The Gleb Times - Jornal do Centro Acadêmico do Instituto de Física da UNICAMP, Ano 1, Número 2, pág. 11 (1994)

NÚMEROS PERPLEXOS

André Koch Torres Assis
Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia
Instituto de Física - UNICAMP

Há algum número cujo módulo seja negativo? Respondendo afirmativamente a esta pergunta quatro estudantes da graduação criaram nos Estados Unidos àquilo que eles chamaram de números perplexos. Números perplexos são dados por $w = x + jy$ onde x e y são reais e j faz o mesmo papel que i nos números complexos $z = x + iy$. A diferença é que enquanto $i^2 = -1$ temos $j^2 = +1$. Apesar disto devemos tratar j como um símbolo e não devemos colocar $j = \pm 1$. Neste caso j seria o número cujo módulo é -1.

O nome "números perplexos" vem de um artigo, no American Journal of Physics, [1], cujo autor é o professor dos quatro alunos mencionados acima (curiosamente ele é o único autor, embora ele mesmo afirme que o trabalho é conjunto...). Podemos pensar que não há números cujo módulo seja -1, mas isto não é importante, pois do mesmo jeito se argumentava antigamente que não existem números cujo quadrado seja negativo. O importante é tratar da álgebra dos números perplexos de maneira similar ao que fazemos com a álgebra dos complexos, e ver os resultados importantes que podemos obter a partir dela. Apesar da nomenclatura recente, a álgebra dos números perplexos é bem antiga e vem de pelo menos 1919, ver as referências em [2]. Vemos então que os quatro alunos e o professor estavam de fato redescobrindo uma álgebra antiga e encontrando novas aplicações para ela.

As regras principais para se fazer o produto de números perplexos são as seguintes: $1^2 = 1$, $j^2 = 1$, $1j = j$, $j1 = j$. Com isto se obtém, por exemplo: $w^2 = (x^2 + y^2) + j(2xy)$. Um resultado bem mais interessante ocorre com a exponencial de jx. Usando a série de Taylor de uma exponencial e as regras anteriores de multiplicação dos perplexos vem que:

$$e^{ix} = \cosh x + j \mathrm{senh} x$$

Ou seja, obtemos co-senos e senos hiperbólicos ao invés dos co-senos e senos usuais dos números complexos.

Números perplexos nos denominadores apresentam problemas mais difíceis de lidar do que no caso dos complexos com seus pólos. Isto pode ser visto ao tratar do caso mais simples que é $1/w$. Multiplicando o numerador e o denominador desta expressão por seu conjugado w^* para desaparecer com o j do denominador vem que:

$$\frac{1}{w} = \frac{1w^*}{ww^*} = \frac{x - jy}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2 - y^2} - j\frac{y}{x^2 - y^2}$$

Ou seja, agora não temos apenas um

pólo na origem, como ocorria com *1/z*. Isto é, para quaisquer pontos ao longo das retas $y = \pm x$ teremos que $1/w$ não está definido. Vemos então que $ww^* = 0$ mesmo que $w \neq 0$ e $w^* \neq 0$, sempre que $y = \pm x$. Nestes pontos se diz que w e w^* são divisores de zero.

Analogamente ao que ocorre com os complexos, qualquer função de w (como $x^3 - 4$, e^{2w}, $\cos(5w + 7)$, etc.) pode ser escrita como $f(w) = u(x,$ y$) + jv(x, y)$, onde u e v são funções reais de x e y. Talvez a aplicação mais importante dos número perplexos em física venha ao tratar da derivada de $f(w)$. Fazendo um tratamento similar ao dos complexos chegamos neste caso a equações do tipo Cauchy-Riemann, só que agora na forma $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$ e $\partial u / \partial y = \partial v / \partial x$. Assumindo a existência e continuidade das derivadas de segunda ordem de u e v vem daí que estas funções satisfazem à equação de onda. Escolhendo $y = ct$ vem que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Ou seja, podemos construir quantas soluções quisermos da equação de onda pegando simplesmente u e v de qualquer função perplexa $f(w)$. No caso de números complexos tínhamos que se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, então u e v satisfaziam a equação de Laplace, e não a equação de onda. Devido a grande relevância da equação de onda na física, vemos o quão importante podem se tornar os números perplexos! Nas referências [1] a [3] abaixo se pode encontrar mais sobre este assunto, com aplicações interessantes.

REFERÊNCIAS

[I] P. Fjelstad, *American Journal of Physics,* Volume 54, páginas 416-422 (1986), Extending special relativity via the perplex numbers. "

[2] A. K. T. Assis, Int*ernational Journal of Mathematical Education in 5cience and Technology,* Volume 22, páginas 555-562 (1991), "Perplex numbers and quaternions."

[3] M. Lavrantiev e B. Chabat, *Effects Hyrdroynamiques et Modèles Mathématiques* (Moscou, Editora MIR, 1980).