

F690A – Iniciação Científica II

Relatório Final

Versão Prévia - 05/11/2007



Título: Tradução comentada da obra “Sobre os corpos flutuantes - LIVRO II” de Arquimedes

Autor: Nivaldo Benedito Ferreira Campos
RA 800823

Orientador: Prof. Dr. André K. Torres Assis

Introdução

Neste trabalho é apresentada a tradução do texto de Arquimedes “Sobre os corpos flutuantes – Segundo Livro”, no qual são estudadas as condições de equilíbrio possíveis para um parabolóide imerso em um fluido. A primeira parte foi publicada em 1996ⁱ e foi feita a partir da tradução em inglês dos trabalhos do autor feita por T. L. Heathⁱⁱ, a qual foi utilizada também na presente tradução. As notas de Heath são indicadas por [N. H.]. Uma discussão detalhada do trabalho traduzido aqui foi feita por Dijksterhuis.ⁱⁱⁱ

Uma apresentação bastante didática das conclusões obtidas por Arquimedes a partir do conhecimento do CG de um sólido é apresentada por Ramalho^{iv} e reproduzida a seguir.

Quando um corpo flutua em um líquido, este se encontra sob a ação de duas forças verticais, de mesma intensidade e de sentidos opostos: seu peso próprio \vec{P} , que atua no centro de gravidade G do corpo todo e o empuxo \vec{E} exercido pelo líquido sobre o corpo e que atua no centro de gravidade C da parte do corpo imersa no líquido, também chamado de Centro de Empuxo. Sob a ação destas forças, o corpo estará em equilíbrio, e este poderá ser estável, indiferente ou instável.

Se o centro de gravidade G está abaixo do centro de empuxo C , o equilíbrio será estável. Isto significa que se o corpo for deslocado de sua posição de equilíbrio inicial, a ação do sistema de forças atuante sobre ele (\vec{P} e \vec{E}) o obrigarão a retornar à posição inicial (Fig. 1).

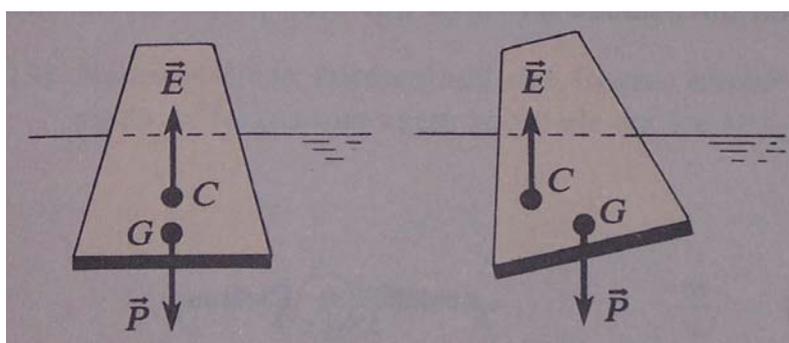


Fig 1. Sistema de forças atuando em um corpo em equilíbrio estável

Quando o centro de gravidade G coincide com o centro de empuxo C , o equilíbrio é indiferente, isto é, o corpo permanece na posição em que for colocado. Esta é a situação mais comum quando o corpo está totalmente mergulhado (Fig. 2).

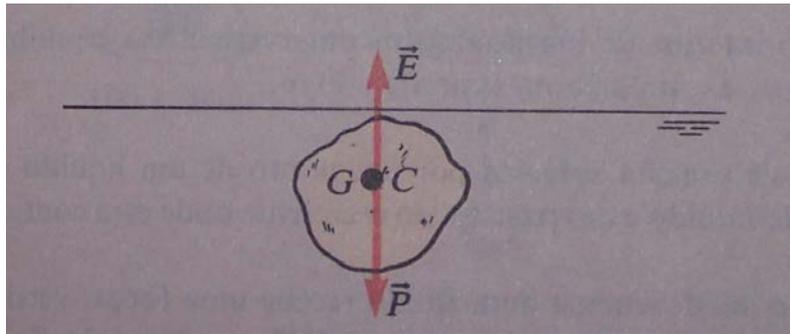


Fig 2. Sistema de forças atuando em um corpo em equilíbrio indiferente

Quando o centro de gravidade está G está acima do centro de empuxo C , o equilíbrio tanto pode ser estável como instável. A situação de equilíbrio dependerá então de como o centro de empuxo se desloca quando, devido a uma perturbação, a forma do volume do líquido deslocado é alterada. Os dois casos possíveis, estável e instável, são apresentados nas figures 3a e 3b respectivamente.

