200, Nova York, 1965. Pergamon. Partial English translation by O. M. Blunn of Ampère's work "Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience", *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, vol. 6, pp. 175–387 (1823), publicado em 1827.
- [AP92] A. K. T. Assis and F. M. Peixoto. On the velocity in the Lorentz force law. *The Physics Teacher*, 30:480–483, 1992.
- [Arc86] T. Archibald. Carl Neumann versus Rudolf Clausius on the propagation of electrodynamic potentials. *American Journal of physics*, 54:786–790, 1986.

- [Arc89] T. Archibald. Energy and the mathematization of electrodynamics in Germany, 1845-1875. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 39:276–308, 1989.
- [ARW02] A. K. T. Assis, K. Reich, and K. H. Wiederkehr. Gauss and Weber's creation of the absolute system of units in physics. *21st Century Science & Technology*, Vol. 15, No. 3:40–48, 2002.
- [ARW04] A. K. T. Assis, K. Reich, and K. H. Wiederkehr. On the electromagnetic and electrostatic units of current and the meaning of the absolute system of units — For the 200th anniversary of Wilhelm Weber's birth. *Sudhoffs Archiv*, 88:10–31, 2004.
- [Asp86] H. Aspden. Anomalous electrodynamic explosions in liquids. *Transactions on Plasma Science*, PS-14:282–285, 1986.
- [Ass89a] A. K. T. Assis. On Mach's principle. *Foundations of Physics Letters*, 2:301–318, 1989.
- [Ass89b] A. K. T. Assis. Weber's law and mass variation. *Physics Letters A*, 136:277–280, 1989.
- [Ass90a] A. K. T. Assis. Deriving Ampère's law from Weber's law. *Hadronic Journal*, 13:441–451, 1990.
- [Ass90b] A. K. T. Assis. Modern experiments related to Weber's electrodynamics. In U. Bartocci and J. P. Wesley, editors, *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics*, pages 8–22, Blumberg, Germany, 1990. Benjamin Wesley Publisher.
- [Ass91a] A. K. T. Assis. Can a steady current generate an electric field? *Physics Essays*, 4:109–114, 1991.
- [Ass91b] A. K. T. Assis. Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) — Sua vida e sua obra. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 5:53–59, 1991.
- [Ass92a] A. K. T. Assis. Centrifugal electrical force. *Communications in Theoretical Physics*, 18:475–478, 1992.
- [Ass92b] A. K. T. Assis. *Curso de Eletrodinâmica de Weber*. Setor de Publicações do Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP, Campinas, 1992. Notas de Física IFGW Número 5. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [Ass92c] A. K. T. Assis. Deriving gravitation from electromagnetism. *Canadian Journal of Physics*, 70:330–340, 1992.

- [Ass92d] A. K. T. Assis. On forces that depend on the acceleration of the test body. *Physics Essays*, 5:328–330, 1992.
- [Ass92e] A. K. T. Assis. On the absorption of gravity. *Apeiron*, 13:3–11, 1992.
- [Ass92f] A. K. T. Assis. On the mechanism of railguns. *Galilean Electrodynamics*, 3:93–95, 1992.
- [Ass92g] A. K. T. Assis. Teorias de ação a distância — uma tradução comentada de um texto de James Clerk Maxwell. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 7:53–76, 1992.
- [Ass93a] A. K. T. Assis. Changing the inertial mass of a charged particle. *Journal of the Physical Society of Japan*, 62:1418–1422, 1993.
- [Ass93b] A. K. T. Assis. Compliance of a Weber’s force law for gravitation with Mach’s principle. In P. N. Kropotkin *et al.*, editor, *Space and Time Problems in Modern Natural Science, Part II*, pages 263–270, St.-Petersburg, 1993. Tomsk Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. Series: “The Universe Investigation Problems,” Issue 16.
- [Ass93c] A. K. T. Assis. A steady-state cosmology. In H. C. Arp, C. R. Keys, and K. Rudnicki, editors, *Progress in New Cosmologies: Beyond the Big Bang*, pages 153–167, New York, 1993. Plenum Press.
- [Ass94] A. K. T. Assis. *Weber’s Electrodynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994. ISBN: 0792331370.
- [Ass95] A. K. T. Assis. *Eletrodinâmica de Weber — Teoria, Aplicações e Exercícios*. Editora da Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP, Campinas, 1995. ISBN: 8526803581.
- [Ass98a] A. K. T. Assis. Comparação entre as eletrodinâmicas de Weber e de Maxwell-Lorentz. *Episteme*, 3:7–15, 1998.
- [Ass98b] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional*. Editora do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP/FAPESP, Campinas, 1998. ISBN: 8586497010. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [Ass99a] A. K. T. Assis. Arguments in favour of action at a distance. In A. E. Chubykalo, V. Pope, and R. Smirnov-Rueda, editors, *Instantaneous Action at a Distance in Modern Physics — “Pro” and “Contra”*, pages 45–56, Commack, 1999. Nova Science Publishers.

- [Ass99b] A. K. T. Assis. *Relational Mechanics*. Apeiron, Montreal, 1999. ISBN: 0968368921. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [Ass99c] A. K. T. Assis. *Uma Nova Física*. Editora Perspectiva, São Paulo, 1999. ISBN: 8527301997.
- [Ass00a] A. K. T. Assis. On the propagation of electromagnetic signals in wires and coaxial cables according to Weber's electrodynamics. *Foundations of Physics*, 30:1107–1121, 2000.
- [Ass00b] A. K. T. Assis. A primeira medida eletromagnética da velocidade da luz por Weber e Kohlrausch. In J. L. Goldfarb and M. H. M. Ferraz, editors, *Anais do VII Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia*, pages 65–71, São Paulo, 2000. Editora da USP/Editora da Unesp/Imprensa Oficial do Estado/Soc. Bras. de Hist. da Ciência.
- [Ass03a] A. K. T. Assis. On the first electromagnetic measurement of the velocity of light by Wilhelm Weber and Rudolf Kohlrausch. In F. Bevilacqua and E. A. Giannetto, editors, *Volta and the History of Electricity*, pages 267–286. Università degli Studi di Pavia and Editore Ulrico Hoepli, Milano, 2003.
- [Ass03b] A. K. T. Assis. Tradução de uma obra de Gauss. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25:226–249, 2003.
- [Ass10a] A. K. T. Assis. *The Experimental and Historical Foundations of Electricity*. Apeiron, Montreal, 2010. ISBN: 9780986492631. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [Ass10b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Apeiron, Montreal, 2010. ISBN: 9780986492617. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [Ass10c] A. K. T. Assis. Wilhelm Weber's works translated into English. *21st Century Science & Technology*, Vol. 22, No. 4:67–69, 2010.
- [Ass13] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional*. Apeiron, Montreal, 2013. ISBN: 9780986492693. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [Ass14] A. K. T. Assis. *Relational Mechanics and Implementation of Mach's Principle with Weber's Gravitational Force*. Apeiron, Montreal, 2014. ISBN: 978-0-9920456-3-0. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.

