Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas

Volume II: A Força de Weber e a Unificação das Leis de Coulomb, Ampère e Faraday

André Koch Torres Assis

Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas

Volume II: A Força de Weber e a Unificação das Leis de Coulomb, Ampère e Faraday

André Koch Torres Assis

Apeiron
Montreal

Published by C. Roy Keys Inc.
4405, rue St-Dominique
Montreal, Quebec H2W 2B2 Canada

First Published 2025

Library and Archives Canada Cataloguing in Publication

Title: Obras de Weber sobre eletrodinâmica traduzidas e comentadas / André Koch Torres Assis.
Other titles: Weber's works on electrodynamics translated and commented. Portuguese
Names: Assis, André Koch Torres, 1962- author, translator
Description: Includes bibliographical references. | Contents: Volume II: A força de Weber e a unificação das leis de Coulomb, Ampère e Faraday
Identifiers: Canadiana (print) 20250223821 | Canadiana (ebook) 20250223864 | ISBN 9781987980394 (v. 2 ; softcover) | ISBN 9781987980400 (v. 2 ; ebook)
Subjects: LCSH: Weber, Wilhelm Eduard, 1804-1891. | LCSH: Electrodynamics.
Classification: LCC QC631 .A8713 2025 | DDC 537.6—dc23

A imagem de Wilhelm Weber (1804-1891) na capa do Volume 2 vem de uma litografia de 1856 feita por Rudolph Hoffmann (1820-1882) baseada em uma fotografia de Bernhard Petri. Ela aparece, por exemplo, em K. H. Wiederkehr, *Wilhelm Webers Stellung in der Entwicklung der Elektricitätslehre* (Dissertation, Universität Hamburg, 1960, pág. 170) e K. H. Wiederkehr, *Wilhelm Eduard Weber – Erforscher der Wellenbewegung und der Elektricität (1804-1891)*, Volume 32 of *Grosse Naturforscher*, H. Degen (editor), (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1967, pág. 118).

Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas

Volume II: A Força de Weber e a Unificação das Leis de Coulomb, Ampère e Faraday

André Koch Torres Assis

Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

Sumário

Capítulo 1

Introdução ao Volume II

A imagem de Wilhelm Weber (1804-1891) na capa do Volume 2 vem de uma litografia de 1856 feita por Rudolph Hoffmann (1820-1882) baseada em uma fotografia de Bernhard Petri.[1]

Esse segundo Volume começa com o texto da correspondência de 1845 entre Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Weber. Ela está relacionada com a força de André-Marie Ampère (1775-1836) entre elementos de corrente e com as ideias de Weber sobre a unificação das leis da eletrostática e da eletrodinâmica. Em seguida vem um artigo de Gustav Theodor Fechner (1801-1887) publicado em 1845 no qual ele apresentou algumas ideias qualitativas nessa direção. Ou seja, unificar a força de Ampère entre elementos de corrente e a lei de indução de Michael Faraday (1791-1867) com a força de Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) entre partículas eletrizadas em repouso mútuo. Com esse propósito sugeriu uma força que dependia não apenas da distância entre as partículas eletrizadas que estavam interagindo, mas também de suas velocidades. No final desse artigo Fechner mencionou que esse trabalho poderia ser considerado como um precursor das pesquisas de Weber.

Vem então a Primeira Memória principal de Weber sobre as Medições Eletrodinâmicas publicada em 1846. Considero esse trabalho a publicação mais importante de Weber. Ele introduziu seu eletrodinamômetro bifilar com o qual podia medir correntes elétricas com alta precisão. Inicialmente utilizou esse instrumento para provar a força de Ampère entre elementos de corrente. Utilizou então essa força de Ampère para deduzir sua própria força entre partículas eletrizadas. A força de Weber entre duas partículas eletrizadas com cargas e e e' depende não apenas da distância r entre elas, mas também da velocidade *relativa* entre elas, dr/dt, assim como da aceleração *relativa* entre elas, d^2r/dt^2. Ele mostrou que com essa força era possível unificar as leis de Coulomb, Ampère e Faraday.

Esse Volume também contém o artigo de 1848 de Weber no qual introduziu sua energia potencial dependente da velocidade. Também está incluído nesse Volume o artigo de 1849 de Gustav Kirchhoff (1824-1887) sobre uma dedução da lei de 1826 de Georg Simon Ohm (1789-1854). A dedução original de Ohm de sua lei violava alguns resultados da eletrostática. Em seu trabalho Kirchhoff apresenta uma dedução da lei de Ohm que satisfaz à teoria da eletrostática devida a Coulomb.

Esse Volume termina com a Segunda Memória principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas de 1852. O foco principal desse trabalho era a medida da resistência elétrica. O artigo de Weber contém também seu cálculo pioneiro sobre a distribuição de cargas sobre as superfícies de condutores resistivos conduzindo correntes constantes. Ele considerou, em particular, um condutor cilíndrico e um anel resistivo.

[1] Ela aparece, por exemplo, em [Wie60, pág. 170] e [Wie67, pág. 118].

Inseri as palavras entre colchetes, [ ], no meio de algumas sentenças para clarificar o significado dessas frases.

Escrevi todas as Notas de rodapé nas quais não aparece o nome do autor. Em todos os outros casos indiquei o nome da pessoa que escreveu aquela Nota de rodapé.

Capítulo 2

Introdução à Correspondência de 1845 entre Gauss e Weber

A. K. T. Assis[2]

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) estudou na Universidade de Göttingen de 1795 a 1798. Em 1807 foi designado diretor do Observatório Astronômico de Göttingen onde passou a morar e trabalhar até sua morte. Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) conheceu Gauss pessoalmente em 1828 durante uma conferência em Berlim. Em 1831 ele foi contratado como professor de física na Universidade de Göttingen por indicação de Gauss. Sempre tiveram um ótimo relacionamento pessoal e uma excelente colaboração científica. Por motivos políticos, foi demitido da Universidade em 1837 juntamente com outros seis professores. Por alguns anos Weber continuou morando em Göttingen e colaborando com Gauss. Foi contratado como professor de física na Universidade de Leipzig em 1843, lá permanecendo até 1849. As revoluções de 1848 nos Estados alemães mudaram todo o cenário político e Weber pôde reobter sua cátedra na Universidade de Göttingen, permanecendo lá de 1849 até sua morte em 1891. A correspondência de 1845 traduzida no próximo Capítulo ocorreu enquanto Gauss estava em Göttingen e Weber em Leipzig.

O tema principal da correspondência é a força de Ampère entre elementos de corrente. Informações e referências bibliográficas detalhadas sobre o que descreverei a seguir podem ser encontradas no livro *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do significado e da evolução da força de Ampère, juntamente com a tradução comentada de sua principal obra sobre eletrodinâmica*.[3]

Hans Christian Oersted (1777-1851) observou em 1820 a deflexão de uma agulha magnetizada de sua posição normal de equilíbrio ao longo do meridiano magnético terrestre. Essa deflexão ocorria quando a um longo fio retilíneo conduzindo uma corrente elétrica constante era colocado nas proximidades da agulha. Logo surgiram várias explicações diferentes para esse fenômeno que despertou enorme interesse científico:

- (a) Oersted supôs que em um fio com corrente, além das partículas eletrizadas fluindo em seu interior, haveria também um fluxo helicoidal de partículas eletrizadas ao redor do fio. Essas partículas eletrizadas empurrariam os polos magnéticos da agulha

[2] Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

[3] [AC11] e [AC15], ver também [Cha09].

imantada e fariam com que a agulha fosse desviada de sua direção usual ao longo do meridiano magnético terrestre.

- (b) Outros cientistas supuseram que o fio ficava imantado pela passagem da corrente elétrica. Buscavam então como poderia ser a distribuição de polos ou dipolos magnéticos neste suposto fio imantado de tal forma que conseguissem reproduzir a experiência de Oersted através de uma interação entre os polos magnéticos distribuídos pelo fio e os polos magnéticos da agulha.

- (c) Alguns cientistas como Jean-Baptiste Biot (1774-1862), Félix Savart (1791-1841) e Michael Faraday (1791-1867) imaginaram uma interação direta entre a corrente elétrica e a agulha imantada. Em particular, supuseram a existência de uma força entre cada elemento de corrente do fio e cada polo magnético da agulha. Se a corrente no fio tem uma intensidade i, o elemento de corrente tem um comprimento ds e o polo magnético tem uma intensidade m, eles buscaram uma lei de força entre ids e m que pudesse reproduzir a experiência de Oersted.

- (d) Ampère seguiu um caminho diferente, original e altamente frutífero. Ele partiu de duas hipóteses principais. (I) Postulou a existência de forças entre dois fios com corrente, coisa que nunca havia sido observada até então e, em particular, a existência de forças entre elementos de corrente. (II) Postulou a existência de correntes elétricas não apenas nos fios condutores, mas também no interior dos ímãs e até mesmo no interior da Terra. A interação entre dois ímãs, assim como a interação entre um ímã e a Terra, seriam então devidas às interações entre elementos de corrente.

A partir de então Ampère buscou e encontrou experimentalmente forças e torques entre fios conduzindo correntes constantes com diversos formatos diferentes, criando assim toda uma área nova na física até então totalmente desconhecida. Além disso, tentou simular a interação magnética entre a Terra e uma bússola, assim como a interação magnética entre dois ímãs, supondo apenas a interação entre fios conduzindo correntes elétricas. Para isso imaginou como poderiam ser as correntes elétricas no interior da Terra e dos ímãs. Considerou fios com os formatos espirais, solenoidais etc. Seu principal objetivo foi o de encontrar uma lei de força entre dois elementos de corrente com a qual pudesse não apenas reproduzir a experiência de Oersted, mas também as interações entre a Terra e uma bússola, as interações conhecidas entre dois ímãs, assim como todas as interações que observou pela primeira vez entre dois fios com corrente.

Sejam dois elementos de corrente ids e $i'ds'$ separados pela distância r e formando o ângulo ε entre eles, como mostrado na Figura 2.1 (a).

Seguindo suas hipóteses principais, supondo a lei de ação e reação de Newton segundo a qual a força entre dois elementos de corrente tem de ser não apenas igual e oposta mas também ao longo da linha reta que os une, usando alguns resultados experimentais e um conjunto de princípios de simetria, Ampère concluiu em 1820 que a força entre dois elementos de corrente ids e $i'ds'$ era proporcional à seguinte expressão:

$$\frac{ii'dsds'}{r^2}\left(\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\omega + k\cos\theta\cos\theta'\right) . \tag{2.1}$$

Nessa expressão r é a distância entre os centros dos dois elementos de corrente, θ e θ' são os ângulos entre cada elemento de corrente e *um mesmo prolongamento da reta que os*

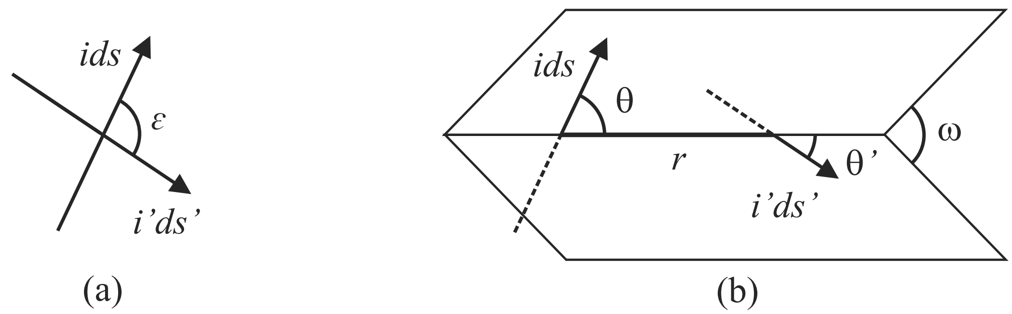


Figura 2.1: Ângulos de Ampère entre os elementos de corrente e a reta que os une.

une, enquanto que ω é ângulo entre dois planos, a saber, o plano formado pelo elemento de corrente ids e a reta r, e o plano formado pelo elemento de corrente $i'ds'$ e a reta r, como mostrado na Figura 2.1 (b). Além disso, para Ampère $r \geq 0$, $i \geq 0$, $i' \geq 0$ e os ângulos têm os seguintes valores em radianos: $0 \leq \varepsilon \leq \pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \vartheta' \leq \pi$ e $0 \leq \omega \leq \pi$. Caso a expressão da força fosse positiva, Ampère a caracterizava como atrativa. Caso ela fosse negativa, Ampère a caracterizava como repulsiva. Para uma discussão desses tópicos ver o Capítulo 2 (A força de Ampère e o significado de seus termos) de [AC11] e [AC15].

Em 1820 ele acreditava que a constante adimensional k nessa expressão seria nula, mas não tinha certeza desse resultado. Caso fosse diferente de zero, acreditava ainda que seu valor seria positivo, mas muito menor do que 1. Para sua surpresa encontrou experimentalmente em 1822 através do caso de equilíbrio de rotação contínua que a constante k tinha o seguinte valor:

$$k = -\frac{1}{2} \; . \tag{2.2}$$

Esse foi um resultado surpreendente para o próprio Ampère. O fato de $k = -1/2$ levou Ampère a duas previsões notáveis:

- Seja um circuito fechado de formato arbitrário conduzindo uma corrente constante. Ao integrar a força exercida por esse circuito ao atuar sobre um elemento de corrente externo ao circuito, Ampère concluiu que ela era sempre ortogonal ao elemento de corrente, não importando o formato do circuito fechado.

- Dois elementos de corrente paralelos e colineares conduzindo correntes constantes no mesmo sentido devem se repelir.

Ampère confirmou experimentalmente essas previsões teóricas. Dessa forma obteve a expressão final de sua força entre dois elementos de corrente. Em sua obra-prima de 1826, *Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência*, chegou nessa mesma expressão com $k = -1/2$ utilizando um outro conjunto de experiências cruciais.

Enquanto estava em Leipzig, Weber tentou deduzir a força de Ampère entre elementos de corrente supondo uma forma generalizada da força de Coulomb entre partículas eletrizadas. Nessa generalização a força dependeria também da velocidade entre as partículas eletrizadas. Cada elemento de corrente seria composto por partículas eletrizadas com cargas de mesma intensidade, mas de sinais opostos, deslocando-se em relação ao condutor com velocidades iguais e opostas. Em 1845 enviou a Gauss sua primeira formulação solicitando sua opinião, antes de enviar o texto para publicação. Nessa primeira formulação Weber deduziu a expressão (2.1), mas sem a constante k, ou seja, com $k = 0$.

Gauss reagiu fortemente contra essa fórmula de Weber, já que iria contra todo o trabalho de Ampère. Toda a concepção de Ampère de considerar o magnetismo como sendo devido a correntes elétricas no interior dos ímãs e da própria Terra dependia da força de Ampère entre elementos de corrente com $k = -1/2$.

Quando Gauss respondeu a Weber, ele não estava em mãos com o Tratado de Ampère de 1826. Mas Gauss sabia que a força de Ampère entre elementos de corrente pode ser escrita de duas maneiras diferentes dependendo da maneira como definimos os ângulos entre os dois elementos de corrente e a reta que os une, sendo que essas duas maneiras levam às mesmas forças entre os dois elementos de corrente. Se definirmos os ângulos como representados pela Figura 2.1, então a força de Ampère é dada pela Equação (2.1) com $k = -1/2$.

Por outro lado, como apontado por Gauss nessa correspondência, pode ser feita uma definição diferente dos ângulos como dados pela Figura 2.2.

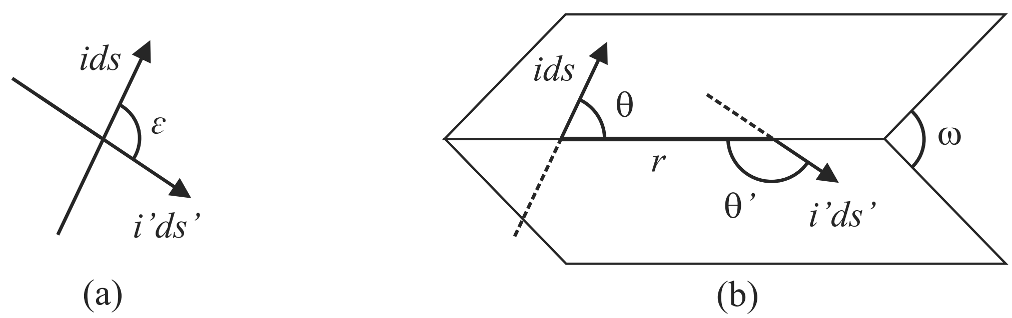


Figura 2.2: Maneira alternativa de definir os ângulos θ e θ' entre os elementos de corrente e a reta que os une.

Se utilizarmos essa maneira alternativa de definir os ângulos θ e θ' entre cada elemento de corrente *e o segmento de reta que os une*, então uma expressão análoga à força de Ampère seria obtida pela Equação (2.1), mas agora com o valor de k dado por:

$$k = +\frac{1}{2} \ . \tag{2.3}$$

Ou seja, Gauss sabia que a força entre dois elementos de corrente arbitrários ids e $i'ds'$ terá a mesma intensidade, direção e sentido usando a Equação (2.1) com dois valores diferentes de k, desde que sejam utilizadas definições diferentes dos ângulos θ e θ':

- (a) Usando a definição original de Ampère representada pela Figura 2.1 e com o valor de $k = -1/2$ obtido por Ampère, Equação (2.2).

- (b) Usando a definição alternativa representada pela Figura 2.2, desde que utilizemos o valor alternativo $k = +1/2$, Equação (2.3).

Ou seja, nesses dois casos a força entre dois elementos de corrente arbitrários será sempre aquela dada por Ampère, não importando a orientação dos elementos de corrente. Isto é, se em uma orientação específica dois elementos de corrente se repelem usando a interpretação (a), eles também vão se repelir nessa configuração se usarmos a interpretação (b). Em sua carta Gauss diz que como não estava com o texto original de Ampère em mãos, ele não se lembrava qual desses dois resultados equivalentes havia sido obtido por Ampère.

Em sua resposta a Gauss, Weber diz que com uma modificação de sua hipótese original sobre como deveria ser a força entre corpos eletrizados, ele agora havia conseguido obter exatamente a força original de Ampère entre elementos de corrente. Como será visto em seu trabalho de 1846, Weber utilizou a definição original de Ampère para os ângulos, como representada na Figura 2.1, obtendo agora $k = -1/2$, Equação (2.2), a partir de sua força de Coulomb generalizada que depende também da velocidade relativa entre as partículas eletrizadas, assim como da aceleração relativa entre elas.

Um último detalhe que deve ser mencionado aqui é que nesse trabalho de 1846 Weber apresentou a força de Ampère com um sinal negativo na frente de tudo, ou seja, da seguinte forma:

$$-\frac{ii'dsds'}{r^2}\left(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\omega + k\cos\theta\cos\theta'\right) \ . \tag{2.4}$$

Além de inverter o sinal da força entre dois elementos de corrente, em seu trabalho de 1846 Weber também inverteu o significado de forças positivas e negativas, considerando forças positivas como indicando repulsão entre os corpos que estão interagindo, enquanto que forças negativas significavam repulsão entre eles. Temos então duas opções diferentes, a saber:

- (c) Ampère utilizou a Equação (2.1), juntamente com a definição de que uma força positiva significava atração enquanto que uma força negativa significava repulsão.

- (d) Weber, por outro lado, utilizou a Equação (2.4), juntamente com a definição de que uma força positiva significava repulsão enquanto que uma força negativa significava atração.

Como apontado por Gauss nessa correspondência de 1845, ele sabia que as opções (c) e (d) são equivalentes entre si, levando sempre ao mesmo resultado. Isto é, se em uma orientação específica dois elementos de corrente se repelem usando a interpretação (c), eles também vão se repelir nessa configuração se usarmos a interpretação (d).

Weber apresentou publicamente o resultado dessas pesquisas em seu trabalho mais importante publicado em 1846 e que está traduzido no Capítulo 6, *Medições Eletrodinâmicas, sobre uma Lei Fundamental Geral da Ação Elétrica*. No início desse Tratado Weber prova experimentalmente com grande precisão a força de Ampère entre elementos de corrente. Em seguida deduz a partir dela sua lei de força fundamental entre duas partículas eletrizadas. Essa lei é uma generalização da força de Coulomb, dependendo agora da velocidade relativa entre as partículas e também da aceleração relativa entre elas. Ele também faz o caminho inverso, mostrando como que, ao partir de sua força fundamental entre partículas eletrizadas, ele podia deduzir não apenas a lei de Coulomb de 1785, mas também a força de Ampère de 1822 entre elementos de corrente, juntamente com a lei indução de correntes de 1831 de Faraday.

Capítulo 3

Correspondência de 1845 entre Gauss e Weber

Carl Friedrich Gauss e Wilhelm Weber[4,5]

Nota do Editor:[6] *As cartas de Weber para Gauss, numeradas de 29 a 31, vêm dos manuscritos de Gauss que estão na Divisão de Manuscritos e Livros Raros da Biblioteca Pública da Universidade da Baixa Saxônia, em Göttingen. Elas foram transcritas do texto alemão por Karl Krause e Alexander Hartmann. A carta de Gauss para Weber de 19 de março aparece nas Obras de Gauss, Vol. V, págs. 627-629.*[7] *Todas as cartas foram traduzidas para o inglês por Susan P. Johnson.*[8] *As palavras entre colchetes foram adicionadas pela tradutora; as Notas de rodapé são do editor [Laurence Hecht].*[9]

[4][GW96] e [GW21].

[5]As Notas de Laurence Hecht, o editor da tradução em inglês da correspondência entre Gauss e Weber de 1845, são representadas por [Nota de Hecht:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

[6]Esse texto apareceu na página 41 de [GW96].

[7][Gau45].

[8]Ver [Joh97].

[9]As cartas originais e suas transcrições podem ser encontradas na "Correspondência Completa de Carl Friedrich Gauß", https://gauss.adw-goe.de e [Gau d].

3.1 Weber para Gauss, Carta Número 29, 18 de janeiro de 1845

Estimado Senhor:

[...] Já faz algum tempo que me ocupo com um tratado que gostaria de apresentar à Sociedade Real em Göttingen; agora que terminei, no entanto, não ouso arriscar um julgamento sólido, nem sobre sua correção aos seus olhos, nem sobre se é digno de ser apresentado à Sociedade, e, portanto, prefiro deixar ambos para sua decisão benevolente. Por isso, apresento-o a você com o pedido, para que tenha a bondade de olhar para ele conforme sua conveniência, quando seu tempo permitir. [...]

Com carinho e respeito sincero,

Leipzig, 18 de janeiro de 1845

Seu dedicado,
Wilhelm Weber

3.2 Weber para Gauss, Carta Número 30, 1 de fevereiro de 1845

Estimado Senhor:

Acabei de perceber que no manuscrito que enviei recentemente a você, aparentemente faltou uma Nota relacionada com a fórmula de Ampère,[10] a qual seria necessária para compreender o texto. A saber, Ampère forneceu uma expressão mais geral para a interação entre dois elementos de corrente, do que a expressão que apresentei, a qual tento justificar ao considerar que a determinação do coeficiente deduzido da experiência do segundo termo, o qual descartei, parece totalmente incerta devido à falta de confiabilidade nas experiências, logo, enquanto faltar uma determinação quantitativa mais precisa, pelo mesmo motivo [o segundo coeficiente] pode ser colocado = 0. Se não estou errado, você próprio já expressou anteriormente alguns pensamentos sobre desprezar o valor negativo que Ampère assumiu para esse coeficiente por meio do qual dois elementos de corrente, um seguindo o outro, teriam de se repelir mutuamente.[11]

Com carinho e respeito sincero,

Leipzig, 1 de fevereiro de 1845

Seu dedicado,
Wilhelm Weber

[10] André-Marie Ampère (1775-1836). Sua obra-prima foi publicada em 1826, *Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência*, [Amp26] e [Amp23]. Há uma tradução completa em português desse trabalho, *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*, [Cha09] e [AC11]. Traduções parciais para o inglês podem ser encontradas em [Amp65] e [Amp69]. Traduções completas e comentadas em inglês podem ser encontradas em [Amp12] e [AC15]. Uma quantidade imensa de material sobre Ampère e sobre sua força entre elementos de corrente pode ser encontrada na homepage *Ampère e a História da Eletricidade*, http://www.ampere.cnrs.fr e [Blo05], na homepage da Sociedade dos Amigos de André-Marie Ampère, https://saama.fr, e na homepage do Museu Ampère, https://amperemusee.fr/en.

[11] Ver as Seções 7.5 (A Obtenção de $k = -1/2$) e 7.6 (Dois Resultados Notáveis Obtidos por Ampère) de [AC11] e [AC15].

3.3 Gauss para Weber, Carta Número 22, 19 de março de 1845

Estimado amigo:

Desde o início deste ano, meu tempo tem sido incessantemente tomado e desperdiçado de tantas maneiras e, por outro lado, o estado de minha saúde é tão pouco favorável ao trabalho sustentado, que até agora não tive condição para ler o pequeno tratado que você teve a bondade de me enviar, e para o qual só agora pude dar uma primeira olhada rápida. Isso, no entanto, mostrou-me que o assunto pertence às mesmas investigações com as quais me ocupei muito extensivamente há cerca de 10 anos (quero dizer especialmente em 1834-1836),[12] e que para poder expressar um julgamento completo e exaustivo sobre o seu tratado, não é suficiente *lê-lo*, mas eu teria que primeiro mergulhar no estudo de meu próprio trabalho daquele período, o que exigiria ainda mais tempo, pois, no curso de uma pesquisa preliminar de papéis, encontrei apenas alguns fragmentos, embora provavelmente muitos outros ainda existam, mesmo que não de forma completamente ordenada.

Contudo, se, após ter sido afastado desse assunto por muitos anos, posso permitir-me expressar um julgamento baseado na memória, eu pensaria, para começar, que, se Ampère ainda estivesse vivo, ele certamente iria protestar, quando você apresenta a lei de Ampère pela fórmula

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\varepsilon \ , \qquad (I)$$

já que ela está contida em uma fórmula totalmente diferente, a saber[13,14]

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(\frac{1}{2}\cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\varepsilon\right) \ . \qquad (II)$$

Também não acredito que Ampère ficaria satisfeito com a Nota acrescentada, que você menciona em uma outra carta, a saber, na qual você apresenta a diferença de tal forma, que a fórmula de Ampère seria *uma fórmula mais geral*, tal como

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}\left(F\cos\theta\cos\theta' + G \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos\varepsilon\right) \ ,$$

na qual *Ampère* deduziu experimentalmente $F = \frac{1}{2}G$, enquanto que, como as experiências de Ampère podem não ter sido tão precisas, você pensa que com os mesmos direitos pode afirmar que $F = 0$. Em qualquer outro caso diferente desse, eu concederia que nessa discordância entre você e Ampère, um terceiro partido iria talvez clarificar a questão como segue, que:

- se alguém (com você) considera isso apenas como uma modificação da lei de Ampère,

[12] Esse trabalho de Gauss só foi publicado postumamente em 1867, [Gau67], com tradução para o inglês em [Gau21a].

[13] [Nota de Hecht:] Esse parece ter sido o único erro de memória de Gauss: O épsilon deveria ser um ômega.

[14] Ver o Capítulo 2 (A Força de Ampère e o Significado de Seus Termos) de [AC11] e [AC15] para uma discussão sobre os ângulos que aparecem na força de Ampère entre elementos de corrente.

- ou se (como eu acho que Ampère teria que considerar o assunto) isto significa a derrubada da fórmula fundamental de Ampère e a inserção de uma fórmula essencialmente diferente,

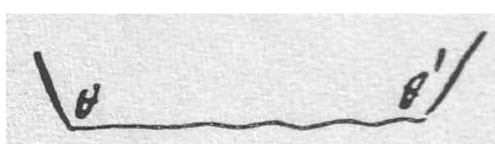
é, no fundo, pouco mais do que um jogo de palavras. Como eu disse, em qualquer outro caso eu o concederia com prazer, pois ninguém pode ser *in verbis facilior*[15] do que eu. No entanto, no presente caso, a diferença é uma questão vital, pois toda a teoria de Ampère da intercambialidade do magnetismo com as correntes galvânicas depende absolutamente da exatidão da Fórmula (II) e é totalmente perdida, se outra for escolhida em seu lugar.

Não posso contradizê-lo, quando você declara que os experimentos de Ampère não são muito conclusivos, enquanto que, como não tenho o tratado clássico de Ampère em mãos, nem me lembro da maneira em que foram feitos seus experimentos, ainda assim não acredito que Ampère, mesmo que ele próprio admitisse a incompletude de seus experimentos, autorizaria a adoção de uma fórmula (I) inteiramente diferente da dele, pela qual toda a sua teoria cairia em pedaços, desde que essa outra fórmula não fosse reforçada por experimentos *completamente decisivos*. Você deve ter entendido mal as reservas que, de acordo com sua segunda carta, eu mesmo expressei. Desde cedo eu estava convencido, e continuei assim, que a permutabilidade mencionada anteriormente[16] requer *necessariamente* a fórmula Ampère, e não permite nenhuma outra que não seja idêntica àquela para uma corrente fechada, *se a ação ocorrer na direção da linha reta que liga os dois elementos de corrente*; que, no entanto, se renunciarmos à condição que acabamos de expressar, poderemos escolher inúmeras outras fórmulas, que para uma corrente fechada, devem sempre dar o mesmo resultado final que a fórmula de Ampère. Além disso, pode-se acrescentar também que, como para isso se trata sempre de ações a distâncias mensuráveis, nada nos impediria de pressupor que outros componentes possam entrar na fórmula, que só são eficazes a distâncias imensuravelmente pequenas (como a atração molecular toma o lugar da gravitação), e que assim, a dificuldade da repulsão de dois elementos sucessivos da mesma corrente poderia ser removida.

Para evitar mal-entendidos, observarei ainda que a Fórmula (II) apresentada anteriormente também pode ser escrita como

$$-\frac{\alpha\alpha'}{rr}ii'\left(-\frac{1}{2}\cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\varepsilon\right) \ ,$$

e que não sei se Ampère (cujo trabalho, como disse, não tenho à mão) usou a primeira ou a segunda notação.[17] Ambas significam a mesma coisa, e usa-se a primeira forma, quando se medem os ângulos θ e θ' com a mesma reta delimitada, assim, esta reta determina o lado do segundo ângulo no sentido oposto:



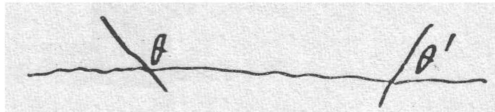
mas determina a outra forma, quando se considera uma reta de comprimento indeterminado,

[15]Isto é, mais flexível em matéria de formulação verbal.

[16]Entre o magnetismo e as correntes elétricas.

[17]Ampère utilizou a segunda notação e definiu os ângulos θ e θ' como mostrado na segunda Figura a seguir, ver o Capítulo 2 (A Força de Ampère e o Significado de Seus Termos) de [AC11] e [AC15]. Ver também a Nota de rodapé 10 na página 19.

e, para a medição dos ângulos θ e θ', recorre-se a essa reta duas vezes, em um sentido ou outro:



E, da mesma forma, pode-se colocar um sinal + na frente de toda a fórmula em vez do sinal −, se considerarmos como efeito positivo, não a repulsão, mas a atração.

Talvez eu esteja em condições de me aprofundar um pouco mais neste assunto, que agora está tão distante de mim, no momento em que você me der o prazer de uma visita, como me deu esperança de que fará no final de abril ou início de maio. Sem dúvida, eu teria tornado públicas minhas investigações há muito tempo, se não fosse o fato de que, no ponto em que parei, faltava o que eu considerava ser a verdadeira pedra angular,

Nil actum reputans si quid superesset agendum
[As discussões não levam a nada, se ainda há trabalho a ser feito]

a saber, *a dedução* das forças adicionais (que entram na ação recíproca entre partículas elétricas em repouso, se elas estiverem em movimento relativo) a partir da ação que *não é instantânea*, mas ao contrário (de maneira comparável à luz) se propaga no tempo. Não consegui fazer isso naquela época; mas, tanto quanto me lembro, abandonei a investigação naquela época não inteiramente sem esperança de que esta pudesse ter sucesso mais tarde, embora — se bem me lembro — com a convicção subjetiva de que primeiro era necessário formar uma ideia construível da maneira pela qual ocorre a propagação.

[...]

Saudações calorosas a seus irmãos e irmã e ao Prof. Möbius.[18]

Göttingen, 19 de março de 1845

Sempre seu,
C. F. Gauss

[18]August Ferdinand Möbius (1790-1868) foi um matemático e astrônomo alemão. Obteve a cátedra de astronomia na Universidade de Leipzig em 1844. A chamada fita ou faixa de Möbius recebeu esse nome em sua homepagem, que a estudou em 1858.

3.4 Weber para Gauss, Carta Número 31, 31 de março de 1845

Estimado Senhor:

O Prof. Buff[19] de Giessen, que está viajando daqui para Göttingen para visitar Wöhler,[20] seu antigo colega em Cassel, fará a bondade de lhe entregar essas páginas. Foi de grande interesse para mim saber pelo que você teve a gentileza de escrever, que Ampère, na determinação do coeficiente que ele chama de k em sua lei fundamental, foi guiado por outras razões, que não as da experiência empírica imediata que ele cita no início de seu tratado, e que, portanto, a dedução que apresentei inicialmente, que parecia um pouco mais simples, é inadmissível, porque não reproduz com exatidão a lei de Ampère; no entanto, por meio do que me parece ser uma ligeira modificação em minha premissa, obtive facilmente a expressão exata da lei de Ampère.

Devido ao interesse no assunto e ao incentivo de Fechner[21] e, mais tarde, também de Möbius, fiquei até certo ponto tentado a me ocupar com um tema que, desde o início, percebi que seria muito elevado para mim; estou ainda mais satisfeito por você estar inclinado a voltar sua atenção mais uma vez para esse assunto difícil e a fazer um desenvolvimento completo dele. Certamente, a explicação deduzida de uma propagação gradual da ação seria a mais bela solução do enigma. Em resposta ao seu amável convite, certamente não deixarei de ir a Göttingen até o final desta primavera.

Em conformidade com suas instruções, enviarei à *Royal Society* em Londres uma cópia dos cinco últimos resumos anuais dos *Resultate*,[22] por meio do livreiro, pois será difícil para mim aceitar o convite para ir a Cambridge. De onde a *Royal Society* obteve uma cópia do primeiro resumo anual, não sei, pois não a compraram.

Möbius, que agora está comemorando suas bodas de prata, e minha irmã, lembram-se de você e de sua filha com o maior respeito.

Com carinho e respeito sincero,

Leipzig, 31 de março de 1845

Seu dedicado,
Wilhelm Weber

[19] Johann Heinrich Buff (1805-1878) foi um físico e químico alemão.

[20] Friedrich Wöhler (1800-1882) foi um químico alemão que ficou famoso pela síntese do composto orgânico ureia. Ele publicou alguns trabalhos com Weber: [WW41c] com tradução para o inglês em [WW21], [WW41a] e [WW41b].

[21] Gustav Theodor Fechner (1801-1887) foi um físico, filósofo e psicólogo experimental alemão. Ver [Fec60].

[22] *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins* (*Resultados das Observações da Associação Magnética*), ver [GW37], [GW38], [GW39b], [GW40b], [GW40a], [GW41] e [GW43].

Capítulo 4

[Fechner, 1845] Sobre a Conexão dos Fenômenos de Indução de Faraday com os Fenômenos Eletrodinâmicos de Ampère

Gustav Theodor Fechner[23,24,25]

[23][Fec45] com tradução para o inglês em [Fec21].

[24]As Notas de G. T. Fechner (1801-1887) são representadas por [Nota de Fechner:]; as Notas de Johann Christian Poggendorff (1796-1877), o editor do periódico *Annalen der Physik und Chemie* onde o artigo de Fechner foi publicado, são representadas por [Nota de Poggendorff:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

[25][Nota de Poggendorff:] Todos os que compartilharam do notável destino do talentoso autor, que milagrosamente recuperou a força de seus olhos após muitos anos de cegueira, certamente receberão com a mais sincera alegria esta primeira prova de sua atividade renovada na ciência. Mas, infelizmente, essa alegria deve estar muito obscurecida pela carta com a qual o autor acompanhou o envio de seu ensaio para mim:

> Esta é a primeira vez em muito tempo que consigo me relacionar com você novamente; e queira o céu que não seja a última vez por muito tempo. A condição dos meus olhos melhorou milagrosamente por um curto período de tempo, de modo que eu esperava uma recuperação completa, mas desde então a situação ficou tão ruim que essas linhas, bem como algumas partes do tratado que as acompanha, tiveram que ser escritas por uma mão estranha e me vejo novamente condenado à quase completa inatividade.

Esperemos, no entanto, que essas perspectivas sombrias não se tornem realidade, mas que a força dos anos, de que o autor desfruta, domine o mal ameaçador mais uma vez e para sempre. Neste desejo, estou certo de que seus numerosos amigos, próximos e distantes, a quem estas linhas são dedicadas, todos concordarão comigo! Poggendorff.

Até agora, os fenômenos de indução de Faraday[26] só foram relacionados aos fenômenos eletrodinâmicos de Ampère[27] por meio de uma regra empírica.[28] A conexão entre eles surge, pelo menos parcialmente, como consequência das seguintes duas proposições fundamentais, que são as conclusões geralmente aceitas dos experimentos:

1) Cada ação de um elemento de corrente consiste nas ações de partículas positivas e negativas de eletricidade, com cargas de mesma magnitude, que passam umas às outras simultaneamente através do mesmo elemento espacial em direções opostas.[29]

2) A ação de dois elementos de corrente um sobre o outro pode ser representada, no que diz respeito a essa composição, pela premissa de que eletricidades do mesmo tipo se atraem se elas forem na mesma direção ou em direção a um vértice angular comum, mas para eletricidades de tipos opostos [ocorre atração entre elas] se elas forem em direções opostas, ou de forma que uma se aproxime do vértice angular comum enquanto a outra se afasta dele.[30]

Até agora, no entanto, apenas a interação dos elementos de corrente completos entre si foi considerada; mas ainda podemos analisar a interação entre os componentes individuais dos elementos atuais como descrito acima, desde que, por um lado, reflita a observação experimental e, por outro, ofereça um meio de analisar a combinação.

A propósito, as ações da eletricidade em movimento consideradas aqui não são, indiscutivelmente, suas ações totais reais, mas apenas aquelas que permanecem não compensadas na interação de todas as correntes, que é a única coisa que precisa ser levada em consideração aqui. Pois não se pode supor que as forças repulsivas que duas partículas de eletricidade

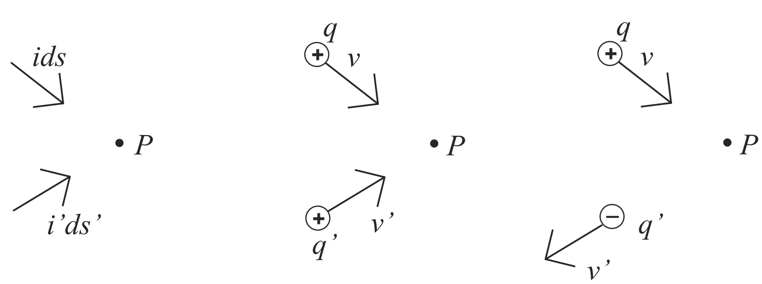
[26] Michael Faraday (1791-1867). Ver [Far32a] com tradução para o português em [Far11] e tradução para o alemão em [Far32c] e [Far89].

[27] Ver a Nota de rodapé 10 na página 19.

[28] Creio que essa regra empírica a que Fechner se refere está contida no trabalho de 1834 de Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865), [Len34] com tradução parcial para o inglês em [Len69].

[29] O que Fechner denomina aqui de *Raumelement — elemento espacial*, refere-se a um elemento de corrente do condutor.

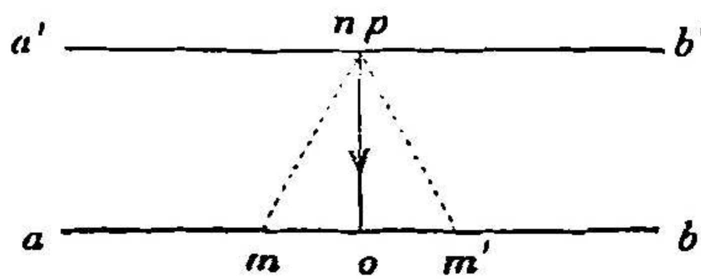
[30] Considere dois elementos infinitesimais de tamanhos ds e ds', transportando correntes i e i'. De acordo com a força de Ampère entre elementos de corrente, existem situações em que eles se atraem quando ambas as correntes fluem em direção a um vértice angular comum P. Exceções a esta regra foram estudadas por Bertrand, [Ber74] com tradução em português em [Cha19]. Uma dessas situações de atração é mostrada no caso (a) da Figura desta Nota de rodapé. Segundo Fechner, pode ser possível deduzir a força de Ampère nessas situações assumindo três condições: (1) cada elemento de corrente é composto por partículas positivas e negativas com cargas de mesma magnitude fluindo em direções opostas em relação ao fio; (2) partículas do mesmo tipo (ambas positivas ou ambas negativas) nos dois elementos se atraem quando ambas se movem em direção a um vértice angular comum P, como no caso (b) da Figura dessa Nota de rodapé; e (3) a partícula positiva de um elemento atrai a partícula negativa do outro elemento quando uma delas se move em direção a P, enquanto a outra se afasta de P, como no caso (c) da Figura dessa Nota de rodapé:



(a) (b) (c)

do mesmo tipo exercem uma sobre a outra quando em repouso se transformarão imediatamente em atração se começarem a se mover na mesma direção, ainda que lentamente. A única coisa que se pode supor é que as forças repulsivas serão reduzidas, seja absolutamente, ou, se depender apenas de movimentos relativos, em relação ao caso em que o movimento ocorra no sentido contrário.[31,32] Mas no que diz respeito à interação de correntes completas, no entanto, como na eletricidade natural, onde todas as forças da eletricidade estática se cancelam,[33] sempre será visto, assim como mostra a própria análise dos fenômenos, como se eletricidades do mesmo tipo se atraíssem quando se movessem na mesma direção, e se repelissem mutuamente quando se movem em direções opostas. Esta análise será a base fundamental dos seguintes cenários de caso.

Consideremos agora o primeiro caso principal de indução. Um fio [condutor] $a'b'$, no qual não há corrente fluindo, é aproximado em orientação paralela de outro fio ab, que está conduzindo uma corrente elétrica.



Neste caso, as eletricidades opostas do fio neutro, conectadas à eletricidade natural, são movidas simultaneamente perpendicularmente em direção ao fio condutor de corrente. Se não faz diferença para a natureza do movimento como ele é produzido, então também será considerado indiferente aqui com relação às consequências dependentes do movimento se este movimento é causado pela influência das forças galvânicas peculiares, ou se aconteceu mecanicamente por nossa vontade.

Temos então duas correntes de eletricidade oposta igualmente intensas movendo-se juntas *no mesmo sentido* em ângulos retos contra uma corrente de duas vias.[34]

---

[31] [Nota de Fechner:] As investigações de Weber, que serão mencionadas mais adiante, mostram que esta última suposição deve ser mantida.

[32] Fechner está se referindo a Wilhelm Eduard Weber (1804-1891).

[33] Ou seja, cada elemento de corrente pode ser considerado como sendo composto de cargas iguais e opostas movendo-se em direções opostas em relação ao fio. Não há carga resultante em cada elemento de corrente. Portanto, não há força eletrostática resultante entre dois elementos de corrente.

[34] Em alemão: *eine doppelsinnige Strömung*. Ou seja, uma corrente de partículas positivas movendo-se em uma direção em relação ao condutor, juntamente com uma corrente de partículas negativas movendo-se na direção oposta. Normalmente, a direção da corrente era entendida como a direção do movimento das partículas carregadas positivamente.

Neste primeiro caso de indução considerado por Fechner, o fio neutro ab está em repouso em relação ao solo e conduz uma corrente constante, digamos de a a b. Essa corrente pode ser considerada como um fluxo de partículas positivas de a para b, juntamente com um fluxo de partículas negativas de b para a. Inicialmente não há corrente no fio neutro estacionário $a'b'$. No entanto, quando $a'b'$ se move com velocidade constante u em direção a ab, mantendo $a'b'$ sempre paralelo a ab, uma corrente é induzida em $a'b'$, fluindo de b' para a'. Este movimento do fio neutro $a'b'$ em direção ao fio ab pode ser considerado como um movimento de um fio carregado positivamente $a'b'$ em direção a ab, juntamente com um movimento igual de um fio carregado negativamente $a'b'$ em direção a ab. É necessário mostrar que as partículas eletrizadas positiva e negativamente movendo-se em direção oposta em ab exercerão uma força sobre as partículas positivas de $a'b'$

Para descobrir a ação indutora que o fio $a'b'$ sofre devido ao fio ab, precisamos considerar a ação que qualquer partícula dupla de eletricidade natural np[35] experimenta de quaisquer duas partículas de corrente m e m' que estão situadas em ambos os lados da vertical npo. Assim, basta atentar para um tipo de eletricidade nas partículas m e m', pois, como é fácil ver, o outro [tipo] causará a mesma ação.[36]

Portanto, a ação total das partículas m e m' sobre a partícula positiva p e sobre a partícula negativa n é composta por quatro forças individuais que devemos decompor de acordo com a direção do fio $a'b'$ para encontrar a ação indutora neste fio.[37] Se usarmos apenas a suposição de Ampère de que as forças entre dois elementos de corrente estão ao longo da direção de sua linha de conexão, e considerarmos a lei das correntes angulares de acordo com a proposição 2), descobriremos que as forças laterais indutoras[38] dessas quatro forças individuais concordam em impulsionar p na direção oposta de n, resultando em uma corrente de duas vias, ou corrente por excelência no sentido comum da palavra, com essa corrente fluindo em uma direção corroborada pela experiência.[39] Por outro lado, as forças laterais orientadas perpendicularmente ao fio $a'b'$ tendem a conduzir n na mesma direção que p. Portanto, no caso de m e m' serem consideradas como simétricas em relação à vertical npo, ambas [as forças] se neutralizam e se subtraem uma da outra em relação à geração de corrente.

Se alguém duvidar que a maneira pela qual o movimento da eletricidade surgiu não tem qualquer influência sobre sua ação, a concordância com a experiência seria, sem dúvida, uma das melhores provas de que as conclusões acima estão corretas. Acaba sendo irrelevante se eu provoco o fluxo de eletricidade por um movimento mecânico — com minhas mãos — ou se ela recebeu o impulso de seu movimento por contato galvânico.

Em vez de mover o fio $a'b'$ em direção ao fio estacionário ab no experimento de indução,

---

fazendo com que elas se movam de b' para a', exercendo também uma força sobre as partículas negativas de $a'b'$ fazendo com que elas se movam de a' para b'. Ou seja, induzindo uma corrente em $a'b'$ direcionada de b' para a'. Essa é a tarefa que Fechner vai tentar resolver a seguir.

[35]Esta partícula dupla np é composta por uma partícula com carga negativa n e uma partícula com carga positiva p.

[36]Ou seja, a força conjunta das partículas negativas de m e m' agindo sobre a partícula positiva p será igual à força conjunta das partículas positivas de m e m' agindo sobre p. Da mesma forma, a força conjunta das partículas negativas de m e m' agindo sobre a partícula negativa n será igual à força conjunta das partículas positivas de m e m' agindo sobre n.

[37]Essas quatro forças individuais que atuam em p são, (1) a força da partícula positiva de m em p, (2) a força da partícula positiva de m' em p, (3) a força da partícula negativa de m em p, e (4) a força da partícula negativa de m' em p. Da mesma forma, haverá quatro forças individuais agindo em n devido às partículas positivas e negativas de m e m'.

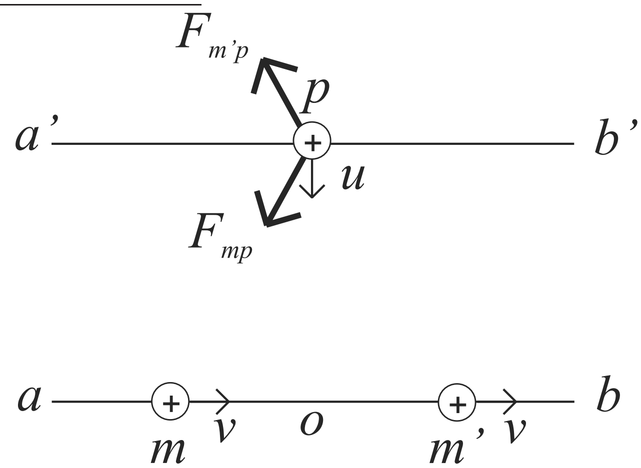
[38]Isto é, forças decompostas ao longo da direção do fio $a'b'$.

[39]Essas forças estão ilustradas na Figura desta Nota de rodapé. Existe uma corrente de a para b. As cargas positivas de m e m' movem-se de a para b com velocidades v. A carga positiva p do fio $a'b'$ move-se em direção a ab com velocidade u. As setas em negrito indicam as forças. A carga positiva de m atrai p, pois ambas se movem em direção ao vértice o no meio de ab. A carga positiva de m' repele p, pois p se move em direção ao vértice o enquanto que a carga positiva de m' se afasta desse vértice o. A soma dessas duas forças produzirá uma força resultante em p apontando de b' para a'. As forças das cargas negativas de m e m' movendo-se de b para a também produzirão uma força resultante em p apontando de b' para a'.