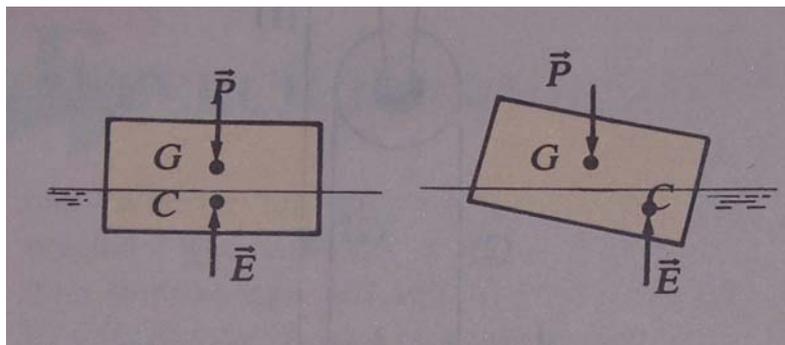


Fig 3a. Sistema de forças atuando em um corpo em equilíbrio estável, com o CG acima do centro de empuxo

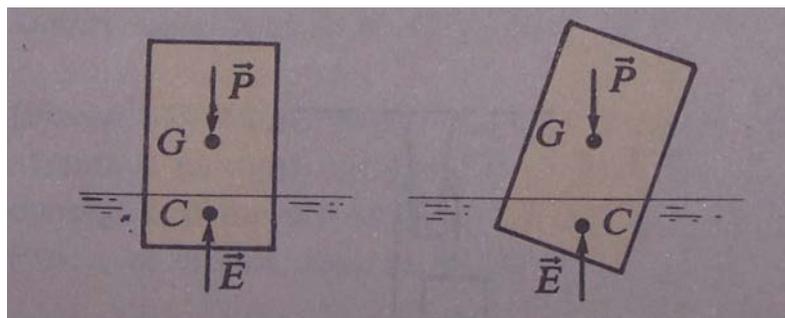


Fig 3b. Sistema de forças atuando em um corpo em equilíbrio instável, com o CG acima do centro de empuxo

Note que no primeiro caso, ao deslocar-se o corpo de sua posição de equilíbrio, o centro de empuxo muda, de forma que a nova configuração do sistema de forças faz com que o corpo retorne à sua posição original e, portanto, o equilíbrio é estável. Já no segundo caso, a nova posição do centro de empuxo dará origem a um sistema de forças que tenderá a afastar ainda mais o corpo de sua posição inicial de equilíbrio e, portanto, o equilíbrio será instável.

No caso de uma embarcação, é desejável que esta seja o mais estável possível e, portanto, de acordo com os casos observados, esta condição será obtida quando seu centro de gravidade, levando-se em conta a carga que esta transporta, estiver localizado na posição mais inferior possível.

É relevante ser mencionado aqui o Princípio de Arquimedes, o qual estabelece que a força de empuxo atuante sobre um corpo total ou parcialmente imerso em um líquido, é igual ao peso do líquido deslocado por ele. Este princípio é apresentado por Silva^v de uma forma didática e de fácil compreensão, também acompanhado de alguns experimentos didáticos que o demonstram

Para melhor entender as implicações do exposto acima e complementando o trabalho de tradução realizado, foram montados alguns experimentos simples, para demonstrar alguns dos princípios enunciados por Arquimedes. Estes experimentos apresentam as técnicas desenvolvidas por Arquimedes na determinação do centro de gravidade de figuras planas e algumas proposições apresentadas por ele na obra traduzida, e serão utilizados na apresentação final do trabalho. Estes experimentos são:

a) Determinação do centro de gravidade (CG) de uma figura plana qualquer.