- [AT00] A. K. T. Assis and H. Torres Silva. Comparison between Weber's electrodynamics and classical electrodynamics. *Pramana Journal of Physics*, 55:393–404, 2000.
- [Ath89] W. A. Atherton. Gauss and Weber: An unlikely partnership. *Electronics and Wireless World*, 95:521–522, 1989.
- [AW03] A. K. T. Assis and K. H. Wiederkehr. Weber quoting Maxwell. *Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft*, 40:53–74, 2003.
- [AWW11] A. K. T. Assis, K. H. Wiederkehr, and G. Wolfschmidt. *Weber's Planetary Model of the Atom*, volume 19 of *Nuncius Hamburgensis — Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften*. Tredition Science, Hamburg, 2011.
- [AWW14] A. K. T. Assis, K. H. Wiederkehr, and G. Wolfschmidt. *O Modelo Planetário de Weber para o Átomo*. Apeiron, Montreal, 2014. ISBN: 9780992045654. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [Aze86] R. Azevedo *et al.* Powerful water-plasma explosions. *Physics Letters A*, 117:101–105, 1986.
- [BA98] M. Bueno and A. K. T. Assis. *Cálculo de Indutância e de Força em Circuitos Elétricos*. Editora da UFSC e Editora da UEM, Florianópolis e Maringá, 1998. ISBN: 8532801196.
- [BA01] M. d. A. Bueno and A. K. T. Assis. *Inductance and Force Calculations in Electrical Circuits*. Nova Science Publishers, Huntington, New York, 2001. ISBN: 1560729171.
- [BAC12] S. L. B. Boss, A. K. T. Assis, and J. J. Caluzi. *Stephen Gray e a Descoberta dos Condutores e Isolantes: Tradução Comentada de Seus Artigos sobre Eletricidade e Reprodução de Seus Principais Experimentos*. Editora Cultura Acadêmica da Unesp, São Paulo, 2012. Disponível em: <[www.culturaacademica.com.br/catalogo-detalhe.asp?ctl\\\_id=354](http://www.culturaacademica.com.br/catalogo-detalhe.asp?ctl\_id=354)>.
- [Bar89] J. B. Barbour. *Absolute or Relative Motion? — A study from a Machian point of view of the discovery and the structure of dynamical theories*, volume 1: *The Discovery of Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [BE90] D. F. Bartlett and W. F. Edwards. Invariance of charge to Lorentz transformation. *Physics Letters A*, 151:259–262, 1990.
- [Bil92] N. Bilić. Comment on Lorentz invariance/noninvariance of the electric charge. *Physics Letters A*, 162:87–90, 1992.

- [Blo82] C. Blondel. *A.-M. Ampère et la Création de l'Électrodynamique (1820-1827)*. Bibliothèque Nationale, Paris, 1982.
- [BM90] D. F. Bartlett and S. Maglic. Test of an anomalous electromagnetic effect. *Review of Scientific Instruments*, 61:2637–2639, 1990.
- [Bon81] G. Bonnet. Electric field arising from a steady current passing through a superconductor. *Physics Letters A*, 82:465–467, 1981.
- [Bos11] S. L. B. Boss. *Tradução comentada de artigos de Stephen Gray (1666-1736) e reprodução de experimentos históricos com materiais acessíveis*. Doutorado em educação para a ciência, Faculdade de Ciências - Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2011. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [BS20] J. B. Biot and F. Savart. Note sur le magnétisme de la pile de Volta. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:222–223, 1820.
- [BS24] J. B. Biot and F. Savart. Sur l'aimantation imposée aux métaux par l'électricité en mouvement. In J. B. Biot, editor, *Précis Élémentaire de Physique Expérimentale*, vol. II, troisième édition, pages 704–774, Paris, 1824. Gauthier-Villars.
- [BS65a] J. B. Biot and F. Savart. Magnetization of metals by electricity in motion. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 119–139, New York, 1965. Pergamon. Translated by O. M. Blunn.
- [BS65b] J. B. Biot and F. Savart. Note on the magnetism of Volta's battery. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 118–119, New York, 1965. Pergamon. Translated by O. M. Blunn.
- [BT64] V. V. Batygin and I. N. Toptygin. *Problems in Electrodynamics*. Academic Press, London, 1964.
- [Buc85] J. Z. Buchwald. *From Maxwell to Microphysics — Aspects of Electromagnetic Theory in the Last Quarter of the Nineteenth Century*. The University of Chicago Press, Chicago, 1985.
- [Bus26] V. Bush. The force between moving charges. *Journal of Mathematical Physics*, 5:129–157, 1926.
- [BW77] D. F. Bartlett and B. F. L. Ward. Is an electron's charge independent of its velocity? *Physical Review D*, 16:3453–3458, 1977.
- [CA91] R. A. Clemente and A. K. T. Assis. Two-body problem for Weber-like interactions. *International Journal of Theoretical Physics*, 30:537–545, 1991.

- [CA07] J. P. M. d. C. Chaib and A. K. T. Assis. Sobre os efeitos das correntes elétricas — Tradução comentada da primeira obra de Ampère sobre eletrodinâmica. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 5:85–102, 2007.
- [CA09] J. P. M. d. C. Chaib and A. K. T. Assis. Sobre os efeitos das correntes elétricas (segunda parte) — Tradução da primeira obra de Ampère sobre eletrodinâmica. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 2:118–145, 2009.
- [Can80] K. L. Caneva. Ampère, the etherians, and the Oersted connexion. *The British Journal for the History of Science*, 13:121–138, 1980.
- [Cha09] J. P. M. d. C. Chaib, 2009. Tese de doutorado: “Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica.” Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP (Campinas, SP). Orientador: A. K. T. Assis. Disponível em: <http://webbif.ifi.unicamp.br/teses/> e em [www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis).
- [Chr87] C. Christodoulides. Equivalence of the Ampère and Biot-Savart force laws in magnetostatics. *Journal of Physics A*, 20:2037–2042, 1987.
- [Chr89] C. Christodoulides. On Ampère’s magnetostatic force law and the nature of the forces it predicts. *Physics Letters A*, 141:383–385, 1989.
- [Cla69] R. Clausius. Upon the new conception of electrodynamic phenomena suggested by Gauss. *Philosophical Magazine*, 37:445–456, 1869.
- [Cla80] R. Clausius. On the employment of the electrodynamic potential for the determination of the ponderomotive and electromotive forces. *Philosophical Magazine*, 10:255–279, 1880.
- [Cor89] P. Cornille. On the difference between the Lorentz and Ampère force laws in magnetostatics. *Journal of Physics A*, 22:4075–4081, 1989.
- [Cro85] M. J. Crowe. *A History of Vector Analysis — The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Dover, New York, 1985.
- [Cur82] J. C. Curé. A modified version of the Millikan oil drop experiment to test the probable existence of a new electrodynamic field. *Physics Letters B*, 116:158–160, 1982.

- [Cur09] J. C. Curé. *Einstein on Trial or Metaphysical Principles of Natural Philosophy*. Shirley Ramsey, Caracas, 3rd edition, 2009.
- [Dar20] C. G. Darwin. The dynamical motions of charged particles. *Philosophical Magazine*, 39:537–551, 1920.
- [Des52] R. Descartes. Discourse on the methode of rightly conducting the reason. In *Great Books of the Western World*, vol. 31, pages 41–67, Chicago, 1952. Encyclopaedia Britannica.
- [Des65] R. Descartes. Discours de la Méthode & Essays. In C. Adam and P. Tannery, editors, *Oeuvres de Descartes*, vol. VI, pages 1–78: *Discours de la Méthode*, 79–228: *La Dioptrique*, 229–366: *Les Meteores*, 367–485: *La Geometrie*, Paris, 1965. Librairie Philosophique J. Vrin.
- [Des83] R. Descartes. Discurso do Método. In Victor Civita, editor, Volume “Descartes” da Coleção *Os Pensadores*, pages 25–71, São Paulo, 3ª edição, 1983. Abril Cultural. Tradução de J. Guinsburg e B. Prado Júnior.
- [DF] C. F. d. C. Du Fay. A letter from Mons. Du Fay, F. R. S. and of the Royal Academy of Sciences at Paris, to His Grace Charles Duke of Richmond and Lenox, concerning electricity. Translated from the French by T. S. M D. *Philosophical Transactions*, 38:258–266, 1733–4.
- [DF33] C. F. d. C. Du Fay. Quatrième mémoire sur l’électricité. De l’attraction et répulsion des corps électriques. *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences*, pages 457–476, 1733.
- [Eby77] P. B. Eby. On the perihelion precession as a Machian effect. *Lettere al Nuovo Cimento*, 18:93–96, 1977.
- [Ein78] A. Einstein. Sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento. In A. Einstein, H. Lorentz, H. Weyl e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade*, Lisboa, 2ª edição, 1978. Fundação Calouste Gulbenkian. Págs. 47-86. Tradução de M. J. Saraiva.
- [EKL76] W. F. Edwards, C. S. Kenyon, and D. K. Lemon. Continuing investigation into possible electric fields arising from steady conduction currents. *Physical Review D*, 14:922–938, 1976.
- [Far52] M. Faraday. *Experimental Researches in Electricity*, volume 45, pp. 257-866 of *Great Books of the Western World*. Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952.