Por outro lado, as forças das cargas positivas de m e m' produzirão uma força resultante sobre a carga negativa n do fio $a'b'$ apontando de a' para b'. Da mesma forma, as forças das cargas negativas de m e m' em n também produzirão uma força resultante apontando de a' para b'. Essas forças resultantes atuando em p apontando de b' para a', juntamente com as forças resultantes atuando sobre n apontando de a' para b', induzirão uma corrente de b' para a'.

pode-se proceder ao contrário, e a indução ainda ocorrerá.[40] Isso deve ser tomado como dado empírico para provar que a única coisa que importa aqui é a relação dos movimentos, e que é admissível substituir o movimento do fio excitado e o repouso do fio neutro, pelo contrário, a fim de poder aplicar o princípio na forma indicada.[41]

No caso até agora considerado, uma corrente de duas vias agiu em uma corrente de sentido único[42,43] *paralela* a ela. Outro caso pode ser considerado onde o movimento de uma das duas correntes é orientado *perpendicularmente* ao da outra, como por exemplo, quando um condutor circular excitado ou seu equivalente, a seção transversal de um ímã, gira em seu plano, enquanto um condutor neutro em repouso está posicionado em relação a ele como mostrado na Figura. Também neste caso, encontra-se o resultado experimental de acordo com os princípios dados, levando em conta a lei dos movimentos relativos.



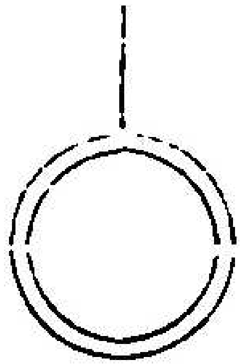
[40]Isto é, se o fio $a'b'$ permanecer em repouso no laboratório e o fio com corrente ab se mover em direção ao fio $a'b'$, a mesma indução ocorrerá em $a'b'$ assim como no caso anterior, desde que o movimento relativo entre ab e $a'b'$ seja o mesmo nesses dois casos.

[41]Em seu artigo lido em 1831 Faraday mostrou que a indução dependia apenas do movimento *relativo* entre dois corpos em interação, A e B. Esses corpos interagentes A e B podem ser um ímã e um circuito fechado onde ocorreu a indução. Esses corpos interagentes A e B também podem ser um circuito fechado transportando uma corrente constante e outro circuito fechado onde ocorreu a indução. Em um experimento, por exemplo, ele manteve A em repouso no laboratório e moveu B em direção a A e detectou uma corrente induzida. Em outro experimento ele manteve B em repouso no laboratório e moveu A em direção a B, detectando mais uma vez uma corrente induzida. Desde que o movimento relativo entre A e B fosse o mesmo nesses dois experimentos, então as correntes induzidas observadas também eram as mesmas. Ver, por exemplo, [Far32a] com tradução para o português em [Far11], [Ass13], [Ass13, Seção 14.1: Indução Eletromagnética] e [Ass14, Seção 15.1: Indução Eletromagnética].

[42][Nota de Fechner:] Para uma breve descrição do contraste, pode-se usar a última palavra para eletricidade natural em movimento.

[43]Fechner está aqui distinguindo as palavras alemãs *doppelsinnige* e *einsinnige* ao se referir à corrente. Uma corrente de duas vias seria a corrente galvânica típica, como entendida na época, na qual partículas positivas e negativas se movem em direções opostas em relação ao condutor. Uma corrente unidirecional, por outro lado, pode ser o movimento de um corpo carregado com apenas um tipo de eletricidade. Se o corpo é neutro como um pedaço de fio, então, quando ele se move em relação ao solo, haverá uma corrente unidirecional de eletricidade positiva e outra corrente unidirecional de eletricidade negativa, ambas se movendo junto com o corpo.

Fechner acabou de mostrar que para explicar a lei de indução de Faraday neste caso, uma força paralela ao fio $a'b'$ deve agir sobre as partículas positivas de $a'b'$ quando $a'b'$ se move em direção a ab. Uma força na direção oposta deve agir sobre as partículas negativas de $a'b'$ quando $a'b'$ se move em direção a ab.



A regra geral de Lenz sobre a reciprocidade entre os fenômenos de Ampère e Faraday pode ser relacionada aos princípios mencionados aqui através do conhecido teorema do paralelogramo de forças, que, se P e Q surgem como forças laterais de R, então, inversamente, R e Q aparecem como forças laterais da decomposição de P, quando Q é aplicado na direção oposta de antes.[44]

Se os princípios estabelecidos estão corretos, um meio provavelmente pode ser encontrado para determinar a velocidade real ou translacional da eletricidade,[45,46] estabelecendo uma relação entre a velocidade facilmente determinável em que *nós* movemos a eletricidade natural no condutor a ser induzido, e a velocidade com que a eletricidade se move sob a influência de forças peculiares.

A princípio parecia que seria difícil encontrar um método pelo qual essa determinação pudesse ser feita com precisão. Mas algum tempo depois, o Prof. W. Weber sugeriu um método muito promissor.

Ainda há, no entanto, algumas conclusões que resultam do que foi exposto aqui:

1) Quando uma haste carregada com um tipo de eletricidade é girada em torno de seu eixo,

---

[44]Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865). Ver [Len34] com tradução parcial para o inglês em [Len69]. Regra de Lenz, [Len34, pág. 485] e [Len69, pág. 513]:

> Se um condutor metálico se move na vizinhança de uma corrente galvânica ou de um ímã, será produzida nele uma corrente galvânica que terá tal direção que teria ocasionado no fio, se estivesse em repouso, um movimento que é exatamente oposto àquele dado aqui ao fio, desde que o fio em repouso seja móvel apenas na direção do movimento e na direção oposta.

[45][Nota de Fechner:] Vale a pena notar que o que até agora tem sido referido como a velocidade da eletricidade não é a velocidade real de suas partículas, mas apenas a velocidade de sua propagação em ondas, uma diferença até então negligenciada, mas ainda assim bastante notável, sobre a qual, até onde sei, W. Weber foi o primeiro a chamar atenção.

[46]Em alemão: *die wirkliche oder translatorische Geschwindigkeit*. Considere um condutor conduzindo uma corrente constante. A velocidade de deriva (também chamada de velocidade de arraste) é a velocidade das partículas eletrizadas da corrente deslocando-se em relação ao condutor, ou seja, em relação ao fio metálico. Quando há uma perturbação na distribuição de cargas do fio, vai ocorrer uma onda elétrica deslocando-se em relação ao condutor. Segundo Fechner, Wilhelm Weber foi o primeiro a distinguir entre essas duas velocidades. Weber acreditava que a velocidade de deriva seria muito menor do que a velocidade da onda. Em 1857 Weber e Kirchhoff deduziram independentemente um do outro, embora ambos os trabalhos fossem baseados na força de Weber de 1846, que uma onda elétrica se propaga ao longo de um fio de resistência desprezível com a velocidade da luz no vácuo, [Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b], [Pog57] com tradução para o inglês em [Pog21], e [Web64] com tradução para o inglês em [Web21a]. Ver ainda [Ass21b] e [Ass21c]. Weber morreu em 1891. O elétron foi descoberto por J. J. Thomson (1856-1940) em 1897. A velocidade de deriva dos elétrons nos metais está tipicamente entre 10^{-3} e 10^{-5} m/s, sendo que a determinação experimental dessa velocidade também só ocorreu após a morte de Weber.

então, além dos fenômenos elétricos usuais, devemos esperar observar também fenômenos magnéticos ou algo completamente análogo aos fenômenos magnéticos, que por sua vez deve induzir correntes nos condutores que se aproximam.

2) Se uma haste eletricamente carregada, livre para girar em um eixo, mas não realmente girando, for aproximada por um ímã, de modo que, se fosse uma haste de ferro, seria magnetizada longitudinalmente, isso fará com que a haste gire.

Quando as duas conclusões anteriores são combinadas, surge uma suposição estranha, embora não diretamente dedutível dos princípios anteriores, que quando uma haste não eletricamente condutora, girando em torno de seu eixo,[47] se aproxima de um ímã nas condições apropriadas, a mesma mostraria os fenômenos da eletricidade livre, e na verdade de apenas um tipo de eletricidade.[48,49]

Sem dúvida será difícil provar as conclusões acima por experiências, pois se lembrarmos que, de acordo com os experimentos de Faraday e Gauss,[50] enormes quantidades ou [enormes] velocidades de eletricidade de máquina[51] são necessárias para produzir apenas ações moderadas da corrente, e que são necessárias correntes consideráveis para produzir claras ações indutivas ou magnéticas, logo pode ser previsto que apenas velocidades de rotação extraordinariamente altas ou intensa eletrização poderão levar ao sucesso nos experimentos indicados. Isso também decorre do fato de que um ímã ou um condutor galvanicamente excitado pode ser considerado completamente preenchido com correntes, enquanto um condutor elétrico giratório é coberto apenas por uma única camada de eletricidade. Portanto, não fiquei surpreso por não ter sido capaz de obter nenhum resultado com os poucos meios experimentais correspondentes de que dispunha. Enquanto isso, outros que tenham meios mais poderosos à sua disposição, podem considerar o que foi dito como um convite para retornar a esses experimentos.

Não se pode negar que nossa concatenação de ideias deixa algo a desejar, a saber, a proposição de que se trata apenas de movimento relativo. De fato, isso só pode ser apresentado como uma proposição empírica, mas não como consequência dos princípios mencionados acima. O mesmo vale para a proposição adicional, que devemos acrescentar, a fim de cobrir todo o campo dos fenômenos de indução, a saber, que a emergência ou intensificação da corrente tem uma ação semelhante ao aproximar-se,[52] assim como ocorre o desaparecimento

[47]Em alemão: *wenn man einem, um seine Axe gedrehten, nicht elektrischen leitenden Stabe*. Ou seja, uma haste isolante. Provavelmente Fechner estava se referindo aqui a uma haste isolante *eletrizada* girando em torno de seu eixo.

[48][Nota de Fechner:] De acordo com isso, uma haste magnética girada em torno de seu eixo teria que mostrar por si mesma os fenômenos da eletricidade livre, de tipo oposto, dependendo do seu sentido de rotação. Que este é realmente o caso parece ser confirmado pelo seguinte: se conectarmos por um fio um ponto do eixo e um ponto da circunferência de um ímã que está girando, uma corrente começará a fluir. De acordo com a analogia com o aparelho galvânico, pode-se supor que após a remoção desse fio de conexão, eletricidade livre aparecerá nos pontos de separação de natureza diferente ou de magnitude diferente. Isso também pode ser detectado por meio de um capacitor se a rotação for suficientemente rápida.

[49]A experiência na qual uma corrente começará a fluir por um fio metálico ao conectar uma extremidade desse fio com o centro de uma face de um ímã cilíndrico giratório, enquanto que a outra extremidade do fio é conectada a um ponto da circunferência do ímã, foi realizada pela primeira vez por Faraday em 1832, [Far32b] com tradução para o alemão em [Far32d]. Weber deu o nome de "indução unipolar" a esse fenômeno, [Web40] e [Web41g].

[50]Devido a um erro de impressão no original, temos aqui *Gaus*. Fechner estava se referindo a Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

[51]Em alemão: *Maschinen-Elektricität*. Ou seja, eletricidade produzida por fricção em máquinas eletrostáticas quando um globo de vidro gira rapidamente em relação ao solo.

[52]Isto é, ao aproximar os dois condutores que estão interagindo.

ou enfraquecimento da corrente quando a distância é aumentada. Entretanto, esta incompletude de nossas conclusões não pode nos levar a abandonar o que aprendemos por meio dela, por causa do que não aprendemos por meio dela.

De fato, a inadequação que ainda aqui se apresenta não reside em uma falha do método de interpretação da ação da eletricidade em movimento no caso dos dois componentes elétricos. O progresso feito anteriormente baseia-se única e exclusivamente neste método. O problema está antes em uma inadequação na forma como formulamos a ação da eletricidade em movimento até agora. Pode-se facilmente mostrar que as proposições e palavras que usamos na teoria da eletricidade realmente não contêm a *possibilidade* de cobrir todo o campo da eletricidade em movimento, e que novas suposições devem, portanto, ser feitas.

De fato, ambas as classes de fenômenos ainda a serem explicados provam irrefutavelmente que a eletricidade em movimento pode influenciar a eletricidade em repouso. Essa influência, tal como surge nesses fenômenos, também não pode estar contida nas proposições que dizem respeito à eletricidade estática, pois a eletricidade positiva e negativa sempre agem com a mesma força à mesma distância (portanto, de acordo com essas proposições, o resultado será sempre zero em relação a outras eletricidades), nem essa influência está contida nas proposições de Ampère, pois estas não permitem que se encontre qualquer ação entre a eletricidade em movimento e a estacionária.

Talvez se pudesse fazer uma tentativa de derivar uma extensão dos princípios, que pudesse satisfazer o que ainda precisa ser explicado, a partir de uma análise dos próprios fenômenos ainda a serem explicados. No entanto, agora não é necessário iniciar tal atividade, pois, como tenho o prazer de anunciar, o Prof. W. Weber chegou a um princípio através de investigações conduzidas de um ponto de vista geral, segundo o qual não só todas as ações das eletricidades em movimento, mas também das eletricidades em repouso entre si, bem como em sua relação mútua entre si, poderiam ser derivados de uma lei geral, de modo que os fenômenos da eletricidade estática, os fenômenos de Ampère e todos os fenômenos de indução se enquadram nesta lei apenas como casos especiais. Desejo, portanto, que este pequeno trabalho seja visto apenas como um precursor das investigações que esperamos serão publicadas em breve.[53]

[53]O trabalho de Weber foi publicado em 1846, [Web46] com uma tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21b]. Ele está traduzido no Capítulo 6. Weber cita esse artigo de 1845 de Fechner na Seção 26 de seu trabalho, ver a Seção 6.26 na página 186.

Capítulo 5

Introdução à Primeira Memória de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas

A. K. T. Assis[54]

Esta é a primeira das 8 principais Memórias de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas.[55] Considero esse o trabalho mais importante de Weber.

Na primeira Parte deste trabalho Weber apresentou seu famoso eletrodinamômetro bifilar.[56] O instrumento original de Weber pertence à Coleção Histórica do Instituto de Física da Universidade de Göttingen, Figura 5.1. Weber utilizou seu eletrodinamômetro para provar a força entre os elementos de corrente desenvolvida por André-Marie Ampère (1775-1836) no período 1820-1827.[57] Friedrich Kohlrausch (1840-1910) discutiu a medição de corrente com o eletrodinamômetro de Weber.[58]

[54]Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

[55][Web46] com tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21b].

[56]Ver https://sammlungen.uni-goettingen.de/sammlung/slg_1020/, https://uni-goettingen.de/en/47114.html e http://physicalisches-cabinet.uni-goettingen.de/phycab/main.php.

[57]Ver a Nota de rodapé 10 na página 19.

[58][Koh83, Capítulo 66a, pág. 192].

Figura 5.1: Eletrodinamômetro bifilar de Weber.

James Clerk Maxwell (1831-1879) discutiu a suspensão bifilar introduzida por Gauss e Weber no artigo 459 de seu *Tratado de Eletricidade e Magnetismo*, enquanto o eletrodinamômetro bifilar de Weber foi discutido nos artigos 725 a 729. Ele fez os seguintes comentários sobre este instrumento, [Max54a, Vol. 2, artigo 725, pág. 371]:

> O instrumento originalmente construído por Weber é descrito em seu *Elektrodynamische Maasbestimmungen — Medições Eletrodinâmicas*. Destinava-se à medição de pequenas correntes e, portanto, tanto a bobina fixa quanto a suspensa consistiam em muitos enrolamentos, e a bobina suspensa ocupava uma parte maior do espaço dentro da bobina fixa do que no instrumento da Associação Britânica, que era principalmente intencionado como um instrumento padrão, com o qual instrumentos mais sensíveis podem ser comparados. Os experimentos que ele fez com esse instrumento fornecem a prova experimental mais completa da precisão da fórmula de Ampère aplicada a correntes fechadas, e formam uma parte importante das pesquisas pelas quais Weber elevou a determinação quantitativa de grandezas elétricas a um nível muito alto no diz respeito à precisão.
>
> A forma do eletrodinamômetro de Weber, na qual uma bobina é suspensa dentro de outra, e é acionada por um par de forças que tende a girá-la em torno de um eixo vertical, é provavelmente a mais adequada para medições absolutas. Um método de calcular as constantes de tal arranjo é dado no Artigo 700.

Weber também utilizou este instrumento para verificar a lei de indução de correntes devida a Michael Faraday (1791-1867) que havia sido publicada em 1832.[59]

Na quarta Parte deste trabalho Weber conseguiu unificar todos os ramos do eletromagnetismo em uma única fórmula. Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) obteve em 1785 uma força que descreve a interação entre duas partículas eletrizadas em repouso entre si.[60] Weber conseguiu unificar a força de Coulomb com a força de Ampère entre elementos de corrente e também com a lei de indução de Faraday. Para este fim, introduziu uma força central apontando ao longo da linha reta que liga as duas partículas eletrizadas e obedecendo à lei de ação e reação de Isaac Newton (1642-1727). Essa terceira lei de Newton foi apresentada em seu livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, geralmente conhecido pelo seu primeiro nome em latim, *Principia*.[61] Além disso, a força de Weber dependia não apenas da distância r entre as partículas eletrizadas, mas também da velocidade *relativa* entre elas, dr/dt, e da aceleração radial *relativa* entre elas, d^2r/dt^2. Estas são propriedades intrínsecas do sistema. O observador (ou sistema de referência) não importa para os valores de r, dr/dt e d^2r/dt^2. Essas grandezas têm o mesmo valor em todos os referenciais, mesmo para referenciais não inerciais. As denominei de *grandezas relacionais*.[62]

Discuti em alguns trabalhos os pontos de vista de Maxwell relacionados à eletrodinâmica de Weber.[63] Vale a pena apresentar aqui algumas citações. Desde seu primeiro artigo sobre eletromagnetismo de 1855 (publicado em 1858), Maxwell sempre elogiou a teoria de Weber.

[59] Ver a Nota de rodapé 26 na página 26.

[60] Charles Augustin de Coulomb (1736-1806). As principais obras de Coulomb sobre torção, eletricidade e magnetismo já se encontram traduzidas e comentadas em português e inglês: [Ass22] e [AB23]. Ver também [Pot84]; [Gil71b] e [Gil71a].

[61] Isaac Newton (1642-1727). Ver [New34] e [New99]. Tradução para o português em [New90], [New08] e [New10].

[62] [Ass89], [Ass98], [Ass99], [Ass13] e [Ass14].

[63] [Ass92a], [Ass94, Seção 3.6, págs. 73-77] e [Ass15a].

Por exemplo, após apresentar as ideias de Faraday que ele estava tentando seguir, Maxwell disse:[64]

> Existe, entretanto, uma teoria da eletrodinâmica reconhecidamente física, que é tão elegante, tão matemática e tão inteiramente diferente de qualquer coisa neste artigo, que devo enunciar seus axiomas, sob o risco de repetir o que deveria ser bem conhecido. Ela está contida nas *Medições Eletrodinâmicas* do Sr. W. Weber, e pode ser encontrada nas *Transactions* da Sociedade Leibniz, e da Sociedade Real de Ciências na Saxônia.[65,66] As suposições são as seguintes:
>
> 1. Que duas partículas de eletricidade quando estão em movimento não se repelem mutuamente com a mesma força que existia quando estavam em repouso, mas que a força é alterada por uma quantidade que depende do movimento relativo entre as duas partículas, de tal forma que a expressão para a repulsão na distância r é dada por
>
> $$\frac{ee'}{r^2}\left[1+a\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+br\frac{d^2r}{dt^2}\right] .$$
>
> 2. Que quando a eletricidade está se deslocando em um condutor, a velocidade do fluido positivo *em relação à matéria do condutor* é igual e oposta à velocidade do fluido negativo.
> 3. Que a ação total de um elemento condutor sobre um outro elemento condutor é a resultante das ações mútuas das massas de eletricidade dos dois tipos que estão contidas em cada elemento.[67]
> 4. Que a força eletromotriz em cada ponto é a diferença dessas forças atuando sobre os fluidos positivo e negativo.
>
> Destes axiomas são dedutíveis as leis de Ampère da atração entre os condutores, e as de Neumann e outros,[68] para a indução de correntes. Aqui está então uma teoria

[64][Max58, págs. 66-67 do artigo de 1858 e págs. 207-209 do livro de Niven].

[65][Nota de Maxwell:] Quando isso foi escrito, eu não estava ciente de que parte da Memória do Sr. Weber está traduzida nas *Scientific Memoirs* de Taylor, Volume V, Artigo XIV. O valor de suas pesquisas, tanto experimentais quanto teóricas, torna o estudo de sua teoria necessário para todo pesquisador da eletricidade.

[66]Maxwell escreveu o artigo em 1855, sendo ele publicado em 1858. Essa Nota de Maxwell apareceu na versão publicada em 1858. Maxwell estava se referindo nessa Nota de rodapé ao resumo publicado em 1848 da Primeira Memória principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas, [Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66d], [Web19] e [Web21l]. Esse trabalho de 1848 de Weber está traduzido no Capítulo 8.

[67]Maxwell está se referindo aqui à força de Ampère entre dois elementos de corrente. De acordo com Weber, cada elemento de corrente é composto de cargas positivas e negativas de mesma intensidade deslocando-se em relação ao condutor com velocidades opostas. Logo a força de um elemento de corrente sobre outro elemento de corrente é composta por uma soma de 4 termos, a saber, (a) a força da carga positiva do primeiro elemento atuando sobre a carga positiva do segundo elemento, (b) a força da carga positiva do primeiro elemento atuando sobre a carga negativa do segundo elemento, (c) a força da carga negativa do primeiro elemento atuando sobre a carga positiva do segundo elemento, e (d) a força da carga negativa do primeiro elemento atuando sobre a carga negativa do segundo elemento.

[68]Franz Ernst Neumann (1798-1895). Ver [Neu46] com tradução para o francês em [Neu48a], [Neu47], [Neu48b] e [Neu49].

realmente física, satisfazendo talvez melhor as condições exigidas do que qualquer outra já inventada, e apresentada por um filósofo cujas pesquisas experimentais formam uma ampla base para suas investigações matemáticas.

Na Introdução de seu trabalho de 1864, no qual Maxwell completou sua teoria eletromagnética da luz, ele apresentou um ponto de vista semelhante:[69]

> O fenômeno mecânico mais óbvio em experimentos elétricos e magnéticos é a ação mútua pela qual corpos em certos estados se põem em movimento enquanto ainda estão a uma distância sensível um do outro. O primeiro passo, portanto, para reduzir esses fenômenos à forma científica, é determinar a magnitude e a direção da força que atua entre os corpos, e quando se descobre que essa força depende de certa maneira da posição relativa dos corpos e de suas condições elétricas e magnéticas, parece à primeira vista natural explicar os fatos assumindo a existência de algo em repouso ou em movimento em cada corpo, constituindo seu estado elétrico e magnético, e capaz de atuar à distância de acordo com leis matemáticas.
>
> Assim se formaram as teorias matemáticas da eletricidade estática, do magnetismo, da ação mecânica entre condutores que transportam correntes, e da indução de correntes. Nestas teorias, a força que atua entre os dois corpos é tratada com referência apenas à condição dos corpos e sua posição relativa, sem qualquer consideração expressa do meio circundante.
>
> Essas teorias supõem, mais ou menos explicitamente, a existência de substâncias cujas partículas têm a propriedade de agir umas sobre as outras à distância por atração ou repulsão. O desenvolvimento mais completo de uma teoria desse tipo é aquele do Sr. W. Weber,[70,71] que fez a mesma teoria incluir fenômenos eletrostáticos e eletromagnéticos.
>
> Ao fazê-lo, entretanto, ele achou necessário supor que a força entre duas partículas elétricas depende de sua velocidade relativa, bem como de sua distância. Essa teoria, desenvolvida pelos Srs. W. Weber e C. Neumann,[72,73] é extremamente engenhosa e maravilhosamente abrangente em sua aplicação aos fenômenos da eletricidade estática, atrações eletromagnéticas, indução de correntes e fenômenos diamagnéticos; e chega até nós com mais autoridade, pois serviu para guiar as especulações de alguém que fez um avanço tão grande na parte prática da ciência elétrica, tanto pela introdução de um sistema consistente de unidades na medição elétrica, quanto por realmente determinar grandezas elétricas com uma precisão até então desconhecida.

O último capítulo do *Tratado* de Maxwell é dedicado à eletrodinâmica de Weber.[74] Em seu livro Maxwell mostrou mais uma vez, como Weber já havia feito, que a força de Ampère

---

[69] [Max65, págs. 526-527 do livro de Niven].

[70] [Nota de Maxwell:] *Electrodynamische Maassbestimmungen. Leipzic Trans.*, Volume I, 1849, e as *Scientific Memoirs* de Taylor, Volume V, Artigo xiv.

[71] Maxwell estava se referindo a [Web46] com traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21b]; assim como [Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66d] e [Web19] e [Web21l]. Esses trabalhos de 1846 e 1848 de Weber estão traduzidos nos Capítulos 6 e 8.

[72] [Nota de Maxwell:] "Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarizationis per vires electricas vel magneticas declinetur." — Halis Saxonum, 1858.

[73] Carl Neumann (1832-1925). Ver [Neu58] e [Neu63].

[74] Vol. 2, Capítulo XXIII: Teorias da ação à distância, [Max73b] e [Max54a]. Tradução para o português em [Ass92b] e tradução para o alemão em [Max83]. Uma outra discussão de Maxwell de 1873 sobre as teorias de ação à distância aparece em [Max73a], com tradução para o português em [TCA04].

entre os elementos de corrente e a lei de indução de Faraday podem ser deduzidas da força de Weber. Nesse livro Maxwell também finalmente reconheceu que a força de Weber está de acordo com a lei de conservação da energia.

Embora muitos livros modernos mencionem que Maxwell foi o primeiro cientista a apresentar uma formulação matemática da lei de indução de Faraday, isso já havia sido realizado por Weber em 1846 quando Maxwell ainda estava no ensino médio. Maxwell só conseguiu uma formulação matemática da lei de Faraday muitos anos depois de Weber.

A força de Weber entre duas partículas eletrizadas obedece à lei de ação e reação de Newton na forma forte, sempre apontando ao longo da linha reta que as conecta. Também está em conformidade com a conservação do momento linear e angular. Em 1848 apresentou uma energia potencial a partir da qual pôde deduzir sua força. Ele também mostrou que sua força era compatível com o princípio de conservação da energia. As leis de Coulomb, Ampère e Faraday são apenas casos particulares da lei de Weber.

Considero a força de Weber uma das principais conquistas de toda a história da física.

Capítulo 6

[Weber, 1846, ME1] Medições Eletrodinâmicas, Primeira Memória, sobre uma Lei Fundamental Geral da Ação Elétrica

Wilhelm Weber[75,76,77]

I - Introdução

Os fluidos elétricos, quando se *deslocam* em corpos ponderáveis,[78] causam interações entre as *moléculas desses corpos ponderáveis*, das quais surgem todos os fenômenos galvânicos e eletrodinâmicos.[79] Essas interações dos *corpos ponderáveis*, que dependem dos *movimentos* dos fluidos elétricos, devem ser divididas em duas classes, cuja diferenciação é essencial para a investigação mais precisa das leis, a saber:

1. tais interações que essas moléculas exercem umas sobre as outras, quando a distância entre elas é imensamente pequena, e que se pode designar por *forças moleculares*

[75][Web46], com uma tradução parcial para o francês em [Web87] e traduções completas para o inglês em [Web07] e [Web21b].

[76]Tratado de fundação da Real Sociedade Científica da Saxônia no dia da celebração do 200º aniversário de Leibniz, publicado pela Sociedade Príncipe Jablonowski, Leipzig 1846, págs. 211-378.

[77]As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o editor do Volume 3 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; as Notas de A. K. T. Assis e J. P. M. d. C. Chaib são representadas por [Nota de Assis e Chaib:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

[78]Em alemão: *ponderabeln Körpern*. Ou seja, corpos que possuem peso. Essa expressão pode ser traduzida como corpos ponderáveis, pesados, que podem ser pesados, pesáveis ou com peso.

[79]Quando Gauss e Weber utilizam as palavras "molécula" ou "molecular", eles em geral não estão utilizando o conceito moderno usado para distinguir, por exemplo, os termos "núcleo", "átomo", "molécula" ou "íon". Naquela época até mesmo a existência dos átomos ainda não era totalmente aceita. A palavra "molécula" era um diminutivo derivado da palavra em latim "moles", que significa massa ou grande massa. A palavra "molécula" foi aparentemente utilizada pela primeira vez em francês no século XVII, significando uma pequena massa ou partícula. Logo, usualmente Gauss e Weber utilizavam a palavra "molécula" significando uma partícula, massa microscópica ou corpúsculo. O adjetivo "molecular" se referia ao mundo microscópico ou à constituição corpuscular da matéria.

galvânicas ou eletrodinâmicas, porque ocorrem no interior dos corpos através dos quais flui a corrente galvânica; e

2. tais interações que essas moléculas exercem umas sobre as outras, se a distância entre elas for mensurável, e que se pode designar forças galvânicas ou eletrodinâmicas atuando *à distância* (em proporção inversa ao quadrado da distância). Estas últimas forças também operam entre as moléculas que pertencem a dois corpos diferentes, por exemplo, dois fios condutores.

Pode-se ver facilmente que, para uma investigação completa das leis da *primeira* classe de interações, é exigido um conhecimento mais preciso das *relações moleculares* dentro dos corpos ponderáveis do que atualmente possuímos, e que, sem ele, não se poderia levar a investigação desta classe de interações a uma conclusão ampla, estabelecendo leis completas e gerais. O caso é diferente, por outro lado, com a *segunda* classe de interações galvânicas ou eletrodinâmicas, cujas leis podem ser buscadas nas forças que dois corpos ponderáveis, através dos quais os fluidos elétricos estão se movendo, exercem um sobre o outro *quando a posição e a distância um do outro são medidas*, sem ser necessário pressupor que as *relações moleculares internas* desses corpos ponderáveis sejam conhecidas.

Uma *terceira* classe deve ser totalmente distinguida destas duas classes de interações que foram descobertas por Galvani e Ampère,[80] a saber, as interações *eletromagnéticas*, descobertas por Oersted,[81] que ocorrem entre as moléculas de dois corpos *ponderáveis* a uma distância mensurável um do outro, quando em uma [molécula] os fluidos elétricos são colocados em movimento, enquanto que, ao contrário, na outra [molécula] os fluidos magnéticos estão separados. Esta distinção entre fenômenos *eletromagnéticos* e *eletrodinâmicos* é necessária para apresentar as leis, enquanto a concepção de Ampère sobre a essência do magnetismo não tiver suplantado totalmente a concepção mais antiga e costumeira da existência real dos fluidos magnéticos. O próprio Ampère deu expressão à distinção essencial a ser feita entre essas duas classes de interações da seguinte maneira na página 285 de seu Tratado:[82,83]

> Quando o Sr. OErsted descobriu a ação que o fio condutor exerce sobre um ímã, devíamos, na verdade, ser levados a supor que poderia haver uma ação mútua entre dois fios condutores. Porém, esta não seria uma consequência necessária da descoberta desse célebre físico, já que uma barra de ferro doce age também sobre uma agulha imantada e, contudo, não existe qualquer ação mútua entre duas barras de ferro doce.[84] Enquanto somente se conhecia o fato da deflexão da agulha imantada pelo fio condutor, não se poderia supor que a corrente elétrica apenas comunicasse a esse fio a propriedade de ser influenciado pela agulha, de uma forma análoga à maneira como o ferro doce é [influenciado] por essa mesma agulha — o que seria suficiente para que ele agisse sobre ela — sem que, para isso, resultasse alguma ação

[80]Luigi Galvani (1737-1798) e André-Marie Ampère (1775-1836). Ver a Nota de rodapé 10 na página 19.

[81]Hans Christian Ørsted (1777-1851). Ver [Oer20b], [Oer20c], [Oer20a], [Oer20d], [Oer95], [Oer65], [Ørs86] e [Ørs98]. Ver também [Fra81], [Mar86] e [Rei13].

[82][Nota de Wilhelm Weber:] Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience. Mémoires de l'académie royale des sciences de l'institut de France, 1823.

[83]Weber está se referindo a [Amp23, págs. 285-286] e [Amp26, págs. 113-114]. Ver, em particular, [AC11, págs. 458-459] e [AC15, pág. 418]. Ver ainda a Nota de rodapé 10 na página 19.

[84][Nota de Assis e Chaib:] Este argumento é devido a François J. D. Arago (1786-1853). Ele foi discutido na Seção 3.6 (Interação entre Fios com Corrente) de [AC11] e [AC15].

entre dois fios condutores quando eles se encontrassem fora da influência de qualquer corpo imantado? Somente a experiência podia decidir esta questão. Realizei-a no mês de setembro de 1820 e foi demonstrada a ação mútua entre os condutores voltaicos.

Ampère desenvolve rigorosamente essa distinção em seu Tratado, declarando que é necessário que as leis de interação descobertas por ele e Oersted sejam derivadas separada e completamente, cada uma por si, de evidências experimentais. Depois de ter falado das dificuldades de observar com precisão a interação entre os fios condutores, ele diz na página 183 de sua *obra já citada*:[85]

> É verdade que não se encontram os mesmos obstáculos quando se mede da mesma maneira a ação de um fio condutor sobre um ímã. Mas esse meio não pode ser empregado quando se trata da determinação das forças que dois condutores voltaicos exercem um sobre o outro, determinação que deve ser a primeira finalidade de nossas pesquisas no estudo de novos fenômenos. É evidente, com efeito, que, se a ação de um fio condutor sobre um ímã fosse oriunda de uma outra causa diferente da que ocorre entre dois condutores, as experiências feitas sobre a primeira [ação] não poderiam ensinar nada em relação à segunda [ação].

A partir disso, torna-se claro que, mesmo que muitos bons experimentos tenham sido conduzidos mais recentemente ao desenvolver a descoberta de Oersted, nada ocorreu ainda diretamente no desenvolvimento da descoberta de Ampère, e que isso requer experimentos específicos e especiais que até agora têm faltado.

A própria obra clássica de Ampère se preocupa apenas em menor escala com os fenômenos e leis da interação dos fios condutores entre si, enquanto a maior parte é dedicada ao desenvolvimento e aplicação de sua concepção de magnetismo, baseada nessas leis. Ele também não considerava que a investigação dos fenômenos e das leis da interação dos fios condutores entre si estivesse completa e concluída, tanto experimental quanto teoricamente, mas chamou a atenção várias vezes para o que ainda faltava ser feito em ambos os aspectos.

Ele afirma na página 181 do citado Tratado,[86] que para deduzir as leis de interação entre dois fios condutores *a partir de evidências experimentais*, pode-se proceder de duas maneiras diferentes, das quais poderia seguir apenas uma, e apresenta as razões que o impediram de tentar o outro caminho, sendo o mais essencial a falta de *instrumentos de medição* precisos, livres de influências externas indetermináveis. Ele diz o seguinte na página 182 e seguintes de sua obra:[87]

> Existe, ademais, com respeito à ação exercida por esses condutores, um motivo ainda bem mais decisivo para seguir esse procedimento nas pesquisas relativas à determinação das forças que a produzem.[88] Esse motivo é a extrema dificuldade das experiências nas quais se proporia, por exemplo, medir as forças pelo número de oscilações de um corpo submetido às suas ações. Essa dificuldade surge do fato de que, quando se faz agir um condutor fixo sobre uma porção móvel do circuito voltaico, as partes do aparelho necessárias para conectá-la [a porção móvel] com a

[85]Ver [Amp23, pág. 183], [Amp26, pág. 11], [AC11, pág. 371] e [AC15, págs. 346].

[86]Ver [Amp23, pág. 181], [Amp26, pág. 9], [AC11, pág. 370] e [AC15, págs. 344].

[87]Ver [Amp23, págs. 182-183], [Amp26, págs. 10-11], [AC11, pág. 371] e [AC15, págs. 345].

[88]Isto é, nas pesquisas relativas às forças que produzem essa ação.

> pilha agem sobre essa porção móvel ao mesmo tempo que o condutor fixo, alterando assim os resultados das experiências.

Da mesma forma, Ampère repetidamente chamou a atenção para o que resta a ser feito do ponto de vista *teórico*. Por exemplo, na página 299, depois de mostrar que é impossível explicar a interação mútua entre os fios condutores por meio de uma certa distribuição de eletricidade estática nos fios condutores, ele diz o seguinte:[89]

> Quando, ao contrário, supõe-se que as partículas elétricas, postas em movimento nos fios condutores pela ação da pilha, mudam continuamente de lugar — reunindo-se ali a cada instante em fluido neutro, separando-se outra vez e indo de imediato se reunir a outras moléculas de natureza oposta —, *não é mais contraditório* admitir que, a partir das ações em razão inversa dos quadrados das distâncias que exerce cada molécula, possa resultar entre dois elementos de fios condutores uma força que não depende somente da distância entre eles, mas também da direção dos dois elementos [de fios condutores] ao longo dos quais as moléculas elétricas se movem, unindo-se a moléculas da espécie oposta e separando-se no instante seguinte para se unir a outras [moléculas elétricas]. Ora, é precisa e unicamente dessa distância e dessas direções que depende a força que se desenvolve então, e cujas experiências e cálculos expostos nesta Memória me forneceram o valor.

Ampère continuou na página 301:[90]

> Se fosse *possível*, partindo desta consideração, encontrar que a ação mútua entre dois elementos é, com efeito, proporcional à fórmula pela qual a representei, esta explicação do fato fundamental de toda a teoria dos fenômenos eletrodinâmicos deveria, evidentemente, ser preferida a qualquer outra. Mas ela exigiria pesquisas com as quais não tenho tempo de me ocupar, não mais que as pesquisas, mais difíceis ainda, às quais seria necessário se dedicar para ver se a explicação contrária, em que se atribuem os fenômenos eletrodinâmicos aos movimentos causados no éter pelas correntes elétricas, pode conduzir à mesma fórmula.

Ampère não deu continuidade a essas investigações, nem ninguém publicou nada até agora, seja do lado experimental ou teórico, sobre investigações posteriores, e desde Ampère, a ciência parou nesta área, com exceção da descoberta de Faraday do fenômenos de correntes galvânicas induzidas em um fio condutor quando uma corrente galvânica próxima é aumentada, enfraquecida ou deslocada.[91] Esta negligência da eletrodinâmica desde Ampère, não deve ser considerada uma consequência de atribuir menos importância ao fenômeno fundamental descoberto por Ampère, do que àqueles descobertos por Galvani e Oersted, mas resulta de se evitar a grande dificuldade dos experimentos, que são muito difíceis de realizar com os equipamentos atuais, e nenhum experimento foi suscetível de determinações tão múltiplas e exatas como as eletromagnéticas. Eliminar essas dificuldades para o futuro é o objetivo do trabalho a ser apresentado aqui, no qual me limitarei principalmente à consideração de interações puramente galvânicas e eletrodinâmicas *à distância*.

[89]Ver [Amp23, pág. 299], [Amp26, pág. 127], [AC11, pág. 467] e [AC15, págs. 424].
[90]Ver [Amp23, pág. 301], [Amp26, pág. 129], [AC11, pág. 468] e [AC15, pág. 425].
[91]Ver a Nota de rodapé 26 na página 26.

Ampère caracterizou sua teoria matemática dos fenômenos eletrodinâmicos no título de seu Tratado como sendo *deduzida unicamente da experiência*, e encontra-se no próprio Tratado o método simples e engenhoso desenvolvido em detalhes, que ele usou para esse fim. Nele, encontram-se os experimentos que ele selecionou e seu significado para a teoria discutida em detalhes, e os instrumentos para realizá-los são descritos de forma completa e precisa; mas falta uma descrição exata dos próprios experimentos. Com experimentos tão fundamentais, não basta afirmar seu propósito e descrever os instrumentos com os quais são conduzidos, e acrescentar uma garantia geral de que foram acompanhados dos resultados esperados, mas também é necessário entrar mais precisamente nos detalhes dos experimentos, e dizer com que frequência cada experimento foi repetido, quais mudanças foram feitas e que influência essas mudanças tiveram, em suma, comunicar de forma protocolar, todos os dados que contribuem para estabelecer um julgamento sobre o grau de confiabilidade ou certeza do resultado. Ampère não fez esses tipos de declarações mais específicas sobre os experimentos, e eles ainda estão faltando na conclusão de uma prova direta real da lei eletrodinâmica fundamental. O fato da interação dos fios condutores em geral foi, de fato, colocado fora de dúvida por meio de experimentos repetidos com frequência, mas somente por tais meios e sob tais circunstâncias que nenhuma determinação *quantitativa* poderia ser pensada, muito menos que essas determinações teriam alcançado a nitidez necessária para considerar a lei desses fenômenos como empiricamente comprovada.

Ampère fez uso mais frequente da *ausência* de efeitos eletrodinâmicos que ele observou, semelhante ao uso de medições que dão o resultado = 0, e, por meio desse expediente, ele tentou, com grande acuidade e habilidade, obter os dados básicos mais necessários e meios de teste para suas conjecturas teóricas, que, na ausência de melhores dados, era o único método possível; não podemos, no entanto, de forma alguma atribuir a tais resultados experimentais *negativos*, mesmo que eles devam substituir temporariamente os resultados de medições *positivas*, todo o valor e toda a força de prova que estes últimos possuem, se os resultados negativos não forem obtidos com o uso de tais técnicas, e nessas condições, onde também podem ser realizadas medições verdadeiras, o que não era possível com os instrumentos utilizados por Ampère.

Pode-se considerar mais precisamente, por exemplo, o experimento que Ampère descreve na página 194 e seguintes do seu Tratado como o terceiro caso de equilíbrio, onde um arco de metal repousa sobre duas tinas metálicas cheias de mercúrio, de uma das quais a corrente é introduzida e da outra retirada, e onde, adicionalmente, o arco é preso por uma dobradiça a um braço que o conecta com um eixo vertical que pode ser girado entre as extremidades.[92,93]

[92][Nota de Wilhelm Weber:] Ampère dá em outro local a seguinte descrição de seu instrumento: Em um quadro TT' (Figura 1) na forma de uma mesa sobressaem dois postes verticais EF e EF', unidos por travessas LL' e FF'; um eixo GH é mantido na posição vertical entre essas duas travessas. Suas duas extremidades G e H são afiadas e assentadas em depressões cônicas, uma delas na travessa inferior LL', a outra na extremidade de um parafuso KZ que passa pela travessa superior FF' e que serve para estabilizar o eixo GH sem fixá-lo. Um braço QO é fixado em C ao eixo. A extremidade do braço está equipada com uma dobradiça, na qual se encaixa o centro de um arco AA', que é formado por um condutor. O braço, cujo raio é igual à distância de O ao eixo GH, está sempre na posição horizontal. Este arco é balanceado com um contrapeso em Q, a fim de diminuir o atrito nos pontos GH onde está assentado nas depressões cônicas.

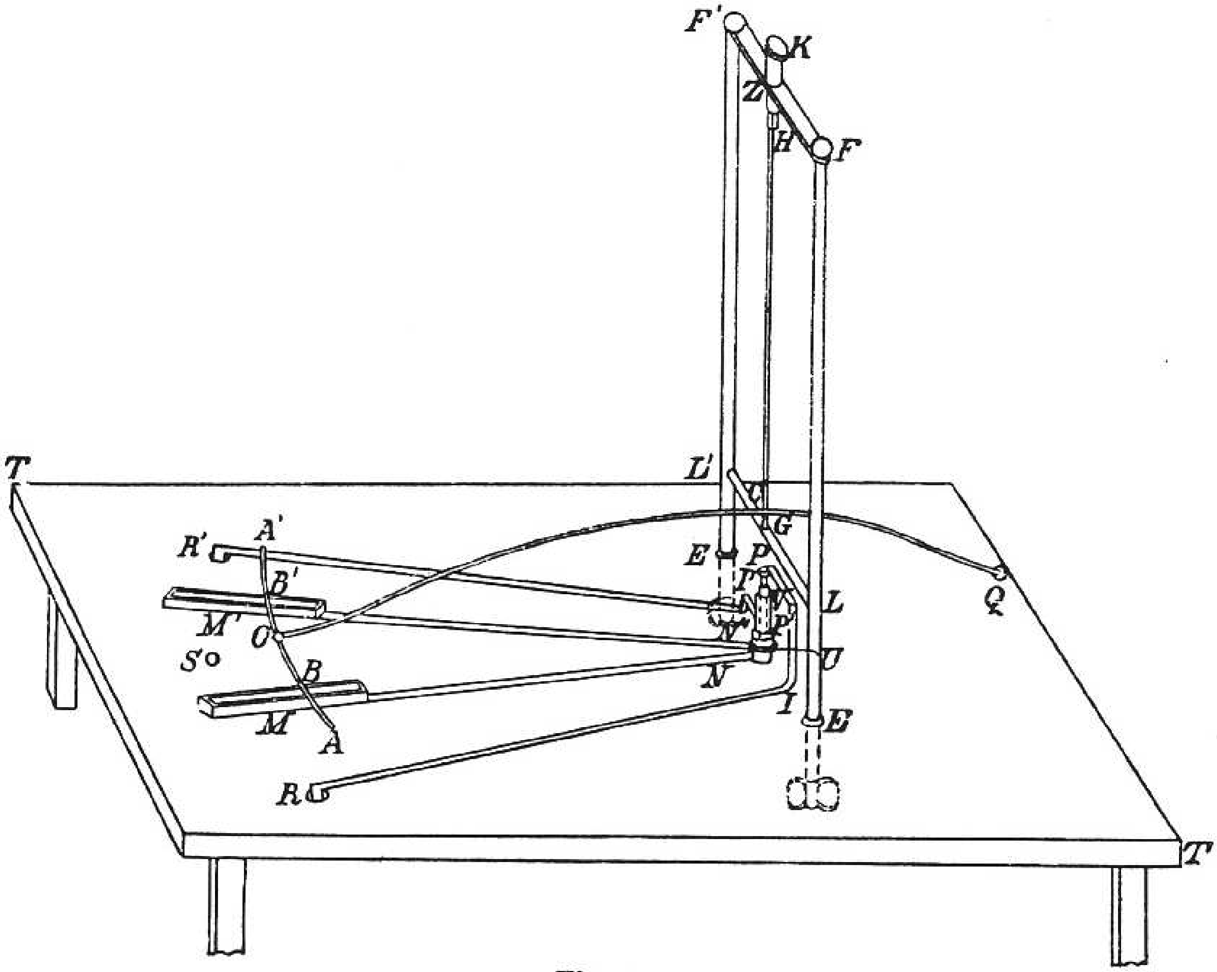


Fig. 1.

Sob o arco AA' estão duas tinas M e M' preenchidas com mercúrio, de modo que a superfície do mercúrio, que se eleva acima da borda das tinas, apenas toca o arco AA' em B e B'. Essas duas tinas se comunicam através dos condutores metálicos MN e $M'N'$ com as taças cheias de mercúrio P e P'. A taça e o fio MN que a conecta com a tina M são fixados em um eixo vertical, que fica sobre a mesa para que possa girar livremente. Este eixo passa pela taça P', com a qual está conectado o fio $M'N'$, para que possa girar

Ampère agora observou que, enquanto uma corrente galvânica está passando por esse arco, ele não é deslocado de seus suportes, se um circuito fechado de corrente é feito atuar sobre o arco, desde que o centro do arco esteja sobre o eixo ao qual o arco está ligado. No entanto, vê-se facilmente que, para colocar o arco em movimento, é preciso superar um atrito quádruplo, a saber, o atrito nos dois suportes sobre os quais o arco está apoiado (arco AA' sobre B e B' na Figura 1), e o atrito nas duas extremidades G e H, nas quais o eixo vertical gira. Além disso, sabe-se que as forças eletrodinâmicas que são produzidas com a corrente galvânica mais forte imaginável em um fio simples, como a seção do arco BB' com corrente fluindo através dele, são tão fracas que o fio deve ser extremamente móvel, a fim de mostrar qualquer ação perceptível. Assim, seria de se esperar, que esse arco não fosse deslocado no caso em que seu centro estivesse no eixo de rotação, mas também no caso oposto, onde seu centro não coincidisse com o eixo de rotação, nenhum deslocamento ocorreria, porque o atrito quádruplo que acabamos de mencionar opõe uma resistência muito grande. Ampère agora diz, no entanto, na página 196 de sua obra:[94]

> Quando se coloca, por meio da junta O, o arco AA′ em uma posição tal que seu centro esteja fora do eixo GH, esse arco entra em movimento e desliza sobre o mercúrio das tinas M e M′, em virtude da ação da corrente curvilínea fechada que vai de R′ para S. Se, ao contrário, seu centro está no eixo, ele permanece imóvel.

É lamentável que Ampère não tenha mencionado o problema óbvio dessa fricção quádrupla, e nunca diga explicitamente que ele mesmo viu e observou o movimento do arco excêntrico. No entanto, à parte a dúvida que poderia, portanto, ser levantada sobre a observação real do que foi dado, e supondo que o próprio Ampère viu o deslocamento do arco nas condições descritas, e também se certificou de que realmente tinha sido a ação de *forças eletrodinâmicas* fortes o suficiente para superar todos os obstáculos opostos, ainda assim não se afirma em que excentricidade do arco esse movimento começou, e dentro de quais *limites* esse movimento *não* ocorreu. Entretanto, sem determinar tais limites, este experimento não pode ser considerado como tendo pleno valor probatório. Não sei se, desde aquela época, esse experimento foi repetido com sucesso e descrito com mais precisão por outros físicos, mas isso pode ser dito de forma resumida, que mesmo nos casos mais favoráveis, o deslocamento

---

independentemente da outra taça. O eixo é isolado por um pequeno tubo de vidro que o envolve, e é mantido separado por um pequeno disco de vidro do condutor da tina M, podendo-se formar um ângulo arbitrário com os condutores MN e $M'N'$.

