

## Relatório Final

F 609 – Tópicos de Ensino de Física I

08 de julho de 2008

Título: Experimento do Plano Inclinado de Galileu



Nome: Gilberto Pessato Junior

RA:048786

e-mail: [gibapessato@gmail.com](mailto:gibapessato@gmail.com)

### ORIENTADOR DO PROJETO

Prof. Dr. André Koch Torres de Assis

IFGW-Unicamp

e-mail: [assis@ifi.unicamp.br](mailto:assis@ifi.unicamp.br)

Sítio: [www.ifi.unicamp.br/~assis/](http://www.ifi.unicamp.br/~assis/)

### COORDENADOR DA DISCIPLINA

Prof. Dr. José Joaquim Lunazzi

IFGW-Unicamp

e-mail: [lunazzi@ifi.unicamp.br](mailto:lunazzi@ifi.unicamp.br)

Sítio: [www.ifi.unicamp.br/~lunazzi](http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi)

## **Índice**

**Resumo**

**1) Introdução**

**2) Projeto**

**3) Experimento**

**a. Montagem Experimental**

**4) Resultados**

**5) Conclusões**

**6) Agradecimentos**

**7) Bibliografia**

**8) Apêndices**

**a. Queda Livre**

**b. Plano Inclinado Sem Atrito**

**c. Plano Inclinado Com Atrito (movimento de rotação da esfera)**

**d. Relações Matemáticas entre os Três Casos Anteriores**

## Resumo

O presente trabalho buscou reproduzir o experimento do plano inclinado de Galileu a fim de verificar a compatibilidade entre teoria e prática. Além disso, os resultados deste trabalho foram comparados às conclusões do experimento realizado por Galileu, para uma análise mais aprofundada do tema. Para ampliar o estudo realizado por Galileu, foram aplicados outros conceitos ao presente trabalho, como movimento uniformemente acelerado, conservação de energia e leis de Newton.

### 1) Introdução

O cientista Galileu Galilei (1564-1642) viveu na Itália. Ele é considerado um grande ícone da ciência moderna. Galileu realizou vários experimentos. Chegou na lei de oscilação de um pêndulo simples, na lei do movimento de projéteis e aperfeiçoou o telescópio.

Em seu último livro, *Duas Novas Ciências* (1638), há descrições sobre o comportamento de pêndulos, resistências de materiais, movimento uniforme, queda livre e movimento em um plano inclinado.

### 2) Projeto

**Descrição:** Reprodução do experimento do plano inclinado realizado por Galileu (1564-1642), de acordo com as descrições contidas em seu livro “*Duas Novas Ciências*”, publicado originalmente em 1638, [Galileu, 1988, págs. 140-141].

Pretendemos neste projeto reproduzir a experiência do plano inclinado de Galileu. O experimento consiste em uma esfera descendo por uma rampa inclinada de aproximadamente 8 metros de comprimento. Galileu media o tempo gasto para a esfera percorrer diferentes distâncias. Obteve experimentalmente que “os espaços percorridos estavam entre si como os quadrados dos tempos e isso em todas as inclinações do plano, ou seja, da canaleta, pela qual se fazia descer a bola.”

Esta experiência tem uma grande importância na história da mecânica. Com ela pretendemos chamar atenção para o trabalho experimental de Galileu e tentar uma comprovação moderna dos seus resultados. Além disso, pretendemos discutir a influência da força de atrito, a energia cinética de rotação da esfera de aço, e a eficiência dos diferentes métodos de medida do tempo.

### 3) Experimento

A construção da rampa será composta por quatro caibros de 2 metros de comprimento cada, sendo unidos por uma abraçadeira de ferro. Será colocado em uma

das extremidades da rampa suportes de ferro para deixar o plano inclinado, como ilustrado abaixo.