- [Far11] M. Faraday. Pesquisas experimentais em eletricidade. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 28:152–204, 2011. Tradução de A. K. T. Assis e L. F. Haruna. DOI: 10.5007/2175-7941.2011v28n1p152.
- [Fec45] G. T. Fechner. Ueber die Verknüpfung der Faraday’schen Inductions-Erscheinungen mit den Ampèreschen elektro-dynamischen Erscheinungen. *Annalen der Physik*, 64:337–345, 1845.
- [FJ57] P. S. Faragó and L. Jánossy. Review of the experimental evidence for the law of variation of the electron mass with velocity. *Il Nuovo Cimento*, 5:1411–1436, 1957.
- [FLS64] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, Reading, 1964. Volume 2: Mainly Electromagnetism and Matter.
- [Fra41] B. Franklin. *Benjamin Franklin’s Experiments* — A new edition of Franklin’s *Experiments and Observations on Electricity*, I. B. Cohen (ed.). Harvard University Press, Cambridge, 1941.
- [Fuk03] J. Fukai. *A Promenade Along Electrodynamics*. Vales Lake Publishing, Pueblo West, 2003.
- [GA94] P. Graneau and A. K. T. Assis. Kirchhoff on the motion of electricity in conductors. *Apeiron*, 19:19–25, 1994.
- [Gau77] C. F. Gauss. Carl Friedrich Gauss’s *Werke*, volume 5. Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (ed.), Göttingen, 1877. Second printing (first printing 1867).
- [Ger98] P. Gerber. Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation. *Zeitschrift für Mathematik und Physik II*, 43:93–104, 1898.
- [Ger17] P. Gerber. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation. *Annalen der Physik*, 52:415–444, 1917.
- [GG85] P. Graneau and P. N. Graneau. Electrodynamics explosions in liquids. *Applied Physics Letters*, 46:468–470, 1985.
- [GG86] P. Graneau and P. N. Graneau. The electromagnetic impulse pendulum and momentum conservation. *Il Nuovo Cimento D*, 7:31–45, 1986.
- [GG92] P. Graneau and P. N. Graneau. The role of Ampère forces in nuclear fusion. *Physics Letters A*, 165:1–13, 1992.
- [GG93] P. Graneau and N. Graneau. *Newton Versus Einstein — How Matter Interacts with Matter*. Carlton Press, New York, 1993.

- [GG96] P. Graneau and N. Graneau. *Newtonian Electrodynamics*. World Scientific, Singapore, 1996.
- [GH91] D. J. Griffiths and M. A. Heald. Time-dependent generalizations of the Biot-Savart and Coulomb laws. *American Journal of Physics*, 59:111–117, 1991.
- [Gil00] W. Gilbert. *De magnete, magneticisque corporibus, et de magno magnete tellure; physiologia nova*. London, 1600.
- [Gil00] W. Gilbert. *On the Magnet, Magnetick Bodies also, and on the Great Magnet the Earth; a New Physiology, Demonstrated by Many Arguments & Experiments*. Chiswick Press, London, 1900. Traduzido por S. P. Thompson.
- [Gil78] W. Gilbert. *On the Loadstone and Magnetic Bodies and on the Great Magnet the Earth*, volume 28, pp. 1-121 of *Great Books of the Western World*. Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1978. Traduzido por P. F. Mottelay.
- [Gil91] W. Gilbert. *De Magnete*. Dover, New York, 1991. Traduzido por P. F. Mottelay.
- [Gol50] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, 1950.
- [Gol80] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, 2nd edition, 1980.
- [Gra] S. Gray. Several experiments concerning electricity. *Philosophical Transactions*, 37:18–44, 1731–2. Disponível em: <<http://www.ampere.cnrs.fr/>> and <<http://www.jstor.org/>>.
- [Gra45] H. Grassmann. Neue Theorie der Electrodynamik. *Annalen der Physik*, 64:1–18, 1845.
- [Gra65] H. Grassmann. A new theory of electrodynamics. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 201–214, New York, 1965. Pergamon.
- [Gra82a] P. Graneau. Application of Ampere’s force law to railgun accelerators. *Journal of Applied Physics*, 53:6648–6654, 1982.
- [Gra82b] P. Graneau. Electromagnetic jet-propulsion in the direction of current flow. *Nature*, 295:311–312, 1982.
- [Gra83a] P. Graneau. Compatibility of the Ampère and Lorentz force laws with the virtual-work concept. *Il Nuovo Cimento B*, 78:213–234, 1983.

- [Gra83b] P. Graneau. First indication of Ampere tension in solid electric conductors. *Physics Letters A*, 97:253–255, 1983.
- [Gra84] P. Graneau. Longitudinal magnetic forces. *Journal of Applied Physics*, 55:2598–2600, 1984.
- [Gra85a] P. Graneau. *Ampere-Neumann Electrodynamics of Metals*. Hadronic Press, Nonantum, 1985.
- [Gra85b] P. Graneau. Comments on ‘Equivalence of the Lorentz and Ampere force laws in magnetostatics’ [J. Appl. Phys. 57, 1743 (1985)]. *Journal of Applied Physics*, 58:3638, 1985.
- [Gra86] P. Graneau. The Ampere-Neumann electrodynamics of metallic conductors. *Forstchritte der Physik*, 34:457–503, 1986.
- [Gra87a] P. Graneau. Amperian recoil and the efficiency of railguns. *Journal of Applied Physics*, 62:3006–3009, 1987.
- [Gra87b] P. Graneau. Inertia, gravitation, and radiation time delays. *Hadronic Journal*, 10:145–148, 1987.
- [Gra87c] P. Graneau. Railgun recoil and relativity. *Journal of Physics D*, 20:391–393, 1987.
- [Gra87d] P. Graneau. Wire explosions. *Physics Letters A*, 120:77–79, 1987.
- [Gra88] R. I. Gray. *Unified Physics*. Dahlgren, Virginia, 1988.
- [Gra90a] N. Graneau. The finite size of the metallic current element. *Physics Letters A*, 147:92–96, 1990.
- [Gra90b] P. Graneau. Far-action versus contact action. *Speculations in Science and Technology*, 13:191–201, 1990.
- [Gra90c] P. Graneau. Interconnecting action-at-a-distance. *Physics Essays*, 3:340–343, 1990.
- [Gra90d] P. Graneau. The riddle of inertia. *Electronics and Wireless World*, 96:60–62, 1990.
- [Gra90e] P. Graneau. Some cosmological consequences of Mach’s principle. *Hadronic Journal Supplement*, 5:335–349, 1990.
- [Gra94] P. Graneau. *Ampere-Neumann Electrodynamics of Metals*. Hadronic Press, Palm Harbor, 2nd edition, 1994.
- [Gri89] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2nd edition, 1989.