- Material empregado: placa de isopor, fios e clips
- Cortada da placa de isopor uma seção qualquer, suspende-se esta seção por pontos escolhidos em seu contorno. A cada vez que a seção é suspensa, traça-se em sua superfície uma linha vertical passando pelo ponto de suspensão. O ponto de cruzamento das linhas será o CG da seção (Fig. 4).



Fig 4. Determinação do C.G. de uma figura plana

b) Demonstração do comportamento de corpos com diferentes formas em relação a uma configuração de equilíbrio, quando estes estão flutuando em um líquido.

- Material empregado: sólidos de diferentes formas, moldados em cera (Fig. 5).



Fig 5. Sólidos de diferentes formas moldados em cera.

- Tomando-se uma vasilha com água, coloca-se nela os corpos previamente moldados a fim de se observar para uma determinada posição de equilíbrio se esta corresponde ao equilíbrio estável, indiferente ou instável. (Figs. 6, 7, 8, 9).



Fig 6. Duas posições possíveis de equilíbrio estável para um sólido em forma de gota.

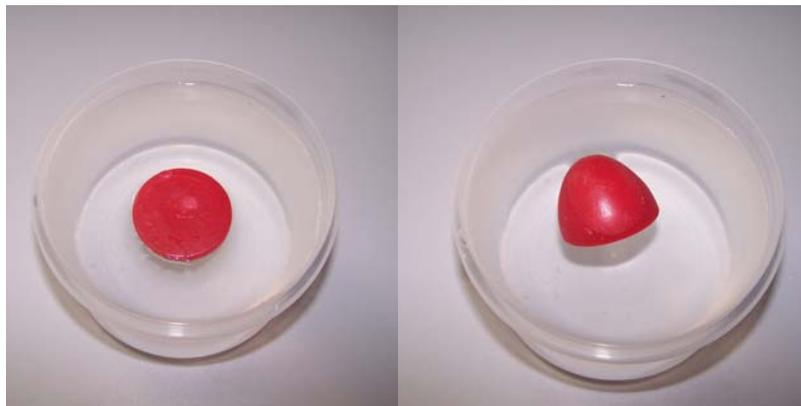


Fig 7. Duas posições possíveis de equilíbrio estável para um parabolóide de revolução alto.



Fig 8. Duas posições possíveis de equilíbrio estável para um parabolóide de revolução raso. O equilíbrio só é possível com o eixo na vertical.



Fig 9. Única posição de equilíbrio estável possível para uma esfera da qual foi retirada uma calota.

A seguir são apresentadas uma biografia sucinta de Arquimedes e a tradução de seu texto “Sobre os corpos flutuantes, Livro II”, objetivo principal deste trabalho.

Biografia de Arquimedes

Filho do astrônomo Fídias, como ele próprio informa em um de seus trabalhos, Arquimedes nasceu em 287 a.C., em Siracusa, na Sicília, que então fazia parte da Grécia ocidental ou Magna Grécia. Um amigo de Arquimedes, chamado Heracleides escreveu sua biografia, mas infelizmente esta se perdeu. Embora dados fantasiosos permeiem todos os informes sobre sua vida, parece certo que estudou em Alexandria (Egito), um dos grandes centros culturais da época. Ali teria conhecido Euclides, já velho, e seus discípulos imediatos; e o matemático Canon de Samos, de quem se tornou amigo. Também é relatado por alguns autores que foi lá que ele inventou um dispositivo hoje conhecido como parafuso de Arquimedes. Este dispositivo é uma bomba de água, ainda usada em muitas partes do mundo (Stein^{vi}).