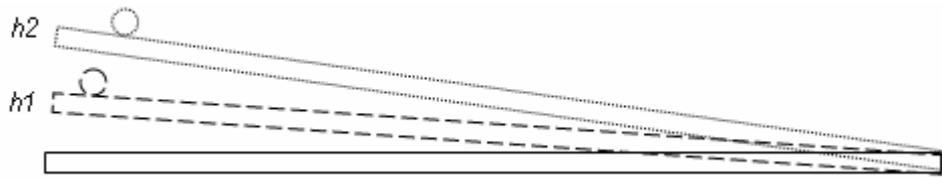


Figura 01: Vista lateral da rampa.

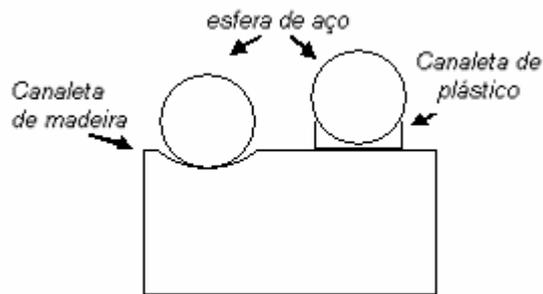


Figura 02: Vista frontal da rampa.

#### Lista de Materiais:

- Caibro de madeira
- Canaleta plástica
- Esfera de aço
- Suporte de metal
- Parafusos com porcas
- Chapa metálica para fixação
- Fita dupla face
- Balde plástico de 8 litros
- Pêndulo
- Proveta de 10 ml
- Trena
- Copos de plástico
- Cronômetro digital

Serão construídas canaletas de dois tipos de materiais: uma de madeira e outra de plástico (tipo sistema-x). Para as medidas de tempo serão utilizados quatro tipos de relógio: (A) Cronômetro digital, (B) relógio de água, (C) pêndulo e (D) pulso cardíaco.

(A) O cronômetro será utilizado por ser um dos instrumentos de medida de tempo mais precisos. (B) O relógio de água será feito com um balde de 8 litros, com um orifício no fundo de tamanho suficiente (diâmetro =  $\pm 4,5$  mm) para que haja um fluxo contínuo de água. Durante a marcação de tempo o líquido será armazenado em um frasco para que seja medido o volume da água que cai durante a descida da esfera. Galileu em sua experiência mediu o peso de água acumulada. A idéia é que haja um fluxo contínuo de água. Assim o tempo durante a queda da esfera é proporcional ao peso (ou ao volume) de água armazenada. Em nossa experiência mediremos o volume de água em vez de seu peso devido ao difícil acesso a uma balança de precisão e seu alto custo. Para medir o volume de água acumulada será utilizada uma proveta. (C) O pêndulo será feito com uma linha flexível e resistente e uma chumbada presa em uma de suas extremidades. Matematicamente é possível determinar o período de um pêndulo.. (D) O pulso cardíaco será sempre da mesma pessoa para que não haja discrepância nas medidas devido à diferença de pressão arterial de pessoa para pessoa.

Será realizada ao menos uma centena de medidas para cada tipo de marcador de tempo, para que se possa diminuir ao máximo o erro. Durante a realização do experimento serão necessárias duas pessoas para que uma anote os tempos enquanto a outra avise quando a esfera ultrapassar a marca desejada.

Um dos objetivos da experiência é o de confirmar o resultado de Galileu que “os espaços percorridos estavam entre si como os quadrados dos tempos”. Na análise da experiência não será feita a conversão, propositalmente, do período do pêndulo de oscilações para segundos, nem da frequência cardíaca de batimentos para segundos, ou determinar a vazão de água em ml por segundo. Desta forma procura-se mostrar que a unidade de tempo utilizada não importa. O que é relevante é que, independente da maneira com a qual o tempo foi medido, a afirmação de Galileu deve persistir quando o tempo é medido corretamente.