- [GTM90] P. Graneau, D. Thompson, and S. Morril. The motionally induced back-emf in railguns. *Physics Letters A*, 145:396–400, 1990.
- [GW66] C. F. Gauss and W. Weber. Results of the observations made by the Magnetic Association in the year 1836. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 20–97, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [GW96] C. F. Gauss and W. E. Weber. Text of the Gauss-Weber correspondence. *21st Century*, 9(3):41–43, 1996. Tradução de S. P. Johnson.
- [HA00] J. A. Hernandez and A. K. T. Assis. Propagação de sinais em condutores com a eletrodinâmica de Weber e comparação com o eletromagnetismo clássico. In SBF, editor, *Anais do XXI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, São Lourenço, 23 a 27/10/00*, page 1, São Paulo, 2000. Sociedade Brasileira de Física. Published at: <[www.sbf1.if.usp.br/eventos/enfpc/xxi/procs/res89/](http://www.sbf1.if.usp.br/eventos/enfpc/xxi/procs/res89/)>.
- [HA01] J. A. Hernandez and A. K. T. Assis. Propagação de sinais em condutores segundo a eletrodinâmica de Weber. *Ciência e Natura*, 23:7–26, 2001.
- [Har82] P. M. Harman. *Energy, Force, and Matter — The Conceptual Development of Nineteenth-Century Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [Hay90] H. Hayden. Possible explanation for the Edwards effect. *Galilean Electrodynamics*, 1:33–35, 1990.
- [Hea89] O. Heaviside. On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric. *Philosophical Magazine*, 27:324–339, 1889.
- [Hec96] L. Hecht. The significance of the 1845 Gauss-Weber correspondence. *21st Century*, 9(3):22–34, 1996.
- [Hee92] P. Heering. On Coulomb’s inverse square law. *American Journal of Physics*, 60:988–994, 1992.
- [Hel70] H. v. Helmholtz. Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende leitende Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 72:57–129, 1870.
- [Hel72] H. von Helmholtz. On the theory of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 44:530–537, 1872.

- [Hel66] H. von Helmholtz. On the conservation of force; a physical memoir. In J. Tyndall and W. Francis, editors, *Scientific Memoirs*, Vol. 7, pages 114–162, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Her11] C. Hering. The stretching of a conductor by its current. *Journal of the Franklin Institute*, 171:73–85, 1911.
- [Her21] C. Hering. Revision of some of the electromagnetic laws. *Journal of the Franklin Institute*, 192:599–622, 1921.
- [Her23] C. Hering. Electromagnetic forces; a search for more rational fundamentals; a proposed revision of the laws. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineering*, 42:311–326, 1923. There is a discussion of this paper by some authors and a reply by Hering in pp. 326–340.
- [Her62] H. Hertz. *Electric Waves*. Dover, New York, 1962.
- [Hof96] J. R. Hofmann. *André-Marie Ampère, Enlightenment and Electrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [HR84] D. Halliday and R. Resnick. *Física*, volume 3. Livro Técnico, Rio de Janeiro, 4<sup>a</sup> edição, 1984.
- [Hur10] P. G. Huray. *Maxwell's Equations*. Wiley: IEEE, Hoboken, 2010.
- [Ive90] T. Ivešić. The relativistic electric fields arising from steady conduction currents. *Physics Letters A*, 144:427–431, 1990.
- [Ive91] T. Ivezić. Electric fields from steady currents and unexplained electromagnetic experiments. *Physical Review A*, 44:2682–2685, 1991.
- [Jac75] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, second edition, 1975.
- [Jef90] O. Jefimenko. Comment on ‘On the equivalence of the laws of Biot-Savart and Ampere,’ by T. A. Weber and D. J. Macomb [Am. J. Phys. 57, 57–59 (1989)]. *American Journal of Physics*, 58:505, 1990.
- [JM86] C. Jungnickel and R. McCormmach. *Intellectual Mastery of Nature — Theoretical Physics from Ohm to Einstein*, volume 1–2. University of Chicago Press, Chicago, 1986.
- [Jol85] D. C. Jolly. Identity of the Ampere and Biot-Savart electromagnetic force laws. *Physics Letters A*, 107:231–234, 1985.

- [KE91] C. S. Kenyon and W. F. Edwards. Test of current-dependent electric fields. *Physics Letters A*, 156:391–394, 1991.
- [Kir49] G. Kirchhoff. Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst. *Annalen der Physik*, 78:506–513, 1849. Reprinted in G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), pp. 49–55.
- [Kir50] G. Kirchhoff. On a deduction of Ohm's law in connexion with the theory of electrostatics. *Philosophical Magazine*, 37:463–468, 1850.
- [Kir57a] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in wires. *Philosophical Magazine*, 13:393–412, 1857.
- [Kir57b] G. Kirchhoff. Ueber die Bewegung der Elektrizität in Drähten. *Annalen der Physik*, 100:193–217, 1857. Reprinted in G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), pp. 131–154.
- [Kir57c] G. Kirchhoff. Ueber die Bewegung der Elektrizität in Leitern. *Annalen der Physik*, 102:529–544, 1857. Reprinted in G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), pp. 154–168.
- [Kir57] F. Kirchner. Determination of the velocity of light from electromagnetic measurements according to W. Weber and R. Kohlrausch. *American Journal of Physics*, 25:623–629, 1957.
- [KW57] R. Kohlrausch and W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitätsmessungen auf mechanisches Maass. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, 3:221–290, 1857. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 609–676.
- [Lau25] L. d. Launay. *Le Grand Ampère d'après des Documents Inédits*. Librairie Académique Perrin, Paris, 1925.
- [Lau36] L. d. Launay, 1936. *Correspondance du Grand Ampère*. Paris: Gauthier Villars. v. 2.
- [LEK92] D. K. Lemon, W. F. Edwards, and C. S. Kenyon. Electric potentials associated with steady conduction currents in superconducting coils. *Physics Letters A*, 162:105–114, 1992.
- [Len34] E. Lenz. Ueber die Bestimmung der Richtung der durch elektrodynamische Vertheilung erregten galvanischen Ströme. *Annalen der Physik*, 31:483–494, 1834.