Dois outros condutores, JR e $J'R'$, fixados à mesa, estão submersos respectivamente em taças P e P', e as conectam com depressões R e R' cheias de mercúrio na mesa. Finalmente, entre essas duas depressões, há uma terceira, S, também preenchida com mercúrio.

O aparelho é usado da seguinte maneira: um fio da bateria, por exemplo, o positivo, é mergulhado na depressão R, e o negativo na depressão S, e este último é conectado à depressão R' através de um condutor dobrado. A corrente passa pelo condutor RJ até a taça P, daí pelo condutor NM até a tina M, pelo condutor $J'R'$ e finalmente da depressão R' pelo condutor curvado arbitrariamente para a depressão S, na qual o fio negativo da bateria é mergulhado.

De acordo com isso o circuito voltaico é formado: (1) pelo arco circular BB' juntamente com os condutores MN e $M'N'$; (2) de um circuito constituído pelas partes RJP e $P'J'R'$ do aparelho, do condutor curvo que vai de R' para S, e da própria bateria. Este último circuito funciona como um circuito fechado porque só é interrompido pela espessura da placa de vidro que separa as taças P e P'; portanto, basta observar sua ação no arco BB' para confirmar experimentalmente a ação de uma corrente fechada sobre um arco nas diferentes posições que podem ser dadas a eles em relação uns aos outros.

[93]Ver [Amp23, págs. 194-199], [Amp26, págs. 22-27], [AC11, págs. 379-383] e [AC15, págs. 351-355].

[94]Ver [Amp23, pág. 196], [Amp26, pág. 24], [AC11, pág. 381] e [AC15, págs. 353-354].

ocorreu apenas em grandes excentricidades, sendo que a partir disso, no entanto, não se pode concluir que a força eletrodinâmica atua precisamente em ângulos retos com os elementos do arco.

Por meio dessas observações sobre os experimentos de Ampère, quis apenas demonstrar que as leis eletrodinâmicas não encontraram prova suficiente nesses experimentos, comunicados como são sem detalhes mais precisos, e por que acredito que tal prova não poderia ser dada por meio de observações com os instrumentos de Ampère, mas, em vez disso, são necessárias observações com instrumentos de medição precisos que não foram usados anteriormente. Se, apesar da falta de prova factual direta, continuamos convencidos da correção das leis apresentadas por Ampère, essa convicção se baseia em fundamentos que de modo algum tornam a prova direta supérflua. As medições eletrodinâmicas, portanto, permanecem desejáveis para fornecer a prova direta que está faltando.

De fato, em meio à tentativa universal de determinar todos os fenômenos naturais de acordo com o número e a unidade de medida,[95] e assim obter uma base para a teoria que seja independente da percepção sensorial ou da mera estimativa, parece surpreendente que em eletrodinâmica nenhuma tentativa desse tipo tenha sido feita; no entanto, não tenho conhecimento de medições refinadas nem grosseiras das interações entre dois fios condutores. Mais uma razão para eu apresentar aqui a primeira tentativa que fiz de realizar tais medições. Espero, assim, provar que essas medidas eletrodinâmicas possuem importância e significado em outros aspectos que não como prova das leis eletrodinâmicas fundamentais, ou seja, tornando-se a fonte de investigações inteiramente novas para as quais são exclusivamente adequadas e que, de fato, não podem ser realizadas sem elas.

[95]Em alemão: *nach Zahl und Maass*. A palavra “Maass”, hoje em dia escrita como “Maß”, pode ser traduzida como medição, medida, dimensão, unidade, unidade de medida, padrão, dose, escala etc.

II - Prova da Lei de Ampère para a Interação entre Correntes Elétricas

6.1 Descrição de um Instrumento para a Medição da Interação entre Dois Fios Condutores — Eletrodinamômetro

Os instrumentos que Ampère utilizou para suas experiências eletrodinâmicas não são de tal ordem que os experimentos feitos com eles tenham o poder de evidência de medições precisas. O motivo para isso está no *atrito* que geralmente anula toda a força elétrica a ser observada, ou uma grande parte dela, e a elimina da observação. Também não é possível com esses instrumentos, mesmo sob condições favoráveis, superar esse atrito adverso por meio de fracas forças eletrodinâmicas, enquanto que em qualquer medição mais rigorosa tem de ser pressuposto que o atrito seja uma fração desprezível em comparação com a força a ser medida.

Já há doze anos, com o propósito de excluir o atrito e introduzir medições mais precisas, enrolei um fio ao redor de uma estrutura fina de madeira, através do qual era para ser conduzida uma corrente galvânica, e que foi então colocado em movimento pela atração e repulsão eletrodinâmica de um multiplicador,[96] com uma suspensão *bifilar* feita por dois fios metálicos finos (no futuro, denominarei esses fios em espiral com suspensão bifilar de *bobinas bifilares*)[97] e usei um desses fios de suspensão para fornecer a corrente galvânica, e o outro para removê-la. Contudo, só fiquei ciente de todo o significado desse instrumento para o objetivo de medições a partir do magnetômetro bifilar de Gauss,[98] sendo que foi desse instrumento que tirei a ideia de usar um espelho preso à bobina bifilar. No verão de 1837, utilizei tal instrumento e realizei uma série de experiências com ele, sendo que todas elas provaram que podemos alcançar o maior refinamento na observação de fenômenos eletrodinâmicos com correntes tão fracas, sendo que anteriormente ninguém havia tido sucesso em produzir esses fenômenos com elas.

O instrumento a ser descrito aqui foi construído pelo mecânico Meyerstein em Göttingen em 1841,[99] contudo, foi em Leipzig que tive a oportunidade de fornecer um arranjo conveniente para uma série maior de medições.

Esse instrumento é constituído essencialmente de duas partes: a *bobina bifilar* com um

[96]Um multiplicador é um galvanômetro usado para medir a intensidade da corrente elétrica passando por ele. Dependendo do contexto essa palavra também pode se referir à bobina de um galvanômetro ou a uma bobina genérica com seus enrolamentos ou espiras. Algumas vezes também o multiplicador ou bobina pode ser usado como um indutor de correntes elétricas em outros circuitos ou para produzir torques eletrodinâmicos sobre outros circuitos. O instrumento recebeu esse nome "multiplicador" do químico, físico e matemático alemão Johann Schweigger (1779-1857) que construiu o primeiro galvanômetro em 1820. Ele amplificou o efeito que Oersted observou pela primeira vez em 1820 ao formar uma bobina com várias espiras enroladas ao redor de uma estrutura retangular, no centro da qual estava suspensa uma agulha imantada, [Sch20] e [Sch21d]; [Sch21c] com tradução para o francês em [Sch21a]; e [Sch21b]. Ver também [Chi64] e [LSN21].

[97]Em alemão: *Bifilarrolle*. A palavra "Rolle" pode ser traduzida como bobina, rolo, polia, roldana ou carretel. Normalmente uma bobina consiste em um enrolamento de várias espiras.

[98][Gau38b] com traduções para o inglês em [Gau41c] e [Gau21c]. Ver ainda [Web38a] com traduções para o inglês em [Web41c], [Web66a] e [Web21g]; juntamente com [Web94].

[99]Moritz Meyerstein (1808-1882). Ver [Hen04], [Hen05], [Hen07] e [Hen20].

espelho, e o *multiplicador*.[100]

[100]Uma fotografia do instrumento original de Weber que pertence à Coleção Histórica do Instituto de Física da Universidade de Göttingen, Alemanha, pode ser encontrada na Figura 5.1 na página 34.

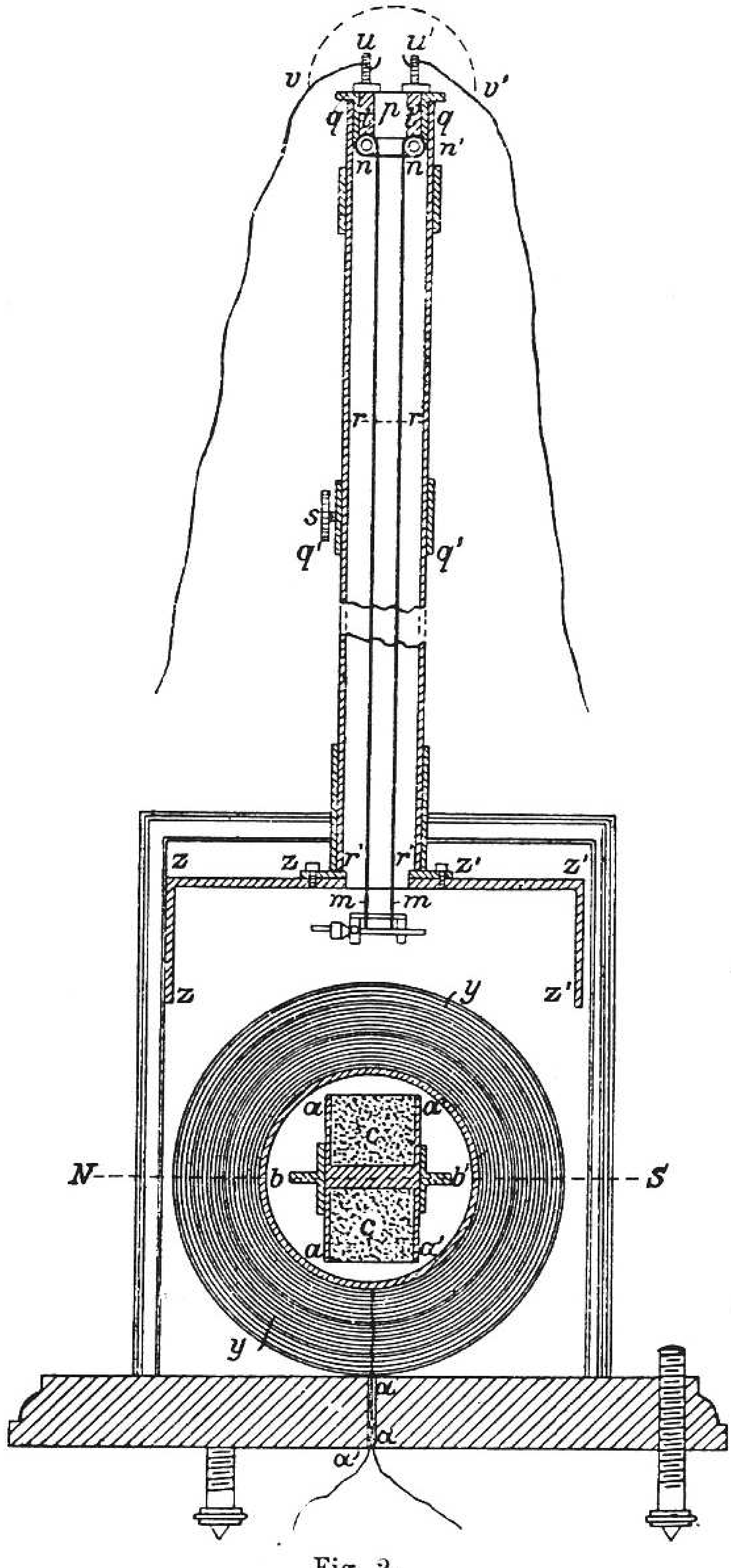


Fig. 2.

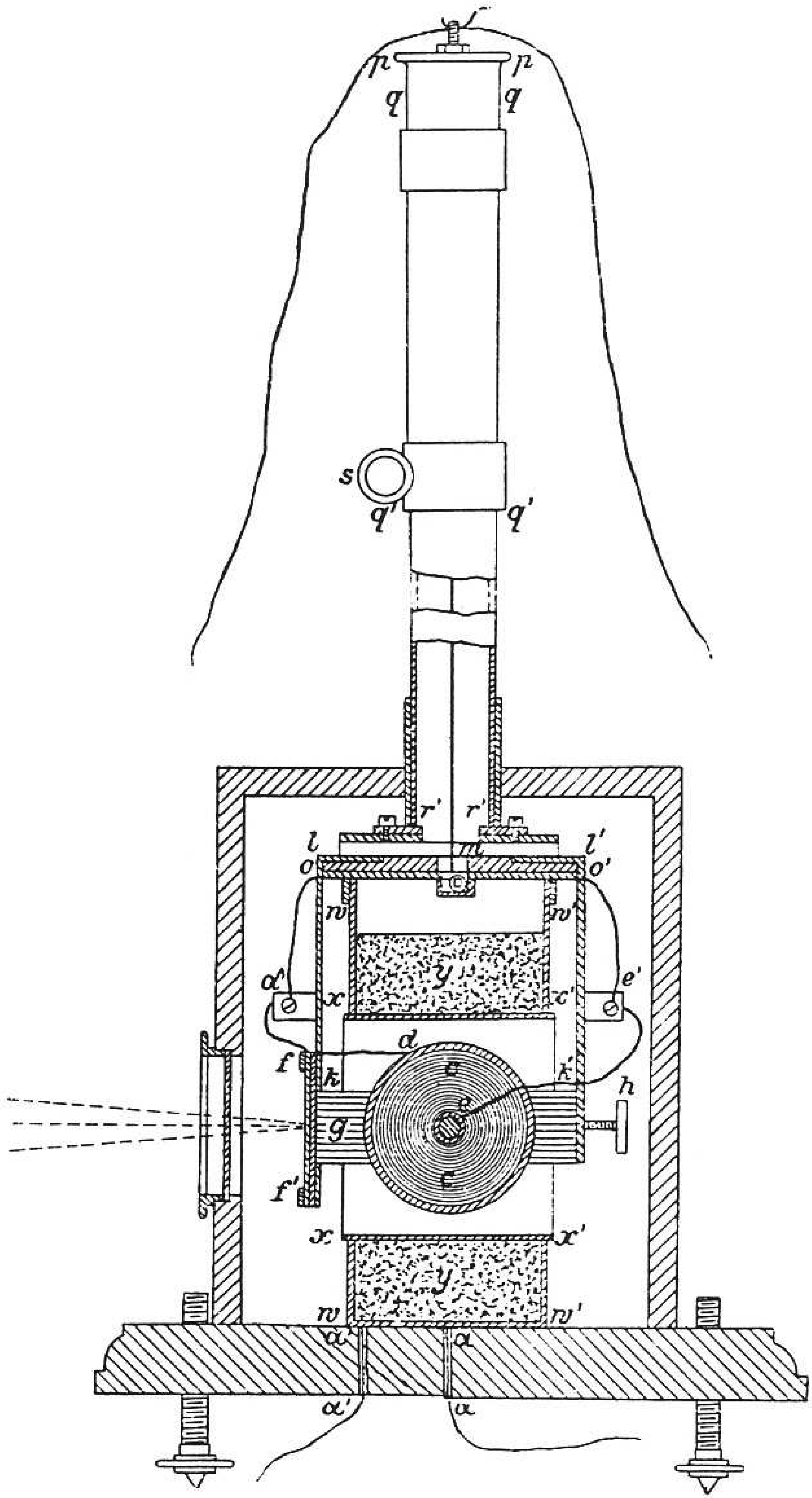


Fig. 3.

A *bobina bifilar*, que é apresentada em uma seção reta vertical na Figura 2, consiste em dois discos de latão finos aa e $a'a'$ com 66,8 mm de diâmetro, que são mantidos em uma posição fixa por um eixo de latão bb' com 3 mm de espessura a uma distância mútua de 30 mm. Ao redor desse eixo entre os dois discos é enrolado aproximadamente 5 000 vezes um fio de cobre cc com 0,4 mm de diâmetro, coberto com seda, que preenche totalmente o espaço entre os dois discos. A Figura 3 apresenta essa bobina em um seção reta vertical perpendicular à Figura anterior. Uma extremidade do fio é conduzida para fora de e para e', perto do eixo de latão, através de uma pequena abertura revestida de marfim em um dos discos em e (Figura 3);[101] a outra extremidade é amarrada à periferia do cilindro formado pelos enrolamentos de fio metálico [revestido] com linhas de seda em d. Um espelho plano ff' (Figura 3) é então ligado a essa bobina de fio, e fixado por três parafusos a uma pequena placa de latão; a placa de latão vem com duas extensões ortogonais g e g', das quais na Figura 3 só é visível a extensão traseira, g.

A Figura 4, que apresenta a seção reta horizontal, mostra as duas extensões conectadas com a placa de latão prendendo o espelho ff'. Essas duas extensões são aparafusadas em suas extremidades às bordas de dois discos de latão aa e $a'a'$. O espelho ff' está localizado em um plano paralelo ao eixo bb' da bobina de fio próxima da periferia da bobina; um contrapeso h é montado diametralmente oposto a ele. Utilizo agora um espelho plano quadrado polido em Berlim por Oertling;[102] seus lados possuem 40 mm de comprimento.

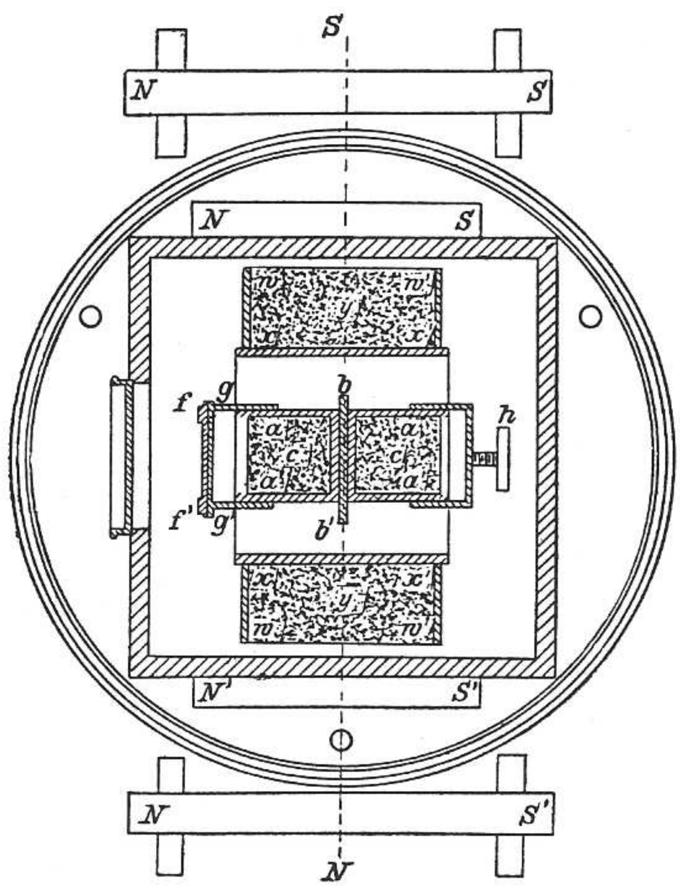
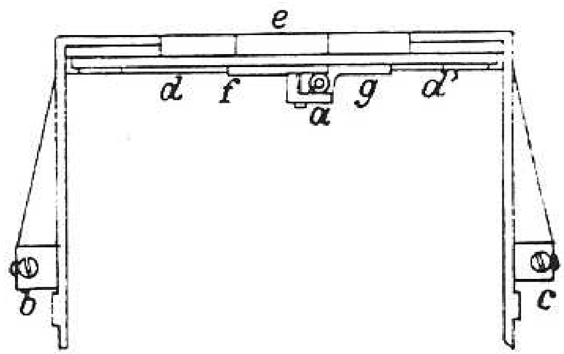


Fig. 4.

[101] O marfim é utilizado como um isolante elétrico.
[102] Johann August Daniel Oertling (1803-1866) foi um fabricante de instrumentos.

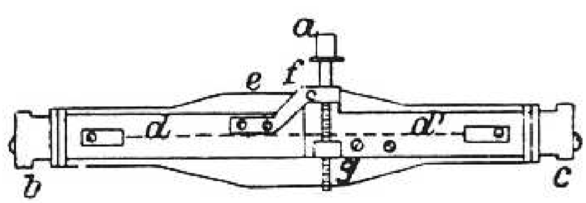
A *suspensão bifilar* dessa bobina de fio consiste em três partes: o suporte preso na bobina, os dois fios de suspensão e, finalmente, o suporte imóvel de onde os fios estão suspensos. O *suporte* consiste em um garfo ou suporte de latão, Figura 3, ll', com dois braços verticais paralelos lk e $l'k'$, de 100 mm de comprimento separados por 100 mm. As extremidades dos dois braços são presas por parafusos em k e k' à placa de latão que prende o espelho, e, do lado diametralmente oposto, ao suporte do contra-peso. A Figura 5 em particular mostra esse suporte; em d e d', os dois fios vindo de b e c passam sob duas placas de marfim que podem ser ajustadas por meio do parafuso a, e atravessam dois sulcos nas placas de marfim, que estão em contato entre si no centro, indo verticalmente para cima através da abertura e.

Fig. 5.



A figura 6 mostra a vista do suporte por baixo; em f e g é mostrada a conexão do parafuso a com as duas placas de marfim d e d'. A linha vertical atravessando o centro de gravidade da bobina atravessa o centro da área entre os dois sulcos. Finalmente, em cada braço do arco é localizado em d' e e' (Figura 3) uma braçadeira isolada com marfim para prender e conectar um dos fios revestidos com seda de cada extremidade da bobina com a extremidade inferior de um dos dois fios de suspensão não revestidos [de seda]. O fio de suspensão é conduzido a partir dessa braçadeira d' ou e' através de uma pequena abertura o ou o' forrada de marfim, na parte inferior do arco, para um dos dois sulcos já mencionados nas placas de marfim que se encontram no meio, de onde o fio vai para cima até o pequeno cilindro de latão em n e n' (Figura 2). Os dois fios de suspensão são feitos de cobre, com 1 metro de comprimento, e 1/6 milímetro de espessura; a distância entre eles, a ser regulada pelo parafuso a (Figura 6), é usualmente de 3 a 4 milímetros.

Fig. 6.



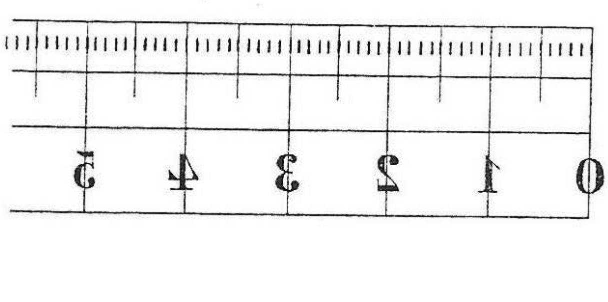
O *suporte*, ao qual estão presas as duas extremidades superiores dos dois fios de suspensão, consiste de uma forte peça de marfim p (Figura 2), que está bem presa como uma tampa na extremidade superior do tubo de latão qq' com 30 mm de espessura. Este tubo de latão tem 150 milímetros de comprimento e pode ser empurrado para cima e para baixo em um segundo tubo de latão rr', girado e fixado com um parafuso de aperto s (Figura 3). Esses dois tubos envolvem os dois fios de suspensão ao longo de todo o seu comprimento, e os protegem da influência do ar. Na parte inferior da peça de marfim, são ligados dois pequenos rolos móveis de latão t e t' (Figura 2) com 10 mm de diâmetro, presos ao marfim com parafusos de aperto u e u'; um fio de suspensão é conduzido acima de cada um desses pequenos rolos, que termina em um ilhó.[103] Os dois orifícios dos dois fios são presos com uma forte linha de seda entre t e t', sem se tocar. Por meio desses dois pequenos rolos e da ligação dos dois fios, os dois fios de suspensão ficam sempre sob a mesma tensão. Finalmente, em cada uma das duas braçadeiras u e u', que prendem os dois pequenos rolos ao marfim, é preso um fio de cobre revestido [de seda], dos quais uv (Figura 2) serve para fornecer a corrente galvânica, enquanto $u'v'$ a leva embora.

Finalmente, o *multiplicador* consiste em duas placas de cobre quadradas ww e $w'w'$ (Figuras 3 e 4), com lados de 140 mm, com um buraco circular de 76 mm de diâmetro. Essas duas placas de cobre permanecem paralelas e verticais, e são conectadas por um tubo de latão horizontal xx' de 76 mm de diâmetro, por meio do qual elas são mantidas a uma distância de 70 mm entre si. No espaço yy acima desses tubos entre as duas placas paralelas é enrolado aproximadamente 3 500 vezes o fio do multiplicador com 0,7 mm de espessura. A parte superior do multiplicador é fechada com uma tampa de latão $zzz'z'$ (Figura 2) que é aparafusada e tem uma abertura circular no centro da tampa, sobre a qual se encontra o tubo de latão pelo qual estão encapsulados os fios de suspensão. Em ambos os lados desta tampa, são colocadas ranhuras, através das quais o arco da bobina bifilar pode passar e balançar livremente. O espaço entre os enrolamentos superiores do fio multiplicador e a cobertura também é grande o suficiente para que cada braço do arco encontre espaço suficiente para seus movimentos. O arco é primeiro passado sem a bobina bifilar e preso aos fios de suspensão, para só então ser aparafusado na bobina bifilar. As bordas inferiores salientes das duas placas de latão no multiplicador repousam sobre uma placa de madeira que pode ser nivelada por três parafusos. Existem dois buracos aa e $a'a'$ nessa placa de madeira (Figura 3), através dos quais as duas extremidades do fio do multiplicador são levados para fora. Todo o instrumento, com exceção dos tubos de latão nos quais estão localizados os fios de suspensão, está contido em uma caixa de mogno para proteção contra a influência do ar. Essa caixa de mogno não tem fundo, mas é colocada com as bordas planas das paredes laterais sobre o painel plano de madeira, que a fecha por baixo. Na parte superior é colocada uma abertura circular, através da qual passa o tubo de latão já mencionado. É feita uma segunda abertura no lado frontal da caixa que pode ser fechada com uma placa de vidro. Através dela a luz da escala[104] incide sobre o espelho da *bobina bifilar* e é lançada de volta ao telescópio. Toda a caixa é dividida verticalmente em duas metades, das quais cada metade pode ser removida individualmente. O arranjo do telescópio e da escala é exatamente o

[103] Em alemão: *Oes*. Isto é, orifício geralmente circular por onde se enfia uma fita ou um cordão.

[104] Em alemão: *Skale*. Essa palavra pode ser traduzida como régua ou escala. Essa régua ou escala com pelo menos 1 metro de comprimento é fixada abaixo do telescópio. A imagem dela refletida no espelho preso à extremidade da barra magnetizada é observada com o telescópio. Coloquei nessa Nota de rodapé uma imagem de uma escala desse tipo que aparece no artigo de 1837 de Weber, [Web37] com traduções para o inglês em [Web41e], [GW66], [GW39a] e [Web21m]; e tradução para o francês em [Web38c], a saber:

Fig. 10.



mesmo que no magnetômetro. No futuro irei designar o instrumento descrito aqui com o nome de *eletrodinamômetro*, ou *dinamômetro* de forma abreviada, já que seu objetivo mais imediato é o de medir as forças eletrodinâmicas descobertas por Ampère.[105]

6.2 A Força Eletrodinâmica entre Duas Porções de um Circuito É Proporcional ao Quadrado da Intensidade da Corrente

A *intensidade* de uma corrente constante é determinada pela *quantidade* de eletricidade que atravessa a *seção reta* do circuito durante a unidade de tempo (durante um segundo). Contudo, essa determinação da intensidade da corrente não é apropriada como a base de um método prático de *medição da intensidade da corrente*; já que para isso, duas medições seriam necessárias, sendo que uma delas não pode ser realizada, e a outra não pode ser feita com precisão: a saber, uma quantidade definida de eletricidade não pode ser medida precisamente sob as circunstâncias prevalecentes, e o tempo em que ela flui através da seção transversal do fio condutor não pode ser medido de forma alguma. Para uma aplicação prática real, é necessário utilizar um outro método para medir a intensidade de corrente. Tal método, que corresponde inteiramente às necessidades, é apresentado nos *efeitos magnéticos* das correntes e deve ser sempre utilizado aqui como base. Duas correntes que passam sucessivamente pelo mesmo multiplicador e exercem a mesma força sobre o mesmo ímã imutável, à mesma distância e na mesma posição, possuem assim a mesma intensidade; se exercerem forças diferentes, suas intensidades comportam-se como estas forças,[106] que podem ser medidas com a ajuda de *galvanômetros* comuns.

Se agora correntes diferentes atravessam o mesmo circuito sucessivamente, cujas intensidades, de acordo com essa medida, estão na razão $1 : 2 : 3$ e assim por diante, então as interações eletrodinâmicas entre duas componentes do circuito, através do qual estão fluindo essas correntes diferentes, estarão na razão da série dos quadrados dessas intensidade, isto é, $1 : 4 : 9$ e assim por diante. A correção deste teorema deve agora ser provada pelas seguintes medições eletrodinâmicas que, mesmo que o teorema acima não precisasse ser provado, ainda teria algum interesse na medida em que daria um primeiro exemplo do rigor que pode ser obtido nas medições eletrodinâmicas em geral.

O *dinamômetro* descrito na Seção anterior foi colocado sobre um parapeito de pedra, sem qualquer ferro ou ímãs em suas proximidades, de tal forma que o plano da bobina fixa, ou multiplicador, fosse paralelo ao meridiano magnético, e o plano da bobina bifilar também era vertical, mas formava um ângulo reto com o plano do multiplicador. A posição do multiplicador podia ser facilmente ajustada, já que era possível examinar a colocação vertical com precisão suficiente por meio de um nível, que foi colocado na tampa do multiplicador, e a orientação foi regulada por meio de uma bússola também colocada na tampa do multiplicador. A bobina bifilar assumia uma orientação vertical por si própria quando era pendurada, porém, tinha de ser testado por experiências especiais se o plano da bobina bifilar formava um ângulo reto com o meridiano magnético.

Ou seja, é uma prova da orientação correta da última,[107] se ela permanecer inalterada

[105] O Capítulo 5 apresentou os comentários de Maxwell sobre o eletrodinamômetro bifilar de Weber.

[106] Isto é, a razão entre as duas intensidades de corrente é igual à razão entre as duas forças que elas exercem sobre o mesmo ímã imutável.

[107] Ou seja, da bobina bifilar.

mesmo quando uma corrente arbitrariamente intensa, positiva ou negativa, percorre apenas a bobina bifilar, já que no caso de qualquer desvio apreciável dessa orientação, o magnetismo terrestre teria que aumentar ou diminuir o desvio. Dessa maneira, também pode ser determinado o valor do desvio. Tal teste mostrou agora que o raio Oeste da bobina bifilar teria que ser virada para o Norte em 14 minutos [de arco] para colocar o plano da bobina bifilar exatamente perpendicular ao meridiano magnético. O instrumento não oferecia uma maneira conveniente de fazer essa pequena correção com precisão, além do fato que tal pequeno desvio não afeta apreciavelmente os resultados, eliminando-o não teria qualquer utilidade duradoura, já que observações contínuas mostraram que a suspensão da bobina bifilar na extremidade superior de um tubo de latão de 1 metro de altura não proporcionou nenhuma segurança contra rotações graduais da bobina bifilar, que começaram gradualmente e aumentaram por alguns minutos. Somente a suspensão a partir de um pilar de pedra firme e isolado proporcionaria total segurança contra desvios tão pequenos.

O espelho preso ao raio Oeste da bobina bifilar foi mantido verticalmente, e no plano vertical, sua normal horizontal foi colocada aproximadamente a 6 metros de um telescópio equipado com mira. Uma escala, como usada no magnetômetro, foi montada na base fixa do telescópio, assim como foi feito no magnetômetro. A medição mostrou que a distância horizontal do espelho até a escala era

$$= 6018{,}6 \text{ divisões da escala,}^{108}$$

a partir da qual resultou que o valor do arco de uma divisão da escala

$$= 17{,}136''.$$

Após esse arranjo do dinamômetro para medir a interação eletrodinâmica entre o multiplicador e a bobina bifilar, quando uma corrente galvânica os atravessa, a investigação em questão exigia um dispositivo *eletromagnético* para medir a intensidade da corrente.

6.3 Descrição de um Instrumento Eletromagnético para Medir a Intensidade de Correntes Galvânicas que São Conduzidas Através do Dinamômetro

Medir a intensidade de correntes galvânicas que são conduzidas através do dinamômetro seria facilmente realizado por meio de um assim chamado galvanômetro senoidal ou tangencial adaptado para medições precisas,[109] caso ele tivesse sido instalado a uma grande distância do dinamômetro, e a mesma corrente que atravessasse o dinamômetro também tivesse sido conduzida através do multiplicador desse galvanômetro. Pode ser evitado esse desvio[110] da corrente galvânica se um pequeno magnetômetro (transportável) for colocado no meridiano magnético do dinamômetro a tal distância deste último que a própria bobina fixa do dinamômetro produza uma deflexão do magnetômetro que ainda possa ser medida em frações finas. É óbvio que em uma distância tão pequena, a utilização de um grande magnetômetro

[108] Em alemão: *Skalentheile*.

[109] Em alemão: *Sinus-Boussole* e *Tangenten-Boussole*. O galvanômetro tangencial (também denominado galvanômetro tangente ou galvanômetro de tangente), foi inventado por Johan Jakob Nervander (1805-1848). Já o galvanômetro senoidal (também denominado galvanômetro seno ou galvanômetro de seno) foi inventado por Claude Servais Mathias Pouillet (1790-1868), [Ner33], [Pou37], [VS08] e [Sih21]. Friedrich Kohlrausch discutiu medições de correntes com esses galvanômetros, [Koh83, Capítulos 64 e 65, págs. 188-192].

[110] Em alemão: *Ableitung*. Essa palavra pode ser traduzida aqui como desvio, derivação, dispersão, saída, escape ou drenagem.

(com uma agulha [imantada] de 600 milímetros de comprimento) não seria conveniente, já que no caso em questão, era uma vantagem fundamental confinar no menor espaço possível a distribuição do magnetismo no magnetômetro. Isso ocorreu com o magnetômetro portátil ou transportável que descrevi nos *Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838* (*Resultados das Observações da Sociedade Magnética em 1838*).[111]

No entanto, criei outro instrumento para este fim, que é ainda mais perfeito, e o descreverei aqui, pois ele não só pode substituir com vantagem o magnetômetro transportável, mas também oferece um meio mais preciso do que os utilizados até agora para outros fins, especialmente para medições termomagnéticas. São bem conhecidas as vantagens de utilizar para tais medições uma agulha [imantada] equipada com um espelho, juntamente com um telescópio e escala, no lugar de uma bússola com ponteiro e uma escala graduada. Contudo, usar o espelho com agulhas pequenas é arriscado, já que o espelho possui uma massa inercial, que tem de ser movida juntamente com a agulha e, consequentemente, quando uma pequena agulha tem de levar um grande espelho junto com ela, a força de aceleração é bem diminuída, o que é desvantajoso para a precisão das medidas a serem feitas com a agulha, como se tivesse sido utilizada uma agulha fracamente imantada. Contudo, essa desvantagem pode ser removida desde o início se for utilizado um *espelho magnético*, e se esse espelho for suspenso por uma linha de seda como sendo ele próprio uma agulha imantada. Obtive tal espelho do fabricante de instrumentos Sr. Oertling em Berlim. Ele consiste em uma placa de aço redonda endurecida *ab* da Figura 7, com 35 milímetros de diâmetro e 6 milímetros de espessura.

[111][Web39a] com tradução para o inglês em [Web41d] e [Web66b].

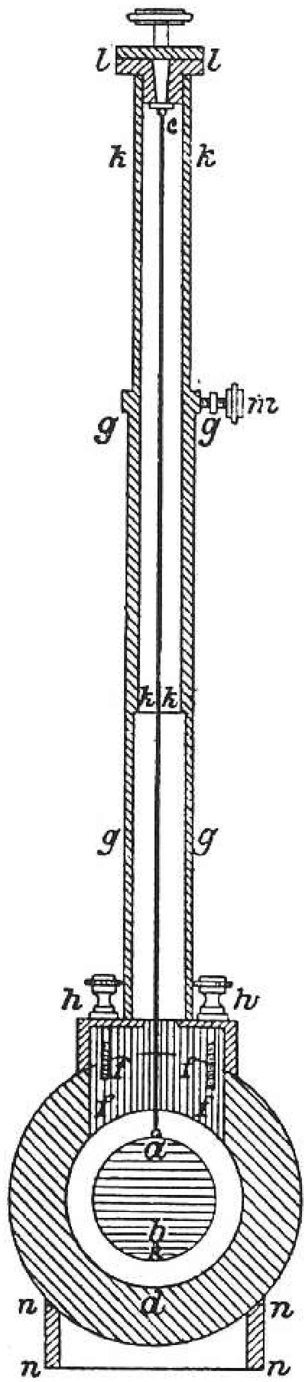


Fig. 7.

Essa placa de aço é polida tão completamente plana que o reflexo de uma escala parece muito brilhante e claro através de um telescópio de 10 vezes de ampliação e é pouco inferior à imagem de um espelho de vidro. Na borda deste disco circular, em dois pontos diametralmente opostos *a* e *b*, são colocadas pequenas porcas, em cada uma das quais pode ser aparafusado um gancho de latão, no qual o espelho é pendurado com uma linha de seda. Apenas um desses ganchos é realmente necessário, mas às vezes um às vezes o outro, dependendo se a placa de aço deve virar a superfície refletiva para o Leste ou Oeste. Agora, magnetizei essa placa de aço temperado, ao colocar duas hastes magnéticas de 25 libras em linha reta uma atrás da outra, mas de tal maneira, que sobrava um intervalo de espaço, igual ao diâmetro do espelho, entre os polos Sul e Norte das duas hastes, os polos sendo voltados um para o outro. O espelho foi colocado nesse espaço, de tal forma que o diâmetro do espelho que era perpendicular à linha conectando os dois orifícios, a e b, ligava os dois ímãs. Dada a intensidade dos ímãs e a pequenez do espelho, isso foi suficiente para fornecer ao espelho a imantação máxima que ele era capaz de assumir.

Esse espelho magnético era suspenso por uma linha de seda ac (Figura 7) e colocado em oscilação. O arco da oscilação diminuía bem lentamente, de tal forma que as oscilações ainda podiam ser observadas após um quarto de hora, sem que o espelho tivesse recebido qualquer impulso novo nesse intervalo. No entanto, seu período de oscilação era muito curto para que as observações de posição fossem realizadas de acordo com as regras dadas para magnetômetros maiores, observando o máximo e o mínimo do arco de oscilação várias vezes seguidas. Para fazer observações precisas da posição média do espelho, uma condição essencial era que as oscilações do espelho fossem fortemente amortecidas e o espelho trazido a uma posição de repouso no menor tempo possível, sem exercer qualquer tipo de influência na posição do próprio espelho. Satisfiz completamente a essa exigência para utilizar esse tipo de espelho magnético, ao construir uma esfera sólida de cobre ddd (Figura 8) com 90 milímetros de diâmetro.

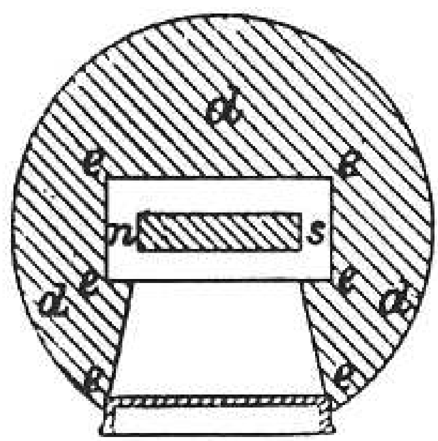


Fig. 8.

Foi furado um buraco $eeee$ de 40 milímetros de diâmetro e 70 milímetros de profundidade em uma lado dessa esfera, sendo que esse buraco podia ser fechado com uma placa de vidro. Esse buraco foi um pouco alargado na sua extremidade traseira para o espelho magnético, e foi alargado na forma de um funil voltado para fora, para dar ao espelho mais acesso à luz. No espaço traseiro alargado $eeee$ foi suspenso o espelho magnético, que pode ser visto na Figura 8 na seção reta retangular horizontal ns. Uma abertura de 8 mm de largura e 40 mm de comprimento $ffff$, Figura 7, conduzia a esse espaço estendido, através do qual o espelho suspenso em uma linha de seda poderia ser abaixado até o centro da esfera. A linha de seda atravessava um tubo de latão $gggg$, cuja extremidade inferior era aparafusada à esfera, com a ajuda de uma placa de latão hh, que cobria a boca da abertura ff da esfera. Neste tubo de latão havia um segundo tubo extraível $kkkk$, e este carregava um círculo de torção giratório ll com um gancho em c na extremidade superior, ao qual estava presa a linha de seda. A linha podia ser levantada através do tubo extraível, até que o espelho oscilasse livremente no centro da esfera de cobre. Então o tubo extraível era fixado nesse lugar por meio de um parafuso de pressão m. Para fixar essa esfera de cobre no lugar, foi instalado um anel de cobre simples $nnnn$, com 20 milímetros de altura, de 70 milímetros de diâmetro e 2 milímetros de espessura, que formava uma base na qual era colocada a esfera de cobre. Para nivelar o instrumento, um pequeno nível circular foi colocado no círculo de torção e a bola de cobre foi então girada no anel até que o nível estivesse posicionado corretamente, o que poderia ser feito com grande facilidade e precisão. Devido ao seu grande peso, a bola de cobre estava tão apertada no anel que nunca foi notado que tivesse se deslocado.

A ação dessa rígida esfera de cobre sobre o espelho oscilante consiste em um amortecimento *magnetoelétrico*, em virtude do qual o arco de oscilação estava em uma razão para o próximo [arco] de 11 : 7 (o *decremento logarítmico* era = 0,19697),[112] de tal forma que após 16 oscilações ou aproximadamente 1 minuto (o período de oscilação[113] era 3,78 segundos para esse amortecimento), o arco de oscilação tinha aproximadamente 1/1400 de seu valor original, de tal forma que era desprezível. No caso de correntes constantes, portanto, geralmente é suficiente deixar passar 1 minuto após o início da corrente antes de observar a posição defletida do espelho.

Se tais experiências de deflexão devem ter um valor não apenas relativo, mas absoluto, então, de acordo com as instruções dadas por Gauss no *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*,[114] o ímã ou corrente defletora pode ser aproximado no máximo a uma distância que é 3 ou 4 vezes maior do que o comprimento da agulha, que, no nosso caso, é 3 ou 4 vezes o diâmetro do espelho, isto é, 105 a 140 milímetros, sendo que nessas pequenas distâncias mesmo correntes muito fracas de um multiplicador são suficientes para produzir deflexões nitidamente mensuráveis do espelho. Agora, se 105 ou 140 milímetros seria uma distância suficiente do multiplicador para dar um valor absoluto às medições da deflexão, isso é ainda mais verdadeiro a uma distância de 583,5 milímetros, na qual se encontra em nossas experiências o multiplicador do espelho.

A posição mútua dos dois instrumentos, o dinamômetro e o magnetômetro de espelho, está representada na Figura 9, na qual a linha NS tracejada representa o meridiano

[112] Weber utilizou aqui a expressão em latim *decrementum logarithmicum*. O decremento logarítmico é definido como o logaritmo da razão de quaisquer dois picos sucessivos. Portanto, se o decremento logarítmico é $\log(x_{n-1}/x_n) = 0,19697$, então $x_{n-1}/x_n = 10^{0,19697} = 1,573874141 \approx 11/7$, já que $11/7 = 1,571428571$.

[113] Em alemão: *Schwingunsdauer*. Gauss e Weber utilizavam a antiga definição francesa do período de oscilação t que é a metade da definição inglesa do período de oscilação T, isto é, $t = T/2$, [Gil71a, págs. 154 e 180]. Por exemplo, o período de oscilação para pequenas vibrações de um pêndulo simples de comprimento ℓ é $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, onde g é a aceleração local de queda livre devida à gravidade terrestre, enquanto que $t = T/2 = \pi\sqrt{\ell/g}$.

[114] O trabalho de Gauss sobre a medição absoluta da força magnética terrestre foi anunciado na Sociedade Real de Ciências de Göttingen em dezembro de 1832, [Gau32], com traduções para o inglês em [Gau33a], [Gau37] e [Gau21b], ver ainda [Rei02, págs. 138-150]. O artigo original em latim só foi publicado em 1841, embora ele tenha circulado em pequena edição já em 1833, [Gau41b] e [Rei19]. Já foram publicadas várias traduções. Existem duas versões em alemão, uma traduzida por J. C. Poggendorff e publicada em 1833, a segunda traduzida por A. Kiel com notas de E. Dorn e publicada em 1894; uma versão em francês por F. J. D. Arago (1786-1853) publicada em 1834; duas versões em russo, uma por A. N. Drašusov publicada em 1836 e outra de A. N. Krylov publicada em 1952; uma versão em italiano de P. Frisiani publicada em 1837; um resumo em inglês foi publicado em 1935, com uma tradução completa em inglês de S. P. Johnson (1995) que foi publicada em 2003 e outra revisada e com Notas adicionais publicada em 2021; além de uma versão em português publicada em 2003: [Gau33b], [Gau34], [Gau36], [Gau39b], [Gau94], [Gau35], [Gau52], [Gau75], [Gau03], [Gau21e] e [Ass03]. Ver ainda [Mer84].

magnético, que atravessa os dois instrumentos; A é a seção reta horizontal do dinamômetro, assim como na Figura 4; B é a seção reta horizontal do magnetômetro de espelho, assim como na Figura 8, CD são os telescópios de leitura, direcionados aos espelhos dos dois instrumentos; EF são as escalas associadas, cuja imagem espelhada será observada. O uso do magnetômetro de espelho para observações termomagnéticas, para as quais alguns dispositivos especiais têm de ser feitos, será tratado em outra ocasião.

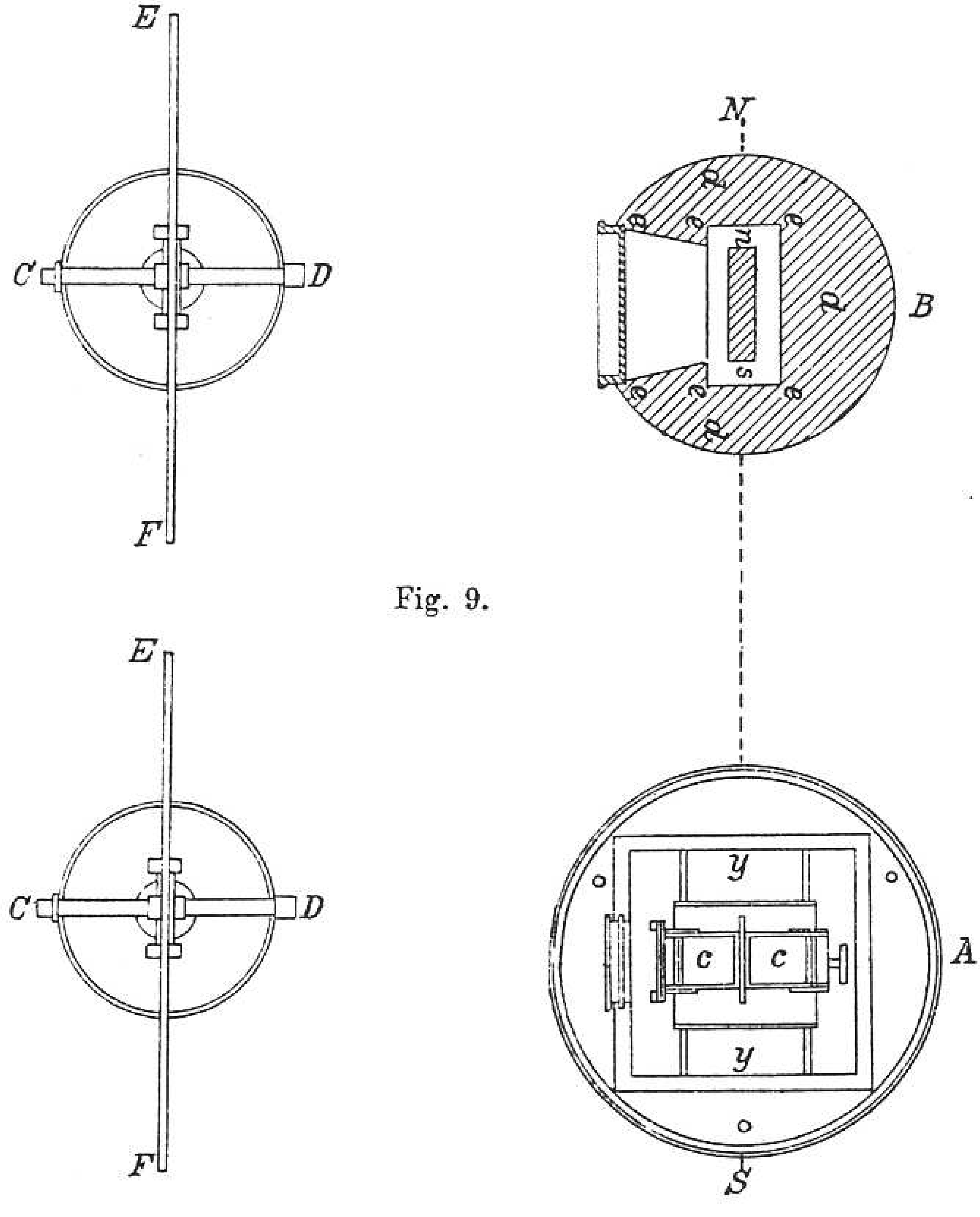


Fig. 9.