### a) Montagem experimental

O comprimento total da rampa é de 8 metros (Figura 03). Para ser possível seu transporte ela foi construída por 4 caibros de  $\pm 2,0$  m de comprimento. Para conectá-los uns aos outros foi construído em uma oficina uma abraçadeira de metal (Figura 04), onde duas chapas de metal são presas por parafusos com porca. Para a elevação vertical de uma extremidade da rampa foram construídos três suportes com barras de roscas inteiras (Figura 05), prendendo uma chapa de metal com porcas. Para diminuir o atrito da esfera entre as rampas, estas foram limpas com um pano seco e enceradas com cera de móveis para uso geral.



Figura 03: Vista frontal e lateral da rampa inclinada.



Figura 04: Abraçadeira para fixar os caibros.



Figura 05: Suporte para a rampa.

Foi utilizada uma esfera de ferro ( $m = 77,9$  g e diâmetro =  $\pm 27$  mm) para rolar pela rampa, uma proveta de vidro (10 ml) para medir o volume de água acumulada durante a queda (relógio de água), e um pêndulo simples ( $m = 43,7$  g e comprimento =  $\pm 195$  mm) para medir o número de oscilações durante a queda (relógio de pêndulo).

#### 4) Resultados

O experimento foi realizado com duas inclinações da rampa. Utilizamos ângulos  $\theta$  de  $2,5^\circ$  e  $5,0^\circ$ , aproximadamente. Estas medidas de ângulo são similares às utilizadas por Galileu.

Para determinar a inclinação foi consultado o livro “Duas Novas Ciências” de Galileu, [Galileu, 1988, págs. 140-141]. Ele utilizou uma rampa com 12 braças de comprimento e elevou uma de suas extremidades em 1 braça ou em 2 braças. Logo o seno do ângulo de inclinação que utilizou foi de  $\text{sen } \theta = 1/12$  ( $\theta = 4,8^\circ$ ), ou  $\text{sen } \theta = 2/12 = 1/6$  ( $\theta = 9,6^\circ$ ). No nosso experimento foi acrescentada a proporção de  $\text{sen } \theta = 1/24$  ( $\theta = 2,5^\circ$ ) para obter mais dados. Para menores ângulos a esfera se desloca com velocidade menor, sendo mais fácil cronometrar seu percurso.

Para diminuir o erro do tempo inicial de referência, foi realizado cerca de 50 lançamentos (cronômetro, pêndulo e pulso) para a medição dos tempos para um comprimento de percurso de  $L = 2$  m, para que o erro não prejudique significativamente os dados obtidos.

Nas Tabelas abaixo apresentamos na primeira coluna os espaços  $L$  percorridos pela esfera ( $L = 2$  m, 4 m, 6 m e 8 m). Na segunda coluna temos os tempos médios  $T$  medidos para percorrer estes espaços. Na terceira coluna temos os quadrados destes

tempos. Na quarta coluna temos os espaços percorridos normalizados em relação ao menor espaço percorrido (o menor espaço percorrido sendo de 2 m). Na quinta coluna temos os quadrados de tempo normalizados em relação ao quadrado do tempo para percorrer a menor distância de 2 m.

De acordo com Galileu, [Galileu, 1988, págs. 140-141]: “Os espaços percorridos estavam entre si como os quadrados dos tempos.” Isto é, espera-se que os espaços percorridos normalizados sejam iguais aos quadrados normalizados dos tempos. Para verificar se isto vale ou não vale, apresentamos na sexta coluna as diferenças percentuais em relação aos valores teóricos. Vamos dar um exemplo aqui da quarta linha da primeira tabela. O quadrado normalizado do tempo experimental foi de 4,20, enquanto que o teórico esperado era de 4. Logo a diferença foi de 0,20. Dividindo isto pelo valor esperado de 4 e multiplicando por 100 % obtém-se a diferença ou erro percentual de 5,0 %, como indicado na quarta linha da sexta coluna.