- [Lor67] L. Lorenz. On the identity of the vibrations of light with electrical currents. *Philosophical Magazine*, 34:287–301, 1867.
- [Lor95] H. A. Lorentz. *Versuch einer Theorie der Electricischen und Optischen Erscheinungen in Bewegten Körpern*. E. J. Brill, Leiden, 1895. Abschnitt I (Die Grundgleichungen für ein System in den Aether eingelagerter Ionen), §12 (Der zweite Theil der auf die ponderable Materie wirkenden Kraft), pp. 21–22.
- [Lor15] H. A. Lorentz. *The Theory of Electrons*. Teubner, Leipzig, second edition, 1915. Reprinted in *Selected Works of H. A. Lorentz*, vol. 5, N. J. Nersessian (ed.), (Palm Publications, Nieuwerkerk, 1987).
- [Lor31] H. A. Lorentz. *Lectures on Theoretical Physics*, volume 3. MacMilan, London, 1931.
- [MA06] C. P. Magnaghi and A. K. T. Assis. Origem da corrente elétrica — a invenção da pilha. Trabalho realizado na disciplina Instrumentação para Ensino, F809, do Instituto de Física da Unicamp, disponível em: <[www.if.usp.br/~lunazzi/F530\F590\F690\F809\F895/F809/F809\\\_sem2\\\_2006/CenoP-Assis\\\_RF1.pdf](http://www.if.usp.br/~lunazzi/F530\F590\F690\F809\F895/F809/F809\_sem2\_2006/CenoP-Assis\_RF1.pdf)>, 2006.
- [MA08] C. P. Magnaghi and A. K. T. Assis. Sobre a eletricidade excitada pelo simples contato entre substâncias condutoras de tipos diferentes — Uma tradução comentada do artigo de Volta de 1800 descrevendo sua invenção da pilha elétrica. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 25:118–140, 2008.
- [Mac26] E. Mach. *The Principles of Physical Optics — An Historical and Philosophical Treatment*. E. P. Dutton and Company, New York, 1926. Reprinted by Dover, New York, in 1953.
- [Mac60] E. Mach. *The Science of Mechanics — A Critical and Historical Account of Its Development*. Open Court, La Salle, sixth edition, 1960. Tradução de J. McCormack.
- [Mar86] R. d. A. Martins. Ørsted e a descoberta do eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 10:89–114, 1986.
- [Mar90] S. Marinov. *The Thorny Way of Truth*, volume VIII. International Publishers East-West, Graz, 1990.
- [Max] J. C. Maxwell. On physical lines of force. *Philosophical Magazine*, Vol. 21, pp. 161–175, 281–291 and 338–348 (1861); Vol. 23, pp. 12–24 and 85–95 (1862).

- [Max65] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions*, 155:459–512, 1865. Doi: 10.1098/rstl.1865.0008.
- [Max68] J. C. Maxwell. On a method of making a direct comparison of electrostatic with electromagnetic force; with a note on the electromagnetic theory of light. *Philosophical Transactions*, 158:643–657, 1868.
- [Max54] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover, New York, 1954.
- [Max65a] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. In W. D. Niven, editor, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, pages 526–597 (vol. 1), New York, 1965. Dover. Article originally published in 1864.
- [Max65b] J. C. Maxwell. On a method of making a direct comparison of electrostatic with electromagnetic force; with a note on the electromagnetic theory of light. In W. D. Niven, editor, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, pages 125–143 (vol. 2), New York, 1965. Dover. Article originally published in 1868.
- [Max65c] J. C. Maxwell. On Faraday’s lines of force. In W. D. Niven, editor, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, pages 155–229 (vol. 1), New York, 1965. Dover. Article originally published in 1855.
- [Max65d] J. C. Maxwell. On physical lines of force. In W. D. Niven, editor, *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, pages 451–513 (vol. 1), New York, 1965. Dover. Article originally published in 1861/2.
- [Moy89a] P. G. Moyssides. Calculation of the sixfold integrals of the Ampere force law in a closed circuit. *IEEE Transactions on Magnetism*, 25:4307–4312, 1989.
- [Moy89b] P. G. Moyssides. Calculation of the sixfold integrals of the Biot-Savart-Lorentz force law in a closed circuit. *IEEE Transactions on Magnetism*, 25:4298–4306, 1989.
- [Moy89c] P. G. Moyssides. Experimental verification of the Biot-Savart-Lorentz and Ampere force laws in a closed circuit, revisited. *IEEE Transactions on Magnetism*, 25:4313–4321, 1989.
- [MS54a] P. Moon and D. E. Spencer. The Coulomb force and the Ampère force. *Journal of the Franklin Institute*, 257:305–315, 1954.
- [MS54b] P. Moon and D. E. Spencer. Interpretation of the Ampère experiments. *Journal of the Franklin Institute*, 257:203–220, 1954.



- [MS54c] P. Moon and D. E. Spencer. A new electrodynamics. *Journal of the Franklin Institute*, 257:369–382, 1954.
- [MS55] P. Moon and D. E. Spencer. On the Ampère force. *Journal of the Franklin Institute*, 260:295–311, 1955.
- [MSUM91] P. Moon, D. E. Spencer, S. Y. Uma, and P. J. Mann. The validity of Gaussian electrodynamics. In G. Rassias *et al.*, editor, *The Mathematical Heritage of C. F. Gauss*, pages 517–525, Singapore, 1991. World Scientific Publications Co.
- [Nas85] J. Nasilowski. A note on longitudinal Ampere forces in gaseous conductors. *Physics Letters A*, 111:315–316, 1985.
- [Neu80] C. Neumann. Die Principien der Elektrodynamik. *Mathematischen Annalen*, 17:400–434, 1880. Reprint of original article of 1868.
- [New52] I. Newton. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, volume 34, pp. 1-372 of *Great Books of the Western World*. Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952. Traduzido por A. Motte e revisado por F. Cajori.
- [New90] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Nova Stella/Edusp, São Paulo, 1990. Livro I: O Movimento dos Corpos. Tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia.
- [New96] I. Newton. *Óptica*. Edusp, São Paulo, 1996. Tradução, introdução e notas de A. K. T. Assis. ISBN: 8531403405.
- [New08] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Edusp, São Paulo, 2008. Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência). Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis. ISBN: 9788531410895.
- [New10] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Folha de São Paulo, São Paulo, 2010. Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis. ISBN: 9788563270306. Coleção Folha de São Paulo: Livros que Mudaram o Mundo, Volume 9.
- [Nor07] E. F. Northrup. Some newly observed manifestations of forces in the interior of an electric conductor. *Physical Review*, 24:474–497, 1907.
- [Nor65] J. D. North. *The Measure of the Universe — A History of Modern Cosmology*. Clarendon Press, Oxford, 1965.

- [Ohm66] G. S. Ohm. The galvanic circuit investigated mathematically. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 401–506, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation. English translation by W. Francis.
- [O’R65] A. O’Rahilly. *Electromagnetic Theory — A Critical Examination of Fundamentals*. Dover, New York, 1965.
- [Ørs86] H. C. Ørsted. Experiências sobre o efeito do conflito elétrico sobre a agulha magnética. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 10:115–122, 1986. Tradução de R. d. A. Martins.
- [Pai82] A. Pais. ‘*Subtle is the Lord...*’ — *The Science and the Life of Albert Einstein*. Oxford University Press, Oxford, 1982.
- [Pai86] A. Pais. *Inward Bound — Of Matter and Forces in the Physical World*. Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [Pap83] P. T. Pappas. The original Ampère force and Biot-Savart and Lorentz forces. *Il Nuovo Cimento B*, 76:189–197, 1983.
- [Pap90] P. T. Pappas. The nonequivalence of the Ampère and Lorentz/Grassmann force laws and longitudinal contact interactions. *Physics Essays*, 3:15–23, 1990.
- [Peo88] V. Peoglos. Measurement of the magnetostatic force of a current circuit on a part of itself. *Journal of Physics D*, 21:1055–1061, 1988.
- [Phi90a] T. E. Phipps Jr. New evidence for Ampère longitudinal forces. *Physics Essays*, 3:198–206, 1990.
- [Phi90b] T. E. Phipps Jr. Toward modernization of Weber’s force law. *Physics Essays*, 3:414–420, 1990.
- [Phi90c] T. E. Phipps Jr. Weber-type laws of action-at-a-distance in modern physics. *Apeiron*, 8:8–14, 1990.
- [Phi92] T. E. Phipps Jr. Derivation of a modernized Weber force law. *Physics Essays*, 5:425–428, 1992.
- [Phi93] T. E. Phipps Jr. Ampere tension and Newton’s laws. *Apeiron*, 17:1–5, 1993.
- [PK74] J. M. Pearson and A. Kilambi. Velocity-dependent nuclear forces and Weber’s electrodynamics. *American Journal of Physics*, 42:971–975, 1974.