6.4 Experiências

Após essa descrição do equipamento essencial que foi designado para medição *eletromagnética* da intensidade de correntes e para medição *eletrodinâmica* da interação entre duas porções do circuito, e antes de procedermos para uma descrição das próprias experiências, desejamos fazer uma observação inicial sobre a produção e regulação das correntes utilizadas nessas experiências.

Para este propósito, foram usadas três pequenas células voltaicas de Grove[115] do fabricante de instrumentos Sr. Kleinert de Berlim, que eram todas as três ou apenas duas conectadas em série em forma de coluna, ou finalmente introduzidas individualmente no circuito. Apesar do fato que as correntes foram conduzidas através de um fio de circuito fino e muito longo, que formava a bobina bifilar e o multiplicador do dinamômetro, e que foi ainda mais estendido por meio de um longo fio auxiliar, essas correntes, mesmo com o grande enfraquecimento que sofreram devido à grande resistência de tal circuito, ainda permaneceram muito fortes e desviaram o dinamômetro longe demais de sua orientação de equilíbrio, para que essa deflexão pudesse ser medida por meio da escala com 1 metro de comprimento. Por outro lado, a intensidade dessas correntes no multiplicador era suficiente o bastante para produzir uma deflexão rigorosamente mensurável do magnetômetro de espelho. Portanto, a deflexão da bobina bifilar tinha de ser diminuída em uma taxa constante, sem diminuir a intensidade da corrente no multiplicador do dinamômetro. Havia duas maneiras disso ocorrer, ou aumentando a separação mútua dos fios de suspensão da bobina bifilar, o que diminuiria a sensibilidade do dinamômetro em uma taxa constante, ou então, a corrente poderia ser distribuída de modo que apenas uma pequena fração da corrente que passa pelo dinamômetro fosse conduzida através da bobina bifilar. Preferi o último método, para manter a sensibilidade do dinamômetro, que era necessária para outras experiências. Por meio de um fio de cobre curto e grosso, indicado pela linha tracejada vv' na Figura 2, foi construída uma passagem ou ponte para a corrente antes de entrar na bobina bifilar, pela qual a corrente, fora da bobina circular, era conduzida diretamente para o fio que retornava da bobina bifilar. Uma comparação precisa da resistência desse fio de conexão com aquela da bobina bifilar forneceu a razão

$$1 : 245{,}26,$$

da qual segue-se, de acordo com a lei de Ohm,[116] que a intensidade de corrente na bobina bifilar após essa repartição estava na razão constante de[117]

$$1 : 246{,}26$$

para a intensidade de corrente no multiplicador do dinamômetro, por meio da qual, assim, sem diminuir a deflexão do magnetômetro de espelho pelo multiplicador do dinamômetro, a deflexão do próprio dinamômetro foi diminuída 246,26 vezes. Essa deflexão diminuída 246,26 vezes do dinamômetro podia então ser medida rigorosamente na escala; a corrente podia vir de 3, 2 ou de apenas 1 célula voltaica de Grove.

As medições contidas na próxima Tabela foram feitas dessa forma.

[115] Em alemão: *drei kleine Grove'sche Becher*. A célula voltaica de Grove, também chamada de elemento, bateria ou pilha de Grove, recebeu esse nome em homenagem ao seu inventor, William Robert Grove (1811-1896), [Gro39]. Essa bateria elétrica consistia em um ânodo de zinco no ácido sulfúrico diluído e um cátodo de platina no ácido nítrico concentrado. Os dois líquidos eram separados por um pote de cerâmica poroso.

[116] Georg Simon Ohm (1789-1854). A lei de Ohm é de 1826: [Ohm26a], [Ohm26c], [Ohm26d], [Ohm26b] e [Ohm27] com tradução para o francês em [Ohm60] e tradução para o inglês em [Ohm66].

[117] [Nota de Wilhelm Weber:] Pois se a denotar a intensidade da corrente completamente não dividida ao passar pelo multiplicador, b e c a intensidade das duas correntes nas quais ela se divide, b passando pela bobina bifilar, c pelo fio auxiliar vv' que conecta o início e o final da bobina bifilar; então $a = b + c$, e de acordo com a lei de Ohm, as intensidades $b : c$ estão relacionadas inversamente às resistências medidas, ou seja,

$$b : c = 1 : 245,26;$$

consequentemente

$$b : a = b : (b + c) = 1 : 246,26.$$

Tabela das leituras correspondentes do magnetômetro de espelho e dinamômetro sob a influência de correntes de diferentes intensidades			
Número	Número de Células de Grove	Posição Observada do Magnetômetro	Posição Observada do Dinamômetro
1.	3	388,17	650,88
2.	0	279,74	209,79
3.	3	388,30	650,66
4.	0	279,68	209,47
5.	3	388,37	650,07
6.	0	280,05	209,70
7.	3	388,73	649,84
8.	0	279,95	209,55
9.	3	388,35	649,78
10.	0	279,78	209,53
11.	3	388,30	649,71
Deflexão média	$3-0$	108,566	440,508
12.	0	279,54	209,25
13.	2	352,15	407,52
14.	0	280,00	208,99
15.	2	352,35	407,35
16.	0	280,00	208,82
17.	2	352,50	407,18
18.	0	280,15	208,87
19.	2	352,60	407,15
20.	0	280,17	208,92
21.	2	352,95	406,89
22.	0	280,40	208,80
Deflexão média	$2-0$	72,438	198,305
23.	0	280,40	208,80
24.	1	316,77	259,68
25.	0	280,50	208,72
26.	1	216,93	259,53
27.	0	280,60	208,68
28.	1	316,90	259,50
29.	0	280,50	208,45
30.	1	316,85	259,38
31.	0	280,60	208,43
32.	1	216,90	259,35
33.	0	280,55	208,33
Deflexão média	$1-0$	36,332	50,915

As seguintes explicações devem ser adicionadas a essa Tabela: (1) Durante todas essas experiências, as relações dos condutores sempre permaneceram as mesmas, de tal forma que as condições de intensidade de corrente em todas as partes do circuito sempre foram as mesmas. (2) As observações correspondentes do magnetômetro e dinamômetro sempre foram realizadas simultaneamente por dois observadores diferentes nos dois instrumentos. Esses observadores foram, além de mim, o Dr. Stähelin da Basileia, e o meu assistente Sr. Dietzel.

(3) Cada observação individual do dinamômetro mostrada na Tabela não é uma leitura simples, mas cada uma dessas observações é baseada em 7 leituras: durante a oscilação, as posições mais altas e mais baixas foram lidas alternadamente e as 6 médias foram tiradas de cada uma das duas leituras que se seguiram inicialmente uma à outra; as 5 segundas médias retiradas de duas dessas médias inicialmente sucessivas foram consideradas como resultados parciais e o valor médio desses 5 resultados parciais foi inserido na Tabela. (4) Entre cada duas observações da posição defletida, o circuito foi aberto, para poder observar a posição natural sem influência galvânica, já que essa posição muda apreciavelmente, embora muito lentamente, ao longo do tempo. Essa abertura do circuito é indicada por um zero na coluna que mostra o número de elementos. (5) Os valores médios da deflexão para as observações na Tabela de 11 a 11 são deduzidos das 11 observações anteriores, ao tomar as 10 diferenças de cada duas observações sucessivas durante o fechamento e abertura do circuito, e as 9 médias foram obtidas a partir de cada segunda de tal diferença sucessiva inicial, das quais, como um resultado parcial, a média geral é dada na Tabela. (6) Finalmente, no que diz respeito ao magnetômetro, a distância horizontal do espelho à escala deve ser anotada durante os experimentos contidos nesta Tabela, porque posteriormente teve que ser frequentemente alterada: era de 1251 divisões. (7) As 11 observações, a partir das quais foram calculadas as deflexões médias do magnetômetro e dinamômetro, fornecem uma prova da exatidão da medição; pois observamos que as 5 ou 6 repetições das experiências, com o circuito fechado e aberto, que compreendem as 11 observações, sempre concordam entre si, até uma fração de uma unidade da escala, sendo que em relação a isso deve ser observado que mesmo essas pequenas diferenças se originam na maior parte nas mudanças reais na intensidade de corrente; além disso, no caso do magnetômetro, elas se originam nas variações da declinação que ocorrem durante a experiência; e, no caso do dinamômetro, tinham sua razão em um arranjo não perfeitamente fixo e imutável.

Os resultados de todos esses experimentos podem ser vistos brevemente nos valores médios correspondentes da deflexão do magnetômetro e do dinamômetro através da corrente de 3, 2 e 1 elementos voltaicos de Grove, a saber:

	Deflexão média do magnetômetro	Deflexão média do dinamômetro
para 3 elementos	108,566	440,508
para 2 elementos	72,438	198,305
para 1 elemento	36,332	50,915

De acordo com a lei óptica de reflexão, esses números são proporcionais às tangentes dos ângulos de deflexão duplos e devem ser reduzidos às tangentes do ângulo simples de deflexão, que fornece a unidade de medida das forças de deflexão, na qual deve ser levada em conta uma pequena influência devido à excentricidade do espelho. As correções que surgem disso são:

0,14	0,47
0,04	0,05
0,00	0,00,

a partir das quais, se essas correções são levadas em consideração, são produzidos os seguintes valores corrigidos, ou seja, para a força defletora

do magnetômetro	do dinamômetro
108,426	440,038
72,398	198,255
36,332	50,915.

Agora, de acordo com a unidade *eletromagnética* de intensidade de corrente, considerada como base anteriormente, os números da *primeira* coluna são proporcionais às *intensidades de corrente*, enquanto que os números na *segunda* coluna fornecem as *forças eletrodinâmicas* correspondentes, de acordo com os quais, portanto, pode ser determinada a dependência das forças eletrodinâmicas em relação às intensidades de corrente. Antes que isto seja feito, entretanto, deve-se notar que pode parecer que uma pequena influência estranha ainda deve ser removida dos números da primeira coluna, ou seja, a ação da *bobina bifilar* sobre o magnetômetro. Isto é, esses números só poderiam então ser considerados como uma medida verdadeira da intensidade de corrente, se o magnetômetro fossem sempre defletido pela mesma parte do circuito que permanecia estacionária. Essa parte do circuito era o multiplicador do dinamômetro que permanecia parado. Na verdade, este multiplicador estava em tal posição em relação ao magnetômetro, que exercia a maior força defletora, enquanto a bobina bifilar suspensa no multiplicador foi originalmente colocada em tal posição que não podia exercer nenhuma força defletora, mesmo que uma forte corrente passasse por ela. Agora, contudo, nas experiências anteriores a bobina bifilar foi apreciavelmente defletida ou girada, e após esse giro, ela tinha que exercer uma força defletora sobre o magnetômetro, por meio da qual os valores numéricos anteriores necessitam uma correção, para fazer com que eles correspondam apenas à influência do multiplicador. Contudo, essa correção é muito pequena, já que a intensidade da corrente atravessando a bobina bifilar é de apenas 246,26 avos da intensidade da corrente no multiplicador, por causa da separação [da corrente] mencionada anteriormente. Assegurei-me de que essa correção, mesmo no caso em que era maior, ainda ficava abaixo de 1/500 de uma divisão da escala e poderia, portanto, ser negligenciada.

Se multiplicarmos agora as raízes quadradas dos valores observados para a interação eletrodinâmica, a saber, $\sqrt{440,038}$, $\sqrt{198,255}$, $\sqrt{50,915}$, pelo fator constante

$$5{,}15534,$$

obteremos aproximadamente os valores observados para a ação eletromagnética, a saber, a série:

$$108{,}144$$
$$72{,}589$$
$$36{,}786,$$

cuja comparação com os valores observados produz as seguintes diferenças:

$$-0,282$$
$$+0,191$$
$$+0,454.$$

Portanto, a maior diferença que aparece entre os valores calculados e os valores diretamente observados para a força eletromagnética, chega a menos do que metade de uma unidade da escala, em virtude da qual, pode ser considerada como provada a lei que baseou o cálculo, [a saber,] *que a força eletrodinâmica entre duas porções de um circuito é proporcional ao quadrado da força eletromagnética, consequentemente proporcional ao quadrado da intensidade de corrente.*

Essa experiência também torna evidente que o método de medição eletrodinâmica utilizado aqui permite um rigor e precisão quase igual àquela permitida pelo método de medições magnéticas com o magnetômetro.

6.5 Prova da Lei Eletrodinâmica Fundamental Através de Medições

Após esses primeiros testes de precisão a serem alcançados com os instrumentos de medição eletrodinâmicos descritos, passo imediatamente para um sistema de medições realizado com eles, que é adequado para um exame completo da lei fundamental eletrodinâmica.

Ampère, em seu Tratado descrito anteriormente, página 181 e seguintes, apresentou dois métodos para deduzir a lei de interação entre dois fios condutores a partir da experimentação:[118]

> Uma [maneira] consiste em medir inicialmente, com a maior exatidão, os valores da ação mútua entre duas porções de tamanho finito [de dois fios condutores], colocando sucessivamente estas [duas porções], uma com respeito à outra, em distâncias diferentes e em posições [ou orientações] diferentes, pois é evidente que aqui a ação [mútua] não depende somente da distância. É necessário, em seguida, fazer uma hipótese sobre o valor da ação mútua entre duas porções infinitamente pequenas [de condutores com corrente], obtendo-a a partir da ação que deve resultar para os condutores de tamanho finito com os quais se trabalhou, e modificar a hipótese até que os resultados do cálculo estejam de acordo com a observação. [...] A outra maneira consiste em constatar, pela experiência, que um condutor móvel permanece exatamente em equilíbrio entre [duas] forças iguais [e opostas], ou entre [dois] torques iguais [e opostos][119] — com estas forças e estes torques sendo produzidos pelas porções de [fios] condutores fixos cujas formas ou tamanhos podem variar de uma maneira qualquer — sob as condições determinadas pela experiência, sem que o equilíbrio [do condutor móvel] seja perturbado, e concluir, diretamente pelo cálculo, qual deve ser o valor da ação mútua entre as duas porções infinitamente pequenas [dos condutores com corrente], para que o equilíbrio seja de fato independente de todas as mudanças de forma ou de tamanho compatíveis com as condições.

Ampère preferiu o último método por razões das quais a única suficiente é que ele não tinha os instrumentos de medição indispensáveis para o primeiro método. Obviamente, sob tais condições, o segundo método tinha de ser preferido, o qual não necessita a realização de medições reais. Contudo, Ampère parece ter sobrestimado o último método, quando expressou o ponto de vista que ele merecia uma preferência absoluta em relação ao primeiro método. Um instrumento para medições precisas tem dois pré-requisitos: (1) um grande refinamento e sensibilidade, que nos permita reconhecer claramente as ações a serem medidas, independentemente de influências estranhas incontroláveis; (2) um instrumento de medida apropriado para essas ações. Contudo, é claro que essa última exigência sempre pode ser facilmente realizada, caso a primeira seja satisfeita, assim a primeira exigência tem de ser considerada como a condição principal. Mas o cumprimento deste requisito principal é tão essencial para o segundo método quanto para o primeiro, pois, caso contrário, seria bastante ilusório. A diferença essencial entre esses métodos, em relação à experimentação, é

[118]Ver [Amp23, págs. 181-182], [Amp26, págs. 9-10], [AC11, págs. 369-370] e [AC15, págs. 344-345].

[119]No original em francês: *qu'un conducteur mobile reste exactement en équilibre entre des forces égales ou des moments de rotation égaux.* Em alemão: *dass ein beweglicher Leiter vollkommen im Gleichgewicht bleibe zwischen gleichen Kräften oder gleichen Drehungsmomenten.* As expressões *moments de rotation* (em francês) ou *Drehungsmomenten* (em alemão) podem ser traduzidas como torques, torques de rotação, pares de forças, binários, binários de rotação, momentos de rotação ou momentos de força.

então simplesmente que de acordo com o primeiro método, mantemos o equilíbrio da forças eletrodinâmicas por meio de outras forças da natureza conhecidas e mensuráveis, enquanto que de acordo com o segundo método, buscamos condições de equilíbrio nas quais as forças eletrodinâmicas vão se manter mutuamente em equilíbrio entre si. Não há dúvida de que o último método, se ele é para levar a resultados confiáveis e precisos, é menos direto e menos simples, na conexão *experimental*, do que o primeiro método. Portanto, a única vantagem do segundo método é que as leis fundamentais podem ser derivadas mais fácil e diretamente dos resultados *teóricos* obtidos por este método, mas isto não é mais um problema se as leis fundamentais a serem examinadas já estiverem disponíveis em sua totalidade, como é o caso na presente situação devido ao mérito de Ampère. Devido a isso, estamos em posição de realizar um sistema muito simples de medições que satisfaz às exigências.

Os dois fios condutores, que agem reciprocamente entre si, devem formar círculos, ou sistemas de círculos paralelos, que possuem um eixo comum e são chamados de *bobinas condutoras*.[120] Esses dois eixos[121] devem ter uma orientação horizontal e ser perpendiculares entre si, especificamente, de tal forma que a extensão de um eixo atravesse o centro da outra bobina. Agora, ou o eixo estendido da bobina fixa atravessa o centro da bobina móvel, ou, vice-versa, o eixo estendido da bobina móvel atravessa o centro da bobina fixa. Nos dois casos, podemos fazer medições a distâncias diferentes entre os centros. Vê-se facilmente que essas duas maneiras de ordenar as medições eletrodinâmicas correspondem totalmente ao ordenamento das medições magnéticas que Gauss apresentou no *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* (Commentationes Soc. regiae Scient. Gottingensis recentiores, Vol. VIII, pág. 33).[122,123] Para as interações eletrodinâmicas, podemos adicionar ainda um terceiro ordenamento das medições, no qual os centros das duas bobinas coincidem, como ocorre no dinamômetro descrito anteriormente. Em todos esses casos, a lei fundamental de Ampère pode ser aplicada e os resultados calculados, com o objetivo de compará-los com os resultados das observações.

Quando a bobina fixa atua à distância sobre a móvel, as duas bobinas podem ser de diâmetros iguais ou desiguais, conforme você escolher; mas se os centros das duas bobinas coincidirem, como foi o caso do instrumento de medição que acabamos de descrever, o diâmetro interno de uma bobina, com o formato de anel, deve ser maior que o diâmetro externo da outra, para que a primeira possa envolver a segunda. No dinamômetro descrito anteriormente, a bobina móvel era a menor, e estava contida na bobina fixa. Quando, finalmente, as três séries de experiências que acabaram de ser indicadas devem ser realizadas, ao colocar simplesmente a bobina fixa sucessivamente em lugares diferentes, sem alterar a suspensão da bobina móvel, o que é vantajoso para uma comparação mais precisa de todos os resultados das medições entre si, então a bobina móvel tem de ser a maior, de tal forma que ela contenha a bobina fixa, já que essa é a única maneira que essa última, sem danificar os fios de suspensão, pode ser introduzida na bobina móvel. Esse é o motivo pelo qual, para esse sistema de medições, foi construído um aparelho de medição especial pelo fabricante de instrumentos Sr. Leyser[124] em Leipzig, que será descrito aqui.

A *bobina bifilar aaa* na Figura 10 consiste em um fino anel de latão com 100,5 mm de diâmetro e 30 mm de altura, que fica entre dois discos ou arruelas de latão paralelos com

[120]Em alemão: *Leitungsrollen*. Ver a Nota de rodapé 97 na página 47.

[121]Ou seja, um eixo de cada bobina.

[122][Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 107.

[123]Ver a Nota de rodapé 114 na página 59.

[124]Georg Moritz Ludwig Leyser (1816-1881).

122,7 mm de diâmetro exterior e 100,5 mm de diâmetro interior, e os mantém a uma distância de 30 mm entre si. Um fio de cobre com 1/3 mm de diâmetro, coberto com seda, é enrolado ao redor do anel de latão aproximadamente 3 000 vezes, entre esses dois discos, de tal forma que ele preenche totalmente o espaço entre os dois discos. Após o fio ter sido enrolado, os dois discos de latão são mantidos juntos por uma braçadeira de latão fixa *bb*, que circunda o fio enrolado e mantém o círculo de torção *cc* em seu centro. O círculo de torção consiste em dois discos horizontais (quando a bobina bifilar está situada verticalmente), dos quais o disco inferior é conectado rigidamente por meio da braçadeira de latão na bobina bifilar, enquanto que o disco superior pode girar sobre o inferior ao redor de um eixo vertical. O disco superior vem com uma divisão circular,[125] o inferior com um ponteiro. Este último tem um pino d de madeira, que na extremidade superior segura a forquilha *ee* de uma polia bem móvel de 20 milímetros de diâmetro. Uma linha de seda ff passa sob esta polia e sobe verticalmente em ambos os lados da polia e é fixada aos dois fios de suspensão fg e fg em ambos os lados, uns poucos milímetros acima da polia. A esses pontos de conexão f e f, são trazidas as duas extremidades do fio enrolado ao redor da bobina bifilar, de tal forma que a corrente galvânica pode ser conduzida através de um fio de suspensão até uma extremidade da bobina bifilar, saindo da outra extremidade da bobina bifilar para o segundo fio de suspensão. Os dois fios de suspensão sobem verticalmente a partir desses pontos de conexão em direção ao teto, onde são presos a dois ganchos de latão isolados um do outro. Desses dois ganchos, dois outros fios são conduzidos novamente, um para um comutador, o outro para a bateria galvânica.[126]

[125]Em alemão: *Kreistheilung*. Um exemplo de divisão circular é um círculo dividido em graus.
[126]Em alemão: *galvanischen Säule*. Essa expressão pode ser traduzida como bateria ou pilha galvânica.

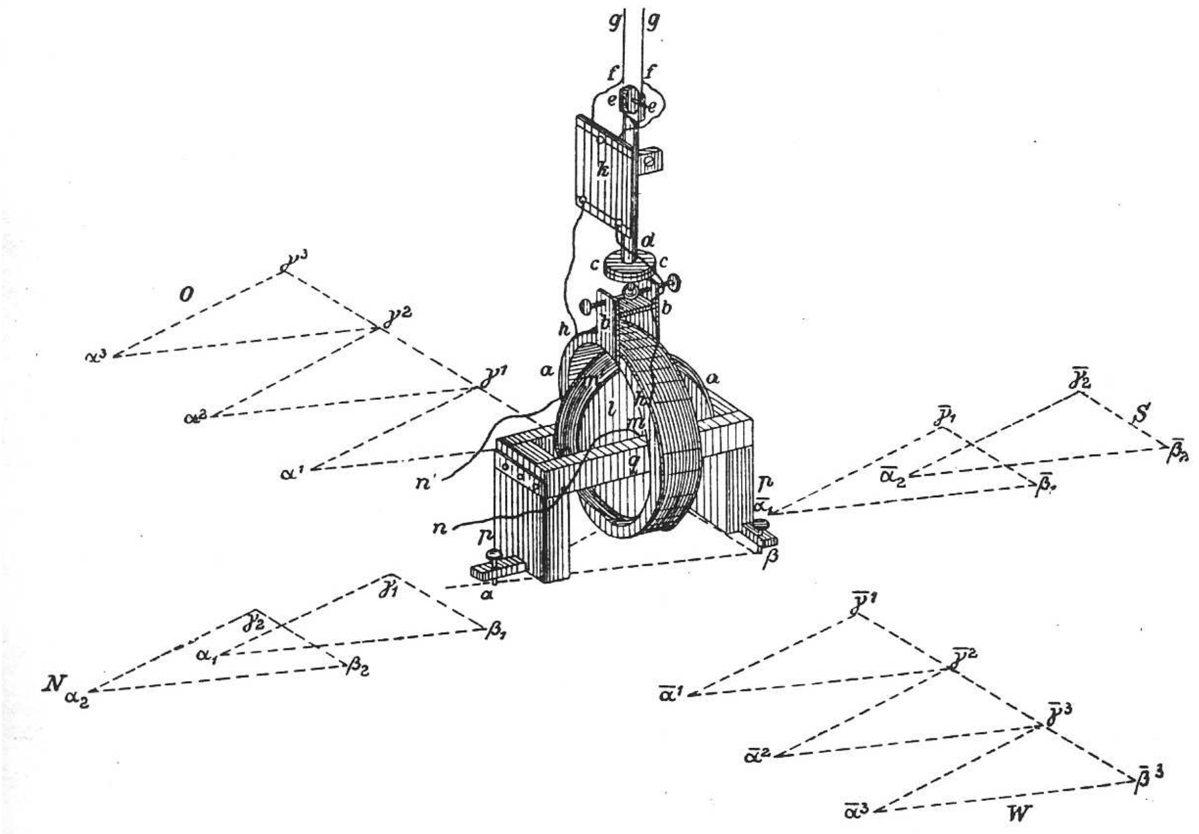


Fig. 10.

Com a ajuda do círculo de torção, podemos fornecer ao eixo horizontal da bobina bifilar qualquer orientação arbitrária, enquanto que os fios de suspensão mantêm sua posição paralela natural. O círculo de torção foi ajustado de tal maneira, que o eixo da bobina bifilar coincidia com o meridiano magnético NS, de tal forma que o magnetismo terrestre não alterava a orientação da bobina bifilar quando uma corrente galvânica atravessava a bobina.

Foi preso um espelho plano k no pino de madeira do círculo de torção, ao qual foi direcionado um telescópio com mira distante cerca de 3,3 metros, com o objetivo de observar a imagem de uma escala horizontal colocada próxima ao telescópio.

A *bobina fixa lll* na Figura 10 consiste em duas placas finas e paralelas de latão com 88,8 mm de diâmetro, que são mantidas em uma posição fixa distantes 30 mm entre si por um grosso eixo de latão m com 5,5 mm de espessura. Esse eixo de latão atravessa as duas placas e se estende por 10 mm dos dois lados. Ao redor do mesmo eixo entre os dois discos, é enrolado aproximadamente 10 000 vezes um fio de cobre com 1/3 mm de diâmetro, coberto com seda, de tal forma que ele preenche completamente o espaço entre os discos. Uma extremidade deste fio é passada perto do eixo através de uma pequena abertura revestida de marfim em m em um disco, de m para n, para fora, a outra extremidade é firmemente amarrada à periferia da bobina em m' com linhas de seda e vai para fora de m' para n'. Uma extremidade do fio $n'n'$ foi conduzida ao comutador A, Figura 11, a outra [extremidade] nn ao multiplicador B, Figura 11, de um galvanômetro.

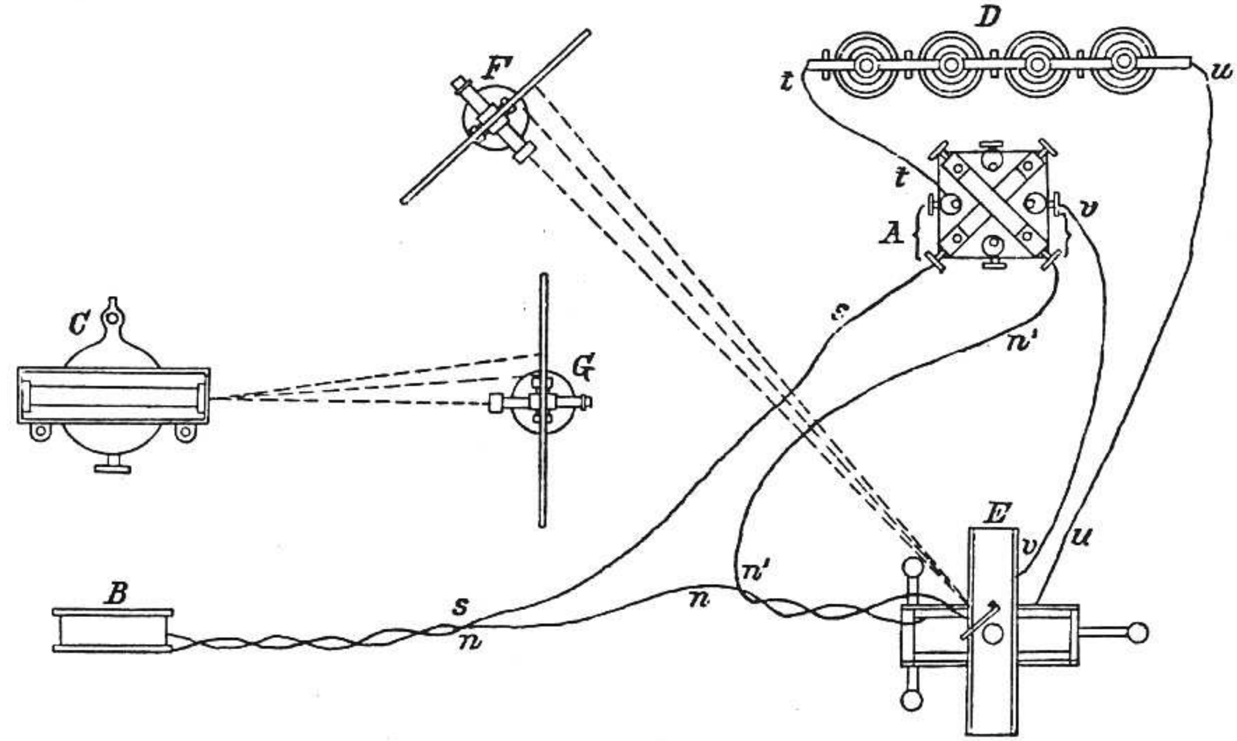


Fig. 11.

Um pequeno suporte[127] de madeira pp, Figura 10, serve para a fixação dessa bobina, que apresenta duas travessas q, sobre as quais são colocadas as partes salientes do eixo. Esse suporte fica apoiado sobre três pés equipados com pontas de parafuso α, β, γ utilizadas para nivelamento. Um desses pés é provido de uma dobradiça r e pode ser dobrado de tal forma que, junto com parte do suporte e a bobina fixa, possa passar livremente pela bobina e depois dobrado novamente. A bobina fixa passa então a ficar no centro da bobina bifilar, e o suporte então repousa, com dois pés deste lado, com o terceiro pé além da bobina bifilar, sobre a mesa fixa, que fica logo abaixo da bobina bifilar.

Sobre o tampo plano horizontal da mesa, são marcadas previamente os locais precisos em que a bobina fixa é para ser colocada. A saber, as três pontas de parafuso que, com a colocação concêntrica das duas bobinas, ficam nos pontos α, β, γ do tampo da mesa, são deslocados de tal forma que eles ficam ao *Norte* nos pontos $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ou $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ e assim por diante, ou ao *Sul* nos pontos $\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_1$ ou $\bar{\alpha}_2\bar{\beta}_2\bar{\gamma}_2$ e assim por diante, ou a *Leste* nos pontos $\alpha^1\beta^1\gamma^1$ ou $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ e assim por diante, ou a *Oeste* nos pontos $\bar{\alpha}^1\bar{\beta}^1\bar{\gamma}^1$ ou $\bar{\alpha}^2\bar{\beta}^2\bar{\gamma}^2$ ou $\bar{\alpha}^3\bar{\beta}^3\bar{\gamma}^3$ e assim por diante. Para proteção contra a influência do ar, a bobina bifilar é cercada por uma caixa de madeira, na qual é inserida uma placa de vidro, através da qual a luz pode incidir da escala para o espelho, e de lá indo de volta para o telescópio. A cobertura consiste em duas partes, uma das quais pode ser removida quando a bobina fixa é para ser colocada no centro da bobina móvel.

Para tornar o sistema de medições eletrodinâmicas realizado com este instrumento comparável entre si, foi necessário medir de forma independente a intensidade da corrente que passava pelas duas bobinas durante cada medição. Para esse propósito, o aparelho descrito na Seção 6.3 não podia ser utilizado, devido ao ajuste a ser feito na bobina fixa de uma medição para outra. Portanto, uma extremidade nn do fio enrolado ao redor da bobina fixa

[127] Em alemão: *Gestell*. Essa palavra pode ser traduzida como suporte, moldura ou armação.

foi conectado a uma terceira bobina de fio B (Figura 11), que consistia em 618 enrolamentos paralelos, englobando uma área de 8 313 440 milímetros quadrados, e foi colocada 217 mm a Oeste do magnetômetro transportável, C, afastado 8 metros do dinamômetro (Figura 11), e com a qual o magnetômetro formava um *galvanômetro*. Com sua outra extremidade ss, essa terceira bobina de fio era, finalmente, conectada ao comutador A (Figura 11), ao qual também levava um fio condutor tt da bateria galvânica D.

A Figura 11 fornece uma representação clara do ordenamento e conexão das diferentes partes do instrumento. Em relação a isso deve ser notado que as duas extremidades de fio da bobina fixa, quando estavam próximas à bobina bifilar, foram enroladas uma ao redor da outra de tal forma que correntes opostas atravessando-as não tivessem influência sobre a bobina bifilar. A letra E representa o dinamômetro em vista plana, F o telescópio de leitura associado e a escala; C representa o magnetômetro em vista plana e G o telescópio de leitura associado juntamente com a escala; B é a bobina multiplicadora, por onde passa a mesma corrente galvânica que pelo dinamômetro, e que atua remotamente na agulha do magnetômetro C, cuja deflexão é medida a partir do meridiano magnético, determinando assim a intensidade da corrente utilizada e suas variações durante as experiências.

A bateria galvânica que foi utilizada para essas experiências, consistia em 8 pilhas de carbono de Bunsen.[128] A direção dessa corrente sempre permaneceu a mesma no fio da bobina bifilar do dinamômetro E, e era, como é claro a partir da colocação do comutador A, invertida na bobina fixa do dinamômetro E e na terceira bobina B, que substituía o multiplicador no *galvanômetro*, simplesmente por meio da alteração do comutador. O fato de a corrente na bobina bifilar sempre manter sua direção era necessário para eliminar a influência do magnetismo da Terra. A inversão da corrente na bobina fixa era necessária para desviar a extremidade Norte do eixo da bobina bifilar alternadamente para o Leste e Oeste por meio da ação dessa bobina fixa sobre a bobina bifilar e, através de medições repetidas dessas deflexões positivas e negativas, para determinar essa ação com maior rigor. A inversão da corrente na terceira bobina tinha o mesmo propósito, em relação à deflexão do magnetômetro, que servia para determinar a intensidade da corrente. Essa finalidade é alcançada por meio do equipamento descrito, juntamente com o auxílio do comutador A; já que a direção da corrente permaneceu constantemente a mesma na bateria D e em todas as partes do circuito que a bateria D conecta com o comutador A, a saber, no fio tt, na bateria D, no fio uu, na *bobina bifilar* do dinamômetro E e no fio vv; por outro lado, a direção da corrente pode ser modificada pelo comutador A em todas aquelas partes do circuito que estão separadas da bateria D pelo comutador A, a saber, no fio $n'n'$, na *bobina fixa* do dinamômetro E, no fio nn, na bobina multiplicadora B, e no fio ss.

O período de oscilação da bobina bifilar sem corrente era $= 13,3259$". A distância horizontal do espelho da bobina bifilar até a escala era de 3 306,3 unidades da escala; a distância horizontal do espelho do magnetômetro até a escala era de 1103 unidades da escala. Os resultados dessas medições estão contidos na Tabela seguinte, na mesma ordem em que foram realizadas.

[128]Em alemão: *Bunsen'schen Kohlenbechern*. A pilha, bateria, célula voltaica ou elemento de Bunsen recebeu esse nome em homenagem a seu inventor, Robert Wilhelm Eberhard Bunsen (1811-1899). Essa bateria elétrica consistia em um ânodo de zinco no ácido sulfúrico diluído e um cátodo de carbono no ácido nítrico concentrado. Os dois líquidos eram separados por um pote de cerâmica poroso. Bunsen substituiu o cátodo de platina da bateria de Grove por um eletrodo de carbono, ver a Nota de rodapé 115.

A	Dinamômetro			Galvanômetro		
	516,27			250,47		
		26,41			321,49	
	542,68			571,96		
		26,74			321,48	
600	515,94			250,48		
para o Oeste		26,37	26,35		321,12	320,14
	542,31			571,60		
		26,24			319,41	
	516,07			252,19		
		26,00			317,22	
	542,07			569,41		
	506,37			254,05		
		44,47			314,65	
	550,84			568,70		
		44,87			314,22	
500	505,97			254,48		
para o Oeste		43,89	44,31		314,77	314,32
	549,86			569,25		
		44,50			314,33	
	505,36			254,92		
		43,84			313,63	
	549,20			568,55		
	517,27			566,80		
		20,34			312,08	
	537,61			254,72		
		20,43			312,98	
500	517,18			567,70		
para o Norte		20,19	20,30		312,82	312,48
	537,37			254,88		
		20,36			312,63	
	517,01			567,51		
		20,19			311,89	
	537,20			255,62		
	505,06			257,92		
		43,04			308,39	
	548,10			566,31		
		43,09			308,98	
500	505,01			257,33		
para o Leste		42,53	42,89		308,05	308,80
	547,54			565,38		
		42,32			309,09	
	505,22			256,29		
		43,46			309,50	
	548,68			567,79		

A	Dinamômetro			Galvanômetro		
	517,96			564,05		
		19,51			306,09	
	537,47			257,96		
		19,80			306,07	
500	517,67			564,03		
para o Sul		19,19	19,49		305,14	305,56
	536,86			258,89		
		19,79			305,47	
	517,07			564,36		
		19,17			305,03	
	536,24			259,33		
	514,31			260,23		
		24,19			304,46	
	538,50			564,69		
		23,65			305,02	
600	514,85			259,67		
para o Leste		24,06	23,72		304,58	304,92
	538,91			564,25		
		23,72			305,36	
	515,19			258,89		
		23,85			305,17	
	539,04			564,06		
	568,21			562,50		
		81,67			303,54	
	486,54			258,96		
		81,85			304,67	
400	568,39			563,63		
para o Leste		81,77	81,64		303,35	303,79
	486,62			260,28		
		81,57			303,32	
	568,19			563,60		
		81,35			304,08	
	486,84			259,52		
	546,32			261,44		
		36,27			300,95	
	510,05			562,39		
		36,25			302,42	
400	546,30			259,97		
para o Norte		36,14	36,15		302,73	302,07
	510,16			562,70		
		35,96			301,58	
	546,12			261,12		
		36,12			302,69	
	510,00			563,81		

A	Dinamômetro			Galvanômetro		
	488,36			261,99		
		79,71			300,99	
	568,07			562,98		
		79,78			301,45	
400	488,29			261,53		
para o Oeste		79,60	79,60		300,97	300,80
	567,89			562,50		
		79,49			300,80	
	488,40			261,70		
		79,40			299,83	
	567,80			561,53		
	510,23			561,18		
		35,34			298,95	
	545,57			262,23		
		35,53			299,67	
400	510,04			561,90		
para o Sul		35,45	35,43		299,40	299,30
	545,49			262,50		
		35,56			299,37	
	509,93			561,87		
		35,28			299,11	
	545,21			262,76		
	566,29			263,73		
		79,45			298,81	
	486,84			562,54		
		79,39			300,31	
300	566,23			262,23		
para o Sul		78,13	78,85		300,30	299,89
	488,10			562,53		
		78,64			300,30	
	566,74			262,23		
		78,62			299,71	
	488,12			561,94		
	431,18			263,96		
		192,57			298,05	
	623,75			562,01		
		192,40			298,25	
300	431,35			263,76		
para o Oeste		192,02	192,17		297,99	297,81
	623,37			561,75		
		191,96			297,30	
	431,41			264,45		
		191,91			297,45	
	623,32			561,90		

A	Dinamômetro			Galvanômetro		
	566,96			265,93		
		78,30			297,12	
	488,66			563,05		
		78,37			299,13	
300	567,03			263,92		
para o Norte		77,93	78,08		299,12	298,33
	489,10			563,04		
		77,98			298,15	
	567,08			264,89		
		77,80			298,14	
	489,28			563,03		
	433,52			266,49		
		190,26			296,69	
	623,78			563,18		
		109,43			298,16	
300	433,35			265,02		
para o Leste		190,23	190,08		296,98	297,30
	623,58			562,00		
		189,89			297,09	
	433,69			264,91		
		189,59			297,60	
	623,28			562,51		

As seguintes explicações devem ser adicionadas à Tabela. Na coluna *A*, a distância entre os centros das duas bobinas do dinamômetro é dada em milímetros, e está anotado em qual direção, considerando a bobina bifilar como ponto de origem, foi colocada a bobina fixa; deve ser entendido sob Norte ou Sul a direção como estando alinhada com o meridiano magnético; sob Leste e Oeste, é para ser entendida a direção como estando perpendicular ao meridiano magnético. — Na segunda coluna, denominada *Dinamômetro*, é dada a posição da bobina bifilar em unidades da escala, alternadamente com o sentido direto e inverso da corrente na bobina fixa. Cada um desses números é baseado em 7 leituras, nas quais o máximo e o mínimo do arco oscilante são lidos 7 vezes consecutivas, alternando de oscilação para oscilação, e a partir daí o tempo médio de repouso da bobina oscilante é calculado de acordo com regras conhecidas. Com a inversão da corrente na bobina fixa, foi aplicado um procedimento que não aumentou o arco de oscilação da bobina bifilar. Na Tabela, ao lado das observações de posição, que se relacionam alternadamente à corrente direta e inversa na bobina fixa, são anotadas as diferenças para cada segunda observação imediatamente sucessiva, o que fornece em unidades da escala o dobro da deflexão da bobina bifilar devido à influência da bobina fixa. Finalmente, em seguida a esses valores particulares da deflexão dupla, está anotado seu valor médio para cada posição da bobina fixa. — Na terceira coluna, denominada *Galvanômetro*, é dada a posição do galvanômetro, alternadamente com direção direta e inversa da corrente na bobina *B* que serve como um multiplicador. Essa posição foi observada e calculada da mesma forma que foi feito com o dinamômetro, e em seguida a isso estão anotadas as diferenças e o valor médio da deflexão dupla do galvanômetro. As observações correspondentes no dinamômetro e galvanômetro foram sempre feitas simultaneamente por dois observadores nos dois instrumentos.

Todas as observações coletadas na Tabela anterior foram feitas na ordem apresentada, em um dia, cada uma sendo feita imediatamente após a outra e, como todas as condições externas permaneceram exatamente as mesmas, todos os resultados são diretamente comparáveis entre si. Nesse dia, não foi possível realizar também aquelas observações nas quais a bobina fixa foi colocada no centro da bobina bifilar, já que o re-posicionamento da bobina fixa exigia vários preparativos demorados. Portanto, essa última série de experiências foi adiada para o próximo dia. Contudo, como não foi então possível ter confiança de que todas as condições externas permaneceram exatamente as mesmas como nas experiências anteriores, nesse segundo dia, para comparação, foram repetidas duas séries de experiências que haviam sido realizadas no primeiro dia, a saber, a uma distância de 300 mm para Leste e Oeste da bobina fixa da bobina bifilar, o que pôde ser usado para reduzir a última série de experiências de tal maneira que os resultados tornaram-se comparáveis com os resultados das experiências anteriores, independentemente das pequenas variações que pudessem ter ocorrido nas condições externas durante esse período. Também, o fato de que no dia seguinte foi usada uma outra bateria galvânica, a saber, de 2 pilhas de Grove (platina-zinco) no lugar das 8 pilhas de carbono de Bunsen, não teve influência nessa comparação. Isso foi necessário, já que de outra forma a deflexão do dinamômetro quando a bobina fixa foi colocada no centro da bobina bifilar não teria sido tão grande a ponto de ser medida na escala. Finalmente, deve ser notado que a direção constante da corrente na bobina bifilar foi oposta no dia seguinte em relação ao primeiro dia, o que da mesma forma não teve influência nos resultados reduzidos. Os resultados desse segunda série de experiências estão contidos na Tabela seguinte.

A	Dinamômetro			Galvanômetro		
	48,05			359,78		
		905,69			64,51	
	953,74			424,29		
		904,84			64,46	
	48,90			359,83		
0		904,00	903,97		64,47	64,45
	952,90			424,30		
		903,01			64,40	
	49,89			359,90		
		902,31			64,39	
	952,20			424,29		
	485,70			329,30		
		27,58			125,08	
	513,28			454,38		
		27,18			124,99	
300	486,10			329,39		
para o Leste		27,25	27,54		124,89	125,08
	513,35			454,28		
		28,26			125,10	
	485,09			329,18		
		27,43			125,35	
	512,52			454,53		
	512,37			454,50		
		25,65			125,18	
	486,72			329,32		
		27,77			125,29	
300	514,49			454,61		
para o Oeste		27,43	27,20		125,35	125,23
	487,06			329,26		
		27,60			125,30	
	514,66			454,56		
		27,55			125,05	
	487,11			329,51		

Deve-se observar aqui que também a corrente de 2 pilhas de Grove produziu uma deflexão maior do dinamômetro do que poderia ser medida na escala de 1000 divisões quando a bobina fixa foi colocada no centro da bobina bifilar e que, portanto, neste caso a corrente foi enfraquecida, já que a resistência do circuito foi aumentada ao conectar um fio de condução longo e fino, que foi removido novamente quando as bobinas foram colocadas a uma distância de 300 milímetros, porque, caso contrário, a deflexão do dinamômetro aqui seria novamente muito pequena para uma medição precisa. Isso pode ser percebido pela diferença na deflexão do magnetômetro, que mede a intensidade da corrente, e que no último caso chegou a quase o dobro do que no caso anterior.

Os resultados desta série de experimentos podem ser facilmente vistos na seguinte compilação de todos os valores médios das deflexões simultâneas do dinamômetro e do galvanômetro, a saber:

Distância em mm	Dinamômetro	Galvanômetro
0	903,97	64,45
300 para o Leste	27,54	125,08
300 para o Oeste	27,20	125,23.

Esses números são, de acordo com a lei de reflexão da óptica, proporcionais às tangentes dos ângulos dobrados de deflexão, e devem ser reduzidos às tangentes dos ângulos simples de deflexão, já que esses vão fornecer a unidade de medida da força defletora. Aqui ainda deve ser levada em consideração uma ligeira influência da excentricidade do espelho. A partir disso obtemos os seguintes valores reduzidos:

0	899,79	64,44
300 para o Leste	27,54	124,98
300 para o Oeste	27,20	125,13.

Tomamos a média a partir das duas últimas séries, que diferem muito pouco entre si, já que elas devem ser quase iguais se a intensidade de corrente for a mesma e se a posição da bobina fixa para o Leste e Oeste da bobina bifilar for totalmente simétrica, de onde obtemos os seguintes valores:

0	899,79	64,44
300	27,37	125,055.

Os resultados das séries de experiências anteriores podem ser vistos na compilação de todos os valores médios para as deflexões do dinamômetro e galvanômetro na seguinte Tabela:

Distância	Para o Leste		Para o Oeste		Para o Sul		Para o Norte	
Milímetro	Dinamômetro	Galvanômetro	Dinamômetro	Galvanômetro	Dinamômetro	Galvanômetro	Dinamômetro	Galvanômetro
300	190,08	297,30	192,17	297,81	78,85	299,89	78,08	298,33
400	81,64	303,79	79,60	300,81	35,43	299,30	36,15	302,07
500	42,89	308,80	44,31	314,32	19,49	305,56	20,30	312,48
600	23,89	304,92	26,35	320,14	—	—	—	—

Me convenci de que o efeito de reduzir esses números a tangentes dos ângulos de deflexão simples do dinamômetro é tão pequeno que pode ser ignorado, pois é menor do que os inevitáveis erros de observação. Esta correção também pode ser utilizada nas observações do galvanômetro, pois não há grandes diferenças na deflexão do galvanômetro.

6.6 Redução das Observações

As forças eletrodinâmicas observadas na Seção anterior não podem ser utilizadas diretamente para o pretendido exame da dependência dessas forças, determinado pela lei de Ampère, em relação à posição mútua dos fios condutores atuando entre si, já que são baseadas em intensidades de corrente diferentes. Portanto, essas observações devem ser inicialmente reduzidas *às mesmas intensidades de corrente*, para a qual se aplica a lei comprovada na Seção 6.4, segundo a qual as deflexões do dinamômetro são proporcionais aos quadrados das deflexões do galvanômetro. Contudo, a aplicação dessa lei às observações disponíveis pressupõe ela própria uma outra redução, a saber, a redução *à mesma força diretriz*[129] da bobina bifilar, que sofreu mudanças apreciáveis durante essas experiências. Nos resultados observacionais apresentados na Seção 6.4, através dos quais foi provada a lei citada, a correção resultante disso era desprezível e portanto não precisou ser considerada, já que lá a corrente que atravessou a bobina fixa do dinamômetro, foi dividida, e apenas uma pequena parte, a saber, 1/246 de toda a corrente, foi conduzida através da *bobina bifilar*, que não tinha influência apreciável sobre a força diretriz dessa bobina. Com relação aos resultados observacionais atuais, ao contrário, essa redução não pode ser ignorada, já que aqui toda a corrente conduzida através da bobina fixa também atravessa a bobina bifilar.