Para o ângulo de 2,5° obtive os seguintes resultados:

Medidas usando cronômetro digital					
Rampa de Madeira					
L (m)	T (s)	T <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> )	L/(2m)	T <sup>2</sup> /(15,02 s <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	3,88	15,02	1	1,00	0,0
4	5,52	30,49	2	2,03	1,5
6	6,81	46,37	3	3,09	2,8
8	7,94	63,10	4	4,20	4,8
Rampa de Plástico					
L (m)	T (s)	T <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> )	L/(2m)	T <sup>2</sup> /(16,76 s <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	4,09	16,76	1	1	0,0
4	5,89	34,66	2	2,07	3,3
6	7,27	52,80	3	3,15	4,8
8	8,30	68,91	4	4,11	2,7

O erro máximo de medida, com a utilização do cronômetro, está em 5 %. Na rampa plástica os tempos gastos são levemente maiores que na rampa de madeira. Isso pode ser causado devido ao atrito da esfera com a rampa.

Agora apresentamos as medidas de volume de água acumulada durante a queda da esfera, sendo este nosso relógio de água (o volume de água sendo proporcional ao tempo de queda).

Medidas usando relógio de

água

Rampa de Madeira

L (m)	Vol. (ml)	V <sup>2</sup> (ml <sup>2</sup> )	L/(2m)	V <sup>2</sup> /(1640,25 ml <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	40,50	1640,25	1	1,00	0,0
4	60,34	3640,92	2	2,22	9,9
6	72,32	5230,18	3	3,19	5,9
8	82,44	6796,35	4	4,14	3,5

Rampa de Plástico

L (m)	Vol. (ml)	V <sup>2</sup> (ml <sup>2</sup> )	L/(2m)	V <sup>2</sup> /(1887,03 ml <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	43,44	1887,03	1	1	0,0
4	63,50	4032,25	2	2,14	6,4
6	77,36	5984,57	3	3,17	5,4
8	90,80	8244,64	4	4,37	8,4

Utilizando o relógio de água os erros obtidos são maiores que os erros obtidos utilizando o cronômetro, chegando agora até a 10 %. Isto se deve ao fato de o relógio de água não ser tão preciso quanto o cronômetro.

Agora apresentamos como sendo nosso relógio o número de batidas do coração medidas pelo pulso durante a descida da esfera pela rampa.

Medidas usando pulso cardíaco

Rampa de Madeira

L (m)	Pulso	(Pulso) <sup>2</sup>	L/(2m)	P <sup>2</sup> /(25,40)	Erro (%)
2	5,04	25,40	1	1,00	0,0
4	6,76	45,74	2	1,80	11,1
6	8,50	72,25	3	2,84	5,5
8	10,20	104,04	4	4,10	2,3

Rampa de Plástico

L (m)	Pulso	(Pulso) <sup>2</sup>	L/(2m)	P <sup>2</sup> /(30,25)	Erro (%)
2	5,50	30,25	1	1,00	0,0
4	7,25	52,56	2	1,74	15,1
6	9,38	87,89	3	2,91	3,3
8	10,93	119,36	4	3,95	1,4

Como já era de se esperar, o erro obtido utilizando o pulso cardíaco como marcador de tempo é bem maior que utilizando os outros instrumentos, chegando a 15 %. Isso pode ser explicado pelo fato de que o pulso cardíaco, apesar de ser regular, é mais facilmente susceptível a alterações. Qualquer esforço ou surpresa (toque de telefone, buzina de carro) pode surpreender o “marcador de tempo” e alterar seu ritmo cardíaco.

Apresentamos agora como sendo nosso relógio o número de oscilações do pêndulo durante a descida da esfera pela rampa.