- [PM85] P. T. Pappas and P. G. Moysides. On the fundamental laws of electrodynamics. *Physics Letters A*, 111:193–198, 1985.
- [Pou64] L. Poudensan. *Ampère, un Savant dans le Texte*. Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [PP62] W. K. H. Panofsky and M. Phillips. *Classical Electricity and Magnetism*. Addison-Wesley, Reading, 2nd edition, 1962.
- [PP90] T. E. Phipps and T. E. Phipps Jr. Observation of Ampère forces in mercury. *Physics Letters A*, 146:6–14, 1990.
- [Pur65] E. M. Purcell. *Electricity and Magnetism*, volume 2 of *Berkeley Physics Course*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [Ram91] M. Rambaut. Macroscopic non-relativistic Ampère EM interactions between current elements reflect the conducting electron accelerations by the ion’s electric fields. *Physics Letters A*, 154:210–214, 1991.
- [Rib08] J. E. A. Ribeiro. Sobre a Força de Lorentz, os Conceitos de Campo e a “Essência” do Eletromagnetismo Clássico. Master’s thesis, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Brasil, 2008.
- [Rie67] B. Riemann. A contribution to electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 34:368–372, 1867. This text was written in 1858.
- [Rie66] P. Riess. On the incandescence and fusion of metallic wires by electricity. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 4, pages 432–475, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation. Extract from a paper read before the Academy of Sciences of Berlin, 1845.
- [Rie77a] B. Riemann. A contribution to electrodynamics. In C. White, *Energy Potential: Toward a New Electromagnetic Field Theory*, pages 295–300, New York, 1977. Campaigner.
- [Rie77b] B. Riemann. Gravity, electricity, and magnetism. In C. White, *Energy Potential: Toward a New Electromagnetic Field Theory*, pages 173–293, New York, 1977. Campaigner.
- [RM67] J. R. Reitz and F. J. Milford. *Foundations of Electromagnetic Theory*. Addison-Wesley, Reading, 2nd edition, 1967.
- [Roh65] F. Rohrlich. *Classical Charged Particles — Foundations of Their Theory*. Addison-Wesley, Reading, 1965.
- [Ros57] L. Rosenfeld. The velocity of light and the evolution of electrodynamics. *Il Nuovo Cimento*, Supplement to vol. 4:1630–1669, 1957.

- [Ros64] W. G. V. Rosser. *An Introduction to the Theory of Relativity*. Butterworths, London, 1964.
- [Ros81] L. Rosenfeld. Kirchhoff, Gustav Robert. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 7, pages 379–383, New York, 1981. Charles Scribner’s Sons.
- [RS92] A. E. Robson and J. D. Sethian. Railgun recoil, Ampere tension, and the laws of electrodynamics. *American Journal of Physics*, 60:1111–1117, 1992.
- [San85] R. Sansbury. Detection of a force between a charged metal foil and a current-carrying conductor. *Review of Scientific Instruments*, 56:415–417, 1985.
- [Sau91] R. Saumont. Effects mécaniques du courant électrique dans les milieux conducteurs. *Comptes Rendues de l’Académie des Sciences de Paris*, 313:389–392, 1991.
- [Sau92] R. Saumont. Mechanical effects of an electrical current in conductive media. 1. Experimental investigation of the longitudinal Ampère force. *Physics Letters A*, 165:307–313, 1992.
- [Sch25] E. Schrödinger. Die Erfüllbarkeit der Relativitätsforderung in der klassischen Mechanik. *Annalen der Physik*, 77:325–336, 1925.
- [Sch95] E. Schrödinger. The possibility of fulfillment of the relativity requirement in classical mechanics. In J. B. Barbour and H. Pfister, editors, *Mach’s Principle — From Newton’s Bucket to Quantum Gravity*, pages 147–158, Boston, 1995. Birkhäuser. Translated by J. B. Barbour.
- [Sea67] F. W. Sears. *Física*, volume 2. Livro Técnico, Rio de Janeiro, 1967.
- [See] C. Seegers. De motu perturbationibusque planetarum secundum legem electrodynamicam Weberianam solem ambientium. Dissertation, Göttingen, 1864.
- [See24] C. Seegers. *Über die Bewegung und die Störungen der Planeten, wenn dieselben sich nach dem Weberschen elektrodynamischen Gesetz um die Sonne bewegen*. Kommissionsverlag von Friedr. Viewweg & Sohn Akt. Ges., Braunschweig, 1924. Neu herausgegeben von P. Heylandt. Übersetzt von F. Diestel.
- [Ser] A. Servus, Untersuchungen über die Bahn und die Störungen der Himmelskörper mit Zugrundelegung des Weber’schen electrodynamischen Gesetzes. Dissertation, Halle, 1885.

- [Sin92] A. K. Singal. On the charge invariance and relativistic electric fields from a steady conduction current. *Physics Letters A*, 162:91–95, 1992.
- [SM96] C. C. Silva and R. d. A. Martins. A “Nova teoria sobre luz e cores” de Isaac Newton: uma tradução comentada. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 18:313–327, 1996.
- [Str89] J. Strnad. Stefan’s equations of electrodynamics. *European Journal of Physics*, 10:276–280, 1989.
- [Str92] V. N. Strel’tsov. The electric field of a current-carrying conductor. *Hadronic Journal*, 15:457–461, 1992.
- [SU91] D. E. Spencer and S. Y. Uma. Gauss and the electrodynamic force. In G. Rassias *et al.*, editor, *The Mathematical Heritage of C. F. Gauss*, pages 685–715, Singapore, 1991. World Scientific Publication Co.
- [Sym71] K. R. Symon. *Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, third edition, 1971.
- [Sym82] K. R. Symon. *Mecânica*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 5<sup>a</sup> ed., 1982. Tradução de G. B. Batista.
- [Ter85a] J. G. Ternan. Equivalence of the Lorentz and Ampere force laws in magnetostatics. *Journal of Applied Physics*, 57:1743–1745, 1985.
- [Ter85b] J. G. Ternan. Reply to “Comments on ‘Equivalence of the Lorentz and Ampere laws in magnetostatics’ ” [J. Appl. Phys. 57, 1743 (1985)]. *Journal of Applied Physics*, 58:3639, 1985.
- [Tho81] J. J. Thomson. On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies. *Philosophical Magazine*, 11:229–249, 1881.
- [Tho85] J. J. Thomson. Report on electrical theories. *Report of the British Association for the Advancement of Science (B. A. Report)*, pages 97–155, 1885.
- [Tho89] J. J. Thomson. On the magnetic effects produced by motion in the electric field. *Philosophical Magazine*, 28:1–14, 1889.
- [Tho93] D. S. Thober. Lei de Weber e indução de correntes. Master’s thesis, Institute of Physics of the University of Campinas — UNICAMP, Campinas, Brasil, 1993.
- [Tip84] P. A. Tipler. *Física*, volume 2a. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 2<sup>a</sup> edição, 1984.