A *força diretriz da bobina bifilar* se separa em uma componente *constante* e uma *variável*. A componente *constante*, que é chamada de *momento estático*,[130] depende do peso da bobina bifilar e do comprimento e distância de separação entre os fios de suspensão, e pode ser calculada a partir do *período de oscilação* observado e do *momento de inércia* da bobina bifilar. O *período de oscilação* da bobina bifilar, se não está passando corrente por ela, foi determinado por meio de observações especiais, [a saber,]

$$t = 13{,}3259''.$$

O *momento de inércia* K foi encontrado de acordo com a fórmula dada por Gauss no *Intensitas*,[131]

$$K = 864\,800\,000,$$

onde milímetros e miligramas são usados como unidades de comprimento e massa. O *momento estático* S é obtido a partir de[132]

$$S = \frac{\pi^2 K}{t^2} = 48\,064\,000\ .$$

A componente *variável* da força diretriz da bobina bifilar, que é chamada de *momento eletromagnético*,[133] depende da intensidade da componente horizontal T do *magnetismo terrestre*, da intensidade da corrente na bobina bifilar, χ, e do tamanho da área, λ, que é delimitada pelos enrolamentos de fio da bobina bifilar, e é para ser colocado igual ao produto dessas três grandezas. A intensidade da componente horizontal do magnetismo terrestre, no local da bobina bifilar, foi encontrado como sendo dada por

$$T = 1{,}83\ .$$[134]

O tamanho da *área*, que foi delimitada pelos enrolamentos de fio da bobina bifilar, não pôde ser determinado por medição direta, já que o número de enrolamentos de fio não era conhecido precisamente. Portanto, essa área foi determinada indiretamente pela comparação

[129]Em alemão: *auf gleiche Direktionskraft*. O conceito de "força diretriz", "força direcional", "força diretiva" ou "força de direção", foi introduzido por Gauss em 1838, [Gau38b, pág. 4] com traduções para o inglês em [Gau41c, pág. 254] e [Gau21c].

Considere, por exemplo, uma agulha de bússola com um momento magnético m. Utilizando a terminologia de Gauss e Weber, seja T a componente horizontal da força magnética terrestre. O torque τ exercido pela Terra sobre a agulha quando ela é desviada de um ângulo θ em relação ao meridiano magnético local é dado por $\tau = mT \operatorname{sen}\theta$. A assim chamada força diretriz magnética é aqui dada por mT.

[130]Em alemão: *das statische Moment*.

[131]Ver a Nota de rodapé 114 na página 59.

[132]Ver a Nota de rodapé 113 na página 59.

[133]Em alemão: *das elektromagnetische Moment*.

[134]Na linguagem da teoria de campos do eletromagnetismo ensinado nos livros didáticos atuais esse valor de $T = 1,83\ \sqrt{mg}/(s\sqrt{mm})$ corresponde a um campo magnético de $B = 1,83 \times 10^{-5}\ Tesla$, ver [MB82], [Mal82], [Sch88] e [Mal07].

da ação eletromagnética dessa bobina com uma outra [bobina] de área conhecida ao atuar sobre uma bússola distante, obtendo-se

$$\lambda = 29\,314\,000 \text{ milímetros quadrados.}$$

Finalmente, as *intensidades de corrente* foram dadas para todas as experiências individuais por meio de observações do galvanômetro em unidades da escala, as quais contudo precisam ser reduzidas nos propósitos atuais para a *unidade eletromagnética fundamental*[135] de intensidade da corrente. Para fazer isso, o número observado de unidades da escala é multiplicado por um fator constante, o qual de acordo com a prova dada na Seção 6.9 é dado por

$$= 0{,}000\,361\,4.$$

Assim, caso y denote o número de unidades da escala observado no galvanômetro, então a intensidade de corrente é dada por

$$\chi = 0,000\,361\,4 \cdot y \ .$$

A partir desses elementos, o *momento eletromagnético* da bobina bifilar é dado por

$$\chi\lambda T = 19\,400 \cdot y \ .$$

Esse valor para o momento eletromagnético é para ser subtraído, na primeira série de experiências, do *momento estático*, contudo, na segunda série de experiências, ele deve ser adicionado ao momento estático, para obter a *força diretriz da bobina bifilar*, já que, como já notado na página 75,[136] a direção da corrente na bobina bifilar na última série era oposta à direção na primeira série. Para a *primeira* série de experiências, a força diretriz em unidades do momento estático resultou em

$$= 1 - \frac{19\,400}{48\,064\,000} \cdot y \ ,$$

para a segunda série de experiências [ela resultou em]

$$= 1 + \frac{19\,400}{48\,064\,000} \cdot y \ .$$

As *deflexões observadas no dinamômetro* são reduzidas a uma força diretriz constante igual ao *momento estático*, se o número de divisões da escala x observado no dinamômetro for multiplicado na *primeira* série de testes por $(1 - 194 \cdot y/480640)$ e na *segunda* por $(1 + 194 \cdot y/480640)$.

Após fazer essa redução, obtemos para a *primeira série* os valores das deflexões do dinamômetro e galvanômetro coletados na seguinte Tabela.

Distância	Para o Leste		Para o Oeste		Para o Sul		Para o Norte	
Milímetro	Dinamômetro	Galvanômetro	Dinamômetro	Galvanômetro	Dinamômetro	Galvanômetro	Dinamômetro	Galvanômetro
300	167,26	297,30	169,06	297,81	69,30	299,89	68,67	298,33
400	71,63	303,79	69,93	300,81	31,15	299,30	31,74	302,07
500	37,54	308,80	38,69	314,32	17,09	305,56	17,74	312,48
600	20,95	304,92	22,94	320,14	—	—	—	—

[135]Em alemão: *das elektromagnetische Grundmaass*. A expressão *Grundmaass* pode ser traduzida como medição fundamental, unidade fundamental, unidade básica, unidade de medida fundamental, etc. Ver a Nota de rodapé 95 na página 46.

[136][Web46, pág. 62 das *Obras* de Weber].

Para a *segunda série* obtemos os seguintes valores correlacionados:

Distância	Para o Leste ou Oeste	
Milímetro	Dinamômetro	Galvanômetro
0	923,19	64,44
300	28,75	125,055

A *sensibilidade* de um instrumento é inversamente proporcional à sua *força diretriz*, isto é, a força a ser medida gera a maior deflexão, quanto menor for a força diretriz. Os dados observacionais anteriores, reduzidos *à mesma força diretriz*, são assim equivalentes aos valores obtidos sob a condição de *sensibilidade igual* do dinamômetro.

Após essa redução das observações do dinamômetro *à mesma força diretriz*, a lei provada na Seção 6.4 pode agora ser aplicada e todas as observações reduzidas *à mesma intensidade de corrente* para melhor comparação entre si. Para isso, só é necessário determinar com mais cuidado a intensidade de corrente normal para a qual os dados observacionais reduzidos são supostos como válidos. Como não é necessário utilizar para as duas séries de experiências *iguais* intensidades de corrente normal, pode ser escolhida aquela intensidade para a *primeira série* que corresponde a uma deflexão do galvanômetro em unidades de escala, cujo quadrado $= 100\,000$, para a *segunda série* uma [intensidade] cinco vezes menor, para a qual esse quadrado $= 4\,000$. De acordo com a lei provada na Seção 6.4, obtemos então a partir da deflexão x do dinamômetro, dada na Tabela, que corresponde à deflexão y do galvanômetro, também dada na Tabela, o valor reduzido para a *primeira* série [dado por]

$$= 100\,000 \cdot \frac{x}{y^2} \ ,$$

para a *segunda* série [esse valor é dado por]

$$= 4000 \cdot \frac{x}{y^2} \ .$$

Na Tabela a seguir estão coletados os valores da *primeira* série reduzidos por esse método:

Distância	Para o Leste	Para o Oeste	Para o Sul	Para o Norte
300	189,24	190,62	77,06	77,16
400	77,61	77,28	34,77	34,78
500	39,37	39,16	18,30	18,17
600	22,53	22,38	—	—

Os valores reduzidos para a *segunda* série são como segue:

Distância	Para o Leste ou Oeste
0	889,29
300	7,35.

A partir desse último resultado vem que a força eletrodinâmica da bobina fixa sobre a bobina bifilar, quando os centros coincidem, era

$$\frac{88929}{735} = 120,9$$

vezes maior do que quando os centros estavam afastados entre si de 300 mm na direção Oeste-Leste.

Na Tabela para a primeira série, vemos que os valores correspondentes concordam muito aproximadamente, tanto em Leste e Oeste quanto em Sul e Norte, o que é uma prova da precisão da medição, assim como da colocação simétrica da bobina fixa nos dois lados da bobina bifilar. Se agora tomarmos a média desses valores, que já são quase idênticos, e somarmos para a distância 0, conforme o resultado que acabamos de tirar da *segunda* série, 120,9 vezes o valor da ação para uma distância de 300 milímetros perpendicular ao meridiano magnético, obteremos então a seguinte Tabela:

Distância	Perpendicular ao meridiano magnético	Na direção do meridiano magnético
0	22960	22960
300	189,93	77,11
400	77,45	34,77
500	39,27	18,24
600	22,46	—

6.7 Comparação com a Lei de Interação Magnética

Antes de usarmos esse sistema de medições da interação entre dois fios condutores para testar diretamente a lei fundamental de Ampère, desejamos fazer um teste inicial interessante, mesmo que apenas indireto e parcial. A saber, é conhecido que uma das consequências mais importantes da lei fundamental de Ampère para a interação entre dois elementos de corrente, é que a interação entre dois ímãs, dadas todas as diferenças em suas posições respectivas, também seria produzida por meio de correntes galvânicas constantes, que ocorrem em uma forma específica sobre a superfície ou no interior dos ímãs e, reciprocamente, que as interações entre duas bobinas galvânicas, como aquelas com as quais foram realizadas nossas medições, dadas todas as diferenças em suas posições respectivas, também seriam produzidas por dois ímãs constantes, contidos em áreas delimitadas pelos enrolamentos de fios dessas bobinas, caso o magnetismo livre fosse distribuído de uma maneira específica no seu interior ou na sua superfície. De acordo com isso, todos os resultados que Gauss provou para esses ímãs no *Intensitas vis magneticae...*,[137] podem ser transferidos para nossas duas bobinas, e isso pode ocorrer bem facilmente, já que ordenamos nossas medições das interações entre duas bobinas exatamente da mesma forma como Gauss determinou as medições das interações entre dois ímãs. Gauss, *na mesma obra*, forneceu a distância entre dois ímãs em metros, e nós ao contrário usamos milímetros; além disso, Gauss determinou as deflexões *simples*, calculadas com o estado natural de repouso da agulha como ponto de partida, em graus, minutos e segundos, enquanto que nós apresentamos as tangentes *duplas* do ângulo simples de deflexão em unidades da escala (isto é, multiplicado pelo coeficiente constante 6612,6). Portanto, se quisermos colocar nossas medições da interação entre duas bobinas condutoras na mesma forma que as medições magnéticas, obteremos a seguinte Tabela das deflexões *medidas*:

[137] Ver a Nota de rodapé 114 na página 59.

R	v	v'
0,3 m	0º49′22″	0º20′3″
0,4 m	0º20′8″	0º9′2″
0,5 m	0º10′12″	0º4′44″
0,6 m	0º5′50″	—

As tangentes de v e v' devem então, tanto aqui quanto lá, ser desenvolvidas de acordo com séries decrescentes de potências ímpares de R, e especificamente,

$$\tan v = aR^{-3} + bR^{-5} \ ,$$

$$\tan v' = \frac{1}{2}aR^{-3} + cR^{-5} \ ,$$

onde a, b, c devem ser determinadas experimentalmente. Se agora em nosso caso

$$\tan v = 0,0003572R^{-3} + 0,000002755R^{-5} \ ,$$

e

$$\tan v' = 0,0001786R^{-3} - 0,000001886R^{-5} \ ,$$

então é obtida a seguinte Tabela das deflexões *calculadas*, à qual são acrescentadas as diferenças das deflexões *medidas*:

R	v	Diferença	v'	Diferença
0,3 m	0º49′22″	0	0º20′4″	−1
0,4 m	0º20′7″	+1	0º8′58″	+4
0,5 m	0º10′8″	+4	0º4′42″	+2
0,6 m	0º5′49″	+1	—	

Não se pode esperar uma concordância melhor entre os valores observados e calculados e, de acordo com isso, a lei fundamental de Ampère encontra-se confirmada experimentalmente em uma de suas consequências mais gerais e mais importantes.

6.8 Comparação da Lei de Ampère com as Observações

A lei fundamental de Ampère para a interação de dois elementos de corrente, que deve ser testada no atual sistema de medições dessa interação, consiste essencialmente no seguinte: A interação entre dois elementos de corrente é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, e diretamente proporcional à intensidade de corrente e ao comprimento de cada elemento e, além disso, é proporcional a um fator que depende do ângulo que as direções dos dois elementos de corrente fazem entre si, e [depende] dos dois ângulos que os dois elementos de corrente fazem com a linha reta que os une. Seja r a distância entre os dois elementos de corrente, i e i' as duas intensidades de corrente, ds e ds' os comprimentos dos dois elementos de corrente, ε o ângulo que as direções dos dois elementos de corrente fazem entre si e, finalmente, ϑ o ângulo de um elemento de corrente com a linha r, e ϑ' o ângulo do outro elemento de corrente com a linha r estendida, então[138]

[138]Esses ângulos aparecem na Figura dessa Nota de rodapé, ver a Seção 2.8 de [Cha09], [AC11] e [AC15], a saber:

$$-\frac{ii'}{rr}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)dsds'$$

é uma expressão para o *valor* da interação entre os dois elementos; a *direção* dessa ação para os dois elementos coincide com a linha reta que os une, e é oposta para os dois elementos de corrente, repulsiva para ambos se essa expressão tiver um valor positivo, atrativa no caso oposto.[139]

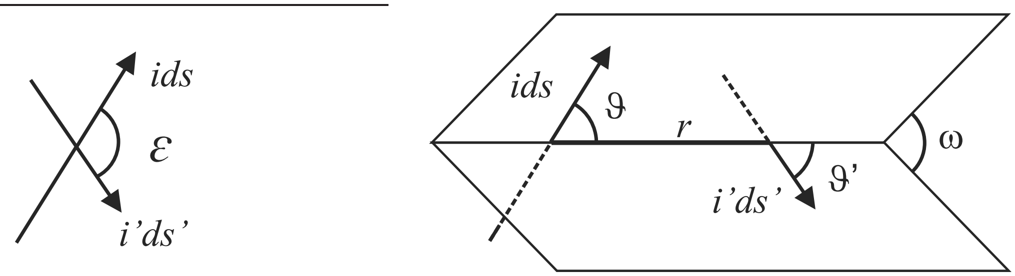
A partir desta lei fundamental, podemos primeiro encontrar a expressão para a ação total que vários elementos de corrente, formando juntos uma linha *fechada*, exercem sobre qualquer outro elemento de corrente.

Essa ação pode ser decomposta de acordo com três eixos coordenados retilíneos. Se essas três componentes forem denotadas X, Y, Z, e os ângulos que o elemento de corrente ds' que está sofrendo a ação forma com os três eixos coordenados forem denotados λ, μ, ν, e se o centro do elemento ds' for o ponto de origem das coordenadas, Ampère já provou que

$$X = -\frac{1}{2}ii'ds'\left(\cos\mu\int\frac{xdy - ydx}{r^3} - \cos\nu\int\frac{zdx - xdz}{r^3}\right) ,$$

$$Y = -\frac{1}{2}ii'ds'\left(\cos\nu\int\frac{ydz - zdy}{r^3} - \cos\lambda\int\frac{xdy - ydx}{r^3}\right) ,$$

$$Z = -\frac{1}{2}ii'ds'\left(\cos\lambda\int\frac{zdx - xdz}{r^3} - \cos\mu\int\frac{ydz - zdy}{r^3}\right) ,$$



(a) (b)

Aqui ω é o ângulo entre os planos formados por cada elemento e a linha reta que une seus centros. Esses ângulos têm os seguintes valores em radianos: $0 \leq \varepsilon \leq \pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \vartheta' \leq \pi$ e $0 \leq \omega \leq \pi$. Além disso, para Ampère, $r \geq 0$, $i \geq 0$ e $i' \geq 0$.

[139] Em sua obra-prima de 1826 Ampère deu uma definição oposta de forças positivas e negativas. Ou seja, definiu uma força positiva como significando uma atração e uma força negativa como significando uma repulsão. Sua expressão para a força entre dois elementos de corrente ids e $i'ds'$ tinha um sinal + na frente de tudo, ou seja, foi obtida como:

$$\frac{ii'}{rr}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)dsds' .$$

Como Weber inverteu o sinal na frente da força de Ampère, mas também inverteu o significado das forças positivas e negativas, o resultado final da força entre quaisquer dois elementos de corrente vai ser o mesmo para Ampère e para Weber. Ou seja, suponha uma orientação específica entre dois elementos de corrente tal que, de acordo com Ampère, ocorra uma repulsão entre eles. Então nesse caso, de acordo com Weber, também vai ocorrer uma repulsão entre eles. Ver o Capítulo 2 (A força de Ampère e o significado de seus termos) de [AC11] e [AC15].

(ver *Mémoires de l'acad. roy. des sc. de l'Institut de France*, 1823, página 214).[140] Se agora a linha fechada for uma linha circular de raio m, e o eixo x for paralelo à projeção no plano do círculo da linha reta conectando o centro do círculo com o ponto de origem das coordenadas, e o eixo y [for paralelo] ao diâmetro do círculo perpendicular a essa projeção; além disso, se p denotar a distância projetada no plano do círculo, do centro do círculo até o ponto de origem das coordenadas, e se ω denotar o ângulo que a linha p forma com o raio de um elemento ds do círculo; finalmente, se q denotar a perpendicular do ponto de origem das coordenadas até o plano do círculo, então nesse caso, [teremos] nos valores anteriores de X, Y, Z:

$$z = q, \qquad y = m \operatorname{sen} \omega, \qquad x = p - m \cos \omega \ ,$$

portanto, como $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\int \frac{xdy - ydx}{r^3} = mp \int \frac{\cos \omega d\omega}{r^3} - m^2 \int \frac{d\omega}{r^3}$$

$$= \ mp \left(\frac{\operatorname{sen} \omega}{r^3} + 3 \int \operatorname{sen} \omega \cdot \frac{dr}{r^4} \right) - m^2 \int \frac{d\omega}{r^3} \ ,$$

$$\int \frac{zdx - xdz}{r^3} = mq \int \frac{\operatorname{sen} \omega d\omega}{r^3} \ ,$$

$$\int \frac{ydz - zdy}{r^3} = -mq \int \frac{\cos \omega d\omega}{r^3} = -mq \left(\frac{\operatorname{sen} \omega}{r^3} + 3 \int \operatorname{sen} \omega \cdot \frac{dr}{r^4} \right) \ .$$

Se, finalmente, substituirmos no lugar de dr o valor obtido pela equação para r, a saber:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = m^2 + p^2 + q^2 - 2mp \cos \omega \ ,$$

esse valor [para dr] sendo:

$$dr = \frac{mp \operatorname{sen} \omega d\omega}{r} \ ,$$

e se estendermos os valores integrais para toda a circunferência do círculo, obteremos então

$$\int \frac{xdy - ydx}{r^3} = 3m^2 p^2 \int \frac{\operatorname{sen}^2 \omega d\omega}{r^5} - m^2 \int \frac{d\omega}{r^3} \ ,$$

$$\int \frac{zdx - xdz}{r^3} = 0 \ ,$$

$$\int \frac{ydz - zdy}{r^3} = -3m^2 pq \int \frac{\operatorname{sen}^2 \omega d\omega}{r^5} \ ;$$

consequentemente

$$X = -\frac{1}{2} ii' ds' \cdot m^2 \cos \mu \left(3p^2 \int \frac{\operatorname{sen}^2 \omega d\omega}{r^5} - \int \frac{d\omega}{r^3} \right) \ ,$$

e

[140] Ver [Amp23, pág. 214], [Amp26, pág. 42], [AC11, pág. 396] e [AC15, pág. 366].

$$Y = +\frac{1}{2} ii' ds' \cdot m^2 \left(3pq \cos\nu \int \frac{\operatorname{sen}^2\omega d\omega}{r^5} + 3p^2 \cos\lambda \int \frac{\operatorname{sen}^2\omega d\omega}{r^5} - \cos\lambda \int \frac{d\omega}{r^3} \right) .$$

Se o elemento ds' for parte de um círculo, cujo raio é n, e cujo plano for paralelo ao eixo coordenado z, e se a denotar a perpendicular do centro do círculo m ao plano do círculo n, se c denotar a perpendicular do centro do círculo n ao plano do círculo m, se b denotar a distância entre as duas perpendiculares e se, como foi o caso nas experiências anteriores,

$$b = 0 ,$$

obteremos então as seguintes equações para os ângulos α, β, γ, que a perpendicular ao plano do círculo n forma com os eixos coordenados:

$$\gamma = 90^{\text{o}} ,$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 ,$$

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu = 0 .$$

Como, além disso, é dado que

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1 ,$$

obteremos então

$$\cos\alpha = \frac{\cos\mu}{\operatorname{sen}\nu} , \qquad \cos\beta = -\frac{\cos\lambda}{\operatorname{sen}\nu} .$$

Além disso, para p e q obteremos as seguintes equações:

$$p\cos\beta = n\cos\nu ,$$

$$p^2 = a^2 + n^2\cos^2\nu ,$$

$$q = c + n\operatorname{sen}\nu .$$

Se agora multiplicarmos as componentes X, Y, Z, respectivamente, com os cossenos dos ângulos α, β, γ, que a perpendicular ao plano do círculo n faz com os eixos coordenados, então a soma desses produtos fornecerá a componente na direção perpendicular ao plano do círculo,[141] a saber:

$$= X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma ,$$

ou, se substituirmos os valores deduzidos para X, Y, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, e γ, e eliminarmos p e q,

$$= -\frac{1}{2} ii' m^2 ds' \cdot \left[3\left(a^2\operatorname{sen}\nu - cn\cos^2\nu\right) \int \frac{\operatorname{sen}^2\omega d\omega}{r^5} - \operatorname{sen}\nu \int \frac{d\omega}{r^3} \right] ,$$

[141] Isto é, fornecerá a componente da força total ao longo da direção perpendicular ao plano do círculo.

na qual

$$r^2 = a^2 + c^2 + m^2 + n^2 + 2cn \operatorname{sen} \nu - 2m \cos \omega \cdot \sqrt{(a^2 + n^2 \cos^2 \nu)} \ .$$

Se escrevermos na expressão anterior para o comprimento dos elementos ds' do círculo seu valor expresso em termos dos valores do arco e raio $= nd\nu$, e então multiplicarmos pela distância dos elementos do diâmetro vertical do círculo $= n \operatorname{sen} \nu$, obteremos o torque da força,[142] em relação ao diâmetro vertical do círculo como eixo de rotação,

$$= -\frac{1}{2} ii' \cdot m^2 n^2 \operatorname{sen} \nu \cdot d\nu \left[3 \left(a^2 \operatorname{sen} \nu - cn \cos^2 \nu \right) \int \frac{\operatorname{sen}^2 \omega d\omega}{r^5} - \operatorname{sen} \nu \int \frac{d\omega}{r^3} \right] \ .$$

Se essa expressão for agora integrada entre os limites $\nu = 0$ até $\nu = 2\pi$, obteremos então o torque que a corrente circular m exerce sobre a corrente circular n.

Para a orientação dada dos dois círculos entre si (a saber, na qual seus planos são ortogonais entre si, e as perpendiculares traçadas sobre eles em seus centros se cruzam),[143] três casos principais podem ser diferenciados, que ocorrem apenas nas experiências anteriores, a saber:

1. o plano do círculo m divide ao meio o plano do círculo n, ou $c = 0$;
2. o plano do círculo n divide ao meio o plano do círculo m, ou $a = 0$; e, finalmente,
3. ambos os planos dividem-se pela metade mutuamente, ou $a = 0$ e $c = 0$.

Para o *primeiro* caso, resulta a seguinte expressão para o torque atuando sobre o círculo n, a saber:

$$-\frac{1}{2} ii' \cdot m^2 n^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \nu d\nu \left(3a^2 \int \frac{\operatorname{sen}^2 \omega d\omega}{r^5} - \int \frac{d\omega}{r^3} \right) \ ;$$

na qual

$$r^2 = a^2 + m^2 + n^2 - 2m \cos \omega \cdot \sqrt{(a^2 + n^2 \cos^2 \nu)} \ .$$

Para o *segundo* caso, resulta o seguinte torque:

$$+\frac{1}{2} ii' \cdot m^2 n^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \nu d\nu \left(3cn \cos^2 \nu \int \frac{\operatorname{sen}^2 \omega d\omega}{r^5} + \operatorname{sen} \nu \int \frac{d\omega}{r^3} \right) \ ,$$

na qual

$$r^2 = c^2 + m^2 + n^2 + 2cn \operatorname{sen} \nu - 2mn \cos \nu \cos \omega \ .$$

Para o *terceiro* caso resulta o seguinte torque:

$$+\frac{1}{2} ii' m^2 n^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \nu d\nu \int \frac{d\omega}{r^3} \ ,$$

[142] Em alemão: *das Drehungsmoment der Kraft*. Ver a Nota de rodapé 119 na página 65.

[143] Ou seja, na orientação para a qual as normais aos planos dos dois círculos, passando por seus centros, se cruzam.

na qual

$$r^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\nu\cos\omega\ .$$

A primeira integração das expressões anteriores, a saber, com relação a ω, só pode ser feita ao desenvolver $1/r^3$ e $1/r^5$ em séries com potências crescentes de $\cos\omega$. Como r^2 tem a seguinte forma:

$$l^2\left(1 - k\cos\omega\right)\ ,$$

o resultado é:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{l^3}\left(1 + \frac{3}{2}k\cos\omega + \frac{15}{8}k^2\cos^2\omega + \frac{35}{16}k^3\cos^3\omega + \frac{315}{128}k^4\cos^4\omega + ...\right)\ ,$$

$$\frac{1}{r^5} = \frac{1}{l^5}\left(1 + \frac{5}{2}k\cos\omega + \frac{35}{8}k^2\cos^2\omega + \frac{105}{16}k^3\cos^3\omega + \frac{1155}{128}k^4\cos^4\omega + ...\right)\ .$$

Como, além disso

$$\pi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\omega = \int_0^{2\pi}\ \text{sen}\,^2\omega d\omega = \int_0^{2\pi}\cos^2\omega d\omega = 4\int_0^{2\pi}\ \text{sen}\,^2\omega\cos^2\omega d\omega$$
$$= \frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\cos^4\omega d\omega = 8\int_0^{2\pi}\ \text{sen}\,^2\omega\cos^4\omega d\omega = etc.$$

$$0 = \int_0^{2\pi}\cos\omega d\omega = \int_0^{2\pi}\ \text{sen}\,^2\omega\cos\omega d\omega = \int_0^{2\pi}\cos^3\omega d\omega$$
$$= \int_0^{2\pi}\ \text{sen}\,^2\omega\cos^3\omega d\omega = etc.$$

obtemos

$$\int_0^{2\pi}\frac{\text{sen}\,^2\omega d\omega}{r^5} = \frac{\pi}{l^5}\left(1 + \frac{35}{32}k^2 + \frac{1155}{1024}k^4 + ...\right)\ ,$$
$$\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{r^3} = \frac{2\pi}{l^3}\left(1 + \frac{15}{16}k^2 + \frac{945}{1024}k^4 + ...\right)\ .$$

Se substituirmos esses valores, obteremos para o *primeiro* caso principal, no qual $c = 0$, o valor do torque eletrodinâmico

$$= -\frac{\pi}{2}\frac{m^2n^2}{l^3}ii'\cdot\Sigma\ ,$$

onde Σ denota o seguinte valor integral:

$$\int_0^{2\pi}\ \text{sen}\,^2\nu d\nu\left[3\frac{a^2}{l^2}\left(1 + \frac{35}{32}k^2 + \frac{1155}{1024}k^4 + ...\right) - 2\left(1 + \frac{15}{16}k^2 + \frac{945}{1024}k^4 + ...\right)\right]\ .$$

Nessa expressão,

$$a^2 + m^2 + n^2 = l^2 \qquad \text{e} \qquad 4\left(a^2 + n^2\cos^2\nu\right)\cdot\frac{m^2}{l^4} = k^2 \ .$$

Se substituirmos esse valor de k^2, e integrarmos a expressão ordenada de acordo com as potências de $\cos^2\nu$, obteremos então o torque eletrodinâmico

$$= -\frac{\pi^2}{2}\frac{m^2n^2}{l^3}ii'\left[3\frac{a^2}{l^2} - 2 + \frac{15}{32}\left(7\frac{a^2}{l^2} - 4\right)\left(4 + \frac{n^2}{a^2}\right)\frac{a^2m^2}{l^4} + ...\right] \ .$$

Essa expressão fornece assim para o primeiro caso em consideração a unidade de medida do torque que um anel de raio $= m$ exerce sobre um anel de raio $= n$. Para um sistema de anéis, cujos raios crescem aritmeticamente de 0 até m, obtemos como unidade de medida do torque, que o sistema exerce sobre o anel de raio $= n$, a integral da expressão anterior multiplicada por dm, considerada entre os limites $m = 0$ até $m = m$. Se, por brevidade, colocarmos

$$\frac{m^2}{a^2 + n^2} = v^2; \quad \frac{n^2}{a^2 + n^2} = w^2; \quad \frac{4a^2 + n^2}{16\left(a^2 + n^2\right)} = f; \quad \frac{8a^4 + 4a^2n^2 + n^4}{64\left(a^2 + n^2\right)^2} = g \ ,$$

então o torque eletrodinâmico procurado

$$= -\frac{\pi^2}{2}v^3n^2ii'\cdot S \ ,$$

onde S denota a seguinte série:

$$\begin{aligned}
S = &+\left[\frac{1}{3} - w^2\right] \\
&-\frac{3}{2}\left[\frac{3}{5} - w^2 - \left(3 - 7w^2\right)f\right]v^2 \\
&+\frac{15}{8}\left[\frac{5}{7} - w^2 - 2\left(5 - 9w^2\right)f + 3\left(5 - 11w^2\right)g\right]v^4 \\
&-\frac{35}{16}\left[\frac{7}{9} - w^2 - 3\left(7 - 11w^2\right)f + 11\left(7 - 13w^2\right)g\right]v^6 \\
&+\frac{315}{128}\left[\frac{9}{11} - w^2 - 4\left(9 - 13w^2\right)f + 26\left(9 - 15w^2\right)g\right]v^8 \\
&- \text{etc.}
\end{aligned}$$

Uma comparação precisa com os resultados observacionais exige uma determinação do torque que um sistema de tais anéis com um eixo comum exerceria sobre um outro sistema similar, para o qual ainda seriam necessárias integrações adicionais. Enquanto isso, é facilmente visto que, se procedermos do mais central desses sistemas de anéis localizado sobre o eixo, sua ação tem de ser considerada como o valor médio para cada dois sistemas simétricos localizados dos dois lados dele, já que a ação de um dos dois últimos anéis ultrapassa o valor médio por aproximadamente o mesmo valor que a ação do outro anel fica abaixo do valor médio.

Isso é ainda mais verdadeiro, quanto menores forem as frações dos raios m e n em relação à distância a entre os centros dos dois sistemas. Portanto, podemos considerar a última expressão dada como a unidade de medida da ação.

Se inserirmos agora os valores de m e n conhecidos a partir da observação, especificamente, em milímetros:

$$m = 44,4 \ ,$$

e

$$n = 55,8 \ ,$$

e os sucessivamente diferentes valores de a:

$$1. \quad a' = 300 \ ,$$

$$2. \quad a'' = 400 \ ,$$

$$3. \quad a''' = 500 \ ,$$

obteremos então os seguintes valores para o torque, a serem multiplicados por $\pi^2 i^2$:

$$1. \quad -1,4544 \ ,$$

$$2. \quad -0,6547 \ ,$$

$$3. \quad -0,3452 \ .$$

Se um procedimento similar for aplicado ao *segundo* caso principal, no qual $a = 0$, obteremos então o valor do torque eletrodinâmico

$$= +\pi^2 v^3 n^2 i i' \cdot S \ ,$$

no qual, por brevidade, foi utilizado

$$\frac{m^2}{c^2+n^2} = v^2; \qquad \frac{c^2}{c^2+n^2} = f; \qquad \frac{n^2}{c^2+n^2} = 4gv^2$$

e onde S denota a seguinte série:

$$S = + \left[\frac{1}{3}\right]$$

$$-\frac{3}{2}\left[\frac{1}{5} - \frac{10}{3} fg\right] v^2$$

$$+\frac{15}{8}\left[\frac{1}{7} + \frac{2}{5}(1-14f)\,g + 42 f^2 g^2\right] v^4$$

$$-\frac{35}{16}\left[\frac{1}{9} + \frac{3}{7}(2-18f)\,g - \frac{54}{5}(1-11f)\,fg^2 - 572 f^3 g^3\right] v^6$$

$$+\frac{315}{128}\left[\frac{1}{11}+\frac{4}{9}(3-22f)\,g+\frac{12}{7}\left(1-22f+143f^2\right)g^2\right.$$
$$\left.+\frac{1144}{5}(1-10f)\,f^2g^3+\frac{24310}{3}f^4g^4\right]v^8$$
$$-\text{ etc.}$$

Se inserirmos agora nessa expressão os valores de m e n conhecidos da observação, especificamente em milímetros:

$$m = 44,4\ ,$$

e

$$n = 55,8\ ,$$

e os sucessivamente diferente valores de c:

$$1.\quad c' = 300\ ,$$

$$2.\quad c'' = 400\ ,$$

$$3.\quad c''' = 500\ ,$$

$$4.\quad c'''' = 600\ ,$$

obteremos então os seguintes valores do torque, a serem multiplicados por $\pi^2 i^2$:

$$1.\quad +3,562\,5\ ,$$

$$2.\quad +1,466\,1\ ,$$

$$3.\quad +0,742\,0\ ,$$

$$4.\quad +0,426\,7\ .$$

Finalmente, para o *terceiro* caso principal, no qual $a = c = 0$ e m/n é uma fração própria,[144] não é suficiente para nossos propósitos assumir para n um valor médio, em vez disso temos de multiplicar por dn qualquer valor encontrado para n, e tomar a integral desse produto entre os valores limites de n dados pela observação, que escolhemos denominar por n' e n''. A expressão resultante é então para ser dividida por $n'' - n'$, para reduzir seu valor à unidade de medida das expressões dadas para o primeiro e segundo casos, que não foram integradas com relação a n. Obteremos então para esse terceiro caso, quando $a = 0$ e $c = 0$, a seguinte expressão para o torque:

[144]Uma fração própria é a fração onde o numerador é menor que o denominador e que representa parte do inteiro, isto é, representa um valor maior que zero e menor que um. Exemplos: 1/2, 1/4, 2/3 etc.

$$+\frac{\pi^2 m^3}{n''-n'}ii'\left[\frac{1}{3}\ln\frac{n''}{n'}+\frac{9}{160}\left(\frac{1}{n''^2}-\frac{1}{n'^2}\right)m^2-\frac{225}{14336}\left(\frac{1}{n''^4}-\frac{1}{n'^4}\right)m^4\right.$$

$$\left.+\frac{6125}{884736}\left(\frac{1}{n''^6}-\frac{1}{n'^6}\right)m^6+\frac{694575}{184549376}\left(\frac{1}{n''^8}-\frac{1}{n'^8}\right)m^8+...\right] .$$

Se inserirmos nessa expressão os valores de m, n' e n'' conhecidos pela observação, especificamente em milímetros:

$$m = 44,4 ,$$

$$n' = 50,25 ,$$

e

$$n'' = 61,35 ,$$

obteremos então o seguinte valor do torque, a ser multiplicado por $\pi^2 i^2$:

$$442,714 .$$

Devido à proximidade entre as bobinas nesse caso, deve ser levado em consideração, finalmente, que os enrolamentos combinados de cada espira não estão em um plano. Portanto, mesmo que as distâncias sejam $a = 0$ e $c = 0$ para os centros das seções transversais intermediárias das duas bobinas, isto não se aplica às outras seções transversais. Disso resulta, como vemos facilmente, uma diminuição da ação. Pode ser determinado com rigor suficiente em que relação essa diminuição se encontra em relação à ação total se, na fórmula geral dada na página 86,[145] após a substituição dos valores de $1/r^3$ e $1/r^5$, mantivermos apenas o primeiro termo, independente de χ, e integrarmos a expressão considerada entre os valores limites de $\omega = 0$ até $\omega = 2\pi$, após ela ter sido multiplicada por $n \operatorname{sen} \nu$ e por $dmdndadc$, e $nd\nu$ substituir ds', entre os limites de $\nu = 0$ até $\nu = 2\pi$, $m = 0$ até $m = 44,4$, $n = 50,25$ até $n = 61,35$, $a = 0$ até $a = 15$ e $c = 0$ até $c = 15$. Se esse cálculo for efetuado, será obtida uma expressão da seguinte forma:

$$A\left(1-\frac{\alpha^2}{5000}+\frac{\gamma^2}{22000}\right)\cdot\alpha\gamma ,$$

na qual A depende apenas dos valores de i e i', além dos valores limites de m e n, e onde α e γ denotam os maiores valores de a e c. A redução procurada, expressa em partes da ação total, é então de acordo com isso:

$$=\frac{1}{5000}\alpha^2-\frac{1}{22000}\cdot\gamma^2 ,$$

e, de acordo com os valores numéricos dados $\alpha = \gamma = 15$, é dada por:

$$\frac{1}{29} .$$

Assim, caso $\frac{1}{29}\cdot 442,714$ seja subtraído dos valores anteriores, obteremos o seguinte valor do torque eletromagnético correspondente ao *terceiro* caso, a ser multiplicado por $\pi^2 i^2$:

[145][Web46, pág. 72 das *Obras* de Weber].

$$= 427,45 \ .$$

Se, em analogia com as observações, reunirmos os resultados dos cálculos, obteremos a seguinte Tabela para os valores calculados do torque eletrodinâmico:

Distância	Perpendicular ao meridiano magnético	Na direção do meridiano magnético
0	+ 427,45	+ 427,45
300	+ 3,5625	− 1,4544
400	+ 1,4661	− 0,6547
500	+ 0,7420	− 0,3452
600	+ 0,4267	—

Esses valores, caso a lei de Ampère seja correta, têm de ser proporcionais aos valores observados. De fato, se todos os valores forem multiplicados pelo fator constante

$$53,06 \ ,$$

obteremos então valores que se aproximam bastante daqueles observados, que estão contidos, junto com as diferenças em relação a eles, na seguinte Tabela.

Distância	Perpendicular ao meridiano magnético	Diferença	Na direção do meridiano magnético	Diferença
0	+ 22680	+ 280	+ 22680	+ 280
300	+ 189,03	+ 0,90	− 77,17	− 0,06
400	+ 77,79	− 0,34	− 34,74	+ 0,03
500	+ 39,37	− 0,10	− 18,31	− 0,07
600	+ 22,64	− 0,18	—	—

Aqui o primeiro valor calculado, a saber, +22 680, é comparado com 120,9 vezes o valor obtido a uma distância de 300 milímetros a Leste ou a Oeste, porque esse valor corresponde aos resultados obtidos na Seção 6.6 da segunda série de experimentos, correspondente à ação da bobina fixa quando seu centro coincide com o centro da bobina bifilar. A diferença indicada de 280 unidades parece, portanto, exagerada e corresponde a um erro observacional de 1/3 de uma unidade da escala, que foi cometido na segunda série de experiências (Seção 6.5) na determinação da deflexão do dinamômetro a uma distância de 300 mm.

Essa concordância completa entre os valores calculados de acordo com a fórmula de Ampère e os valores observados (a saber, as diferenças nunca excedendo os possíveis valores vindos dos erros observacionais inevitáveis) é, sob condições tão diversas, uma prova completa da verdade da lei fundamental de Ampère.

A partir da Tabela anterior, vemos que os valores calculados do torque eletrodinâmico resultam parcialmente positivos e parcialmente negativos. O significado da diferença nos sinais é como segue. Os planos das duas bobinas de fio foram assumidos como estando ortogonais entre si. O torque eletrodinâmico, que a bobina fixa exerce sobre a móvel (a bobina bifilar), tenta tornar o plano da última paralelo ao plano da primeira, o que pode ocorrer de duas maneiras, começando da posição original em ângulo reto, a saber, por meio da rotação em direção aos dois lados. Uma rotação leva ao tipo de paralelismo dos planos no qual as correntes fluem no mesmo sentido ao redor de um eixo perpendicular aos dois planos;

por outro lado, a outra rotação leva ao tipo de paralelismo no qual as correntes fluem em direções opostas ao redor de tal eixo. Os torques eletrodinâmicos, dependendo se eles causam a primeira ou a última rotação, são designados como positivos ou negativos no cálculo. Os sinais dos valores calculados na Tabela anterior nos mostram então que se a bobina fixa atua sobre a bobina bifilar a uma distância do Norte ou do Sul, resulta em uma rotação da bobina bifilar que, caso ela chegue a 90 graus, vai ocasionar com que as correntes fluam em direções *opostas* ao redor de eixos direcionados da mesma forma; se, por outro lado, a bobina fixa atuar a uma distância do Leste ou do Oeste, haverá uma rotação da bobina bifilar, que, se fosse de 90 graus, faria com que as correntes fluíssem na *mesma* direção em torno de eixos direcionados da mesma forma. Este último [caso] também ocorre, de acordo com o cálculo, se os centros de ambas as bobinas coincidirem.

Esses resultados dos cálculos também se encontram totalmente confirmados pelos resultados das observações. As condições a serem levadas em consideração não são discutidas extensivamente na descrição apresentada anteriormente, simplesmente porque para apresentar completamente a direção da corrente em todas as partes particulares do circuito condutor e a direção das rotações observadas ocuparia muito espaço. Além disso, como não são necessárias medições exatas para testar esses resultados dos cálculos, também foi possível obter sua confirmação pelos métodos empregados até agora, e uma confirmação já foi obtida por esse meio, sendo que por esse motivo é suficiente aqui notar apenas de uma maneira geral a concordância das observações comunicadas com os resultados anteriores do cálculo.

6.9 Redução para Unidades Absolutas

A lei fundamental de Ampère fornece os torques calculados expressos em *unidades absolutas*,[146] assumindo que, para valores da intensidade de corrente i, é tomada como base uma unidade absoluta da intensidade [de corrente]; especificamente, ao fazer isso, a unidade fundamental da intensidade de corrente é para ser considerada como aquela intensidade de corrente com a qual dois elementos de corrente paralelos iguais, perpendiculares à linha que os conecta, separados pela distância igual à unidade de comprimento, exercem uma força entre si, que forma a mesma fração com a unidade de força estabelecida na mecânica, que o *quadrado do comprimento desses elementos de corrente* forma com a *unidade de área*. Então, na fórmula de Ampère para o valor da força eletrodinâmica entre dois elementos de corrente de comprimento α e de mesma intensidade, a saber,

$$-\frac{\alpha^2}{r^2}i^2\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) ,$$

colocamos:[147] (1) o ângulo ε, que os dois elementos de corrente fazem entre si, $= 0^o$ ou $= 180^o$; (2) os ângulos ϑ e ϑ', que os dois elementos de corrente formam com a linha que os conecta, $= 90^o$ ou $= 270^o$; (3) a distância $r = 1$; e assim o valor da força eletrodinâmica obtida para a *unidade*[148] de intensidade de corrente é dada por

$$\pm\alpha^2 ,$$

[146]Em alemão: *in absoluten Maassen*. Ver a Nota de rodapé 95 na página 46.

[147]Ver a definição desses ângulos da na Figura que aparece na Nota de rodapé 138 na página 82.

[148]Em alemão: *Einheit*.

isto é, na fórmula de Ampère, assume-se tal unidade da intensidade de corrente, na qual a *força eletrodinâmica no caso descrito* se comporta em relação à *unidade da força* assim como

$$\alpha^2 : 1 ,$$

isto é, como o *quadrado do comprimento daqueles elementos de corrente* está para a *unidade de área*.[149] Esta unidade fundamental para a intensidade da corrente baseia-se, portanto, no próprio *princípio eletrodinâmico*.

Contudo, para fins de nossas medições, baseamos a unidade da intensidade da corrente no *princípio eletromagnético*, segundo o qual a unidade fundamental da intensidade da corrente é aquela intensidade de corrente que deve ocorrer em um condutor que limita a unidade de área para produzir as mesmas ações em um *ímã distante*, tal como um ímã colocado no mesmo ponto, cujo momento magnético é igual à unidade absoluta determinada por Gauss no *Intensitas etc.*,[150] e cujo eixo tem a mesma direção que a normal ao plano de corrente.[151]

Essas duas unidades fundamentais podem agora ser comparadas entre si de acordo com a relação fornecida por Ampère entre *eletrodinâmica* e *eletromagnetismo*. Pois, de acordo com essa relação, o outro *ímã distante* também pode ser substituído, da mesma forma que o primeiro [ímã], por uma corrente fechada.

O torque de um ímã sobre outro ímã distante, quando seus momentos magnéticos em unidade absoluta são $= m$ e m', como pode ser facilmente visto nas regras dadas por Gauss (*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*, págs. 26-34),[152,153] é encontrado[154]

$$= \frac{mm'}{r^3} \operatorname{sen} \delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 \psi} \ ,$$

na qual ψ designa o ângulo que o eixo do primeiro ímã faz com a linha de conexão r, e δ o ângulo que o eixo do segundo ímã faz com aquele alinhamento para o qual o torque é $= 0$.

Se agora colocarmos uma corrente de intensidade χ no lugar do primeiro ímã, que delimita o pequeno plano λ, cuja normal possui o mesmo alinhamento que o eixo do [primeiro] ímã, então, de acordo com a lei *eletromagnética* fundamental (segundo a qual a intensidade da força eletromagnética de um elemento de corrente de comprimento α e intensidade χ ao atuar sobre um elemento de fluido magnético μ a uma distância r, se r faz um ângulo φ com

---

[149] Em alemão: *Flächenmaass*.

[150] Um ímã com uma unidade absoluta de momento magnético é aquele cujo momento magnético é igual a 1 em unidades absolutas. Ver ainda a Nota de rodapé 114 na página 59.

[151] Ou seja, considere um ímã de momento magnético $= 1$ em unidades absolutas atuando sobre um segundo ímã distante. Podemos substituir o primeiro ímã por uma espira fechada de área $= 1$ em unidades absolutas conduzindo uma corrente constante i medida em unidades eletromagnéticas absolutas. Considere ainda a área dessa espira ortogonal ao eixo magnético do primeiro ímã. Define-se que essa intensidade eletromagnética de corrente da espira vai ser $= 1$, caso essa espira exerça a mesma força e o mesmo torque sobre o segundo ímã distante que a força e torque exercidos pelo primeiro ímã sobre o segundo ímã.

[152] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, págs. 427 a 435.

[153] Ver [Gau41d].

[154] No trabalho original essa equação está escrita como:

$$= \frac{mm'}{r^3} \operatorname{sen} \delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos \psi^2} \ .$$

A expressão $\cos\psi^2$ deve ser entendida como $(\cos\psi)^2$. Substituí em todos os lugares dessa tradução a fórmula geral $\cos\theta^2$ por sua expressão moderna, $\cos^2\theta$, na qual θ representa um ângulo arbitrário.

α, é dada por $\alpha\chi\mu \operatorname{sen}\varphi/r^2$, e é normal ao plano que é paralelo a α e r)[155] o torque exercido por essa corrente sobre o ímã distante é

$$= \frac{\chi\lambda \cdot m'}{r^3} \operatorname{sen}\delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2\psi} \ ,$$

na qual a intensidade de corrente χ é baseada na *unidade eletromagnética* dada acima. Logo, de acordo com essa unidade,

$$\chi\lambda = m \ ,$$

se esse torque for igual ao anterior.

De acordo com a relação dada por Ampère, sem mudar a ação, da mesma maneira *o segundo ímã pode ser substituído por um circuito fechado*, para o qual

$$\chi'\lambda' = m' \ ,$$

e daí resulta o valor do torque que a primeira corrente exerce sobre a segunda corrente,

$$= \frac{\chi\chi'\lambda\lambda'}{r^3} \operatorname{sen}\delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2\psi} \ ,$$

na qual a *unidade eletromagnética* dada anteriormente é a base para as intensidades de corrente χ e χ'.

Contudo, se calcularmos agora de acordo com a fórmula de Ampère (página 83)[156] o torque que tal pequena corrente plana exerce sobre uma outra [pequena corrente plana] a uma grande distância [entre elas], o resultado é dado por[157]

---

[155] Cada elemento de fluido magnético μ é uma suposta partícula que tem um valor resultante μ de fluido magnético. Ela é, portanto, o análogo moderno de um monopolo magnético. Essa lei é devida a Jean-Baptiste Biot (1774-1862) e Félix Savart (1791-1841). Ver [BS20] com tradução para o inglês em [BS65b] e para o português em [AC06]; [Bio21]; [BS24] e [BS85] com traduções para o inglês em [Far26] e [BS65a]. Ver também os Capítulos 6, 16 e 17 de [AC11] e [AC15].

[156] [Web46, pág. 70 das *Obras* de Weber].

[157] [Nota de Wilhelm Weber:] O caso no qual $\delta = \psi = 90^\text{o}$ e, consequentemente, o torque eletrodinâmico

$$= -\frac{1}{2}\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3} \ ,$$

corresponde ao *primeiro caso principal* considerado anteriormente, para o qual encontrou-se na página 88, [[Web46, pág. 74 das *Obras* de Weber],] o valor do torque como sendo

$$= -\frac{\pi^2}{2}\frac{m^2n^2}{l^3}ii'\left[3\frac{a^2}{l^2} - 2 + \frac{15}{32}\left(7\frac{a^2}{l^2} - 4\right)\left(4 + \frac{n^2}{a^2}\right)\frac{a^2m^2}{l^4} + ...\right] \ .$$

Para grandes distâncias, como considerado aqui, m e n tornam-se desprezíveis comparados com l, e r pode ser colocado no lugar de a e l; portanto, nesse caso o torque torna-se

$$= -\frac{\pi^2}{2}\frac{m^2n^2}{r^3}ii' \ ,$$

que é idêntico aos valores deduzidos para esse caso na fórmula anterior, já que πm^2 e πn^2 designam as áreas λ e λ'.