Na sua biografia é difícil separar a realidade da lenda. No prefácio de seu trabalho “Sobre Espirais”ⁱⁱ, Arquimedes relata uma interessante estória a respeito de seus amigos em Alexandria. Ele diz que tinha o hábito de enviar-lhes seus mais recentes teoremas, mas sem apresentar as demonstrações. Aparentemente, alguns matemáticos tinham reivindicado os resultados obtidos por Arquimedes com sendo de sua autoria. Isto fez com que Arquimedes ao enviar um de seus trabalhos com diversos teoremas incluísse também dois teoremas falsos. O objetivo era que “aqueles que clamam descobrir tudo, mas não produzem provas do mesmo, possam ser desmascarados por fingirem ter descoberto o impossível”.

Além dos prefácios de seus trabalhos, informações sobre Arquimedes chegaram até nós a partir de uma série de fontes, como nas estórias de Plutarco^{vii} e outros. Plutarco nos diz que Arquimedes era amigo do rei Hieron II de Siracusa. Uma outra evidência de que pelo menos com a família do rei Hieron II ele tinha uma relação de amizade, vem do fato dele ter dedicado “O Arenário” a Gelon, o filho do rei.

De fato, existem inúmeras referências a Arquimedes nos escritos de sua época, dada a reputação quase sem par que ele ganhou neste período. Curiosamente a razão para isso não era um interesse generalizado em Matemática, mas sim nas máquinas que inventou para serem usadas na guerra. Estas armas foram particularmente eficientes na defesa de Siracusa contra os Romanos, liderados por Marcelo.

Escreve Plutarco^{vii}:

... quando Arquimedes começou a manejar suas máquinas, ele de uma só vez atirou contra as forças terrestres todos os tipos de mísseis, e imensas massas de rocha que caíram com barulho e violência inacreditáveis, contra as quais nenhum homem poderia resistir em pé ...

Outras invenções de Arquimedes, como a polia composta, também colaboraram para que sua fama se perpetuasse. Novamente citando Plutarco^{vii}:

[Arquimedes] afirmou [em uma carta ao Rei Hieron] que, dada uma força, qualquer peso poderia ser movido, e até mesmo se gabando, disse que se houvesse outra Terra, esta poderia ser movida. Hieron maravilhou-se com isto e pediu uma demonstração prática. Arquimedes tomou um dos navios da frota do rei - que não podia ser movido a não ser por muitos homens - carregou-o com muitos passageiros

e lotou-o de carga. Arquimedes colocou-se a distância e puxou as polias, movendo o navio em linha reta suavemente, como se estivesse no mar.

As realizações de Arquimedes são impressionantes. Ele é considerado por muitos historiadores da ciência como um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Escreveu importantes obras sobre geometria plana e espacial, aritmética e mecânica. Antecipou-se a muitas das descobertas da ciência moderna no campo da matemática pura, como o desenvolvimento de um método de integração, denominado método da exaustão, que lhe permitiu obter áreas e volumes de figuras sólidas curvas e também as áreas de figuras planas, dando início ao cálculo infinitesimal, concebido e aperfeiçoado por Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz e Newton, muitos séculos depois.

Desenvolveu também os teoremas fundamentais relativos ao centro de gravidade das figuras planas e dos sólidos. Demonstrou que o volume de uma esfera equivale a dois terços do volume do cilindro que a circunscreve.

Reduzindo o equilíbrio de forças a um simples problema geométrico, estudou o equilíbrio dos sólidos, o funcionamento da alavanca e o movimento dos corpos celestes, além de ter organizado uma coleção - a mais completa da Antiguidade - de figuras planas e volumétricas com os centros de gravidade perfeitamente localizados. Além disso, também procurava utilidades práticas para suas descobertas. Extraordinário engenheiro, construiu, segundo depoimento de Cícero (106 - 43 a.C.), um planetário que reproduzia os diferentes movimentos dos corpos celestes; e um aparelho para medir as variações do diâmetro aparente do Sol e da Lua, um protótipo do modelo, mais requintado, que será construído pelo astrônomo Hiparco, no século II a.C.