- [Tis72] F. Tisserand. Sur le mouvement des planètes autour du soleil, d'après la loi électrodynamique de Weber. *Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de Paris*, 75:760–763, 1872.
- [Tis95] F. F. Tisserand. *Traité de Mécanique*, volume 4, Chapter 28 (Vitesse de propagation de l'attraction), pp. 499-503, “Loi d'attraction conforme à la loi électrodynamique de Weber”. Gauthier-Villars, Paris, 1895.
- [toma] F. D. Tombe. Maxwell's original equations. *The General Science Journal* (2012). Disponível em: <<http://www.gsjournal.net/Science-Journals/Essays/View/3889>>.
- [tomb] F. D. Tombe. The significance of Maxwell's equations. *The General Science Journal* (2012). Disponível em: <<http://www.gsjournal.net/Science-Journals/Essays/View/4258>>.
- [Tri62] R. A. R. Tricker. Ampère as a contemporary physicist. *Contemporary Physics*, 3:453–468, 1962.
- [Tri65] R. A. R. Tricker. *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*. Pergamon, Oxford, 1965.
- [Tri66] R. A. R. Tricker. *The Contributions of Faraday and Maxwell to Electrical Sciences*. Pergamon, New York, 1966.
- [VF80] R. N. Varney and L. H. Fisher. Electromotive force: Volta's forgotten concept. *American Journal of Physics*, 48:405–408, 1980.
- [Wal91] R. A. Waldron. Notes on the form of the force law. *Physics Essays*, 4:247–248, 1991.
- [Web37] W. Weber. Bemerkungen über die Einrichtung und den Gebrauch des Bifilar-Magnetometers. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, 1837, II*, pages 20–37. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1837. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), pp. 43-57.
- [Web38] W. Weber. Das transportable Magnetometer. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, 1838, III*, pages 68–85. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1838. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), pp. 89-104.

- [Web46] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen — Über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung. *Abhandlungen bei Begründung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtstagfeier Leibniz's herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft (Leipzig)*, pages 211–378, 1846. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 25–214.
- [Web48a] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:193–240, 1848. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 215–254.
- [Web48b] W. Weber. Über die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus nach den Gesetzen inducirter Ströme. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:241–256, 1848. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 255–268.
- [Web51] W. Weber. Messungen galvanischer Leitungswiderstände nach einem absolutem Maasse. *Annalen der Physik und Chemie*, 82:337–369, 1851. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 276–300.
- [Web52a] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über Diamagnetismus. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, 1:485–577, 1852. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 473–554.
- [Web52b] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, 1:199–381, 1852. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 301–471.
- [Web52c] W. Weber. Üeber den Zusammenhang der Lehre vom Diamagnetismus mit der Lehre von dem Magnetismus und der Elektrizität. *Annalen der Physik und Chemie*, 87:145–189, 1852. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 555–590.
- [Web55a] W. Weber. On the theory of diamagnetism — Letter from Professor Weber to Prof. Tyndall. *Philosophical Magazine*, 10:407–410, 1855.

- [Web55b] W. Weber. Vorwort bei der Übergabe der Abhandlung: *Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, 17:55–61, 1855. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 591-596.
- [Web61] W. Weber. On the measurement of electric resistance according to an absolute standard. *Philosophical Magazine*, 22:226–240 and 261–269, 1861.
- [Web64] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über elektrische Schwingungen. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse*, 6:571–716, 1864. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), pp. 105-241.
- [Web71] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse (Leipzig)*, 10:1–61, 1871. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), pp. 247-299.
- [Web72] W. Weber. Electrodynamic measurements — Sixth memoir, relating specially to the principle of the conservation of energy. *Philosophical Magazine*, 43:1–20 and 119–149, 1872.
- [Web78] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über die Energie der Wechselwirkung. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, (Leipzig)*, 11:641–696, 1878. Reprinted in Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), pp. 361-412.
- [Web92a] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, E. Riecke (ed.), volume 2, *Magnetismus*. Springer, Berlin, 1892.
- [Web92b] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, W. Voigt, (ed.), volume 1, *Akustik, Mechanik, Optik und Wärmelehre*. Springer, Berlin, 1892.
- [Web93] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, H. Weber (ed.), volume 3, *Galvanismus und Elektrodynamik*, first part. Springer, Berlin, 1893.



- [Web94a] W. Weber. Aphorismen. In H. Weber, editor, *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pages 630–632, Berlin, 1894. Springer.
- [Web94b] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über den Zusammenhang des elektrischen Grundgesetzes mit dem Gravitationsgesetze. In H. Weber, editor, *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pages 479–525, Berlin, 1894. Springer.
- [Web94c] W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, H. Weber, (ed.), volume 4, *Galvanismus und Elektrodynamik*, second part. Springer, Berlin, 1894.
- [Web66a] W. Weber. An extract from remarks on the term-observations for 1839, of the German Magnetic Association. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 587–588, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Web66b] W. Weber. Observations on the arrangement and use of the bifilar magnetometer. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 268–280, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Web66c] W. Weber. On a transportable magnetometer. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 2, pages 565–586, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Web66d] W. Weber. On the connexion of diamagnetism with magnetism and electricity. In J. Tyndall and W. Francis, editors, *Scientific Memoirs*, Vol. 7, pages 163–199, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Web66e] W. Weber. On the excitation and action of diamagnetism according to the laws of induced currents. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 5, pages 477–488, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Web66f] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs*, Vol. 5, pages 489–529, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.
- [Web97] W. Weber. Aphorisms. *21st Century*, 10(2):50–53, 1997. English translation by J. Tennenbaum.
- [Web07] W. Weber, 2007. Determinations of electrodynamic measure: concerning a universal law of electrical action, *21st Century Science & Technology*, traduzido para a língua inglesa por S. P. Johnson, editado por L. Hecht e A. K. T. Assis. Disponível desde março de 2007 em: <<http://www.21stcenturysciencetech.com/translation.html>>.

- [Web08] W. Weber, 2008. Determinations of electrodynamic measure: particularly in respect to the connection of the fundamental laws of electricity with the law of gravitation, 21st Century Science & Technology, traduzido para a língua inglesa por G. Gregory, editado por L. Hecht e A. K. T. Assis. Disponível desde novembro de 2008 em: <<http://www.21stcenturysciencetech.com/translation.html>>.
- [Wes87a] J. P. Wesley. Ampere's original force law compared with the Moyssides-Pappas results. In J. P. Wesley, editor, *Progress in Space-Time Physics 1987*, pages 170–180, Blumberg, 1987. Benjamin Wesley Publisher.
- [Wes87b] J. P. Wesley. Weber electrodynamics extended to include radiation. *Speculations in Science and Technology*, 10:47–61, 1987.
- [Wes89] J. P. Wesley. On Peoglos' measurement of the force on a portion of a current loop due to the remainder of the loop. *Journal of Physics D*, 22:849–850, 1989.
- [Wes90a] J. P. Wesley. Evidence for Weber-Wesley electrodynamics. In U. Bartocci and J. P. Wesley, editors, *Proceedings of the Conference on Foundations of Mathematics and Physics*, pages 289–343, Blumberg, 1990. Benjamin Wesley Publisher.
- [Wes90b] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part I. General theory, steady current effects. *Foundations of Physics Letters*, 3:443–469, 1990.
- [Wes90c] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part II. Unipolar induction, Z-antenna. *Foundations of Physics Letters*, 3:471–490, 1990.
- [Wes90d] J. P. Wesley. Weber electrodynamics, Part III. Mechanics, gravitation. *Foundations of Physics Letters*, 3:581–605, 1990.
- [Wes91] J. P. Wesley. *Selected Topics in Advanced Fundamental Physics*. Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, 1991.
- [Whi73] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 1: *The Classical Theories*. Humanities Press, New York, 1973.
- [Whi77] C. White. *Energy Potential: Toward a New Electromagnetic Field Theory*. Campaigner, New York, 1977.
- [Whi88] C. K. Whitney. Current elements in relativistic field theory. *Physics Letters A*, 128:232–234, 1988.