As leis *análogas* do magnetismo, do eletromagnetismo e da eletrodinâmica mencionadas anteriormente, a partir das quais a conexão simples entre essas diferentes classes de fenômenos pode ser facilmente percebida, o que não é imediatamente aparente a partir das *leis fundamentais*, pode ser derivada dessas últimas da seguinte maneira.

(1) Dedução da lei de ação magnética que uma barra imantada exerce sobre outra à distância.

$$= -\frac{1}{2}\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3}\,\mathrm{sen}\,\delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2\psi}\ ,$$

no qual as intensidades de corrente i e i' estão baseadas na *unidade eletrodinâmica* fornecida anteriormente.

Agora, a partir desse resultado segue que, se esse último valor, de acordo com a unidade *eletrodinâmica*, é para ser idêntico ao resultado anterior, de acordo com a unidade *eletro-*

Gauss, nos *Resultaten, etc. 1840*, pág. 26 e seguintes, [[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 427. Ver [Gau41d].], deduziu da *lei fundamental do magnetismo*, a lei da ação magnética que uma barra imantada exerce sobre uma unidade de fluido magnético Norte, concebido como estando concentrado em um ponto distante. Essa lei é a seguinte:

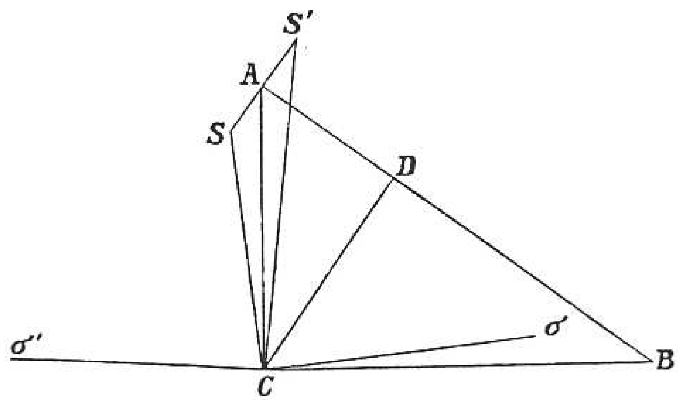


Fig. 12.

Se (Figura 12) A é o ponto médio da barra imantada, cujo momento magnético é designado por m, n é um outro ponto arbitrário no lado do polo Norte de seu eixo magnético, que passa por A, C é o ponto para o qual é para ser determinada a ação magnética da barra imantada atuando sobre a unidade de fluido magnético Norte concebida como concentrada nesse mesmo local, e se CB é uma normal com relação a CA no plano em que estão localizados n, A e C, e B é o ponto de interseção com o eixo magnético, e se, finalmente D corta de AB o segmento $AD = AB/3$: então a *intensidade* da força que a barra imantada exerce na unidade de fluido magnético Norte, concebida como estando concentrada no ponto C,

$$= \frac{CD}{AD} \cdot \frac{m}{AC^3}\ .$$

A *direção* dessa força é CD, se nAC é um ângulo obtuso, e se nAC é um ângulo agudo, [a direção dessa força] é DC.

Agora, no triângulo ABC, já que $ACB = 90^o$, [temos:]

$$AC = AB \cos BAC = 3AD \cos DAC\ .$$

Além disso, no triângulo ACD,

$$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos DAC} = AD \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 DAC}\ ,$$

e, portanto,

$$\frac{CD}{AD} = \sqrt{1 + 3\cos^2 DAC}\ .$$

Se fizermos $AC = r$ e $nAC = \psi$, então, como $DAC^2 = \cos^2 nAC = \cos^2\psi$, a *intensidade* da força

$$\frac{CD}{AD} \cdot \frac{m}{AC^3} = \frac{m}{r^3} \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2\psi}\ .$$

magnética, as unidades eletrodinâmica e eletromagnética de intensidade de corrente definidas anteriormente têm de estar em uma relação entre si, tal que χ e χ', de acordo com a última unidade, designem as mesmas intensidades de corrente que $i\sqrt{1/2}$ e $i'\sqrt{1/2}$ representam de acordo com a primeira unidade. Consequentemente, todas as determinações de intensidade de corrente de acordo com a unidade *eletromagnética* fundamental têm de ser multiplicadas pelo fator constante $\sqrt{2}$, para que possam ser reduzidas à unidade *eletrodinâmica* de

---

Se, em uma barra de aço, a massa magnética Norte $+\mu$ e a massa magnética Sul $-\mu$ [em alemão: *die nordmagnetische Masse* $+\mu$ *und die südmagnetische Masse* $-\mu$.] são divididas em C pela linha α, que é infinitamente pequena comparada com r, então $\alpha\mu = m'$ é o momento magnético da barra de aço, sendo $+\frac{m\mu}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\psi}$ e $-\frac{m\mu}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\psi}$ as duas forças que atuam nela na direção CD ou DC. Se n' é o ponto final da pequena linha α, no qual a massa $+\mu$ é concebida como estando concentrada, e C é seu ponto médio, e δ designa o ângulo que Cn' forma com a direção CD ou DC da força dada anteriormente, então $\alpha \operatorname{sen}\delta$ é a distância entre os pontos de ação das duas forças, estimadas perpendicularmente à sua direção. O produto dessa distância com o valor da força anterior fornece então o torque que a barra magnética em A exerce sobre a barra magnética em C,

$$= \alpha \operatorname{sen}\delta \cdot \frac{m\mu}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\psi} = \frac{mm'}{r^3}\operatorname{sen}\delta\sqrt{1+3\cos^2\psi} \ .$$

O ímã em C é então girado no plano ACD no sentido em que Cn se aproxima da direção CD ou DC da força dada anteriormente.

(2) Dedução da lei de ação eletromagnética, que uma corrente plana fechada exerce sobre uma barra imantada.

A partir da *lei eletromagnética fundamental* pode ser determinada inicialmente a ação de uma corrente fechada sobre uma massa magnética Norte $+\mu$ da barra imantada, que é concebida como estando concentrada no ponto C (Figura 12). Colocamos através de C e através do ponto médio A do plano delimitado pela corrente, um plano ACB perpendicular ao último [plano], com CB sendo perpendicular a CA; s e s' são os pontos de interseção da corrente com esse plano. Além disso, cada elemento de corrente é separado em três elementos perpendiculares entre si, o primeiro direcionado para C, e o segundo perpendicular à direção CB. Os elementos direcionados para C não atuam sobre o magnetismo em C e, portanto, podem ser completamente desconsiderados, já que na expressão geral para a intensidade da força, $= \alpha\chi\mu \operatorname{sen}\varphi/r^2$, o valor de φ para eles é $= 0$. Pertencem à segunda classe os dois elementos perpendiculares em s e s' no plano ACB, cujo comprimento é designado como ds. A força que o primeiro exerce sobre o magnetismo em C tem, de acordo com a lei eletromagnética fundamental, a direção $C\sigma$ perpendicular a Cs; a força do último tem a direção $C\sigma'$ perpendicular a Cs', e a intensidade dessa força, se χ designar a intensidade de corrente de acordo com a unidade eletromagnética fundamental, é

$$\frac{\chi\mu ds}{Cs^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\chi\mu ds}{Cs'^2} \ .$$

Se decompormos agora essas forças ao longo de CA e perpendicularmente a CA, obteremos então a componente paralela a CA

$$= \frac{\chi\mu ds}{Cs^2}\cos AC\sigma + \frac{\chi\mu ds}{Cs'^2}\cos AC\sigma' \ ,$$

e a componente perpendicular a CA

$$= \frac{\chi\mu ds}{Cs^2}\operatorname{sen} AC\sigma - \frac{\chi\mu ds}{Cs'^2}\operatorname{sen} AC\sigma' \ .$$

Se usarmos agora ψ para designar o ângulo que a normal ao plano da corrente AB forma com $AC = r$, e observarmos que As e As' vão tornar-se desprezíveis comparadas com r, obteremos então

$$Cs = r - As\cos\psi \ , \qquad\qquad Cs' = r + As'\cos\psi \ ,$$

ou

intensidade [de corrente] que está na base da fórmula de Ampère.

Assumindo isso, o *fator constante* pelo qual todos os valores calculados têm de ser multiplicados para chegar aos valores observados, também pode ser deduzido das observações do galvanômetro, e a comparação do fator assim determinado com aquele utilizado anteriormente, a saber, com

---

$$\frac{1}{Cs} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{As}{r}\cos\psi\right) \ , \qquad\qquad \frac{1}{Cs'} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{As'}{r}\cos\psi\right) \ ;$$

$$\cos AC\sigma = \operatorname{sen} ACs = ACs \ ;$$

$$\cos AC\sigma' = \operatorname{sen} ACs' = ACs' \ ;$$

$$sCs' = \frac{(ss')}{r}\cos\psi \ .$$

Substituindo esses valores, e designando a distância ss' como x, obteremos a componente paralela a CA como

$$= \frac{\chi\mu}{r^3}\cos\psi \cdot xds \ .$$

Como todos os elementos de corrente estão muito próximos ao redor de A, o fator $\frac{\chi\mu}{r^3}\cos\psi$ pode ser considerado como constante, e obtemos assim a componente paralela a CA para todos os elementos de corrente da segunda classe como sendo

$$= \frac{\chi\mu}{r^3}\cos\psi \cdot \int xds \ .$$

Contudo, a integral $\int xds$ representa a área $= \lambda$ delimitada pela corrente; de acordo com isso, a componente paralela a CA para todos os elementos de corrente da *segunda* classe é

$$= \frac{\chi\lambda\mu}{r^3}\cos\psi \ .$$

Da mesma forma, a componente perpendicular a CA para todos os elementos de corrente da *segunda* classe é

$$= \frac{\chi\lambda\mu}{r^3}\operatorname{sen}\psi \ .$$

De maneira semelhante encontramos além disso a componente paralela a CA para todos os elementos de corrente da *terceira* classe como

$$= \frac{\chi\lambda\mu}{r^3}\cos\psi \ ,$$

a componente perpendicular a CA para todos os elementos de corrente da *terceira* classe é

$$= 0 \ .$$

A resultante de todas essas forças é assim

$$= \frac{\chi\lambda\mu}{r^3}\sqrt{4\cos^2\psi + \operatorname{sen}^2\psi} = \frac{\chi\lambda\mu}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\psi} \ .$$

A direção dessa resultante está no plano ACB e forma com CA um ângulo, cuja tangente é igual à componente perpendicular a AC, $= \chi\lambda\mu\operatorname{sen}\psi/r^3$, dividida pela componente direcionada a AC, $= 2\chi\lambda\mu\cos\psi/r^3$, ou seja,

$$= \frac{1}{2}\tan\psi \ .$$

$$53,06 \; ,$$

finalmente fornece a pedra de toque para a exatidão dos valores *absolutos* calculados pela fórmula de Ampère, ou para a exatidão da relação dada entre eletrodinâmica e eletromagnetismo.

Isso requer três coisas. (1) Determinar o fator com o qual todas as ações do dinamômetro

---

Como $CAB = \psi$ e $ACB = 90^o$, então, caso $AD = AB/3$,

$$\operatorname{sen} ACD : \operatorname{sen}\psi = \frac{1}{3}AB : CD \; ,$$

$$\cos ACD : \cos\psi = \frac{2}{3}AB : CD \; ,$$

portanto,

$$\tan ACD = \frac{1}{2}\tan\psi \; ,$$

sendo que o resultado disso é que CD é a direção da resultante. Nessas deduções é assumido que se pensarmos em nós próprios de pé perpendiculares ao plano da corrente em A, com a cabeça em B, a corrente circula no sentido do movimento aparente diário do Sol. Se ocorre o contrário, então a direção da força DC é para ser substituída por CD. De acordo com isso, o circuito fechado em A exerce a mesma ação sobre o magnetismo em C, que exerce, de acordo com [a dedução] (1), uma barra magnética em A, cujo momento magnético é

$$m = \chi\lambda \; ,$$

e cujo eixo magnético coincide com a normal ao plano da corrente, especificamente, o polo Sul estando naquele lado do plano da corrente, considerando-o como ponto de observação, no qual a corrente flui na direção do movimento diário aparente do Sol. Segue-se disso, que se colocarmos, como [no caso] (1), uma barra magnética em C, cujo momento magnético $= m'$, e cujo eixo magnético forma o ângulo δ com CD, o torque que o circuito fechado em A exerce nessa barra imantada, é igual ao torque encontrado no [caso] (1), se substituirmos m por $\chi\lambda$, assim

$$= \frac{\chi\lambda m'}{r^3}\operatorname{sen}\delta\sqrt{1+3\cos^2\psi} \; ,$$

o que era para ser provado.

(3) Dedução da lei de ação eletromagnética que uma corrente plana fechada exerce à distância sobre uma outra [corrente plana fechada].

A lei da ação exercida à distância por uma corrente plana fechada sobre um elemento de corrente já foi deduzida por Ampère nas págs. 214 e 227 de seu Tratado a partir da lei fundamental da eletrodinâmica [ver [Amp23, págs. 214 e 227], [Amp26, págs. 42 e 55], [AC11, págs. 396-397 e 408-409] e [AC15, págs. 366, 376 e 377].]. Ela pode ser expressa da seguinte maneira: Se o elemento de corrente estiver localizado em C (Figura 12) e a corrente plana fechada estiver localizada em A, AB for a normal ao plano da corrente, CB for perpendicular a CA, e $AD = AB/3$, então a força que a corrente em A exerce sobre o elemento de corrente em C é perpendicular tanto à direção do próprio elemento de corrente quanto à linha CD; e se, de acordo com a unidade de medida eletrodinâmica fundamental, designarmos a intensidade da corrente fechada como i, e a intensidade do elemento de corrente como i', e se além disso, o comprimento do elemento de corrente for representado como ds', $r = AC$, e $\psi = CAD$, então a intensidade da força será dada por

$$= \frac{1}{2}ii'ds'\frac{\lambda}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\psi} \; .$$

Se, agora, uma corrente plana fechada também estiver localizada em C, e se a normal a seu plano formar com CD o ângulo δ, então cada elemento dessa corrente pode ser separado em dois elementos, um paralelo à linha na qual um plano normal a CD corta o plano da corrente, e o outro perpendicular a essa linha de observadas por nós têm de ser multiplicadas para reduzi-las à unidade absoluta do *torque*. (2) Determinar o fator com o qual todas as ações do galvanômetro observadas por nós têm de ser multiplicadas para reduzi-las à *unidade fundamental eletromagnética de intensidade de corrente*. (3) Determinar as *áreas* que são delimitadas pela bobina bifilar e pela bobina fixa do dinamômetro.

1. Determinação dos fatores para a redução das ações observadas no dinamômetro para a unidade absoluta.

As deflexões observadas no dinamômetro são medidas em *divisões da escala* e, para convertê-las em *unidades angulares* absolutas, elas devem ser divididas simplesmente pelo dobro da distância horizontal do espelho até a escala (= 6612,6 divisões da escala), dada a pequenez dos ângulos. Além disso, o número dado de unidades da escala corresponde à diferença entre o deslocamento positivo e negativo e, portanto, além disso, ainda é para ser dividido por 2, para reduzi-lo à deflexão simples. Assim, se x designar o *número de unidades da escala* nas Tabelas anteriores, então

$$\frac{x}{13\,225,2}$$

fornecerá o *deslocamento angular* simples em unidades de raio.[158] Além disso, se S designar o *momento estático*[159] da bobina bifilar dado na Seção 6.6, para o qual devem ser reduzidas as deflexões, então, se x designar o valor reduzido, precisamos apenas multiplicar o deslocamento angular $= x/13225,2$ com o valor de S para obter o *torque eletrodinâmico* produzido pela deflexão, expresso de acordo com a unidade fundamental especificada pela estática. Assim, esse momento é

$$= \frac{x}{13\,225,2} \cdot S = 3\,634 \cdot x \ .$$

corte. Os primeiros elementos podem ser ordenados aos pares com o mesmo comprimento ds' e conectados à linha de corte por meio de uma perpendicular. Se o comprimento dessa perpendicular for designado como x, então o resultado é que a ação do circuito fechado em A sobre tal par consiste em um torque, que é igual ao produto de $x \operatorname{sen} \delta$ com a força citada anteriormente, isto é,

$$= \frac{1}{2} ii' \frac{\lambda}{r^3} \operatorname{sen} \delta \sqrt{1 + 3\cos^2 \psi} \cdot x ds' \ .$$

A corrente em A exerce assim sobre todos os elementos de corrente paralelos à linha de corte mencionada anteriormente o torque

$$= \frac{1}{2} ii' \frac{\lambda}{r^3} \operatorname{sen} \delta \sqrt{1 + 3\cos^2 \psi} \cdot \int x ds \ ,$$

no qual a integral $\int x ds'$ designa a área $= \lambda'$ delimitada pela corrente em C; portanto, esse torque é

$$= \frac{1}{2} ii' \frac{\lambda \lambda'}{r^3} \operatorname{sen} \delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 \psi} \ .$$

Se considerarmos de forma similar a ação do circuito fechado em A sobre os elementos perpendiculares à linha de corte mencionada anteriormente, então o torque será $= 0$, de onde segue que o torque que acabou de ser dado representa a ação total que a corrente fechada em A exerce sobre a corrente fechada em C, o que deveria ser provado.

[158] Em alemão: *in Theilen des Halbmessers*. Essa expressão pode ser traduzida como "em unidades de raio" ou "em partes do raio".

[159] Ver a Nota de rodapé 130 na página 78.

Consequentemente, 3 634 é o fator constante com o qual as deflexões do dinamômetro apresentadas no final da Seção 6.6 devem ser multiplicadas para que sejam reduzidas a unidades absolutas.

2. Determinação do fator para reduzir as ações observadas no galvanômetro a unidades absolutas.

As ações do galvanômetro também foram apresentadas anteriormente em *unidades de escala* e, especificamente, o número dado y corresponde à diferença entre a deflexão positiva e negativa. Como a distância horizontal do espelho até a escala chega a 1 103 unidades da escala no galvanômetro, o *deslocamento angular* simples de acordo com a unidade angular absoluta, isto é, em unidades de raio, será

$$= \frac{y}{4\,412} \; .$$

Esse deslocamento angular é produzido por meio de uma bobina de fio através da qual está passando a corrente a ser determinada, e que foi colocada a 217 milímetros de distância a Oeste do pequeno magnetômetro.

Se o seno desse deslocamento angular for multiplicado pela força diretriz $= m'T$,[160] que o magnetismo terrestre $= T$ exerce sobre a bússola com momento magnético $= m'$, então obteremos o torque com o qual o magnetismo terrestre atua sobre a bússola desviada para trazê-la de volta ao meridiano magnético,

$$= m'T \cdot \operatorname{sen} \frac{y}{4\,412} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} \; .$$

De acordo com a unidade absoluta, nessa fórmula é para ser usado o valor de

$$T = 1,91 \; ,$$

como foi encontrado no local da bússola.[161,162]

A bússola era agora mantida em equilíbrio naquela posição defletida, por meio daquele torque exercido sobre ela pela corrente na bobina de fio a 217 milímetros de distância e, portanto, o valor desse último torque foi

$$= 1,91 \cdot m' \operatorname{sen} \frac{y}{4\,412} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} \; .$$

De acordo com a lei demonstrada na página 97 no item 2 da Nota de rodapé,[163] caso a corrente tivesse atuado de uma *grande* distância r, esse último torque seria

$$= \frac{\chi \lambda m'}{r^3} \operatorname{sen} \delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 \psi} \; ,$$

na qual para o nosso caso o valor de $\psi = 0$, e δ é o complemento do ângulo de deflexão observado para 90°, de onde essa expressão torna-se

---

[160] Ver a Nota de rodapé 129 na página 78.

[161] [Nota de Wilhelm Weber:] A bússola ficou próxima à parede de uma sala vizinha na qual estavam instalados grandes ímãs; caso esses ímãs fossem removidos, o valor de T seria reduzido para 1,83, que é aproximadamente o valor atual da componente horizontal do magnetismo terrestre em Leipzig.

[162] Ver a Nota de rodapé 134.

[163] Ver o item 2 da Nota de rodapé 157 na página 95, [Web46, pág. 84 das *Obras* de Weber].

$$= 2\frac{\chi\lambda m}{r^3}\cos\frac{y}{4\,412}\cdot\frac{180^o}{\pi}\ .$$

Contudo, a distância de 217 milímetros é muito pequena para poder aplicar essa lei. Portanto, para facilitar sua aplicação, realizei experiências particulares para comparar a ação da bobina a 217 mm de distância com sua ação a distâncias r maiores, para as quais é aplicável a lei anterior, e encontrei que a razão dessas ações era

$$1 : 1388\cdot\frac{10^4}{r^3}\ .$$

O torque observado $= 1,91\cdot m'\,\text{sen}\,\frac{y}{4\,412}\cdot\frac{180^o}{\pi}$ precisa então ser multiplicado pelo valor

$$1388\cdot\frac{10^4}{217^3}$$

para torná-lo equivalente à expressão que é válida para grandes distâncias; assim obtemos então

$$1388\cdot\frac{10^4}{217^3}\cdot 1,91\cdot m'\,\text{sen}\,\frac{y}{4\,412}\cdot\frac{180^o}{\pi} = 2\frac{\chi\lambda m'}{217^3}\cdot\cos\frac{y}{4\,412}\cdot\frac{180^o}{\pi}\ ,$$

e disso resulta, para arcos pequenos, o valor

$$\chi\lambda = 3004\cdot y\ .$$

Contudo, por meio de uma medida precisa foi encontrado que

$$\lambda = 8\,313\,440 \text{ milímetros quadrados}\ .$$

Disso resulta

$$\chi = 0,000\,361\,4\cdot y\ ,$$

de onde segue que

$$0,000\,361\,4$$

é o fator para a redução das ações observadas no galvanômetro para a unidade *eletrodinâmica* fundamental da intensidade de corrente. Esse é o fator já introduzido anteriormente na Seção 6.6 com o objetivo de reduzir as observações à mesma força diretriz da bobina bifilar. A intensidade de corrente i de acordo com a unidade *eletrodinâmica* fundamental que está na base da fórmula de Ampère é finalmente obtida ao multiplicar as ações observadas em unidades da escala pelo fator $0,0003614\cdot\sqrt{2}$. Contudo, deve ser observado que esse fator de redução está baseado em dados empíricos que em parte foram obtidos apenas por aproximação e, portanto, não reivindicam grande precisão.

3. Determinação da área que é delimitada pela bobina bifilar e pela bobina fixa do dinamômetro.

A área da bobina bifilar já foi dada na Seção 6.6:

$$= 29\,314\,000 \text{ milímetros quadrados.}$$

Da mesma forma também foi determinada a área da outra bobina fixa do dinamômetro, a saber:

$$= 31\,327\,000 \text{ milímetros quadrados.}$$

É evidente que, devido ao método indireto pelo qual essa determinação foi feita, ela também não pode reivindicar grande precisão.

Com a ajuda dessas três determinações, o valor *absoluto* das ações eletrodinâmicas, conforme resulta da lei fundamental de Ampère, pode finalmente ser submetido a testes empíricos. De (2)[164] resulta o valor de i^2, que corresponde à intensidade *normal* para a qual as observações são reduzidas. Isto é, se, de acordo com a página 80,[165] colocarmos para o mesmo

$$y^2 = 100\,000 \ ,$$

então teremos

$$i^2 = 2\chi^2 = 2 \cdot 0,000\,361\,4^2 \cdot y^2 = 0,026\,12 \ .$$

Além disso, vemos facilmente que no cálculo do torque eletrodinâmico na página 89 feito de acordo com a fórmula de Ampère,[166] a área da bobina bifilar foi considerada como sendo apenas

$$\pi \cdot 55,8^2 \text{ milímetros quadrados,}$$

em vez de [ser considerada], de acordo com (3)[167]

$$= 29\,314\,000 \text{ milímetros quadrados,}$$

e que da mesma forma a área da bobina fixa do dinamômetro (no lugar citado) foi calculada como sendo apenas dada por

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 44,4^3 \text{ milímetros quadrados,}$$

em vez de [ser considerada], de acordo com (3)

$$= 21\,327\,000 \text{ milímetros quadrados.}$$

Disso resulta que os *valores calculados* apresentados na Tabela da página[168] 92 têm de ser multiplicados por

$$\frac{29\,314\,000 \cdot 21\,327\,000}{\frac{1}{3}\pi^2 \cdot 55,8^2 \cdot 44,4^3} \cdot \pi^2 i^2 = 180\,000$$

com o objetivo de determinar o torque eletrodinâmico de acordo com a lei de Ampère em unidade absoluta. Contudo, a partir de (1),[169] vemos que as ações *observadas* do dinamômetro em unidades da escala na Tabela da página[170] 81 têm de ser multiplicadas pelo fator 3 634,

[164] Isto é, do item "2" na página 101.

[165] [Web46, pág. 67 das *Obras* de Weber].

[166] [Web46, pág. 76 das *Obras* de Weber].

[167] Isto é, do item "3" na página 102.

[168] [Web46, pág. 78 das *Obras* de Weber].

[169] Isto é, a partir do item "1" na página 100.

[170] [Web46, pág. 68 das *Obras* de Weber].

com o objetivo de reduzi-las aos torques absolutos. Assim, caso o fator anterior seja dividido por esse último, será obtido o fator 49,5 com o qual os valores *calculados* apresentados na Tabela da página[171] 92 têm de ser multiplicados para que possam ser comparados com os valores *observados* apresentados na Tabela da página[172] 81. Esse fator é aproximadamente 6% menor do que o fator 53,06 apresentado anteriormente, o qual foi deduzido imediatamente da comparação dos valores calculados e observados, uma diferença do tipo que era para ser esperada com tantos elementos obtidos da evidência experimental que são necessários para a determinação dos fatores, entre os quais vários foram determinados apenas aproximadamente (ver [2] e [3]). A correção dos valores *absolutos* calculados a partir da fórmula de Ampère ou a exatidão da relação estabelecida entre eletrodinâmica e eletromagnetismo é assim confirmada, apenas na medida em que os experimentos que foram feitos podem ser validados. Esse exame dos *valores absolutos* ou das relações declaradas entre a *eletrodinâmica* e o *eletromagnetismo* não fazia parte originalmente do propósito dos experimentos relatados aqui, que se referiam apenas à dependência da força eletrodinâmica em relação à posição e distância mútuas dos fios condutores agindo um sobre o outro; caso contrário, teriam sido tomadas providências para determinar a intensidade *absoluta* das correntes galvânicas com maior precisão, bem como para determinar *diretamente* o número de voltas das duas bobinas do dinamômetro; no entanto, esse teste foi mencionado de passagem porque os experimentos descritos forneceram os dados essenciais. Porém, como nem *todos* esses dados possuem a necessária precisão, uma execução mais rigorosa desse teste tem de ser reservada para uma ocasião futura. É claramente evidente quais arranjos e alterações precisam ser feitas nas experiências para fornecer uma maior precisão aos dados determinados aqui com menos precisão, sendo que isso não necessita de uma discussão adicional.

[171][Web46, pág. 78 das *Obras* de Weber].
[172][Web46, pág. 68 das *Obras* de Weber].

III - Indução Eletrovoltaica com o Eletrodinamômetro

6.10 Observações

Até agora consideramos a primeira classe de fenômenos eletrodinâmicos, a saber, aqueles descobertos por Ampère, que estão relacionados com as forças com as quais os *condutores* com intensidades de corrente dadas tentam mover um ao outro, e confirmamos a lei estabelecida por Ampère para essa classe de fenômenos. Dez anos mais tarde, a descoberta de Faraday acrescentou a essa primeira classe de fenômenos eletrodinâmicos uma segunda classe, na qual os fenômenos eletrodinâmicos consistem de forças que não tentam mover os condutores, mas sim a *eletricidade nos condutores*. Para esses fenômenos, compreendidos sob o nome de *indução eletrovoltaica*,[173] podemos distinguir duas experiências fundamentais, sendo que ambas são devidas a Faraday.

Logo no início de suas *Pesquisas Experimentais em Eletricidade* (*Annalen* de Poggendorff, 1832, Vol. XXV, pág. 93, Seção 10),[174] Faraday descreve a *primeira* experiência fundamental da indução eletrovoltaica, na qual dois fios de cobre isolados foram enrolados próximos entre si em um bloco de madeira, sendo que um estava conectado com o galvanômetro, o outro com uma bateria voltaica, e na qual a geração da corrente no primeiro fio foi observada sempre que o circuito envolvendo o segundo fio era aberto ou fechado novamente. A *segunda* experiência fundamental segue na Seção 18, onde ele fixou dois fios de cobre em curvas iguais em ziguezague separadamente em duas placas, e conectou um fio ao galvanômetro e o outro fio à bateria voltaica, e onde a geração de uma corrente no primeiro fio foi observada no galvanômetro toda vez que a placa com esse fio era subitamente aproximada de longe e colocada sobre a placa com o segundo fio, ou quando a placa no topo era subitamente levantada e afastada da outra placa.

Após Faraday, Nobili[175] e Lenz[176] em particular se ocuparam com esse tipo de indução, sendo que Lenz estabeleceu uma lei simples por meio da qual a indução de corrente em um condutor que é movido pode ser reduzida à lei de Ampère de movimentos eletrodinâmicos. Lenz afirmou o seguinte (*Annalen* de Poggendorff, 1834, Vol. XXXI, pág. 484 e seguintes):[177]

> Imediatamente após ler o Tratado de Faraday, me pareceu como se fosse possível redu-

[173]A expressão utilizada por Weber, *Volta-induktion*, havia sido sugerida inicialmente pelo próprio Faraday no parágrafo 26 de seu primeiro artigo sobre indução eletromagnética de 1831 ao definir a expressão *volta-electric induction*, [Far32a, parágrafo 26, pág. 267 do *Great Books of the Western World*] com tradução para o alemão em [Far32c] e tradução para o português em [Far11, págs. 158-159]:

> For the purpose of avoiding periphrasis, I propose to call this action of the current from the voltaic battery, *volta-electric induction*.

Isto é:

> Com a finalidade de evitar perífrase, proponho chamar essa ação da corrente da bateria voltaica de *indução eletrovoltaica*.

A palavra "perífrase" significa circunlóquio ou rodeio de palavras. Nessa tradução em português das obras de Weber vou utilizar as expressões *indução eletrovoltaica* ou *indução voltaica* para essa classe de fenômenos que hoje em dia é chamada de lei de indução de Faraday.

[174]Ver [Far32a], com tradução para o alemão em [Far32c] e [Far89], e tradução para o português em [Far11].

[175]Leopoldo Nobili (1784-1835). Ver [Nob33] e [LA98].

[176]Ver a Nota de rodapé 44 na página 30.

[177][Len34] com tradução parcial para o inglês em [Len69].

zir de forma muito simples os resultados experimentais da indução eletrodinâmica[178] aos teoremas para os movimentos eletrodinâmicos, de tal forma que se assumirmos esses teoremas como tendo sido estabelecidos, aqueles [resultados experimentais da indução eletrodinâmica] também estarão determinados, e como confirmei esse ponto de vista através de muitas experiências, vou discuti-las na sequência, e as testarei parcialmente com experiências já conhecidas e parcialmente com experiências realizadas expressamente com essa finalidade. O teorema segundo o qual ocorre a redução dos fenômenos magnetoelétricos aos eletromagnéticos é o seguinte:

> *Caso um condutor metálico se desloque nas vizinhanças de uma corrente galvânica ou de um ímã, será induzida nele uma corrente galvânica, cuja direção é tal que ela teria produzido movimento no fio em repouso, que seria diretamente oposto ao movimento dado a ele, assumindo que o fio só fosse móvel na direção do movimento ou na direção oposta a ele.*[179]

Para confirmar este teorema no que diz respeito à indução de uma corrente em um condutor em movimento, Lenz cita agora os seguintes três experimentos, [a saber,] de Faraday, dele mesmo e de Nobili:

> a) Considere dois condutores retos paralelos entre si. Quando um deles tem uma corrente galvânica fluindo através dele e o outro condutor é aproximado dele em uma direção paralela, durante o movimento, será induzida no condutor que é movido uma corrente oposta àquela [que está fluindo] no condutor parado; contudo, caso o condutor seja afastado, então a corrente excitada ocorrerá na mesma direção que a corrente excitadora. (Faraday)

> b) "Considere dois condutores circulares verticais tendo aproximadamente o mesmo diâmetro com seus planos perpendiculares entre si. Quando aquele que está fixo tem uma corrente galvânica fluindo por ele e o outro, que pode girar ao redor do diâmetro vertical comum como se fosse seu eixo, é repentinamente afastado da perpendicular indo para uma orientação paralela [ao plano do outro condutor circular], é gerada então uma corrente nele, que é oposta à corrente no outro condutor. Realizei essa última experiência," diz Lenz, "com dois condutores circulares, cada um consistindo em 20 enrolamentos de fio de cobre isolados; sendo que um [condutor] foi conectado a uma grande bateria de zinco-cobre de 2 pés quadrados, e o outro [foi conectado] a um multiplicador de Nobili sensível.

---

[178] Em alemão: *elektrodynamischen Vertheilung*. A palavra "Verteilung" pode ser traduzida como distribuição. Na tradução em inglês do trabalho de Lenz no livro de Magie essa expressão foi traduzida como "indução eletrodinâmica," já que Lenz estava se referindo à lei de indução de Faraday, [Len69, pág. 512]. Estou seguindo essa tradução nessa versão em português das obras de Weber.

[179] Essa sentença foi traduzida da seguinte forma no livro de Magie, [Len69, pág. 513]:

> Caso um condutor metálico se desloque nas proximidades de uma corrente galvânica ou de um ímã, será produzida nele uma corrente galvânica que terá uma direção tal que ela teria ocasionado no fio, se ele estivesse em repouso, um movimento que é exatamente oposto ao movimento dado ao fio, desde que o fio em repouso só possa se deslocar na direção do movimento ou na direção oposta.

c) Considere um condutor limitado que é perpendicular a um condutor ilimitado que tem uma corrente galvânica fluindo por ele. Se o condutor limitado se deslocar ao longo desse condutor ilimitado na direção de sua corrente, então será gerada uma corrente nele, que é direcionada contra o condutor finito; mas se o condutor finito se move contra a direção da corrente no condutor ilimitado, a direção da corrente excitada nele pela indução é para baixo a partir da corrente ilimitada. (Nobili, *Annalen* de Poggendorff, 1833, Número 3, pág. 407).[180]

Por meio desse teorema apresentado pela primeira vez por Lenz, são determinadas as correntes induzidas mas apenas no que diz respeito às suas direções, já que Lenz não forneceu uma determinação quantitativa para a intensidade das correntes induzidas. Isso, contudo, foi fornecido por Neumann em um Tratado ainda não publicado, do qual um extrato acabou de ser publicado nos *Annalen* de Poggendorff, 1846, Vol. LXVII, pág. 31.[181] Contudo, as determinações quantitativas obtidas por esse meio necessitam um teste experimental, para o qual ainda estão faltando as medições necessárias.

Henry apresentou experiências originais sobre a indução de correntes em um condutor estacionário ao *interromper* o circuito de uma bateria voltaica próxima (*Annalen* de Poggendorff, 1842, volume suplementar, pág. 282),[182] nas quais ele colocou o fio no qual ocorreu a indução em várias distâncias e diferentes posições. Ele também reutilizou a própria corrente induzida com o objetivo de induzir uma corrente em um terceiro condutor, e assim por diante. Ele atribui, após esses experimentos, direções alternadamente opostas a essas correntes induzidas em fios paralelos; mas a primeira na mesma direção que a corrente que estava desaparecendo na bateria voltaica devido à *interrupção* do circuito.

Nessa Seção será agora mostrado, *em primeiro lugar*, como os fenômenos da indução eletrovoltaica também podem ser observados com o *eletrodinamômetro*, então serão apresentadas algumas *medições* relacionadas com a segunda das experiências fundamentais de Faraday.

Ao representar os fenômenos da indução eletrovoltaica, duas coisas diferentes precisam ser distinguidas essencialmente, a saber, *em primeiro lugar*, o instrumento para induzir correntes, e *em segundo lugar*, como a corrente induzida não é imediatamente perceptível, um instrumento para observar uma ação perceptível da corrente induzida. Na segunda experiência fundamental de Faraday, por exemplo, os dois fios de cobre curvados na forma de ziguezagues, dos quais um deles é ligado ao circuito galvânico, juntamente com o dispositivo pelo qual os dois fios são repentinamente aproximados ou afastados, constitui o primeiro instrumento, que é utilizado para *induzir* a corrente; o *galvanômetro*, por outro lado, que é conectado com o outro fio, constitui o segundo instrumento, utilizado para observar uma *ação visível* da corrente induzida. Assim as duas partes essenciais do instrumento para essa experiência são distinguidas e separadas entre si.

Contudo, uma simplificação essencial da experiência pode ser obtida por meio do *eletrodinamômetro*, no qual é possível usar o mesmo instrumento que serve tanto para induzir a corrente, quanto para observar uma ação visível dela. Isto é, a bobina bifilar do eletrodinamômetro é colocada em *oscilação*, e esse movimento é utilizado para indução; então é observada a *diminuição do arco das oscilações* dessa bobina bifilar, sendo que essa diminuição, como será mostrado logo em seguida, resulta da interação eletrodinâmica entre as

[180][Nob33].

[181]Ver a Nota de rodapé 68 na página 36.

[182]Joseph Henry (1797-1878). Ver [Hen38] com tradução parcial para o alemão em [Hen42]. Ver também [Smi17].

correntes indutora e induzida. A regularidade das oscilações que medeiam a indução, bem como a diminuição dos arcos de oscilação observados como uma ação visível da corrente induzida, permitem que sejam feitas *medições* precisas para esses fenômenos de indução.

A saber, se conectarmos o fio de *uma* bobina do dinamômetro com uma bateria voltaica, enquanto a bobina bifilar está *oscilando*, então, para *induzir* uma corrente na *outra* bobina, precisamos apenas ligar suas duas extremidades de fio entre si. Essa corrente, imperceptível em si mesma, induzida nesta última bobina, exerce agora imediatamente no próprio dinamômetro uma *força eletrodinâmica perceptível* na corrente da primeira bobina e, portanto, altera a oscilação da bobina bifilar. Assim, se observarmos essa mudança, podemos conhecer a força eletrodinâmica que a causa e, por sua vez, a partir da força eletrodinâmica, conhecer a *corrente induzida*, à qual ela é proporcional, sem ser necessário conduzir a corrente induzida através do multiplicador de um *galvanômetro*. Assim o próprio *dinamômetro* serve para *induzir* a corrente e para observar uma *ação visível e mensurável* da corrente induzida.

Se a bobina bifilar estiver estacionária, nenhuma corrente será induzida; consequentemente a força eletrodinâmica $= 0$, e a bobina bifilar não será colocada em movimento pela bobina fixa. Contudo, se a bobina bifilar está oscilando, dois casos podem ser distinguidos: isto é, ou a bobina fixa é conectada à bateria voltaica e a bobina bifilar é um circuito fechado em si mesmo, nesse caso uma corrente é induzida na bobina bifilar oscilante; ou a própria bobina bifilar oscilante é conectada por seus dois fios de suspensão à bateria voltaica, e a bobina fixa é um circuito fechado em si mesmo, sendo que nesse caso uma corrente é induzida na bobina fixa. Nos dois casos é produzida uma força eletrodinâmica que altera da mesma forma a oscilação da bobina bifilar.

Contudo, a *observação* dessas mudanças na oscilação como resultado de uma corrente induzida, e a interação *eletrodinâmica* entre as bobinas induzida e indutora, que é dependente da corrente induzida, de acordo com a lei de Ampère, tem de ser realizada de uma maneira totalmente *diferente* das observações com o dinamômetro descritas na Seção anterior. As *observações de diminuição do arco das oscilações* tem de substituir as *observações anteriores de orientação* do dinamômetro. É facilmente mostrado como segue a necessidade desse método modificado de observação.

A interação eletrodinâmica entre duas bobinas, que é para ser observada com o eletrodinamômetro, consiste, de acordo com a lei de Ampère, em um torque que atua na bobina bifilar oscilante e corresponde a uma *posição de repouso* alterada dessa bobina. No entanto, esta *posição de repouso* da bobina bifilar não pode ser observada diretamente quando ela está oscilando, mas só pode ser determinada a partir de várias observações espaçadas pelo período de oscilação, e apenas sob a suposição de que, entretanto, as forças externas que afetam a bobina tenham permanecido *constantes* nesse meio tempo ou tenham mudado de forma constante e *proporcional* com o *tempo*. Portanto, se a influência eletrodinâmica que ocorre na bobina oscilante como um resultado da corrente induzida, *é revertida de oscilação para oscilação*, então a orientação de repouso da bobina, como determinada a partir de um sistema de observações durante a oscilação, ficará *inalterada* apesar da presença da influência eletrodinâmica. De fato, a observação mostra que esse último caso ocorre, que a influência eletrodinâmica, se ela de fato existe como um resultado da corrente induzida, teria assim de se inverter de oscilação para oscilação, e não pode ser investigada por meio de meras *observações de posição* no dinamômetro.

Agora, se ocorre de fato uma influência eletrodinâmica na bobina oscilante, que é revertida de oscilação para oscilação, então ela certamente não será discernível ao determinar a posição de repouso da bobina; contudo, ela tem de ser reconhecível nos *arcos de oscilação* da bobina;

a saber, a amplitude os arcos de oscilação tem de *mudar* de oscilação para oscilação, seja sempre crescendo, ou sempre diminuindo.

Na realidade, os resultados empíricos mostram que, enquanto a posição de repouso calculada da bobina oscilante sempre permanece a mesma, o arco de oscilação sempre *diminui*, e surge de uma sequência de experiências, que essa diminuição de fato se origina das influências *eletrodinâmicas* e não de causas externas alheias, caso a influência comum da resistência do ar tenha sido levada em consideração.

Portanto, para observar essa segunda classe de fenômenos com o eletrodinamômetro, será necessário para uma medição precisa da diminuição dos arcos de oscilação, de realizar *experiências de oscilação* com a bobina bifilar do dinamômetro, enquanto que para os propósitos dos fenômenos eletrodinâmicos de Ampère, podíamos nos limitar a *experiências de deflexão* ou a *observações de posição*.

Para os nossos propósitos, é de importância primária indicar que as *observações de oscilação* podem ser realizadas no dinamômetro pelo mesmo método, e com tanta precisão, como no caso de um magnetômetro. Em primeiro lugar, desejo apresentar uma série inicial de experiências de oscilação que realizei com o dinamômetro, na qual *não* ocorreram influências eletrodinâmicas, dado que nenhuma corrente galvânica foi conduzida através do instrumento e as extremidades do fio permaneceram até mesmo desconectadas.

O método de preparação dessas experiências é o mesmo método apresentado por Gauss nos *Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins in Jahre 1837 — Resultados das Observações da Associação Magnética no Ano de 1837*, pág. 58 e seguintes,[183,184] e assim não é necessário citar completamente os protocolos originais; será suficiente citar o resumo que é derivado desses protocolos, assim como em outras publicações.

O dinamômetro de Meyerstein,[185] mostrado nas Figuras 2, 3 e 4, foi utilizado nas seguintes observações, nas quais a bobina oscilante estava suspensa no centro da bobina fixa, e o telescópio foi colocado aproximadamente a 6 metros do instrumento. A distância do espelho até a escala era de 6 018,6 unidades da escala, e

$$1 \text{ unidade de escala} = 17,135\,6\text{''} .$$

As observações foram feitas alternadamente por observadores diferentes, a saber, pelo Dr. Stähelin da Basileia, por meu assistente Mr. Dietzel, e por mim. Cada um fez um conjunto de observações de acordo com a formulação dada na *obra citada*, pág. 61,[186,187] contendo seis vezes as passagens de um ponto específico da escala localizado próximo ao centro do arco de oscilação e sete pontos de elongação. Na próxima Tabela, cada linha horizontal fornece os resultados de tal conjunto de observações, a saber, a ordenação numérica da oscilação,[188] o horário correspondente, a posição de repouso correspondente em unidades da escala, o arco de oscilação correspondente em unidades da escala, e o logaritmo do último.[189]

[183] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 374.

[184] [Gau38a].

[185] Ver a Nota de rodapé 99 na página 47.

[186] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 376.

[187] [Gau38a].

[188] Em alemão: *die Bezifferung der Schwingung*. Essa expressão pode ser traduzida como "a ordenação numérica da oscilação", "a numeração da oscilação" ou "a numeração da vibração".

[189] Ou seja, o logaritmo na base 10 do arco de oscilação.

Observações para determinar o período de oscilação e a diminuição dos arcos de oscilação da bobina bifilar do dinamômetro em circuitos abertos.				
Número da oscilação	Horário	Posição	Arcos de oscilação	Log.
0.	5^h 16’ 28,53”	457,10	650,80	2,813 448
14.	20’ 10,20”	457,38	601,43	2,779 185
25.	23’ 4,39”	457,15	564,90	2,751 972
52.	30’ 12,50”	457,19	485,28	2,685 992
82.	38’ 8,02”	457,29	409,62	2,612 381
109.	45’ 16,16”	457,15	353,08	2,547 873
134.	51’ 25,08”	457,65	306,70	2,486 714
163.	59’ 31,80”	457,41	261,08	2,416 774
189.	6^h 6’ 23,90”	457,56	226,33	2,354 742
212.	12’ 28,22”	457,69	198,68	2,298 154
232.	17’ 45,45”	457,63	178,26	2,251 054
254.	23’ 33,89”	457,78	157,98	2,198 602
284.	31’ 29,30”	457,73	134,17	2,127 655
309.	38’ 5,53”	456,55	116,30	2,065 580
328.	43’ 6,90”	458,02	105,25	2,022 222
369.	53’ 56,24”	457,81	83,68	1,922 622
387.	58’ 41,96”	457,90	75,45	1,877 659

Se a diferença entre o primeiro e o último tempo for dividida pelo número de oscilações, obteremos uma determinação bem precisa do período de oscilação da bobina oscilante, já que a correção pela redução a arcos infinitamente pequenos contribui apenas bem pouco no caso de tais pequenos arcos de oscilação como ocorreram aqui. Esse período aproximado de oscilação é

$$= 15,848\,65'' \ .$$

Se esse período de oscilação aproximado for utilizado para reduzir todos os tempos na Tabela, ao deduzir o produto do número de oscilações[190] vezes o período de oscilação, do primeiro tempo, então serão obtidos os valores contidos na terceira coluna da próxima Tabela:

[190]Em alemão: *Zahl der Schwingung*. Ver a primeira coluna na Tabela anterior.

Número da oscilação	Horário	Tempo reduzido	Variação da média
0.	5^h 16' 28,52"	5^h 16' 28,53"	$+0,13$"
14.	20' 10,20"	28,32"	$-0,08$"
25.	23' 4,39"	28,17"	$-0,23$"
52.	30' 12,50"	28,37"	$-0,03$"
82.	38' 8,02"	28,43"	$+0,03$"
109.	45' 16,16"	28,66"	$+0,26$"
134.	51' 52,08"	28,36"	$-0,04$"
163.	59' 31,80"	28,47"	$+0,07$"
189.	6^h 6' 23,90"	28,50"	$+0,10$"
212.	12' 28,22"	28,31"	$-0,09$"
232.	17' 45,45"	28,56"	$+0,16$"
254.	23' 33,89"	28,33"	$-0,07$"
284.	31' 29,30"	28,28"	$-0,12$"
309.	38' 5,53"	28,30"	$-0,10$"
328.	43' 6,90"	28,54"	$+0,14$"
369.	53' 56,24"	28,07"	$-0,33$"
387.	58' 41,96"	28,53"	$+0,13$"

A partir da concordância desses valores reduzidos, cuja variação dos valores médios permanece sempre menor do que $\frac{1}{3}$ de segundo, é óbvio que a determinação do *período de oscilação* da bobina bifilar do dinamômetro é capaz do mesmo rigor e precisão que no caso do magnetômetro, pelo qual ainda é de se notar, que essa variação parece ser aumentada pela variação constante que é conhecida sempre ocorrer entre dois observadores. As determinações da *posição de repouso* da bobina oscilante a partir das observações de elongação na terceira coluna da primeira Tabela mostram grande concordância, como provado pela seguinte visão geral de seus desvios em relação aos valores médios, expressos de acordo com seus arcos:

− 6,3"	+ 3,1	+ 4,5
− 1,5"	− 1,0	− 15,8
− 5,5"	+ 1,5	+ 9,4
− 4,8"	+ 3,8	+ 5,8
− 3,1"	+ 2,7	+ 7,4
− 5,5"	+ 5,3	

Não poderíamos esperar uma concordância maior para todas as observações de posição, particularmente quando levamos em consideração, que o suporte do telescópio foi colocado sobre o chão de madeira da sala, onde, evidentemente, a orientação do telescópio poderia ser facilmente um pouco alterada pisando no chão. Também é fácil ver que a posição na segunda metade das observações foi um pouco maior do que na primeira.

Por último, nos resta considerar a *diminuição nos arcos de oscilação*. Os conjuntos individuais de observações se sucederam um ao outro, em parte, em um intervalo de tempo tão pequeno, que a diminuição nos arcos de oscilação nesse ínterim não é grande o suficiente para fornecer uma determinação precisa da razão entre dois arcos de oscilação sucessivos. O logaritmo desta razão deve, portanto, ser determinado dividindo a diferença entre o primeiro e o quinto, o segundo e o sexto, etc., pelo número de oscilações intermediárias, em vez da diferença entre dois logaritmos consecutivos dos arcos de oscilação. Obtemos então a partir dos 17 conjuntos anteriores de observações, em vez de 16 valores, apenas 13 valores, contudo valores mais precisos do *decremento logarítmico*,[191] a saber, os seguintes [valores]. Diante de cada valor, observa-se o número de oscilação ao qual ele pertence em média.