Medidas usando pêndulo					
Rampa de Madeira					
L (m)	Oscilações	(Oscilações) <sup>2</sup>	L/(2m)	Osc. <sup>2</sup> /(17,08osc. <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	4,13	17,08	1	1	0,0
4	5,98	35,70	2	2,09	4,3
6	7,48	55,88	3	3,27	8,3
8	8,75	76,56	4	4,48	10,7
Rampa de Plástico					
L (m)	Oscilações	(Oscilações) <sup>2</sup>	L/(2m)	Osc. <sup>2</sup> /(20,25osc. <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	4,50	20,25	1	1	0,0
4	6,35	40,32	2	1,99	0,4
6	7,93	62,81	3	3,10	3,3
8	9,40	88,36	4	4,36	8,3

Utilizando o pêndulo os erros obtidos são da mesma ordem de grandeza dos erros encontrados na utilização do relógio de água.

Para o ângulo de 5° temos os seguintes resultados:

Medidas usando cronômetro digital					
Rampa de Madeira					
L (m)	T (s)	T <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> )	L/ (2m)	T <sup>2</sup> /(6,11 s <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	2,47	6,11	1	1,00	0,0
4	3,49	12,19	2	1,99	0,4
6	4,32	18,64	3	3,05	1,6
8	5,02	25,16	4	4,11	2,8
Rampa de Plástico					
L (m)	T (s)	T <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> )	L/ (2m)	T <sup>2</sup> /(6,76 s <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	2,60	6,76	1	1	0,0
4	3,68	13,54	2	2,00	0,2
6	4,55	20,67	3	3,06	2,0
8	5,26	27,71	4	4,10	2,5

Medidas usando relógio de água

Rampa de Madeira

L (m)	Vol. (ml)	V <sup>2</sup> (ml <sup>2</sup> )	L/(2m)	V <sup>2</sup> /(813,39 ml <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	28,52	813,39	1	1,00	0,0
4	40,04	1603,20	2	1,97	1,5
6	50,04	2504,00	3	3,08	2,5
8	59,52	3542,63	4	4,36	8,2

Rampa de Plástico

L (m)	Vol. (ml)	V <sup>2</sup> (ml <sup>2</sup> )	L/(2m)	V <sup>2</sup> /(959,14 ml <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	30,97	959,14	1	1	0,0
4	44,00	1936,00	2	2,02	0,9
6	53,60	2872,96	3	3,00	0,2
8	62,28	3878,80	4	4,04	1,1

Medidas usando pulso cardíaco

Rampa de Madeira

L (m)	Pulso	(Pulso) <sup>2</sup>	L/(2m)	P <sup>2</sup> /(22,66)	Erro (%)
2	4,76	22,66	1	1,00	0,0
4	6,55	42,90	2	1,89	5,6
6	8,25	68,06	3	3,00	0,1
8	9,50	90,25	4	3,98	0,4

Rampa de Plástico

L (m)	Pulso	(Pulso) <sup>2</sup>	L/(2m)	P <sup>2</sup> /(26,01)	Erro (%)
2	5,10	26,01	1	1,00	0,0
4	7,30	53,29	2	2,05	2,4
6	8,80	77,44	3	2,98	0,8
8	10,10	102,01	4	3,92	2,0

Medidas usando pêndulo					
Rampa de Madeira					
L (m)	Oscilações	(Oscilações) <sup>2</sup>	L/(2m)	Osc. <sup>2</sup> /(7,65osc. <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	2,77	7,65	1	1	0,0
4	4,10	16,81	2	2,20	9,0
6	4,85	23,52	3	3,08	2,5
8	5,58	31,08	4	4,07	1,6
Rampa de Plástico					
L (m)	Oscilações	(Oscilações) <sup>2</sup>	L/(2m)	Osc. <sup>2</sup> /(7,98osc. <sup>2</sup> )	Erro (%)
2	2,83	7,98	1	1	0,0
4	4,03	16,20	2	2,03	1,5
6	5,03	25,25	3	3,16	5,2
8	5,85	34,22	4	4,29	6,7

Em geral os erros obtidos para a inclinação de 5° são menores que os erros obtidos para a inclinação de 2,5°.