- [Wie60] K. H. Wiederkehr. Wilhelm Webers Stellung in der Entwicklung der Elektrizitätslehre. Dissertation, Hamburg, 1960.
- [Wie67] K. H. Wiederkehr. *Wilhelm Eduard Weber — Erforscher der Wellenbewegung und der Elektrizität (1804-1891)*, volume 32 of *Grosse Naturforscher*, H. Degen (ed.). Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1967.
- [Wie93] K. H. Wiederkehr. Das Experiment von Wilhelm Weber und Rudolf Kohlrausch 1855 und Maxwells elektromagnetische Lichttheorie. In W. Schröder, editor, *The Earth and the Universe (A Festschrift in honour of Hans-Jürgen Treder)*, pages 452–463. Interdivisional Commission on History of the International Association of Geomagnetism and Aeronomy, Bremen-Rönnebeck, 1993.
- [Wie94] K. H. Wiederkehr. Wilhelm Weber und Maxwells elektromagnetische Lichttheorie. *Gesnerus, Part. 3/4*, 51:256–267, 1994.
- [Wie04] K. H. Wiederkehr. Ein bisher unveröffentlichter Brief von Rudolf Kohlrausch an Andreas v. Ettingshausen von 1854, das Kohlrausch-Weber-Experiment von 1854/55 und die Lichtgeschwindigkeit in Wilhelm Webers Elektrodynamik. *NTM International Journal of History and Ethics of Natural Sciences, Technology and Medicine*, 12:129–145, 2004.
- [Wil81] L. P. Williams. Ampère, André-Marie. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 1, pages 139–147, New York, 1981. Charles Scribner’s Sons.
- [Wis81] M. N. Wise. German concepts of force, energy, and the electromagnetic ether: 1845–1880. In G. N. Cantor and M. J. S. Hodge, editors, *Conceptions of Ether — Studies in the History of Ether Theories 1740–1900*, pages 269–307, Cambridge, 1981. Cambridge University Press.
- [WK56] W. Weber and R. Kohlrausch. Über die Elektrizitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fließt. *Annalen der Physik und Chemie*, J. C. Poggendorff (ed.), 99:10–25, 1856. Reprinted in Wilhelm Weber’s *Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), pp. 597–608.
- [WK68] W. Weber and R. Kohlrausch. Über die Einführung absoluter elektrischer Maße. In S. Balke, H. Gericke, W. Hartner, G. Kerstein, F. Klemm, A. Portmann, H. Schimank, and K. Vogel, editors, *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*, new series, Vol. 5. Friedrich-Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1968. Commented by F. Kohlrausch and K. H. Wiederkehr.

- [WK03] W. Weber and R. Kohlrausch. On the amount of electricity which flows through the cross-section of the circuit in galvanic currents. In F. Bevilacqua and E. A. Giannetto, editors, *Volta and the History of Electricity*, pages 287–297. Università degli Studi di Pavia and Editore Ulrico Hoepli, Milano, 2003. Traduzido por S. P. Johnson. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [WK08] W. Weber and R. Kohlrausch. Sobre a quantidade de eletricidade que flui através da seção reta do circuito em correntes galvânicas. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 1:94–102, 2008. Traduzido por A. K. T. Assis.
- [WM89] T. A. Weber and D. J. Macomb. On the equivalence of the laws of Biot-Savart and Ampere. *American Journal of Physics*, 57:57–59, 1989.
- [Woo68] A. E. Woodruff. The contributions of Hermann von Helmholtz to electrodynamics. *Isis*, 59:300–311, 1968.
- [Woo81] A. E. Woodruff. Weber, Wilhelm Eduard. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 14, pages 203–209, New York, 1981. Charles Scribner's Sons.
- [WW93] E. H. Weber and W. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, E. Riecke (ed.), volume 5, *Wellenlehre auf Experimente gegründet oder über die Wellen tropfbarer Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Schall- und Lichtwellen*. Springer, Berlin, 1893. Originally published in 1825.
- [WW94] W. Weber and E. Weber. *Wilhelm Weber's Werke*, F. Merkel and O. Fischer (editors), volume 6, *Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Eine anatomisch-physiologische Untersuchung*. Springer, Berlin, 1894. Originally published in 1836.
- [WW92] W. Weber and E. Weber. *Mechanics of the Human Walking Apparatus*. Springer, Berlin, 1992. Translated by P. Maquet and R. Furlong.
- [XA94] A. L. Xavier Jr. and A. K. T. Assis. O cumprimento do postulado de relatividade na mecânica clássica — uma tradução comentada de um texto de Erwin Schrödinger sobre o princípio de Mach. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 12:3–18, 1994. Errata disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)>.
- [Zol76] J. C. F. Zollner. *Principien einer elektrodynamischen Theorie der Materie*. Engelmann, Leipzig, 1876.

- [Zol83] J. C. F. Zollner. *Über die Natur der Cometen — Beiträge zur Geschichte und Theorie der Erkenntniss*. L. Staackmann, Leipzig, 3rd edition, 1883. First edition of 1872.
- [ZS38] C. T. Zahn and A. H. Spees. A critical analysis of the classical experiments on the relativistic variation of electron mass. *Physical Review*, 53:511–521, 1938.

Errata do livro de A. K. T. Assis, “Eletrodinâmica de Weber: Teoria, Aplicações e Exercícios” (Editora da Unicamp, Campinas, 2ª edição, 2015). e-ISBN: 978-85-268-1240-6.

Disponível em [www.ifi.unicamp.br/~assis](http://www.ifi.unicamp.br/~assis)

Agradeço a Fabio M. d. S. Lima e a João Paulo M. d. C. Chaib por essas correções.

- Pág. 55, a primeira linha abaixo da Equação (2.11) deve ser substituída por:

Existem situações nas quais  $\dot{r}_{ij}$  poderá ser diferente de  $\sqrt{\vec{v}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij}} = (x_{ij}^2 +$

- Pág. 171, a Equação (C.1) deve ser substituída por:

$$\vec{F}_{21}^G = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{\hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \left[ 1 + \frac{1}{c^2} \left[ \vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - \frac{3}{2} (\hat{r}_{12} \cdot \vec{v}_{12})^2 \right] \right] = -\vec{F}_{12}^G .$$

- Pág. 172, a Equação (C.4) deve ser substituída por:

$$\vec{F}_{21}^R = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{r_{12}^2} \left[ \left( 1 + \frac{\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12}}{2c^2} \right) \hat{r}_{12} - \frac{\dot{r}_{12}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{c^2} + \frac{r_{12}(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)}{c^2} \right] = -\vec{F}_{12}^R .$$

Título      Eletrodinâmica de Weber: Teoria, aplicações e exercícios

Autores      André K. T. Assis

Assistente técnico de direção	José Emílio Maiorino
Coordenador editorial	Ricardo Lima
Secretário gráfico	Ednilson Tristão
Preparação dos originais	Rosa Dalva V. do Nascimento
Revisão	Vera Luciana Morandim
	Jeverson Barbieri
	Ivana Albuquerque Mazetti
Editoração eletrônica	André K. T. Assis
Design de capa	Ana Basaglia
Formato	21 x 28 cm
Papel	Offset 75 g/m <sup>2</sup> – miolo
	Cartão supremo 250 g/m <sup>2</sup> – capa
Número de páginas	214

**A** intenção básica do autor deste livro é apresentar a eletrodinâmica de Weber. O livro procura complementar a cultura do leitor sobre a eletrodinâmica de Maxwell, dado que o próprio Maxwell afirmava e mostrava que a lei de Weber é compatível com as suas equações. Apoiado nesta afirmação, o autor mostra como se derivam as equações de Maxwell a partir da força de Weber. O livro destina-se a estudantes dos últimos dois anos de um curso de graduação em física, engenharia ou matemática, ou a estudantes que estejam nos dois primeiros anos de pós-graduação e que ainda não tenham se familiarizado com o assunto.