Número da oscilação	Decremento logarítmico	Variação da média
41.	0,002 452	+ 0,000 038
$61\frac{1}{2}$.	0,002 435	+ 0,000 021
$79\frac{1}{2}$.	0,002 433	+ 0,000 019
$107\frac{1}{2}$.	0,002 425	+ 0,000 011
$135\frac{1}{2}$.	0,002 408	− 0,000 006
$160\frac{1}{2}$.	0,002 424	+ 0,000 010
183.	0,002 405	− 0,000 009
$208\frac{1}{2}$.	0,002 397	− 0,000 017
$236\frac{1}{2}$.	0,002 390	− 0,000 024
$260\frac{1}{2}$.	0,002 398	− 0,000 016
280.	0,002 384	− 0,000 030
$311\frac{1}{2}$.	0,002 400	− 0,000 014
$335\frac{1}{2}$.	0,002 427	+ 0,000 013
Média = 0,002 414.		

Assim, resulta na média uma *diminuição nos arcos de oscilação*, de acordo com a qual o tamanho do arco, após 124,7 oscilações, ou após 32 minutos e $56\frac{1}{3}$ segundos, diminui pela metade. A concordância dos valores parciais prova que mesmo essas diminuições pequenas nos arcos de oscilação podem ser medidas rigorosamente.

No mesmo dia, imediatamente antes das séries de observações que acabaram de ser descritas, uma outra série similar de observações foi feita sob as mesmas condições externas, apenas com a diferença que as duas extremidades da bobina fixa foram conectadas com uma bateria de três pequenos elementos de Grove,[192] exatamente como na Seção 6.4, e na qual as extremidades livres dos fios de suspensão da bobina bifilar foram ligadas entre si. Uma informação mais precisa sobre a corrente fluindo através da bobina fixa foi fornecida pela observação da deflexão que essa própria bobina produziu no *magnetômetro de espelho* (descrito na Seção 6.3), que foi colocado 583,4 mm ao Norte da bobina. Essa deflexão observada do magnetômetro de espelho está anotada na última coluna da próxima Tabela. O valor em unidade de escala desse magnetômetro depende da distância horizontal do espelho até a escala, que era = 1301 unidades de escala. Os observadores e os métodos de observação foram os mesmos. A próxima Tabela fornece o resumo dessa série de observações exatamente como a Tabela anterior fornece o outro [resumo].

[191]Ver a Nota de rodapé 112 na página 59.
[192]Ver a Nota de rodapé 115 na página 61.

Observações para determinar o período de oscilação e a diminuição dos arcos de oscilação da bobina bifilar do dinamômetro quando uma corrente de três elementos de Grove está atravessando a bobina fixa, enquanto que o fio condutor da bobina bifilar estava fechado.					
Número da oscilação	Horário	Posição	Arcos de oscilação	Log.	Deflexão do magnetômetro de espelho
0.	3^h 29' 44,88"	464,05	764,10	2,883 150	108,50
9.	32' 7,03"	464,44	679,15	2,831 966	
18.	34' 29,58"	464,23	604,05	2,781 073	
35.	38' 50,17"	464,07	484,15	2,684 980	108,60
47.	42' 9,10"	464,20	414,60	2,617 629	
57.	44' 47,66"	464,25	365,50	2,562 887	
74.	49' 16,79"	464,22	292,27	2,465 784	109,10
85.	52' 10,80"	464,30	253,30	2,403 635	
103.	56' 56,11"	464,40	200,80	2,302 764	
118.	4^h 0' 53,43"	464,25	165,56	2,218 955	108,95
130.	4' 3,26"	464,37	141,37	2,150 357	
143.	7' 28,90"	465,23	119,33	2,076 750	
157.	11' 11,11"	464,96	100,49	2,002 123	109,20
179.	16' 59,23"	465,20	75,59	1,878 464	
196.	21' 28,65"	464,88	60,58	1,782 329	190,40
210.	25' 10,23"	464,96	50,08	1,699 664	

A partir dessa série de observações, que de outra forma é muito similar à série anterior, me limito a considerar a diminuição dos arcos de oscilação. O logaritmo da razão de dois arcos sucessivos, ou o decremento logarítmico, é para ser determinado aqui dividindo a diferença entre o primeiro e quarto, o segundo e quinto, e assim por diante, logaritmo pelo número de oscilações intermediárias. A partir dos 16 conjuntos de observações anteriores, isso fornece 13 valores do decremento logarítmico, como contidos na próxima Tabela, com a adição do número de oscilações em relação ao qual cada média pertence.

Número da oscilação	Decremento logarítmico	Variação da média
$17\frac{1}{2}$.	0,005 662	+ 0,000 042
28.	0,005 640	+ 0,000 020
$37\frac{1}{2}$.	0,005 595	− 0,000 025
$54\frac{1}{2}$.	0,005 620	0,000 000
66.	0,005 631	+ 0,000 011
80.	0,005 655	+ 0,000 035
96.	0,005 610	− 0,000 010
$107\frac{1}{2}$.	0,005 628	+ 0,000 008
123.	0,005 650	+ 0,000 030
$137\frac{1}{2}$.	0,005 560	− 0,009 060
$154\frac{1}{2}$.	0,005 549	− 0,000 071
$169\frac{1}{2}$.	0,005 555	− 0,000 065
$183\frac{1}{2}$.	0,005 707	+ 0,000 087
Média = 0,005 620.		

Assim, resulta na média uma *diminuição nos arcos de oscilação*, de acordo com a qual o tamanho do arco, após 53 564 oscilações, ou após 14 minutos e 8,187 segundos, diminui pela metade. Aqui também a concordância dos valores parciais confirma o rigor da medição, e não é notável que no final, onde os arcos de oscilação tornam-se muito pequenos, as diferenças pareçam um pouco maiores.

A diferença que ocorre entre essa última determinação do decremento logarítmico e a determinação anterior não é baseada em diferentes condições externas influenciando a bobina oscilante, já que essas [condições externas] permanecem completamente as mesmas, mas sim na influência *indutora* da bobina fixa sobre a bobina oscilante, o que constitui a única diferença entre a primeira e a segunda série de experiências. As duas séries foram repetidas em vários dias, e forneceram não apenas quase que exatamente a mesma diferença nos valores do decremento logarítmico, mas também forneceram aproximadamente valores absolutos iguais para os dois decrescimentos, de onde não resta dúvida de que ocorreu de fato uma indução de correntes galvânicas na bobina bifilar fechada por meio da corrente galvânica na bobina fixa, e esta indução é de tal intensidade que a ação das correntes induzidas visíveis na redução dos arcos de oscilação é passível de medição exata.

6.11 Lei de Amortecimento Produzida pela Indução Eletrovoltaica

Após essa demonstração da utilidade *prática* do eletrodinamômetro para mostrar os fenômenos da indução eletrovoltaica, procedemos *em segundo lugar* para deduzir algumas *determinações legais*[193] para esses fenômenos a partir das observações das oscilações e da diminuição dos arcos de oscilação da bobina bifilar.

Em primeiro lugar, já foi observado, que a *grandeza mutável* dos arcos de oscilação como resultado das correntes induzidas, dada uma posição média inalterada da bobina bifilar, prova que a direção da corrente induzida é modificada de acordo com a *direção do movimento* da bobina bifilar oscilante e que, consequentemente, correntes opostas são induzidas por meio de movimentos opostos, assim como ocorre na indução magnética.

Em segundo lugar, a *diminuição* nos arcos de oscilação prova que na medida em que elementos paralelos do fio indutor *se aproximam*, é induzida uma corrente oposta àquela no fio indutor; na medida em que elementos paralelos *se afastam*, é induzida uma corrente *na mesma direção* que aquela no fio indutor. Caso ocorresse a relação oposta nas direções das correntes das correntes indutora e induzida, teria de ocorrer um *aumento* contínuo nos arcos de oscilação. Também essa determinação é análoga ao que é estabelecido empiricamente para a indução magnética.

Em terceiro lugar, a *lei geométrica* da diminuição nos arcos de oscilação devida à corrente induzida, prova que a intensidade da corrente induzida é proporcional à *velocidade* do movimento indutor; pois a lei geométrica da diminuição dos arcos de oscilação prova que a força que produz essa diminuição, isto é, a intensidade das correntes induzidas, sempre permanece proporcional à intensidade dos arcos de oscilação: contudo, é sabido que a intensidade dos arcos de oscilação de um corpo oscilante *isócrono* é sempre proporcional à velocidade que ele alcança nos instantes correspondentes de seu período de oscilação.

Em quarto lugar, no que diz respeito à determinação legal da intensidade *absoluta* da indução eletrovoltaica, desejamos deduzir em último lugar o seguinte princípio a partir das

[193] Isto é, determinações ou normas que seguem leis matemáticas.

observações do dinamômetro:

> A *indução eletrovoltaica* é igual à *indução magnética* no circuito fechado da bobina bifilar, quando a primeira [indução] é produzida por uma corrente galvânica atravessando a bobina fixa, a última [indução] é produzida por ímãs que estão localizados em uma tal posição em relação à bobina bifilar que, quando uma corrente atravessa a bobina bifilar, o torque *eletrodinâmico* dessa corrente é igual ao torque *eletromagnético* desses ímãs.

Por meio desse princípio, como pode ser facilmente visto, a determinação da indução eletrovoltaica com a ajuda de forças *eletromagnéticas* e *eletrodinâmicas* conhecidas é reduzida às leis da indução magnética, as quais já foram investigadas mais precisamente por outros meios. Por hora, reconhecidamente, para provar esse princípio, só posso fornecer umas poucas medições realizadas com o dinamômetro, que foram feitas sob circunstâncias nas quais não eram possíveis determinações precisas até pequenas frações; contudo, essas medições podem ser consideradas como suficientes por hora já que, caso o princípio anterior fosse incorreto, não haveria uma base para essa concordância aproximada que surgiu sem dúvida a partir das observações. Para um teste mais refinado do princípio anterior, todas as medições envolvidas teriam de ser realizadas com uma precisão maior. Contudo, para estabelecer todas as condições totalmente apropriadas para alcançar essa precisão uniforme, seria necessário preparar instrumentos especiais simplesmente para esse propósito, o que não foi possível para mim até o momento.

Vou juntar aqui brevemente os resultados das observações, sem entrar nos detalhes das próprias observações, as quais em geral estavam de acordo com as observações anteriores.

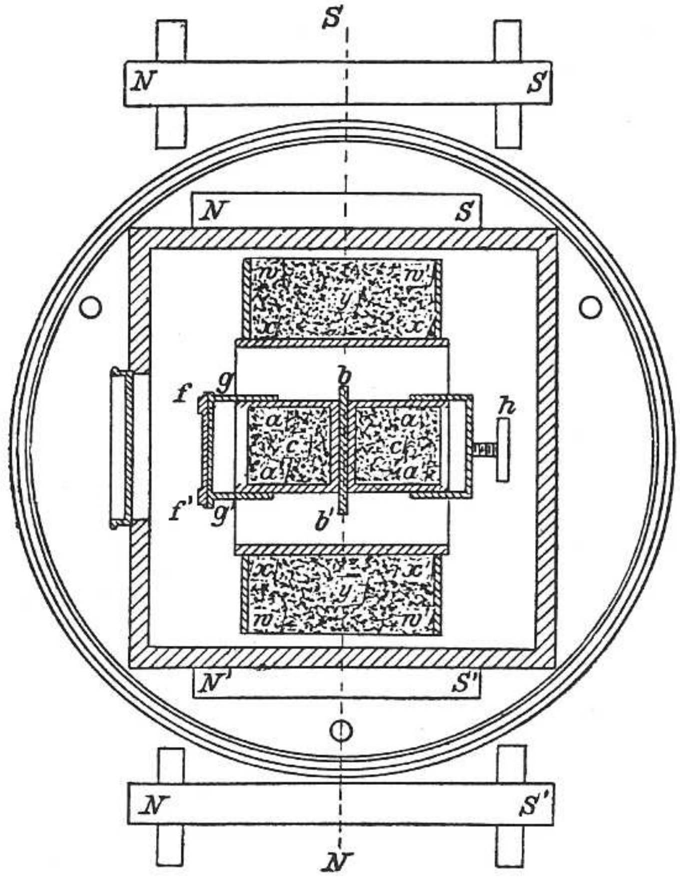


Fig. 4.

A *primeira* série de observações estava relacionada à medição da indução magnética. Essa é exatamente a série para a qual as condições podiam ser arranjadas de maneira menos favoráveis, e as quais de acordo com isso estabeleceram limites mais estreitos para a precisão de toda medição, a qual poderia ser facilmente ampliada significativamente sob condições mais favoráveis. Isto é, a bobina bifilar do dinamômetro descrita na Seção 6.1 e representada nas Figuras 2, 3 e 4, tornou-se um circuito fechado e foi colocada em oscilação, enquanto que fora do recipiente que protegia a bobina bifilar oscilante do ar, foram fixados vários pequenos ímãs NS, $N'S'$ (Figura 4) na orientação em que eles induziam as maiores *correntes magneto-elétricas* na bobina bifilar oscilante. A saber, todos esses pequenos ímãs juntos permanecem perpendiculares ao meridiano magnético atravessando o eixo da bobina bifilar, isto é, simetricamente ao Norte e ao Sul da bobina bifilar, e seus polos correspondentes foram dessa forma girados para o mesmo lado, como mostra o diagrama, no qual N e N' denotam os polos Norte, S e S' os polos Sul. Foram observadas então as oscilações da bobina bifilar, assim como antes, começando do momento quando elas podiam ser medidas por meio da escala, até que elas tornaram-se muito pequenas para uma determinação precisa da diminuição dos arcos de oscilação. Essas observações foram calculadas da mesma maneira que anteriormente, e forneceram o *decremento logarítmico* para a diminuição dos arcos de oscilação

$$= 0,002\,638 \ .$$

A mesma série de experiências foi repetida mais uma vez, com a única diferença, que a bobina bifilar estava aberta, resultando assim para o *decremento logarítmico* da diminuição dos arcos de oscilação o seguinte valor um pouco menor:

$$= 0,002\,541\ .$$

A pequena diferença entre esses dois valores,

$$= 0,000\,097\ ,$$

é a ação das *correntes magneto-elétricas*, que foram induzidas na bobina bifilar oscilante e fechada, por meio dos ímãs fixos. Foi tomado o maior cuidado para determinar essa pequena diferença com a maior precisão possível, e a experiência não deixa nada mais a desejar nesse aspecto; contudo, está na natureza do pequeno valor da diferença que, como mostraram as repetições da experiência, ela deve ser considerada como de 6 a 8 por cento incerta.

A *segunda* série de experiências está relacionada ao torque *eletromagnético*. Os pequenos ímãs permaneceram parados em seus lugares, enquanto que uma fraca corrente era conduzida através de uma bateria voltaica constante; a corrente dessa bateria passava também através de um *galvanômetro*, por meio do qual era medida sua intensidade. Agora a *posição de repouso* da bobina bifilar era observada, alternadamente, quando [o circuito da] bateria voltaica estava fechado e quando ele estava aberto. A partir de uma série de repetições, após a redução dos resultados à mesma intensidade de corrente (a qual apenas variou muito pouco), resultou, com grande concordância, a diferença

$$= 19,1 \text{ unidades de escala.}$$

Essa diferença é uma medida do torque *eletromagnético*, que foi exercido na corrente da bobina bifilar pelas barras magnéticas mencionadas anteriormente.

A *terceira* série de experiências está relacionada ao torque *eletrodinâmico*. Os pequenos ímãs foram afastados, e as duas extremidades do fio da bobina fixa do dinamômetro foram conectadas a uma forte bateria voltaica, enquanto que a mesma fraca corrente de uma bateria voltaica constante era conduzida através da bobina bifilar, como na série anterior. A intensidade das duas correntes era medida por meio de um *galvanômetro*.[194] A *posição de repouso* da bobina bifilar foi observada agora, assim como na série anterior de experiências, alternadamente quando [o circuito da] bateria voltaica estava fechado e quando ele estava aberto. A partir de uma série de repetições, após a redução dos resultados à mesma intensidade de corrente, resultou, com grande concordância, a diferença

$$= 101,9 \text{ unidades de escala.}$$

Essa diferença é uma medida do torque *eletrodinâmico* que a forte corrente na bobina fixa exerce sobre a fraca corrente na bobina bifilar.

Por último, a *quarta* série de experiências está relacionada à *indução eletrovoltaica*. A bobina bifilar foi fechada e colocada em oscilação, enquanto a corrente da mesma bateria voltaica era conduzida através da bobina fixa do dinamômetro, como na série anterior de experiências. Foram observadas então as oscilações da bobina bifilar assim como na primeira série de experiências, e a partir disso foi calculado o *decremento logarítmico* da diminuição dos arcos de oscilação. Após a redução àquela intensidade de corrente na bobina fixa, na

[194][Nota de Wilhelm Weber:] As duas correntes eram originadas da mesma bateria constante, e a diferença de intensidade das mesmas nas duas bobinas era causada por uma divisão da corrente.

qual está baseada o valor do torque *eletrodinâmico* encontrado por meio da série anterior de experiências, esse decrescimento resultou

$$= 0,005\,423 \; .$$

A mesma série de experiências foi repetida mais uma vez com a única diferença, que a bobina bifilar estava aberta, e resultou o seguinte valor menor para o *decremento logarítmico* da diminuição dos arcos de oscilação:[195]

$$= 0,002\,796 \; .$$

A diferença entre esses dois valores,

$$= 0,002\,627 \; ,$$

é a ação da *indução eletrovoltaica*, que aconteceu na bobina bifilar fechada e oscilante, por meio da corrente na bobina fixa.

Portanto, como a força *eletrodinâmica* de nossa corrente na bobina fixa, após a *terceira* série de experiências, não era igual à força *eletromagnética* de nossos ímãs na *segunda* série de experiências, mas estavam [entre si] na razão de

$$101,9 : 19,1 \; ,$$

as intensidades das duas *correntes induzidas*, produzidas sob as mesmas condições na bobina bifilar, também não devem ser iguais, mas devem da mesma forma estar na razão de

$$101,9 : 19,1 \; .$$

Contudo, se as intensidades das correntes induzidas na bobina bifilar oscilante estão na razão dada, então, a partir da interação dessas correntes com aquelas que as produzem (e, portanto, as forças galvânicas e magnéticas proporcionais a elas) tem de resultar uma atenuação das oscilações da bobina bifilar, cujos *decrementos logarítmicos* estarão [entre si] na razão dos quadrados de 101,9 : 19,1, isto é, como

$$28,5 : 1 \; .$$

Em vez disso, a partir das observações da diminuição dos arcos de oscilação, encontramos nos dois casos a razão das porções dos decrementos logarítmicos surgindo das correntes induzidas de acordo com a *quarta* e *primeira* série de experiências estar como

$$0,002\,627 : 0,000\,097 = 27,1 : 1 \; ,$$

razão essa que difere da calculada em cerca de 5 por cento, o que não pode mais ser garantido nos pequenos decrementos logarítmicos observados provenientes das correntes *magneto-elétricas*, conforme já mencionado anteriormente[196] na página 117.[197]

[195][Nota de Wilhelm Weber:] Esse valor seria ainda menor se, ao mesmo tempo, a corrente na bobina fixa fosse interrompida, já que essa corrente, mesmo dada uma bobina bifilar aberta, ainda induzia correntes no soquete de latão da bobina bifilar durante a oscilação, exatamente como foi o caso na primeira série de experiências com ímãs, os quais, contudo, atuaram bem mais fracamente.

[196]Relacionado à incerteza de 6 a 8%.

[197][Web46, pág. 105 das *Obras* de Weber].

6.12 Uma Corrente Induzida de Mesma Intensidade que a Corrente Indutora

A partir da *constância* do decremento logarítmico da bobina bifilar oscilante sob a influência da corrente constante na bobina fixa, e das correntes induzidas por esse meio na bobina bifilar oscilante, já resultou[198] na página[199] 114 para a indução a lei de que a intensidade da corrente induzida é proporcional em qualquer instante à *velocidade* da bobina oscilante naquele instante. Agora, se esta lei é assim colocada fora de dúvida, segue-se que, no caso de uma corrente indutora *constante*, podemos aumentar arbitrariamente a corrente *induzida* por ela, se aumentarmos essa *velocidade*, e que, portanto, tem de haver uma velocidade na qual a *intensidade da corrente induzida seria tão intensa quanto aquela da corrente indutora*. Não deve ser desinteressante apresentar uma *determinação* mais precisa dessa velocidade. Essa determinação pode ser facilmente obtida se nós

1. calcularmos a partir dos arcos de oscilação medidos de nossa bobina e a partir de seus períodos de oscilação, medidos igualmente de acordo com leis conhecidas, a *velocidade* que a bobina possui no centro de sua oscilação;

2. se calcularmos, a partir dos valores medidos da mesma forma do decremento logarítmico causado pela indução eletrovoltaica, a *deflexão* da bobina, que seria produzida pela força que diminui a velocidade da bobina bifilar oscilante no instante em que ela se encontra no centro de sua oscilação, caso ela continue uniformemente na mesma direção; e

3. por último, se for introduzida uma corrente através da bobina bifilar, e a intensidade dessa corrente for variada até que a deflexão da bobina como um resultado da interação entre essa corrente e a corrente constante na bobina fixa for igual àquela deflexão, e se determinarmos então a *razão* das intensidades das duas correntes.

É então claro que quando a velocidade da bobina oscilante for aumentada de acordo com a razão dessas intensidades, a corrente induzida terá a mesma intensidade que a corrente indutora no momento em que a bobina se encontra no centro de seu arco de oscilação. Dessa forma resultou que a bobina bifilar do dinamômetro descrito na Seção 6.1 teria de ser girada ao redor de seu eixo perpendicular de rotação

31 vezes

em um segundo, para que a corrente *induzida* pela corrente arbitrariamente forte ou fraca da bobina fixa desse instrumento tivesse a *intensidade da corrente original* no momento em que as duas bobinas estivessem perpendiculares entre si. Nessa velocidade da rotação da bobina, a maior velocidade linear dos elementos de corrente chegariam a 6,5 metros ou aproximadamente 20 pés em um segundo, já que, de acordo com a página[200] 51, o raio da bobina bifilar era de 33,4 milímetros.

[198]Terceira lei no início da Seção 6.11.

[199][Web46, pág. 103 das *Obras* de Weber].

[200][Web46, pág. 36 das *Obras* de Weber].

IV - Aplicações do Eletrodinamômetro

6.13 Determinação da Duração de Correntes Momentâneas com o Dinamômetro, Juntamente com a Aplicação para Experiências Fisiológicas

Não são necessárias correntes intensas para exibir e medir a interação entre dois fios condutores com o auxílio do dinamômetro, como provam os dados já apresentados; ao contrário, são suficientes correntes fracas que, caso sejam utilizados outros aparelhos, dificilmente são percebidas, tal como, por exemplo, as correntes induzidas produzidas pelas oscilações da bobina bifilar, de acordo com a Seção 6.10, que eram pouco visíveis sem um instrumento óptico. Essa circunstância tem uma importância prática, já que essas experiências recebem dessa forma uma expansão bem maior, e o caminho está preparado para as mais diversas aplicações do dinamômetro, especialmente para as determinações *galvanométricas*. Uma bússola ou um magnetômetro é denominado um *galvanômetro* quando está equipado com um multiplicador, já que ele serve para medir a intensidade das correntes galvânicas que atravessam o fio do multiplicador. Por esse meio a medição da intensidade das correntes galvânicas é baseada *não em ações puramente galvânicas*, mas sim em ações *eletromagnéticas*. Pela mesma razão também um *voltâmetro*[201] merece a denominação de um *galvanômetro*, já que ele também serve para medir a intensidade de correntes galvânicas que são conduzidas através do voltâmetro; a única diferença é que esse último é um galvanômetro *eletroquímico*, enquanto que o anterior é um galvanômetro *eletromagnético*. O *eletrodinamômetro* também é um *galvanômetro*, já que ele serve para medir a intensidade das correntes galvânicas que são conduzidas através dele; contudo, ele é um galvanômetro *puramente galvânico* ou *eletrodinâmico*, já que é a interação entre as próprias correntes galvânicas que é utilizada nele para medir a intensidade de corrente e, portanto, ele merece preferencialmente o nome de *galvanômetro*.

No entanto, se não se trata mais de testar as leis eletrodinâmicas fundamentais, mas de apenas fazer determinações *galvanométricas*, o *eletrodinamômetro* não parece ter grande importância prática, porque os vários dispositivos de voltímetros e galvanômetros eletromagnéticos já alcançaram resultados tão bons em medir a intensidade de correntes galvânicas e fornecer serviços tão convenientes, que não há razão para substituir esses instrumentos já em uso por novos instrumentos. Enquanto for apenas uma questão dos objetivos que já foram alcançados com esses últimos instrumentos, ou que possam ser alcançados com eles, um instrumento novo como o dinamômetro não terá de fato uma importância prática ligada a ele. Contudo, as coisas são diferentes naqueles casos em que os instrumentos existentes são inadequados como, por exemplo, quando é uma questão de determinar a intensidade da corrente *em momentos específicos*.

Isto é, o seno ou a tangente da deflexão da agulha magnética no galvanômetro senoidal ou tangencial só fornece uma leitura correta da intensidade de corrente no multiplicador *em um*

[201] Um voltâmetro, também chamado Volta-eletrômetro ou coulombímetro, é um instrumento usado para medir a carga elétrica através da ação eletrolítica. Usualmente ele é uma célula eletrolítica e a medida é feita pelo peso do elemento depositado ou libertado no cátodo em um intervalo de tempo específico. Faraday utilizou um instrumento que denominou de Volta-eletrômetro, [Far34b, Artigo 565, Nota 1] e [Far34a, artigo 704] com tradução para o alemão em [Far34c]. Mais tarde essa expressão foi abreviada para voltâmetro. O termo atual é coulombímetro. Não deve ser confundido com um voltímetro que mede a diferença de potencial elétrico.

instante específico, caso seja *constante* a corrente no multiplicador atuando sobre a agulha; se, ao contrário, a intensidade for *variável*, então a intensidade da corrente em um instante particular não poderá ser deduzida de jeito nenhum a partir da deflexão da agulha magnética, ou só poderá ser deduzida por meio de cálculos com a ajuda de uma dada lei designada para essas variações. É claro que podemos então deixar a corrente atuar sobre a agulha por um *instante* apenas, porém a deflexão da agulha produzida por essa influência momentânea, mesmo que ela seja grande o suficiente para permitir uma observação precisa e medição refinada, não serve de forma alguma por si própria para a determinação da intensidade da corrente naquele instante; ao contrário, é necessário o conhecimento de um outro elemento, a saber, o conhecimento da *duração* dessa influência momentânea, sendo que isso não pode ser alcançado com esse instrumento. Apenas quando sabemos a *quantidade* de eletricidade que a corrente momentânea transporta, e o [intervalo de] *tempo* no qual essa eletricidade atravessou uma seção reta [do condutor], pode a intensidade [da corrente] ser determinada ao dividir o primeiro pelo último. Contudo, a partir da deflexão da agulha produzida por aquela influência momentânea, só pode ser deduzida uma determinação da quantidade de eletricidade; o tempo permanece indeterminado.

Ora, o *dinamômetro* serve em tais casos essencialmente para *suplementar* o galvanômetro *eletromagnético*, já que esses dois instrumentos nos fornecem *duas determinações intrinsecamente diferentes*, mutuamente independentes, a partir das quais podem ser deduzidos *os dois elementos desconhecidos*, dos quais depende a intensidade de corrente. A *diferença* das determinações obtidas com os dois instrumentos já se manifesta quando conduzimos correntes *constantes* contínuas de *intensidades diferentes* através de um circuito, no qual estão incluídos o *galvanômetro* usual e também o *dinamômetro*, e é observado o *ângulo de deflexão* no qual existe equilíbrio nesses instrumentos para cada uma dessas correntes. Esses ângulos de deflexão aumentam nos dois instrumentos com [o aumento da] intensidade, mas de acordo com leis diferentes; pois as tangentes dos ângulos de deflexão do *dinamômetro* são, como provado na Seção 6.2, proporcionais aos *quadrados* das tangentes do ângulo de deflexão do *magnetômetro*.

Essa *diferença* nas determinações fornecidas pelos dois instrumentos se mostra ainda mais notavelmente, se uma corrente *constante*, como acabou de ser mencionada, atravessar os dois instrumentos, e se forem observadas as deflexões correspondentes de ambos e então, sem alterar a intensidade da corrente, for simplesmente *invertida* a *direção* da corrente em todos os fios condutores dos dois instrumentos com o auxílio de um comutador; é sabido que após essa inversão da direção da corrente no multiplicador, a *agulha magnética* do multiplicador é defletida pelo mesmo valor que antes da inversão, porém para o lado *oposto*. No *dinamômetro* isso não ocorre, em vez disso, a deflexão que ocorria antes da inversão da corrente permanece *inalterada* mesmo após a inversão da corrente, de tal forma que, desde que a inversão da corrente tenha de fato sido momentânea, sem interrupção, *nenhuma influência* é percebida no dinamômetro vindo dessa inversão. O dinamômetro nesse caso atua como atuaria um galvanômetro *eletromagnético* se, no instante em que a corrente no multiplicador fosse invertida, os *polos da agulha também fossem invertidos*, assumindo que a agulha, assim como a bobina bifilar do dinamômetro, possuísse uma força diretriz independente do estado de seus polos. Essa igualdade das ações das correntes positivas e negativas no dinamômetro nessa experiência facilmente executável, tem de chamar muita atenção quanto mais acostumados estivermos a ver correntes opostas produzirem ações opostas.

Essa *diferença* experimentalmente provada nas determinações fornecidas pelos dois instrumentos pode ser agora *definida* mais precisamente. A ação direta da corrente atravessando os fios condutores dos dois instrumentos é um *torque* que tende a colocar em movimento rotacional a bússola ou a bobina bifilar sobre a qual ele atua. No *galvanômetro magnético* esse torque é proporcional à intensidade i da corrente que atua na agulha, e ao momento magnético m da agulha sobre a qual atua, sendo, portanto, representado pela fórmula

$$a \cdot mi$$

na qual, se nos limitarmos a pequenos ângulos de deflexão, a é para ser considerada como uma constante a ser determinada de uma vez por todas para cada instrumento. A ação desse torque no elemento de tempo dt é então expressa pelo produto

$$ami \cdot dt \ ,$$

sendo igual ao produto da velocidade angular,[202] na qual o corpo giratório é colocado dessa forma, com o momento de inércia do corpo.

No *dinamômetro*, ao contrário, o torque é proporcional à intensidade de corrente i na bobina fixa, que atua na bobina bifilar, e também à intensidade de corrente i na própria bobina bifilar em que atua, sendo assim representado pela fórmula

$$b \cdot i^2 \ ,$$

na qual b, se nos limitarmos a pequenos ângulos de deslocamento, denota uma constante a ser determinada de uma vez por todas para cada dinamômetro. A ação desse torque no intervalo de tempo dt é então expressa pelo produto

$$bi^2 \cdot dt \ ,$$

e é da mesma forma igual ao produto da velocidade angular produzida, com o momento de inércia do corpo giratório.

Agora, se essa corrente persistir uniformemente durante o curto intervalo de tempo de $t = 0$ até $t = \vartheta$, e se o momento de inércia da agulha e da bobina bifilar forem denotados por p e q, então a *velocidade angular* que é produzida dessa forma será

$$\text{para a agulha} = \int_0^\vartheta \tfrac{a}{p} \cdot midt = \tfrac{am}{p} \cdot i\vartheta \ ,$$

$$\text{para a bobina bifilar} = \int_0^\vartheta \tfrac{b}{q} \cdot i^2 dt = \tfrac{b}{q} \cdot i^2\vartheta \ .$$

Se os dois instrumentos estivessem previamente em repouso, eles serão então colocados em oscilação pela comunicação dessa velocidade angular, e se s e ζ denotarem os *períodos de oscilação* dos dois instrumentos, então, de acordo com as leis bem conhecidas da oscilação, se não ocorrer atenuação, e se o intervalo de tempo ϑ, no qual a agulha e a bobina bifilar recebem essa velocidade angular, for tão pequeno, que a própria *perturbação* durante esse pequeno intervalo de tempo, como se fosse um *choque*, não precisar ser levada em consideração, então a *velocidade angular* em qualquer instante no final do tempo t será expressa por

$$\frac{e\pi}{s} \cdot \cos \frac{\pi}{s}(t - \vartheta) \qquad \text{e} \qquad \frac{\varepsilon\pi}{\zeta} \cdot \cos \frac{\pi}{\zeta}(t - \vartheta) \ ,$$

nas quais e e ε denotam os *comprimentos de elongação*, que podem ser determinados para os dois instrumentos por meio da *observação*. Se agora o primeiro instante após cessar a

[202] Em alemão: *Drehungsgeschwindigkeit*.

corrente for substituído por t, isto é, $t = \vartheta$, então serão obtidas as velocidades originalmente transmitidas pela corrente aos dois instrumentos:

$$\frac{am}{p} \cdot i\vartheta = \frac{e\pi}{s}\ , \qquad\qquad \frac{b}{q} \cdot i^2\vartheta = \frac{\varepsilon\pi}{\zeta}\ ,$$

ou seja, temos duas equações para determinar a *intensidade de corrente* i e a *duração da corrente* ϑ, por meio das quais elas podem ser calculadas a partir das *deflexões medidas* e e ε dos dois instrumentos, a saber:

$$i\vartheta = \frac{\pi p}{ams} \cdot e\ , \qquad\qquad i^2\vartheta = \frac{\pi q}{b\zeta} \cdot \varepsilon\ ,$$

nas quais $\pi p/ams$ e $\pi q/b\zeta$ denotam constantes a serem determinadas de uma vez por todas. A *intensidade de corrente* i procurada resulta então como:

$$i = \frac{am}{b} \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{s}{\zeta} \cdot \frac{\varepsilon}{e}\ ,$$

e a procurada *duração* dessa corrente resulta em:

$$\vartheta = \frac{\pi b p^2 \zeta}{a^2 m^2 q s^2} \cdot \frac{e^2}{\varepsilon}\ .$$

Como os *períodos de oscilação* s e ζ dos dois instrumentos podem ser determinados diretamente, só é necessário para a determinação completa das *constantes* dos dois instrumentos, fazer passar por eles uma corrente constante padrão, cuja *intensidade = 1*, e observar as tangentes dos *ângulos de deflexão* e' e ε', para os quais ocorre então equilíbrio. Essas tangentes dos ângulos de deflexão devem então, de acordo com leis bem conhecidas, ser igualadas às razões dos *torques* defletores para a intensidade de corrente = 1, a saber,

$$am \qquad \text{e} \qquad b\ ,$$

em relação às *forças diretrizes* da bússola e da bobina bifilar, a saber,

$$\frac{\pi^2 p}{s^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi^2 q}{\zeta^2}\ ,$$

assim:

$$e' = am \cdot \frac{s^2}{\pi^2 p}\ , \qquad\qquad \varepsilon' = b \cdot \frac{\zeta^2}{\pi^2 q}\ .$$

Se esses valores forem substituídos nas equações anteriores, obteremos

$$i\vartheta = \frac{s}{\pi} \cdot \frac{e}{e'}\ , \qquad\qquad i^2\vartheta = \frac{\zeta}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\ ,$$

e, consequentemente,

$$i = \frac{\zeta}{s} \cdot \frac{e'}{\varepsilon'} \cdot \frac{\varepsilon}{e}\ ,$$

$$\vartheta = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{s^2}{\zeta} \cdot \frac{\varepsilon'}{e'^2} \cdot \frac{e^2}{\varepsilon}\ ,$$

nas quais por meio de uma única observação das deflexões e' e ε', assim como dos períodos de oscilação s e ζ da bússola e da bobina bifilar, os coeficientes constantes ζ/s, e'/ε', s^2/ζ e ε'/e'^2 são determinados para sempre. Assim segue-se disso que as observações feitas simultaneamente nos dois instrumentos das deflexões e e ε se complementam, fornecendo conjuntamente dados completos para determinar a *intensidade* e a *duração* de uma corrente momentânea, enquanto que cada uma, considerada individualmente, não nos fornece uma nem a outra.

Não é difícil encontrar *aplicações* úteis dos casos onde essa determinação completa das correntes momentâneas obtidas por meio do uso simultâneo dos dois instrumentos; elas se apresentam de várias formas. Correntes *momentâneas*, por exemplo, são usadas frequentemente em experiências *fisiológicas* para investigar a *influência do galvanismo no sistema nervoso*; pois acontece que uma ação contínua da corrente galvânica amortece muito rapidamente os nervos através dos quais ela atravessa, particularmente quando ele é um *nervo sensorial*, de tal forma que nenhuma série prolongada de experiências rapidamente sucessivas pode ser feita dessa maneira, sendo que isso torna-se possível, se só for permitido à corrente atravessar o nervo por um instante. Essas observações muito interessantes não podem, contudo, levar a quaisquer resultados definitivos se alguém apenas determinar a variedade das *ações* produzidos por essas correntes nos nervos, sem ter qualquer *conhecimento das correntes* que produzem essas ações, especialmente de suas *intensidades* e de suas *durações*. Portanto uma investigação completa das ações fisiológicas das correntes galvânicas no sistema nervoso necessita a determinação completa desses dois elementos, o que, contudo, só pode ser alcançado de acordo com o método que acabou de ser desenvolvido a partir de observações simultâneas do *galvanômetro* e *dinamômetro*. De qualquer forma, é uma tarefa interessante para a fisiologia dos nervos estabelecer os *limites* temporais de por quanto tempo uma corrente tem de atuar nos nervos para produzir uma ação definida, e como esse intervalo de tempo necessário varia com a intensidade da corrente. Espero que o eletrodinamômetro seja utilizado para o propósito apresentado, especialmente já que no *Instituto Fisiológico* local[203] alguns testes experimentais já foram feitos com bons resultados, os quais serão comunicados em outra ocasião. Vou me limitar agora a todas as aplicações que podem ser feitas na própria física, especialmente e acima de tudo na área da *ciência elétrica* pura.

6.14 Repetição do Experimento Fundamental de Ampère com Eletricidade Comum e Medição da Duração da Faísca Elétrica quando uma Bateria de Leiden é Descarregada

O experimento fundamental de Ampère relacionado à interação entre dois fios condutores separados espacialmente só foi até o momento realizado com um único tipo de correntes galvânicas, a saber, correntes originadas de uma bateria voltaica. Se agora nos encontramos justificadamente levados à conjectura de que todas as correntes galvânicas, de qualquer fonte que possam ser originadas, estão sujeitas às mesmas leis e que, portanto, a lei de Ampère relacionada à interação entre dois fios condutores seria confirmada por todos os tipos de correntes elétricas galvânicas, essa própria confirmação não é supérflua de maneira alguma. Até o momento, parece importante que de acordo com as experiências apresentadas nas Seções anteriores, a interação de Ampère já foi provada tanto para correntes *magneto-elétricas*

[203]Ou seja no Instituto Fisiológico da Universidade de Leipzig onde Weber estava trabalhando nessa época.

quanto por correntes induzidas por meio da *indução eletrovoltaica*. Contudo, ainda parece importante repetir o experimento fundamental de Ampère com *eletricidade comum*,[204] como ocorre na descarga de uma garrafa ou bateria de Leiden[205] por meio do fio de descarga aplicado, já que existem diferenças tão consideráveis entre essa corrente de eletricidade comum e todas as outras correntes galvânicas, que apenas a experimentação empírica pode mostrar se o experimento fundamental de Ampère vai ser ou não válido. Em particular, enquanto a experimentação empírica não tiver decidido essa questão, poderíamos facilmente conjecturar, que ou a *duração extremamente curta* de uma corrente de eletricidade comum, ou, dada uma duração maior, a *descontinuidade* da corrente poderia ser intrinsecamente prejudicial à interação entre dois longos fios condutores, como aqueles das duas bobinas do dinamômetro, já que seria possível que a corrente em um fio já tivesse sido interrompida, enquanto estivesse apenas começando no outro [fio]. Contudo, a experimentação com o *eletrodinamômetro* provou que o experimento fundamental de Ampère também é bem sucedido com a eletricidade comum, o que explicarei agora com mais detalhes.

É conhecido que a repetição do experimento fundamental de Oersted[206] com *eletricidade comum* coletada em uma garrafa de Leiden é realizada de forma confiável quando uma extremidade de um barbante úmido[207] é preso ao descarregador,[208] a outra extremidade [do barbante é presa] ao fio condutor que forma o multiplicador do *galvanômetro*, e a outra extremidade desse fio condutor está em um conexão condutora com o revestimento externo da garrafa de Leiden. Se a garrafa de Leiden for então descarregada com o descarregador enquanto o barbante úmido está dependurado nele, é observada uma deflexão da agulha magnética naquela *direção* que pode ser predeterminada por meio das leis *eletromagnéticas*. O uso de um barbante úmido, no entanto, não é absolutamente necessário para esta experiência fundamental, mas só é vantajoso se você quiser usar a eletricidade *acumulada* em garrafas de Leiden ou baterias, e é desnecessário se você conectar as pontas do fio do multiplicador de um galvanômetro sensível diretamente aos condutores positivo e negativo de uma máquina eletrostática.[209] Observa-se então da mesma maneira o desvio da agulha na direção predeterminada pelas leis eletromagnéticas durante a rotação da máquina eletrostática. Também não é necessário isolar os fios de maneira melhor do que para os outros circuitos galvânicos. No primeiro caso o uso do barbante úmido era vantajoso já que sem ele a intensidade da corrente implica o perigo de uma confluência das eletricidades divididas que são coletadas na bateria, por trajetórias diferentes daquela através de todos os enrolamentos dos fios de condução. Esse perigo é evitado ao inserir um barbante úmido, que diminui a intensidade da descarga e ainda assim permite que massas muito grandes de eletricidade unam-se entre si em um tempo muito curto através do fio condutor.

Agora, enquanto que o aspecto principal de realizar o experimento fundamental de Oersted com eletricidade comum seja simplesmente o de conduzir massas muito grandes de eletricidade através do multiplicador, enquanto que [o intervalo de] *tempo* no qual a eletricidade

[204] Em alemão: *gemeiner Electricität*.

[205] Ver o Capítulo 12, A Garrafa de Leiden e os Capacitores, de [Ass18b], [Ass18a] e [Ass19].

[206] Ver a Nota de rodapé 81 na página 40.

[207] Em alemão: *einer nassen Schnur*. Essa expressão pode ser traduzida como um barbante, cordão ou fio úmido ou molhado.

[208] Em alemão: *Auslader*. Essa palavra pode ser traduzida como descarregador, pino de descarga ou cabo de descarga.

[209] Em alemão: *Elektrisirmaschine*. Essa expressão pode ser traduzida como máquina eletrostática ou gerador eletrostático. É um gerador eletromecânico que produz eletricidade estática, ou eletricidade em alta tensão, por meio do atrito, ou seja, pelo efeito triboelétrico.

atravessa o fio seja menos importante, a execução bem sucedida do experimento fundamental de Ampère baseia-se essencialmente, em vez disso, em conduzir grandes massas de eletricidade *no menor tempo possível* através do fio condutor, para o qual, portanto, a coleta de eletricidade em baterias e a descarga das baterias por meio de um barbante úmido seja especialmente adequado. A ação de massas iguais de eletricidade é sempre a *mesma* no *primeiro* experimento; o tempo de passagem pode ser menor ou maior, desde que não se torne tão grande a ponto de exigir uma parte considerável do período de oscilação; mas no *último* experimento, de acordo com a Seção anterior, a ação deve ser *inversamente proporcional* ao tempo de passagem. De acordo com isso, parece que a utilização da garrafa de Leiden juntamente com um barbante úmido tem de ser considerado como especialmente favorável, se não até mesmo necessário, para o nosso experimento e, portanto, utilizei ambos em minhas primeiras experiências.

Com essa finalidade conectei duas extremidades dos fios das duas bobinas do dinamômetro, e levei uma das duas outras extremidades do fio ao revestimento externo de uma garrafa de Leiden, [conectei] a outra [extremidade] a um barbante úmido que estava preso ao descarregador isolado. A bateria foi carregada e por último o descarregador foi aproximado do botão metálico que estava conectado com o revestimento interior da bateria.[210] No momento em que aconteceu a descarga da bateria através do barbante úmido e através das bobinas do dinamômetro, o dinamômetro, que anteriormente estava em repouso, foi colocado em *oscilação*, o que frequentemente alcançava um arco de várias centenas de unidades da escala, sendo que vários exemplos serão apresentados a seguir. O observador junto ao telescópio podia determinar facilmente a *magnitude* da primeira elongação e o *lado* em direção ao qual ela ocorria.

Se a experiência era então repetida, ao recarregar a garrafa de Leiden ou bateria da mesma maneira, mas com a diferença que o fio que estava anteriormente ligado ao revestimento externo [da garrafa de Leiden], era ligado [agora] à extremidade do barbante úmido do descarregador, e a outra extremidade do fio era em vez disso desconectada do barbante e ligada à extremidade externa da bateria, então a ação era a *mesma*, não apenas no que diz respeito à magnitude, mas também no que diz respeito à sua direção, de tal forma que, assim como ocorre com correntes comuns, *nenhuma diferença* aconteceu na ação de correntes *positivas* e *negativas*. E essa *direção* da deflexão do dinamômetro como resultado da passagem da corrente de eletricidade comum, aconteceu de ser como aquela que já havia sido *predeterminada* pela lei de Ampère. Por esse meio está provado que o experimento fundamental de Ampère também pode ser feito com uma corrente de eletricidade comum.

Contudo, também era de interesse testar se o uso do barbante úmido era necessário ou dispensável para o sucesso dessa experiência, assim como saber se poderiam existir quaisquer casos nos quais a corrente de eletricidade comum produziria o experimento fundamental de Oersted, mas não o de Ampère, ou se com respeito à eletricidade comum, os dois tipos de ação estão sempre associados. Com essa finalidade, são necessárias séries mais amplas de experiências do que aquelas que realizei até o momento; contudo, algumas poucas experiências preliminares podem ser relevantes nesse meio tempo.

As experiências anteriores foram repetidas, tanto utilizando o barbante úmido e excluindo-o, e também em associação com as experiências *eletromagnéticas*, ao inserir o multiplicador de um galvanômetro magnético no mesmo circuito que incluía as duas bobinas do dinamômetro. A última ação serviu então como um critério e um parâmetro[211] para saber *se* e *quanta* ele-

[210] A bateria aqui se refere à própria garrafa de Leiden.

[211] Em alemão: *Maassstab*. Essa palavra pode ser traduzida como parâmetro, medida, padrão ou escala.

tricidade realmente passou pelo fio do circuito quando a garrafa de Leiden foi descarregada. Quando o barbante úmido não estava presente foi utilizado, para substituir de outra forma a grande resistência que ele oferecia, um fino fio de argentan[212] com 0,3 milímetros de diâmetro, que foi enrolado ao redor de duas colunas de vidro distantes entre si por 3,75 metros, de tal forma que os enrolamentos individuais com 7,5 metros de comprimento estavam aproximadamente a 40 milímetros um do outro, sendo que dessa forma eles estavam completamente isolados entre si. O fio de argentan formava 32 desses enrolamentos, e a extremidade desse fio era agora levada livremente através do ar até a bateria carregada. Na próxima Tabela apresento os resultados de duas séries de experiências para comparação, a saber, uma na qual a corrente passou pelo barbante úmido, a outra na qual o barbante úmido foi excluído do circuito. A bateria elétrica consistia em 4 garrafas, cada uma com aproximadamente 2 pés quadrados de área superficial, que foram carregadas moderadamente forte e tão uniformemente em todas as experiências quanto podia ser revelado pelo eletrômetro de quadrante. O barbante foi feito de cânhamo, com um comprimento de 320 milímetros, 4 milímetros de espessura, sendo mergulhado na água antes de cada experiência.

1. Descarga utilizando o barbante úmido:		
Número	Elongação do galvanômetro	Elongação do dinamômetro
	$= e$	$= \varepsilon$
1.	51,75	206,99
2.	56,26	214,94
3.	61,36	236,98
4.	52,68	216,63
5.	55,31	223,88
2. Descarga utilizando o circuito de fio, sem o barbante:		
6.	7,06	0,85
7.	7,04	0,85

As observações no *galvanômetro* mostraram que, se toda a eletricidade tivesse passado pelo circuito quando o barbante foi usado, apenas uma sétima ou oitava parte dela teria passado sem o barbante, de acordo com o que, supondo que a descarga fosse mais rápida sem o barbante ou, pelo menos, não mais lenta do que com o barbante, uma ação eletrodinâmica de pelo menos a quinquagésima parte da ação eletrodinâmica anterior poderia ser esperada. Contudo, isso não ocorreu, mas em vez disso, como mostra a comparação das observações apresentadas na terceira coluna sob ε, a ação era quase seis vezes menor. Embora essa última ação fosse tão pequena, ela ainda era claramente perceptível.