## 5) Conclusão

Ao realizar esse experimento pude ter o aprendizado de como lidar com as dificuldades encontradas em uma montagem de um projeto experimental. Em particular, tive de me preocupar com detalhes os quais muitas vezes são considerados como “desprezíveis” na física teórica. Ao fazer um plano inclinado com dois tipos de canaletas e superfícies, pode-se observar que para um mesmo grau de inclinação o tempo de queda da esfera difere entre as canaletas. Com isso pode analisar o conceito de atrito, energia de rotação da esfera, alinhamento do plano...

Em relação ao tempo de referência inicial, o erro do cronômetro é muito menor que o erro humano. Devido a esse fato, repetiu-se o lançamento da esfera inúmeras vezes para que esse erro humano não interferisse de forma significativa no resultado final do experimento. Pode-se considerar que a demora ao acionar o cronômetro no início do movimento é próxima da demora para acionar o cronômetro no final do movimento.

No livro de Galileu não há citação sobre energia cinética de rotação da esfera. Porém, ao considerar a energia cinética de rotação, o momento de inércia de uma esfera acresce um valor constante nas equações de movimento. No apêndice D nota-se que há uma diferença na velocidade final da esfera caso ela rode sobre seu próprio eixo, ou caso deslize sobre o plano sem girar, da ordem de 5/7. Isso ocorre porque no plano inclinado com atrito há perda de energia devido a rotação da esfera (energia cinética de rotação). Já no plano inclinado sem atrito não existe esse tipo de perda, pois a esfera não gira ao redor do seu eixo.

Por incompatibilidade de horário não pude apresentar meu experimento em sala de aula (a nível de ensino médio, na escola onde dou aulas). Mas pude contar com alguns conselheiros, minha família, minha esposa (jornalista) que me auxiliou com a

execução do experimento e também meus dois primos (1º Colegial) e dois sobrinhos (2ª e 5ª série do Ensino Fundamental). Todos, sem exceção, fizeram perguntas do tipo: “se colocar um esfera “mais pesada” cairá mais rápido?”, “se o cronômetro é melhor (mais preciso), porque fazer medidas com o relógio de água, pulso e pêndulo?”, “para que refazer esse ‘negócio’ de novo se um cientista já provou que dá certo?”.

Através dessas perguntas consegui (pelo menos para estas cinco pessoas) mostrar a importância de realizar com zelo experimentos, para poder posteriormente verificar a compatibilidade da teoria com a prática. E também ver como um experimento pode gerar tanta curiosidade e interesse em saber “como as coisas funcionam.” Conseqüentemente, isto pode ser utilizado em sala de aula para provocar o interesse dos alunos.

### **Comentário do Professor Dr. André K. T. de Assis:**

O aluno Gilberto Pessato completou o projeto Experimento do Plano Inclinado de Galileu. Construiu o plano inclinado com dimensões análogas ao plano inclinado original de Galileu Galilei descrito em seu livro *Duas Novas Ciências*. Realizou medidas de tempo para deslocamentos de comprimentos diferentes. Para isto usou um relógio de água, o pulso humano, um relógio de pêndulo e um cronômetro moderno. Conseguiu obter experimentalmente a lei do plano inclinado obtida originalmente por Galileu. Fez também uma análise teórica para a queda de uma esfera ao longo de um plano inclinado. Conseguiu concluir o que estava no projeto original. Considero este relatório final aprovado.

## 6) Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Prof. André K. T. de Assis, por ter aceitado meu pedido de ser meu orientador e também pela paciência. Agradeço também o Prof. Lunazzi, que mostrou a importância dessa trabalhosa disciplina para o meu currículo.

Agradeço também a todos da minha família pelo apoio moral, técnico e instrumental.