Porém, ele é mais conhecido principalmente por ter enunciado a lei da hidrostática, o chamado princípio de Arquimedes. Essa lei estabelece que todo corpo submerso em um fluido experimenta perda de peso igual ao peso do volume do fluido que o corpo desloca. Diz-se que essa descoberta foi feita enquanto o matemático se banhava e meditava sobre um problema que lhe fora apresentado pelo rei: como distinguir uma coroa de ouro puro de outra que contivesse prata. Observando o deslocamento e transbordamento da água à medida que seu corpo submergia, concluiu que se a coroa, ao submergir, deslocasse quantidade de água equivalente a seu peso em ouro, isto significaria que não continha outro metal. Conta-se que ficou tão entusiasmado que saiu nu para a rua gritando eureka, palavra grega que significa "achei".

Arquimedes passou a maior parte de sua vida na Sicília, em Siracusa e arredores, dedicado à pesquisa e aos experimentos. Embora não tivesse nenhum cargo público, durante a conquista da Sicília pelos romanos pôs-se à disposição das autoridades e muitos de seus instrumentos mecânicos foram utilizados na defesa de Siracusa. Entre os aparatos de guerra cuja invenção lhe é atribuída está a catapulta e a idealização dos célebres "espelhos ustórios" (ustório = que queima, que facilita a combustão), espelhos curvos com os quais os defensores de Siracusa teriam queimado à distância – pela concentração dos raios solares - os navios romanos que sitiavam a região. No entender de historiadores modernos, tal uso dos espelhos deve ser colocado entre as estórias fantasiosas sobre Arquimedes.

Após um longo assédio, as tropas de Marcelo entram na cidade em 212 a.C.. Segundo Plutarco, apesar das ordens de Marcelo para respeitar a vida do sábio, um soldado romano, irritado porque Arquimedes, absorto na resolução de um problema, não responde às suas intimações, matou-o. Arquimedes considerava seus feitos mais significativos eram aqueles relacionados ao estudo de um cilindro circunscrevendo uma esfera, razão pela qual pediu que uma representação destas duas figuras juntamente com seu resultado sobre a razão

entre volume delas fosse inscrita em sua tumba. Cícero, questor da Sicília, a encontrou em 75 a.C. e nela figurava a inscrição como Arquimedes havia desejado.

No seu trabalho revela-se exclusivamente o investigador. Seus escritos são verdadeiras memórias científicas, trabalhos originais, nos quais se dá por conhecido todo o produzido antes sobre o tema e apresentam-se elementos novos, próprios. Suas obras que sobreviveram até nós são: “Sobre o equilíbrio dos planos” (dois livros), “Quadratura da parábola”, “Sobre a esfera e o cilindro” (dois livros), “Sobre espirais”, “Sobre conóides e esferóides”, “Sobre os corpos flutuantes” (dois livros), “Medidas do círculo” e “O Arenário”. No verão de 1906, J. L. Heiberg, professor de filologia clássica na Universidade de Copenhague, descobriu um manuscrito do século X, o qual incluía o trabalho de Arquimedes intitulado “O Método”. Esta descoberta permitiu uma notável compreensão de como Arquimedes obteve muitos de seus resultados.

- O tratado “Sobre equilíbrios planos” aborda os princípios fundamentais da mecânica, usando métodos geométricos. Arquimedes descobriu teoremas fundamentais a respeito do centro de gravidade de figuras planas, todos constantes deste trabalho. Em particular ele encontra, no livro 1, o centro de gravidade do paralelogramo, do triângulo e do trapézio. O segundo livro é dedicado inteiramente a encontrar o centro de gravidade de um segmento de uma parábola
- Na “Quadratura da parábola” Arquimedes encontra a área de um segmento de parábola formado pelo corte de uma corda qualquer.
- No primeiro volume de “Sobre a esfera e o cilindro”, Arquimedes mostra que a superfície de uma esfera é quatro vezes a do grande círculo, acha a área de qualquer segmento da esfera, mostra que o volume de uma esfera é dois terços do volume do cilindro circunscrito, e que a superfície da esfera é dois terços da superfície do cilindro circunscrito, incluindo-se as bases. No segundo livro desta obra, o resultado mais importante obtido por Arquimedes foi mostrar como cortar com um plano uma dada esfera, de forma que a razão entre os volumes dos dois segmentos resultantes seja igual a uma razão predeterminada.
- Em “Sobre espirais”, Arquimedes define uma espiral e estabelece as propriedades fundamentais relacionando o comprimento do vetor raio com os ângulos de revolução que geram as espirais. Ele também apresenta resultados sobre tangentes às espirais, bem como demonstra como calcular áreas de partes da espiral.
- Em “Sobre conóides e esferóides” Arquimedes examina os parabolóides de revolução, hiperbolóides de revolução e esferóides obtidos pela rotação de uma elipse tanto em torno de seu eixo maior, como de seu eixo menor. O objetivo principal deste trabalho é investigar o volume de segmentos dessas figuras tridimensionais.
- “Sobre os corpos flutuantes” é o trabalho onde Arquimedes estabelece os princípios básicos da hidrostática. Seu teorema mais famoso - que dá o peso de um corpo imerso em um líquido - chamado “Princípio de Arquimedes”, consta deste trabalho. Ele também estudou a estabilidade de vários corpos flutuantes de diferentes formas e diferentes densidades.
- Em “Medidas do círculo” Arquimedes mostra que o valor exato de π situa-se entre $3^{10}/71$ e $3^{1/7}$. Ele obteve este resultado circunscrevendo e inscrevendo um círculo com polígonos regulares com 96 lados!
- “O Arenário” é um trabalho notável em que Arquimedes propõe um sistema numérico capaz de expressar números até 8×10^{63} (em notação moderna). Seu argumento é de que este número seria suficiente para contar o número de grãos de areia do Universo. Há também importantes questões históricas neste trabalho, uma vez que Arquimedes teve que definir as

dimensões do universo a fim de poder contar os grãos de areia que ele poderia conter. Ele cita que Aristarco propôs um sistema no qual o sol está no centro e os planetas, incluindo a Terra, giram ao seu redor. Quando cita resultados acerca do tamanho do Universo, ele usa resultados de Euxodo, Fídias (seu pai) e Aristarco.

- Há referências a outros trabalhos de Arquimedes, que estão hoje perdidos. Pappus refere-se a um trabalho de Arquimedes sobre poliedros semi-regulares e o próprio Arquimedes refere-se a um trabalho sobre o sistema numérico proposto no Arenário. Pappus também menciona um tratado sobre balanças e alavancas, e Theon menciona um tratado sobre espelhos.

Em “O Método”^{viii}, Arquimedes descreve o modo pelo qual descobriu muitos de seus resultados geométricos.

... certas coisas primeiro tornaram-se claras para mim por um método mecânico, apesar delas terem sido provadas pela geometria posteriormente, porque sua investigação pelo dito método não fornece uma autêntica prova. Porém ele é evidentemente mais fácil de ser utilizado para obter a prova, desde que tenhamos adquirido, pelo método, algum conhecimento prévio das questões, do que seria encontrá-la sem qualquer conhecimento prévio.

Talvez a genialidade dos resultados geométricos de Arquimedes seja melhor avaliada por Plutarco^{vii}, que escreve:

Não é possível encontrar em toda a geometria questões mais difíceis e intrincadas, ou mais simples e lúcidas explicações. Alguns atribuem isso a sua genialidade natural, enquanto outros pensam que um esforço incrível e trabalho extenuante produziram estes, em todos os aspectos, fáceis e não laboriosos resultados. Nenhuma quantidade de investigação própria sua lograria êxito em obter a prova, e ainda assim, uma vez vista, você imediatamente acredita que a teria descoberto, de tão suave e rápido é o caminho pelo qual ele o leva à conclusão requerida.

Talvez seja um fato inesperado que os trabalhos de Arquimedes tenham sido pouco conhecidos logo após sua morte. Somente depois que Eutócio editou alguns dos trabalhos de Arquimedes, com comentários, no século VI, seus tratados tornaram-se mais largamente conhecidos.