## 7) Referências Bibliográficas

<http://www.pbs.org/wgbh/nova/galileo/> (relação entre inclinação e altura da rampa)

<http://galileo.rice.edu/chron/galileo.html> (fatores históricos)

[http://www.coladaweb.com/fisica/galileo\\_galilei.htm](http://www.coladaweb.com/fisica/galileo_galilei.htm) (acessado em 23/05/2008) (fatores históricos)

[Galileu, 1988] Galileu Galilei, *Duas Novas Ciências* (Instituto Cultural Ítalo-Brasileiro, São Paulo, 1988), págs. 140-141. Tradução e notas de L. Mariconda e P. R. Mariconda. (montagem experimental e dados sobre o experimento realizado por Galileu)

[Neves et al., 2008] Neves, M. C. D.; Batista, J. M.; Costa, J. R.; Gomes, L. C.; Batista, M. C.; Fusinato, P. A.; Almeida, F. R.; Silva, R. G. R.; Savi, A. A. e Pereira, R. F.; Galileu fez o experimento do plano inclinado?, *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciências*, Vol. 7 nº1 (2008). Disponível em 2008 em: [http://saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen7/ART11\\_Vol7\\_N1.pdf](http://saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen7/ART11_Vol7_N1.pdf) (obtenção de dados)

[Tipler, 1994] Tipler, P. A., *Física*, Vol. 1: Mecânica (Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1994), terceira edição. Tradução de H. Macedo. (equações e relações matemáticas)

## 8) Apêndices

Nos apêndices serão mostradas as principais fórmulas de cada tipo de movimento e como estão relacionadas. E será adotado o comprimento  $L = s$  (comprimento da rampa).

### a. Queda Livre

De acordo com a conservação de energia temos:

$$E_p = E_c$$

$$Mgh = (M v^2)/2, \quad \text{assim obtemos}$$

$$v_1(h) = (2gh)^{1/2}$$

Para queda livre temos as seguintes equações:

$$a_1 = g \quad (1.0)$$

$$s_1(h) = h \quad (1.1)$$

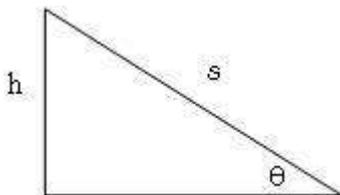
$$v_1(h) = (2gh)^{1/2} \quad (1.2)$$

$$t_1(h) = (2h/g)^{1/2} \quad (1.3)$$

$$s_1(t) = (gt^2)/2 \quad (1.4)$$

$$v_1(t) = gt \quad (1.5)$$

### b. Plano Inclinado Sem Atrito



$$\text{sen } \theta = h/s \quad \text{sen } \theta = a/g$$

$$s = h/\text{sen } \theta \quad a = g \text{ sen } \theta$$

No plano inclinado sem atrito, considera que a esfera desliza sobre o plano com uma velocidade “v”, não havendo rotação da esfera. Ou seja, a esfera não gira.

Podemos obter as equações de queda em um plano inclinado sem atrito da seguinte forma:

$$s_2(t) = (at^2)/2$$

$$t^2 = 2s/g \text{ sen } \theta$$

$$t^2 = 2s/g(h/s)$$

$$t^2 = (2s^2)/gh$$

$$t = s (2/gh)^{1/2}$$

$$t = s (2/gh)^{1/2}$$

$$t(h) = (2h/g)^{1/2}(1/\text{sen } \theta)$$

Tendo  $v(t) = at$  e substituindo nas equações anteriores temos:

$$v = g(h/l)s(2/gh)^{1/2}$$

$$v(h) = (2gh)^{1/2}$$

Sendo assim temos as seguintes equações para a queda em um plano inclinado sem atrito:

$$a_2 = g \text{ sen } \theta \quad (2.0)$$

$$s_2(h) = h/\text{sen } \theta \quad (2.1)$$

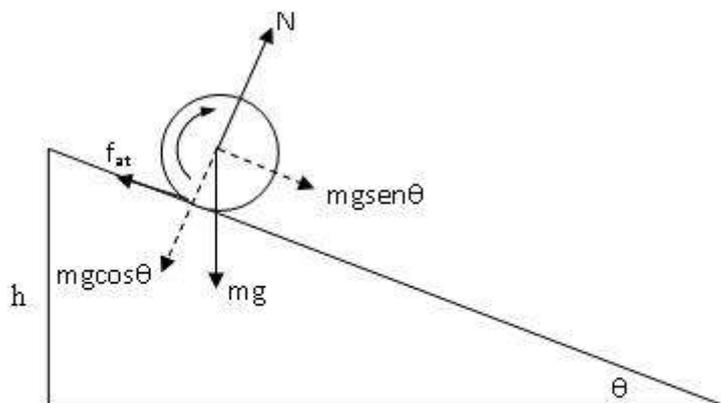
$$v_2(h) = (2gh)^{1/2} \quad (2.2)$$

$$t_2(h) = (2h/g)^{1/2}(1/\text{sen } \theta) \quad (2.3)$$

$$s_2(t) = (g \text{ sen } \theta t^2)/2 \quad (2.4)$$

$$v_2(t) = g \text{ sen } \theta t \quad (2.5)$$

### c. Plano Inclinado Com Atrito



Em condições reais onde uma esfera ao descer por um plano inclinado com atrito deve rolar em torno do seu eixo, devemos inserir o conceito de energia cinética de rotação como forma de dissipação de energia. Aqui vamos supor que há um atrito estático entre a esfera e a rampa tal que ela gire sem deslizar enquanto se desloca. Isto é, a velocidade relativa é nula no contato entre a esfera e a rampa.

Neste caso temos as seguintes equações, [Tipler, 1991, págs. 234-237]:

$$a_3 = (5/7) g \text{ sen } \theta \quad (3.0)$$

$$s_3 (h) = h/\text{sen } \theta \quad (3.1)$$

$$v_3 (h) = (10gh/7)^{1/2} \quad (3.2)$$

$$t_3 (h) = (14h/5g)^{1/2}(1/\text{sen } \theta) \quad (3.3)$$

$$s_3 (t) = (5/14) g t^2 \text{ sen } \theta \quad (3.4)$$

$$v_3 (t) = (5/7) g \text{ sen } \theta t \quad (3.5)$$

#### d. Relações Matemáticas entre os Três Casos Anteriores

Razões entre as acelerações:

$$a_2/a_1 = \text{sen } \theta$$

$$a_3/a_1 = (5/7) \text{ sen } \theta$$

$$a_3/a_2 = 5/7$$

Razões entre as velocidades depois de percorrida uma mesma altura h:

$$(v_2/v_1) (h) = 1$$

$$(v_3/v_1) (h) = (5/7)^{1/2}$$

$$(v_3/v_2) (h) = (5/7)^{1/2}$$

Razões entre as velocidades depois de transcorrido um mesmo tempo t:

$$(v_2/v_1) (t) = \text{sen } \theta$$

$$(v_3/v_1) (t) = (5/7) \text{ sen } \theta$$

$$(v_3/v_2) (t) = 5/7$$

Razões entre os espaços percorridos depois de percorrida uma mesma altura h:

$$(s_2/s_1) (h) = (\text{sen } \theta)^{-1}$$

$$(s_3/s_1) (h) = (5/7)^{1/2}$$

$$(s_3/s_2) (h) = 1$$

Razões entre os espaços percorridos depois de transcorrido um mesmo tempo t:

$$(s_2/s_1) (t) = \text{sen } \theta$$

$$(s_3/s_1) (t) = (5/7) \text{ sen } \theta$$

$$(s_3/s_2) (t) = 5/7$$

Razões entre os tempos para percorrer todo o trajeto:

$$t_2/t_1 = (\text{sen } \theta)^{-1}$$

$$t_3/t_1 = (7/5)^{1/2} (\text{sen } \theta)^{-1}$$

$$t_3/t_2 = (7/5)^{1/2}$$