A influência que a água exerceu quando a eletricidade foi conduzida através dela, parecia ser susceptível a uma investigação mais precisa se um tubo de vidro cheio de água substituísse o barbante úmido. Portanto, um tubo de vidro vazio com um comprimento de 1200 milímetros e 13 milímetros de espessura foi curvado na forma da letra U e preenchido com água, foi inserido entre o descarregador e o restante do circuito, e as experiências anteriores foram repetidas, fornecendo os seguintes resultados, com a mesma carga na bateria que nos casos anteriores, o que prova que a água contida em um tubo de vidro não podia substituir um barbante úmido nesse caso.

[212]Em alemão: *ein feiner Argentandraht*. Argentan, alpaca, prata alemã, prata nova ou metal branco é o nome que se dá a uma liga composta de cobre, níquel e zinco.

Descarga com um tubo de vidro preenchido com água:		
Número	Elongação do galvanômetro	Elongação do dinamômetro
	$= e$	$= \varepsilon$
1.	4,68	3,23
2.	4,50	1,57

Foram em vão todas as medidas de precaução que foram tomadas nessa experiência e na anterior com a exclusão do barbante úmido, para compelir a eletricidade a seguir através da água no tubo, e de lá através do fio de argentan, com o objetivo de diminuir a intensidade da descarga por meio da resistência desses corpos, e para fazer toda a eletricidade seguir através dos fios de condução do instrumento; apenas uma pequena porção da eletricidade parecia de fato adotar essa última trajetória. Se, ao contrário, o tubo de vidro era substituído por um cordão de *fios de vidro*,[213] esse [cordão], quando era molhado externamente, realizava um serviço comparável ao barbante úmido. A descarga através de tal cordão com 500 milímetros de comprimento umedecido com amônia forneceu as seguintes elongações no galvanômetro e dinamômetro, respectivamente:

100,55	70,35 .

Parece que a eletricidade proveniente de uma garrafa de Leiden se espalha especialmente na superfície dos corpos, e um condutor úmido, portanto, tem mais ação quando cobre a superfície desses corpos externamente do que quando está cercado [por esses corpos].

Por último podem ser relevantes os resultados de uma série de experiências realizadas com o barbante úmido nas quais foi utilizada uma bateria de 8 garrafas como aquelas usadas anteriormente, e nas quais foi inserido um barbante de cânhamo com 7 milímetros de espessura e 2 000 milímetros de comprimento; sendo que, contudo, esse comprimento foi gradualmente encurtado para 125 milímetros.

Comprimento do barbante	Elongação do galvanômetro $= e$	Elongação do dinamômetro $= \varepsilon$	$\frac{e^2}{\varepsilon}$
2 000 mm	79,9	65,6	97,3
1 000 mm	76,6	153,0	38,3
500 mm	82,3	293,8	23,0
250 mm	87,3	682,0	11,2
125 mm	93,2	fora da escala	
250 mm	82,9	609,1	11,3
500 mm	95,6	422,8	21,6
1 000 mm	95,8	210,1	43,7
2 000 mm	101,5	98,0	105,0

Pode ser observado além disso que quando o barbante foi mergulhado em *ácido sulfúrico diluído*, uma descarga da bateria forneceu uma deflexão de 83 unidades da escala no galvanômetro, enquanto que a deflexão no próprio dinamômetro foi muito grande para ser medida na escala quando o comprimento do barbante era de 2 000 milímetros.

[213] Em alemão: *einer Schnur von Glasfäden*. Essa expressão pode ser traduzida como cordão ou filamento de fios de vidro.

Vê-se facilmente que um amplo campo de experiências interessantes é aberto dessa maneira, o qual não dei continuidade, devido à necessidade de submeter a quantidade de eletricidade na bateria utilizada para as experiências a uma medição precisa, de acordo com o modelo fornecido por Ries[214] em suas experiências elétricas, para a qual não tenho atualmente à minha disposição o equipamento apropriado e, portanto, estou adiando esse trabalho para quando tiver as condições favoráveis.

Contudo, enquanto isso a última série de experiências realizadas já mostra, além da *intensidade* das ações, um tal grau de *regularidade*, que torna-se provável que, ao descarregar a bateria de Leiden por meio de um barbante úmido, de fato *toda a eletricidade* atravessa o fio condutor e forma nele uma corrente que pode ser comparável em continuidade à corrente de uma bateria galvânica.[215] Se esse fosse o caso, poderíamos fazer uma aplicação importante das observações anteriores, ao aplicá-las às regras desenvolvidas na Seção 6.13, com o objetivo de determinar a *duração* da corrente que pode ser considerada como igual à duração da *faísca de descarga*,[216] de acordo com uma *unidade absoluta de tempo*. É bem conhecido que Wheatstone realizou a determinação da duração da faísca de descarga de uma maneira completamente diferente,[217] e seria interessante comparar entre si os resultados encontrados dessas diferentes maneiras. Para reduzir a uma *unidade de tempo absoluta* a *unidade de tempo relativa*, que já incluímos nas próprias experiências anteriores na coluna designada por $e^2\varepsilon$, é necessário, de acordo com a página[218] 124, apenas uma experiência com uma corrente constante atravessando os dois instrumentos, sendo que a realizei para esse propósito, e encontrei que os valores para e^2/ε na Tabela anterior têm de ser divididos por

$$1\,188\ ,$$

para obter a duração da corrente em *segundos*. A próxima Tabela foi calculada de acordo com isso:

Comprimento do barbante	Duração da faísca
Milímetros	Segundos
2 000	0,081 9
1 000	0,032 2
500	0,019 3
250	0,009 4
250	0,009 5
500	0,018 2
1 000	0,036 8
2 000	0,088 3

ou em valores médios:

[214]Peter Theophil Rieß (1804-1883).

[215][Nota de Wilhelm Weber:] As experiências eletrodinâmicas podem ser arranjadas com *dois dinamômetros* de tal forma que a eletricidade é conduzida *sucessivamente* em um [dinamômetro], *simultaneamente* no outro [dinamômetro], através das bobinas fixa e suspensa. Ao comparar os resultados com os dois instrumentos, quando uma bateria é descarregada através deles, seria possível investigar mais precisamente a continuidade ou descontinuidade da corrente.

[216]Em alemão: *Entladungsfunkens*.

[217]Charles Wheatstone (1802-1875). Ver [Whe34].

[218][Web46, pág. 114 das *Obras* de Weber].

Comprimento do barbante	Duração da faísca
Milímetros	Segundos
2 000	0,085 1
1 000	0,034 5
500	0,018 7
250	0,009 5

Segue-se que a *duração da faísca é quase proporcional ao comprimento do barbante*, como prova a próxima visão geral dos valores *calculados* e suas diferenças em relação ao valores *observados*:

Comprimento do barbante	Duração calculada da faísca	Diferença do valor observado
2 000	0,081 6	− 0,003 5
1 000	0,040 8	+ 0,006 3
500	0,020 4	+ 0,001 7
250	0,010 2	+ 0,000 7

Se compararmos isto com o resultado encontrado por Wheatstone, segundo o qual a duração da faísca nas descargas através de condutores puramente metálicos é infinitamente pequena em comparação com a duração encontrada aqui, então isto está em perfeita concordância com a proporcionalidade da duração da faísca e o comprimento do barbante de descarga úmido encontrado aqui. De qualquer forma, merece atenção particular o fato de que o *movimento da eletricidade na água* ocorre tão *lentamente*, que o tempo que ele necessita para [percorrer] a curta trajetória de 2 metros chega a aproximadamente 1/12 segundos. Além da objeção deduzida da descontinuidade das correntes de eletricidade comum (que já foi discutido anteriormente, a qual pode ser diminuída em grande parte ou eliminada completamente por meio da influência da água), poderia, é claro, ser contestado contra a aplicação da regra pela qual essas determinações temporais foram feitas, que a corrente é mais intensa nos primeiros momentos, e *decresce gradualmente*, enquanto que a regra anterior só pode ser aplicada com precisão quando a corrente já possui a mesma intensidade durante sua curta duração. Se, contudo, encontrarmos empiricamente, também nesse caso, não a duração verdadeira, mas aquela duração que corresponderia à *intensidade média de corrente*, o valor da determinação perderá pouco devido a isso, já que geralmente haverá maior interesse em conhecer a última duração, do que a duração anterior. Deve também ser observado que pelos mesmos motivos, uma diferença similar ocorreu na determinação de Wheatstone da duração da faísca, porque a faísca é estendida em uma linha que, como resultado dessa diminuição, vai se perdendo gradualmente sem um limite preciso.

6.15 Velocidade da Distribuição de Corrente e a Força Eletromotriz de um Circuito

Ainda vão ser apresentadas aqui duas investigações relacionadas à *teoria elétrica pura* para as quais a utilização do dinamômetro abre um novo campo; contudo, não entrarei mais detalhadamente nessas investigações agora, já que ainda estão faltando as experiências necessárias para demonstrar conjuntamente o método e os resultados obtidos com elas. Essas duas investigações relacionam-se com:

1. a determinação da velocidade da distribuição de corrente,[219] para a qual até o momento só estão disponíveis alguns poucos experimentos de Wheatstone,[220] os quais, contudo, de acordo com as declarações do próprio Wheatstone, ainda não levaram a quaisquer resultados confiáveis;

2. a determinação da força eletromotriz[221] de um circuito galvânico, independente da polarização de suas placas.

A *primeira* aplicação necessita que a bobina bifilar seja separada da bobina fixa por meio de longos fios condutores, e nesse longo circuito é produzida uma corrente, cuja direção muda tão rapidamente quanto a rotação do espelho de Wheatstone. O uso do dinamômetro, em comparação com o método de Wheatstone, tem a vantagem de utilizar correntes galvânicas em vez da [corrente de] eletricidade comum, e o circuito nunca é interrompido, o que era necessário para Wheatstone para produzir a faísca. A *segunda* aplicação é baseada na medição de correntes momentâneas de acordo com a Seção 6.13.

6.16 Aplicação do Dinamômetro para a Medição da Intensidade das Vibrações Sonoras

Ainda falta descrever uma aplicação do dinamômetro em pesquisas de um outro domínio da física, que parece ter um interesse especial associado a ele, já que ele mostra claramente em um aspecto específico o que pode ser feito com esse instrumento. Possuímos *galvanoscópios* extremamente refinados, com os quais estamos em condições de descobrir e investigar até mesmo as correntes mais fracas encontradas na natureza. Precisamos apenas nos lembrar o trabalho refinado de Melloni,[222] para dar a maior importância na ciência em geral à utilização desses instrumentos refinados e aos vestígios de movimentos elétricos que podem ser encontrados com eles. Contudo, apesar desse refinamento nos instrumentos, em muitos casos não foi alcançado sucesso em demonstrar correntes elétricas em todos os lugares onde supomos que elas existam, talvez porque esses instrumentos, apesar de seu refinamento, não tenham sido adequados para esses propósitos. Essa razão merece toda consideração, ao observar que *um* tipo de corrente pode ser demonstrada e descrita exatamente, para o qual nem mesmo os melhores instrumentos podem, por sua própria natureza, ser afetados. Isso ocorre quando estamos lidando com uma corrente alternada, a qual em intervalos temporais sequenciais muito curtos *modifica constantemente sua direção*. As ações opostas alternadas da corrente nas agulhas magnéticas mais sensíveis se cancelam, caso o magnetismo da agulha permaneça sempre o mesmo. Os fenômenos observados por Poggendorff (*Annalen*, 1838, Vol. LXV,

[219] Em alemão: *Geschwindigkeit der Stromverbreitung*. Essa expressão pode ser traduzida como *velocidade da distribuição de corrente* ou *velocidade da propagação da corrente*. Weber está se referindo aqui à velocidade de propagação ao longo do circuito de uma perturbação na corrente elétrica, ou à velocidade de propagação ao longo do circuito de uma perturbação na distribuição de eletricidade livre. Ver também a Nota de rodapé 46 na página 30. Weber e Kirchhoff foram os primeiros cientistas a deduzir teoricamente, em 1857, com base na eletrodinâmica de Weber, que uma onda elétrica vai se propagar com a velocidade da luz no vácuo ao longo de um circuito com resistência desprezível, [Kir57b] com traduções para o inglês em [Kir57a] e [Kir21b]; [Kir21b] com tradução para o inglês em [Pog21]; [Web64] com tradução para o inglês em [Web21a]. Ver ainda [Ass21a] e [Ass21c].

[220] Ver a Nota de rodapé 217 na página 129.

[221] Em alemão: *der elektromotorischen Kraft*.

[222] Macedonio Melloni (1798-1854).

pág. 355 e seguintes),[223] nos quais isso parece não ocorrer, se originam de uma mudança no magnetismo da agulha e, dada uma mudança muito acelerada na corrente, desapareceriam novamente. Tais correntes, cuja direção muda muito rapidamente, podem assim existir amplamente na natureza, sem que tenhamos a menor noção de suas existências, já que não possuímos os meios de descobri-las. E não é improvável que tais correntes existam, pois o movimento da eletricidade nessas correntes só se diferenciaria do movimento da eletricidade nas correntes usuais, pelo fato de que o primeiro movimento consiste em uma *oscilação*, enquanto que no último, o movimento da eletricidade é *progressivo*. Como o movimento progressivo da eletricidade ocorre tão abundantemente na natureza, não é óbvio o motivo pelo qual, dada uma mobilidade tão grande, também não devessem ocorrer condições ocasionais que favoreçam um movimento vibratório. Se, por exemplo, as ondulações luminosas exercerem uma ação sobre os fluidos elétricos, e se tiverem o poder de perturbar seu equilíbrio, seria certamente esperado que essas *ações* das ondulações luminosas estariam estruturadas temporalmente com a mesma periodicidade que as *próprias ondulações da luz*, de tal forma que o resultado consistiria em uma *vibração elétrica* que, contudo, não somos capazes de descobrir com nossos instrumentos. Ora, as ondulações da luz ocorrem tão rapidamente que, se as vibrações que elas produzem seguem uma alteração igualmente rápida, dificilmente poderíamos esperar observar suas ações com qualquer instrumento. Contudo, vibrações mais lentas também ocorrem na natureza, por exemplo, vibrações acústicas e, portanto, surge a questão de saber se não existem na natureza movimentos elétricos cuja origem é devida a essas vibrações e, se existirem tais movimentos, de que maneira eles poderiam ser descobertos e investigados.

Quero dar pelo menos um exemplo aqui de tais *vibrações elétricas* produzidas por vibrações sonoras, e fornecer a prova real de como tais vibrações elétricas podem ser observadas e investigadas com a ajuda do *dinamômetro*, e como as ações mensuráveis dessas vibrações elétricas podem, por sua vez, ser utilizadas para elucidar as vibrações sonoras de onde eles se originam e, dessa forma, abrir um novo caminho para muitas investigações acústicas, para as quais ainda não temos meios adequados de medir a *intensidade das vibrações sonoras*.

De fato, a peculiaridade do dinamômetro que mais o caracteriza e o distingue de todos os outros galvanômetros, consiste no fato de que ele é *indiferente* à *direção* da corrente atuando sobre ele, enquanto que os outros galvanômetros sofrem ações opostas, dadas direções opostas das correntes. Já foi chamada atenção a esse fato na Seção 6.13 anterior. Podemos expressar isso de forma resumida dizendo que o dinamômetro, com respeito às correntes constantes, fornece uma medida do *quadrado da intensidade da corrente*, enquanto que os outros galvanômetros fornecem uma medida da própria intensidade de corrente.

A partir dessa propriedade característica do dinamômetro, é agora óbvio que as ações rapidamente sucessivas das correntes opostas não se cancelam uma à outra, como ocorre em um galvanômetro eletromagnético, mas são em vez disso aditivas; e que, consequentemente, em virtude de sua natureza o dinamômetro encontra seu verdadeiro propósito ao exibir tais correntes que são inobserváveis de outra forma.

Agora obviamente as *vibrações sonoras* na maioria dos casos estão contidas em fronteiras tão estreitas, quase microscópicas, que dificilmente podemos esperar utilizá-las para produzir vibrações elétricas cujas fronteiras tenham a largura necessária para poder registrar uma ação no dinamômetro. Contudo, se calcularmos as velocidades absolutas com as quais os corpos ressonantes se deslocam no meio de suas vibrações, ocorre que essas velocidades, considerando a curta duração das vibrações, não são totalmente desprezíveis, apesar das pequenas curvas

[223][Pog38].

de oscilação, alcançando frequentemente um pé ou mais em um segundo. Realizei uma experiência baseado nisso que pareceu ser a primeira capaz de produzir resultados.

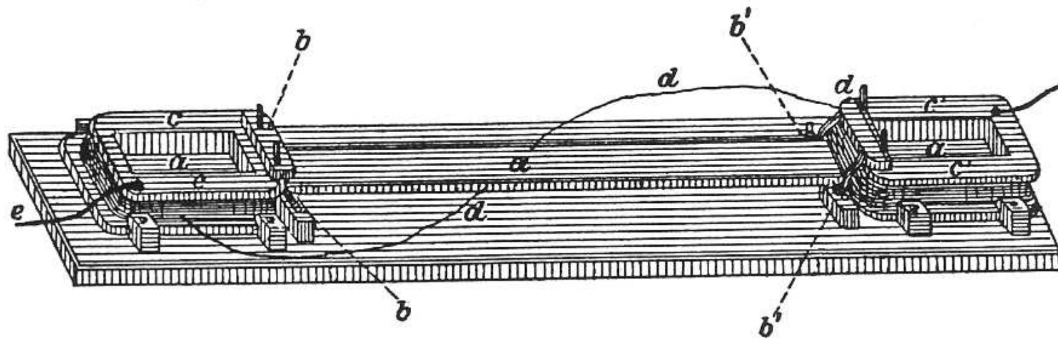


Fig. 13.

Preparei uma haste de aço ressonante *aaa*,[224] Figura 13, deixei-a endurecer, magnetizei-a e prendi-a nos pontos finais b, b, b', b' de suas linhas nodais entre as pontas dos parafusos como eixos de rotação, como descrevi nos *Annalen* de Poggendorff, 1833, Vol. XXVIII, pág. 4,[225,226] e de tal forma, que ela se dividiu em três seções vibrando simultaneamente em direção a lados opostos. As duas seções finais faziam suas vibrações simultaneamente na mesma direção, alternadamente para cima e para baixo. O magnetismo livre, que está espalhado nestas hastes, pode ser pensado como estando distribuído na superfície da haste, de acordo com a distribuição ideal de Gauss, a qual representa a distribuição real no que diz respeito a todas as ações externas;[227] e, especificamente no caso de magnetização intensa, o magnetismo Norte livre pode ser pensado como estando quase que totalmente na superfície de uma seção final vibrante, o magnetismo Sul livre estando quase que totalmente na superfície da outra seção final vibrante e, na verdade, estará mais próximo da extremidade quanto maior for a concentração, isto é, exatamente mais [concentrado] nos locais onde as vibrações sonoras são maiores. Enrolei essas duas seções finais com indutores fortes *ccc* e $c'c'c'$ feitos de finos fios de cobre os quais, contudo, nunca tocavam a haste, para não inibir suas vibrações. Além disso, havia um intervalo nos enrolamentos nos lados dos indutores voltados um para o outro, através dos quais as extremidades da haste foram inseridas nos indutores. Os enrolamentos dos indutores eram paralelos entre si e estavam em um plano perpendicular às vibrações sonoras da haste ressonante. Os dois indutores estavam conectados entre si com duas de suas extremidades de fio *dddd*, de tal forma que eles formavam espirais enroladas em direções opostas. Suas duas extremidades de fio *ee* e $e'e'$ foram conectadas com duas extremidades de fio das bobinas fixa e móvel do dinamômetro, cujas duas outras extremidades de fio foram conectadas entre si. O dinamômetro estava completamente em repouso. Depois que tudo foi preparado dessa forma, a haste ressonante foi colocada em forte vibração por meio de uma batida brusca em seu ponto central com um martelo macio. Houve imediatamente uma deflexão da bobina bifilar de 20 a 30 unidades da escala, e então, quando os máximos e mínimos da curva de vibração da bobina bifilar, que passou a vibrar a partir de então, foram registrados, observou-se que o estado de repouso calculado a partir disso, ao redor do qual ocorriam as vibrações, foi alterado, mas que ele

[224] Em alemão: *einen Klangstab von Stahl aaa*. Essa expressão pode ser traduzida como "uma haste de aço ressonante" ou "uma barra de som feita de aço".

[225] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. I, pág. 367.

[226] [Web33].

[227] [Gau39a] com traduções para o inglês em [Gau41a] e [GT14], e tradução para o espanhol em [Gau21d].

rapidamente retornou novamente para seu estado original na medida em que as vibrações sonoras diminuíam em intensidade. Observo que levei o alongamento da bobina bifilar para várias centenas de unidades da escala, deixando a haste ressonante vibrar apenas enquanto o alongamento estivesse crescendo, depois amortecendo a haste ressonante enquanto a bobina bifilar oscilava para trás novamente, batendo na haste ressonante novamente assim que a bobina bifilar começasse a se mover na direção original, e assim por diante.

Dificilmente precisa ser mencionado, que se são para ser obtidas determinações mais precisas das intensidades das vibrações sonoras de acordo com o método apresentado, a haste ressonante não pode ser colocada em vibração por meio de uma batida de martelo, já que a intensidade das vibrações produzidas dessa forma diminui muito rapidamente e desaparece quase completamente; sendo que elas precisam ser mantidas em um estado de constante vibração por um tempo maior por meio de uma intervenção ajustada continuamente.

Pode ser presumido com segurança, que as vibrações elétricas que estão demonstradas de fato, ocorrem nas condições em que fizemos nossas observações; portanto, era apenas uma questão de testar o método pelo qual tais vibrações são tornadas *observáveis*. Contudo, após esse método ter sido provado, podemos desenvolvê-lo, e é certo que a utilização desse método vai levar à descoberta de vibrações elétricas sob condições previamente inimagináveis. Para ilustrar a multiplicidade desses fenômenos, pode ser citada a seguinte experiência. Se uma intensa corrente galvânica flui perto de um fio vibratório, que faz parte de um circuito fechado sobre si mesmo, correntes positivas e negativas são alternadamente induzidas no circuito como resultado dessas vibrações, cujas intensidades podem ser medidas com o dinamômetro, similarmente à maneira como ela é induzida pela haste magnetizada vibrante.

6.17 Sobre as Várias Construções do Dinamômetro

Existem essencialmente *três* construções diferentes que podem ser dadas ao dinamômetro, sendo que todas elas são adequadas para medições exatas e fornecem vantagens adicionais sob condições variadas. Além da *primeira* construção que foi utilizada até agora, para começar apresenta-se quase que automaticamente uma *segunda* construção, já que ela já é utilizada frequentemente, com relação às suas componentes essenciais, para observar os efeitos do magnetismo terrestre sobre um condutor. Especificamente para esse fim, um condutor enrolado em círculos, juntamente com a bateria de onde emana a corrente, foi dependurado em uma linha ou fio, como um ímã, e foi observado o torque que a Terra exerce sobre esse circuito fechado do mesmo jeito como ela atua sobre uma agulha magnética suspensa. De fato, esse instrumento fornece um condutor giratório, cujas oscilações e desvios podem ser observados com tanto refinamento quanto aqueles de nossa bobina bifilar, sendo que só é necessário envolver a bateria suspensa com um multiplicador fixo, através do qual a corrente também flui, para completar o dinamômetro. Adicione agora a isso o fato de que a descoberta de baterias *constantes* por Daniell[228] e Grove[229] preparou o caminho para aplicações mais refinadas de um tal instrumento, o que antes era impedido pela variabilidade das correntes. Para esse propósito um pequeno elemento de Grove é particularmente adequado, o qual, considerando

[228]John Frederic Daniell (1790-1845). Essa foi a primeira pilha capaz de manter uma corrente elétrica constante em um intervalo de tempo razoavelmente longo, sendo construída em 1836. Essa bateria elétrica é constituída de uma placa de zinco em uma solução de $ZnSO_4$ e uma placa de cobre em uma solução de $CuSO_4$. As duas soluções são ligadas por uma ponte salina ou por uma parede porosa de barro. Fios são conectados às placas dos metais.

[229]Ver a Nota de rodapé 115 na página 61.

suas pequenas dimensões e baixo peso, fornece uma corrente constante e razoavelmente intensa. Se forem adicionados um espelho, telescópio e escala, poderão ser feitas as observações mais refinadas com esse instrumento. A Figura 14 apresenta um tal aparelho, como utilizado por mim para esse propósito. A é o fio enrolado na forma de um anel, cujas extremidades estão conectadas por meio dos acoplamentos de latão ab e $a'b'$ aos polos de platina e zinco do pequeno elemento B de Grove feito pelo fabricante de instrumentos Kleinert de Berlim. Esse elemento está apoiado sobre um suporte de madeira cuja parte superior tem um círculo de torção C ao qual estão presos em D os filamentos de suspensão.

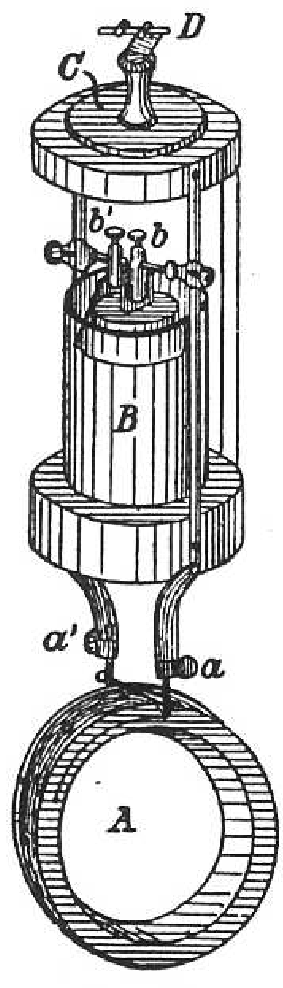


Fig. 14.

Não interessando o quão conveniente possa ser essa construção do dinamômetro para alguns propósitos especiais, contudo ela ainda está longe de substituir a primeira construção, já que lhe faltam *duas* propriedades que o dinamômetro com *bobina bifilar* possui, e que estão baseadas no fato de que a corrente atravessando a bobina bifilar pode ser conduzida além disso tanto através da bobina fixa servindo como um multiplicador, quanto através de qualquer outro condutor. A *primeira* propriedade consiste no fato de que esse *dinamômetro* pode ser utilizado junto com um *galvanômetro*, por meio do qual pode ser obtida uma medição independente da intensidade da corrente na bobina bifilar, o que não ocorre com o outro instrumento, já que nele a corrente da bateria suspensa não pode ser conduzida através do multiplicador de um *galvanômetro*. Contudo, as observações simultâneas no *galvanômetro* e *dinamômetro* nos permitem reduzir as ações eletrodinâmicas à *mesma intensidade de corrente*, como ocorreu repetidamente nas experiências anteriores. A falta dessa propriedade não é superada completamente pelo uso de baterias constantes, já que mesmo nessas baterias a intensidade da corrente ainda está sujeita a variações consideráveis, o que não pode ser desconsiderado nas determinações mais precisas.

A *segunda* propriedade consiste no fato de que, ao deixar as correntes a serem investigadas com o *dinamômetro* atravessarem as *duas* bobinas, a saber, a bobina fixa e a giratória, podemos determinar o *quadrado da intensidade da corrente*, grandeza essa que é independente da *direção* da corrente. A característica peculiar do instrumento foi baseada nesse fato, o que tornou possível, em associação com o galvanômetro eletromagnético, fornecer os elementos necessários para o conhecimento das correntes *momentâneas*, ver a Seção 6.13 anterior. O outro instrumento cuja bobina rotatória forma uma bateria suspensa, auto-contida, também não tem essa propriedade; já que aqui as diferentes correntes a serem *investigadas* só podem atravessar o fio condutor da bobina *fixa*, enquanto que a corrente na bobina *giratória* permanece inalterada, de onde ocorre que a ação, assim como ocorre com o galvanômetro eletromagnético, é proporcional à intensidade da própria corrente e, consequentemente, o instrumento só é capaz de ter o papel de um galvanômetro eletromagnético, mas não pode suplementá-lo.

Procedo agora para a *terceira* construção do dinamômetro que, naquilo que ela compartilha as propriedades mais essenciais da primeira construção, é apropriado para fornecer às medições eletrodinâmicas uma expansão ainda maior, especialmente nos casos em que a *primeira* construção nos falha devido à necessária finura dos fios de suspensão através dos quais a corrente é conduzida.

Essa terceira construção é baseada no mesmo princípio que desenvolvi nos *Commentat. Soc. Reg. Sc. Gottingensis recentiores*, Vol. VIII,[230,231] com o propósito de descrever uma *balança*[232] sem atrito, totalmente giratória, a saber, no princípio de compensação entre a *força da gravidade* e a *força elástica*. Dependurei então a viga horizontal da balança em duas molas verticais elásticas. Obviamente essas molas se inclinaram quando a viga da balança foi girada e assim, quanto mais a viga era girada, mais elas procuravam *inibir* a rotação por meio de suas *forças elásticas*; mas se a viga da balança era girada em torno de um eixo inferior ao seu centro de gravidade, então quanto mais a viga da balança era girada, mais a *força da gravidade* tentava promover a rotação, e esse dispositivo podia ser feito de tal forma que essa ação *inibidora* da *força elástica* e essa ação *promotora* da *força da gravidade* mantivessem uma à outra em equilíbrio e, consequentemente, a viga da balança poderia permanecer em equilíbrio não apenas na posição horizontal, mas também na posição inclinada e, sem ser impedida pelo atrito, poderia mudar de uma dessas posições para outra ao menor impulso.

Utilizei agora esse tipo de viga de balança *compensada* para o dinamômetro e, por esse meio, substituí a bobina giratória, fazendo o mesmo uso de duas molas de suspensão para alimentar e remover a corrente, assim como faço para os dois fios de suspensão. Essas molas são especialmente preferíveis aos fios finos, quando temos correntes de alta intensidade, que não devem ser conduzidas por fios finos. Com essas correntes, é conveniente conduzi-las por um circuito que seja o mais espesso e curto possível; portanto, a viga da balança pela qual essa corrente deve passar pode consistir em uma haste moderadamente longa

[230] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. I, pág. 497.
[231] [Web41a].
[232] Em alemão: *Wage*.

sustentada por essas duas molas, mas na qual um espelho é fixado para uma observação mais precisa. Finalmente, a bobina *fixa* é substituída pelo mesmo motivo com uma outra barra *fixa* moderadamente longa, pela qual a corrente galvânica é conduzida da mesma forma, e que atua então sobre a barra *giratória*, desviando-a, como uma balança. A sensibilidade[233] desse instrumento depende primariamente das duas barras (a fixa e a giratória) serem colocadas paralelas e a uma pequena distância entre si. Projetei esse instrumento principalmente para fornecer uma ampla gama de experiências eletrodinâmicas com eletricidade *comum*, ao tornar dispensável as condições especiais que eram necessárias para alcançar uma descarga realmente confiável de garrafa de Leiden através dos vários enrolamentos das duas bobinas do *primeiro* dinamômetro. Este último instrumento ainda não foi construído com a perfeição necessária para tal série de experimentos.

Antes de concluir essa Seção sobre a construção do dinamômetro, desejo acrescentar uma outra observação sobre essa transformação em um *galvanômetro magnético*. Já mencionei que a bateria *suspensa* totalmente auto-contida usada na *segunda* construção descrita anteriormente foi usada inicialmente em experiências *eletromagnéticas*, especialmente para observar a influência do magnetismo terrestre sobre um condutor com corrente. Com essa bateria suspensa auto-contida, se fôssemos capazes de confiar completamente na constância de sua corrente, todas as experiências e medições sobre o magnetismo terrestre poderiam ser realizadas exatamente como ocorreu com o magnetômetro e, nesse aspecto, mereceria o nome de *magnetômetro galvânico*. Por outro lado, nosso primeiro dinamômetro poderia ser usado como um *galvanômetro magnético*, o que oferece grandes vantagens, mesmo em comparação com um magnetômetro equipado com um multiplicador, se for uma questão de determinação *absoluta*, mas não meramente relativa, da intensidade de corrente. O condutor de corrente está em uma posição fixa com relação ao magnetômetro equipado com um multiplicador, e o ímã pode ser girado; contudo, não ocorre qualquer influência essencial na ação quando invertemos essa relação e fixamos o ímã, enquanto o condutor é giratório. A bobina de nosso dinamômetro, suspensa por dois fios, pode servir agora como o condutor giratório, e a própria Terra pode ser usada como o ímã fixo (que representa aqui a bobina fixa). Contudo, se a Terra tem de realizar de fato esse papel, a bobina bifilar tem de ser orientada de forma diferente, a saber, em vez de ser orientada como um *magnetômetro de declinação*, como ocorreu anteriormente, de tal forma que seu eixo é paralelo ao meridiano magnético, ela tem de ser orientada, como no *magnetômetro de intensidade*, de tal forma que seu eixo seja perpendicular ao meridiano magnético. Ela pode então ser chamada de um *galvanômetro bifilar magnético*. Esse instrumento simples apresenta então grandes vantagens para a determinação *absoluta* da intensidade de corrente, precisamente porque a posição e separação entre as componentes individuais do fio condutor comparada com as componentes individuais dos ímãs não mais precisam ser levadas em consideração, devido à grande distância na qual atua o magnetismo terrestre e, portanto, com o objetivo da determinação absoluta da intensidade de corrente, além do conhecimento do magnetismo terrestre, da deflexão, do período de oscilação e do momento de inércia, só é necessário o conhecimento de um único elemento, a saber, a *área* envolvida pelo fio, como já discuti nos *Resultaten aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins im Jahre 1840 — Resultados das Observações da Associação Magnética no Ano de 1840*, pág. 93,[234,235] onde apresentei várias dessas determinações de intensidade de acordo com as unidades absolutas que foram feitas com esse

[233]Em alemão: *Empfindlichkeit*.

[234][Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 15.

[235][Web41f] com tradução para o inglês em [Web21i]. Ver também [Web42].

instrumento.

Até agora a investigação teve principalmente o objetivo de determinar *experimentalmente* as forças eletrodinâmicas e expressar essas forças em termos de unidades *absolutas*, reduzidas às dimensões de espaço, tempo e massa. Essa foi a motivação para a construção dada aos instrumentos que, como no caso do magnetômetro de Gauss, requer uma instalação mais permanente e um espaço maior do que é necessário para os outros aparelhos físicos, nos quais a escala de medição é montada diretamente no instrumento a ser observado. Dada a construção apropriada, foi possível realizar séries individuais maiores de experiências com precisão; contudo, essa construção não é alterada facilmente de novo e ajustada a propósitos de diferentes tipos. Nesse aspecto reconheço, como uma circunstância especialmente favorável, que o espaço do Instituto de Física de Leipzig era totalmente vantajoso para essa construção; contudo, como já mencionado diversas vezes, tive de me limitar no momento a testes experimentais preliminares, já que nem todas as construções puderam ser feitas adequadamente da mesma forma. Em consideração a essas limitações externas, que talvez existam ainda mais em outros lugares do que aqui, e como muitos pesquisadores estão menos acostumados a fazer observações com tais instrumentos, solicitei ao construtor local de instrumentos, o Sr. Leyser, a produzir instrumentos portáteis que tivessem um uso manual mais fácil e conveniente, sem dispositivos catóptricos, feitos da maneira usual com ponteiro e escala circular subdividida, que são suficientes para realizar a maioria das experiências e para medições comuns. Chamo a atenção para esses instrumentos menores para aqueles que desejam participar de experiências similares, sob condições que não permitem a utilização dos instrumentos descritos.

V - Sobre a Conexão entre os Fenômenos Eletrostáticos e Eletrodinâmicos com Aplicação para Medições Eletrodinâmicas

6.18 Sobre o Significado da Lei Fundamental Geral da Ação Elétrica

Como a lei fundamental da eletrodinâmica apresentada por Ampère foi confirmada por medições precisas, os *fundamentos da eletrodinâmica* talvez pudessem ser considerados como estabelecidos definitivamente. Esse seria o caso, se toda pesquisa adicional consistisse em nada mais além de desenvolver as aplicações e resultados que podem ser baseados nessa lei. Pois, como também se poderia perguntar sobre a *conexão* que existe entre as leis fundamentais *eletrodinâmica* e *eletrostática*, contudo, por mais interessante que isso seja, e por mais importância que tenha para uma análise mais precisa do conhecimento da *natureza dos corpos*, tendo pesquisado essa conexão, nada mais poderia resultar disso para explicar os *fenômenos eletrodinâmicos* se eles realmente já tivessem encontrado sua explicação completa na lei fundamental de Ampère. Em resumo, não seria alcançado um progresso essencial para a própria eletrodinâmica ao reduzir seus fundamentos aos fundamentos da eletrostática, não interessando quão importante e interessante tal redução pudesse ser em outros aspectos.

Contudo, essa visão das conclusões que os fundamentos da eletrodinâmica alcançou através da lei fundamental de Ampère e de sua confirmação pressupõe essencialmente que *todos* os fenômenos eletrodinâmicos são de fato explicados por essa lei. Se esse não fosse o caso, se existisse qualquer classe de fenômenos que ela não explica, então aquela lei teria de ser considerada meramente como uma lei provisória, a ser substituída no futuro por uma lei definitiva, universalmente e verdadeiramente válida, aplicável a todos os fenômenos eletrodinâmicos. E nesse caso poderia muito bem ocorrer que essa lei definitiva seria obtida tentando em primeiro lugar reduzir a lei de Ampère a uma lei mais geral que englobasse a eletrostática. A saber, seria possível que, sob condições diferentes, a lei dos outros fenômenos eletrodinâmicos, que não poderiam ser deduzidos da lei de Ampère, emergiriam das mesmas fontes de onde foram deduzidas tanto a lei eletrostática quanto a lei de Ampère, e que então o fundamento da eletrodinâmica em sua maior generalidade seria representado não de forma isolada por si própria, mas apenas como dependente da lei mais geral da eletricidade, englobando os fundamentos da eletrostática.

Agora, de fato, existe uma tal classe de fenômenos eletrodinâmicos que, como assumimos por todo esse Tratado, dependem das interações que as cargas elétricas exercem entre si *à distância*, e que não estão incluídos na lei de Ampère e que não podem ser explicados por ela, a saber, os fenômenos da *indução eletrovoltaica*[236] descobertos por Faraday, isto é, a *geração de uma corrente* em um fio condutor através da influência de uma corrente que é aproximada dele; ou a *geração de uma corrente* em um fio condutor, quando aumenta ou diminui a intensidade da corrente em um outro fio condutor próximo.

A lei de Ampère não deixa nada a desejar quando ela lida com as interações entre fios condutores cujas correntes possuem uma *intensidade constante*, e que estão *parados em suas posições* mútuas; contudo, tão logo ocorram mudanças na intensidade da corrente, ou os fios condutores sejam movidos entre si, a lei de Ampère não fornece uma explicação completa e

[236] Ver a Nota de rodapé 173 na página 105.

suficiente; a saber, nesses casos, ela apenas torna conhecidas as ações que ocorrem no elemento *ponderável* de fio,[237] mas não [tornam conhecidas] as ações que ocorrem na eletricidade *imponderável*[238] contida nesse elemento. Portanto, segue-se disso que essa lei [de Ampère] vale aqui apenas como uma lei particular, e pode apenas ser considerada provisoriamente como uma lei fundamental; sendo ainda necessária uma lei definitiva com validade realmente geral, aplicável a todos os fenômenos eletrodinâmicos, para substitui-la.

Agora é possível determinar parcialmente os fenômenos da *indução eletrovoltaica* com antecedência; contudo, essa determinação não é baseada na lei de Ampère, mas na lei de indução magnética, que pode ser deduzida diretamente da experiência, e que até o momento não teve uma conexão intrínseca com a lei de Ampère. E essa determinação prévia da indução eletrovoltaica pode de fato prosseguir de acordo com uma mera analogia, embora não através de uma dedução estrita. Como tal analogia pode de fato fornecer um guia excelente para as investigações científicas, mas como tal precisa ser considerado insuficiente para uma explicação teórica dos fenômenos, seque-se que os fenômenos da indução eletrovoltaica ainda não possuem uma explicação teórica e, em particular, ainda não receberam tal explicação a partir da lei de Ampère. Além disso, essa determinação prévia dos fenômenos da indução eletrovoltaica estendem-se meramente àqueles casos nos quais a eficácia indutiva de uma corrente, em analogia com sua eficácia eletrodinâmica, pode ser substituída pela eficácia de um ímã. Entretanto, isso pressupõe *correntes fechadas* de forma imutável. Contudo, pode-se exigir da lei fundamental da indução eletrovoltaica, com o mesmo direito que Ampère teve com a lei fundamental da interação entre elementos de corrente constante, que ela contenha todos os casos, fornecendo uma determinação geral para a interação entre quaisquer dois dos menores elementos de corrente, a partir da qual são compostas e podem ser calculadas todas as ações mensuráveis .

Então, se lidarmos com a conexão entre os fenômenos *eletrostáticos* e *eletrodinâmicos*, não precisamos simplesmente ser levados por seu interesse científico geral a penetrar nas relações existentes entre os vários ramos da física, mas além e acima disso, podemos nos colocar um objetivo mais claramente definido, que tem a ver com a *determinação experimental da indução eletrovoltaica por meio de uma lei mais geral da teoria elétrica pura.* Essas medições da indução eletrovoltaica pertencem então às *medições eletrodinâmicas* que formam o tema principal desse Tratado e que, quando estiverem completas, também precisam incluir os fenômenos *eletrovoltaicos.* Contudo, é auto-evidente que estabelecer tais medições está conectado mais profundamente com o estabelecimento das *leis* às quais esses fenômenos estão sujeitos, de tal forma que um [assunto] não pode ser separado do outro.

6.19 Desenvolvimento de uma Lei Fundamental Geral da Ação Elétrica

Para obter uma guia para esta investigação baseada na experiência e tão confiável quanto possível, *três fatos especiais* serão tomados como base, alguns dos quais são indiretamente

[237] Em alemão: *auf das ponderable Drahtelement.* Ver a Nota de rodapé 78 na página 39.

[238] Em alemão: *imponderable Elektricität.* Isto é, eletricidade que não possui peso. Essa expressão pode ser traduzida como eletricidade imponderável, eletricidade que não tem peso ou eletricidade sem peso. Como vai ficar claro na sequência desse trabalho, ver por exemplo a frase a que se refere a Nota de rodapé 247 na página 144, com essa expressão Weber está se referindo às partículas elétricas de um elemento de corrente que possuem uma massa muito menor do que a massa desse elemento. As massas (ou pesos) dessas partículas podem então ser desprezadas em comparação com a massa (ou peso) do elemento de corrente que as contém.

baseados na observação e alguns dos quais estão diretamente contidos na lei fundamental de Ampère, que foi confirmada por todas as medições.

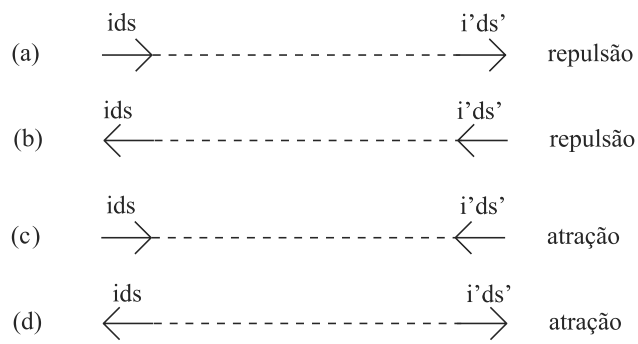
O *primeiro fato* é que dois elementos de corrente estando ao longo de uma linha reta que coincide com suas direções, se *repelem* ou se *atraem*, conforme a eletricidade flui através deles no *mesmo* sentido ou em sentidos *opostos*.[239]

O *segundo fato* é que dois elementos de corrente paralelos, que formam ângulos retos com a linha que os conecta, se *atraem* ou se *repelem*, conforme a eletricidade flui através deles no *mesmo* sentido ou em sentidos *opostos*.[240]

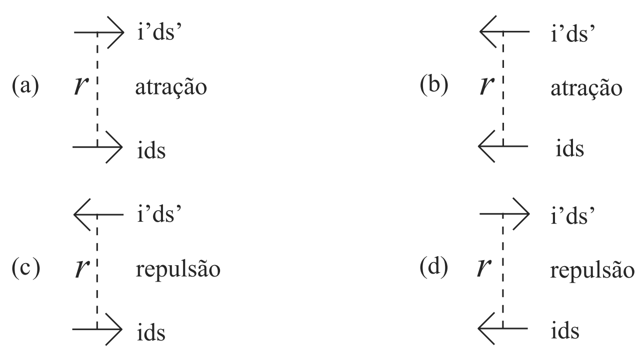
O *terceiro fato* é que um elemento de corrente, que está juntamente com um elemento de fio ao longo de uma linha reta coincidindo com as direções dos dois elementos, induz no elemento de fio uma corrente *no mesmo sentido* ou *no sentido oposto*, conforme a intensidade de sua própria corrente *diminui* ou *aumenta*.[241]

Obviamente esses três fatos não são dados diretamente através da experiência, já que não pode ser observada diretamente a ação de um *elemento* sobre um outro [elemento]; contudo, eles estão conectados tão diretamente com os fatos observados, que eles possuem quase que a mesma validade que esse últimos. Os dois primeiros fatos já estão compreendidos na lei de Ampère; o terceiro foi adicionado pela lei de Faraday.

[239]Essas situações estão ilustradas na Figura dessa Nota de rodapé. Em (a) e (b) as correntes fluem no mesmo sentido e os elementos se repelem, enquanto que em (c) e (d) as correntes fluem em sentidos opostos e os elementos se atraem:



[240]Essas situações estão ilustradas na Figura dessa Nota de rodapé. Em (a) e (b) as correntes fluem no mesmo sentido e os elementos se atraem, enquanto que em (c) e (d) as correntes fluem em sentidos opostos e os elementos se repelem:

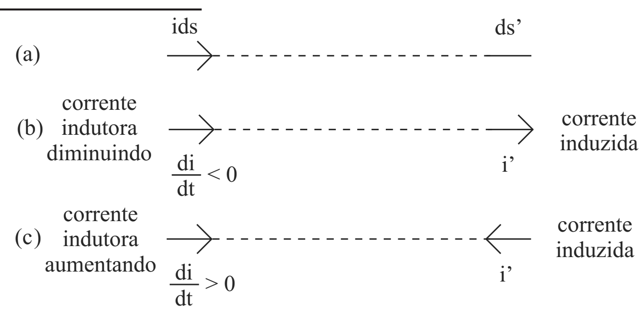


[241]Essas situações estão ilustradas na Figura dessa Nota de rodapé. Em (a) temos um elemento de corrente indutora ids e um pedaço de fio de comprimento ds' paralelos entre si e ao longo da linha reta que os une. (b) Quando a corrente indutora i diminui de intensidade com o tempo, ela induz no pedaço de fio uma corrente induzida i' no mesmo sentido que i. (c) Quando a corrente indutora i aumenta de intensidade com o tempo, ela induz no pedaço de fio uma corrente induzida i' fluindo no sentido oposto à corrente i, a saber:

Os três fatos mencionados são considerados como *elétricos*, a saber, consideramos as forças indicadas como *ações mútuas entre as massas elétricas*. Contudo, a *lei elétrica* dessa interação ainda é desconhecida; pois mesmo que os dois primeiros fatos estejam contidos na lei de Ampère, ainda assim, mesmo independentemente do terceiro fato, que não está contido nela, a própria lei de Ampère, no sentido estrito, *não é uma lei elétrica*, já que ela *não identifica uma lei elétrica* que uma massa elétrica exerce sobre outra [massa elétrica]. A lei de Ampère apenas fornece uma maneira de identificar uma força atuando sobre a *massa ponderável do condutor de corrente*.[242] Ampère não lidou com *forças elétricas* que os *fluidos elétricos* deslocando-se através do condutor exercem entre si, embora ele tenha repetidamente expressado a esperança de que seria possível explicar a ação mútua entre os *condutores ponderáveis* identificados por sua lei em termos das interações entre os *fluidos elétricos* contidos neles.

Se direcionarmos agora nossa atenção aos *fluidos elétricos* contidos nos dois elementos de corrente, temos neles quantidades iguais de eletricidade positiva e negativa que, em cada elemento, estão em movimento em sentidos opostos.[243] Esse movimento oposto simultâneo de eletricidade positiva e negativa, como estamos acostumados a assumir em todas as partes de um fio condutor linear, reconhecidamente pode não existir de fato, contudo podem ser consideradas para nossos propósitos como um movimento *ideal* que, nos casos que estamos considerando, nos quais é simplesmente uma questão de *ação à distância*, *representa* os movimentos que ocorrem de fato em relação a todas as ações que estão sendo levadas em consideração e, dessa forma, tem a vantagem de se submeter melhor aos cálculos. O *movimento lateral* que ocorre de fato através dos quais as partículas que tendem a se encontrar no fio (o qual *não é uma linha reta matemática*) *acabam evitando-se mutuamente*, tem de ser considerado como não tendo influência nas *ações à distância*, portanto, parece permissível para nossos propósitos, aderir ao ponto de vista simples anterior do assunto (ver a Seção 6.31).

Temos então nos *dois* elementos de corrente que estamos analisando, de considerar *quatro interações* entre as massas elétricas, *duas repulsivas*, entre as duas massas positivas e entre as duas massas negativas nos elementos de corrente, e *duas atrativas*, entre a massa positiva no primeiro e a massa negativa no segundo, e entre a massa negativa no primeiro e a massa



[242]Em alemão: *ponderable Masse des Stromträgers*. Ver a Nota de rodapé 78 na página 39.

[243]De acordo com o contexto da discussão apresentada nesse trabalho, podemos concluir que esses movimentos opostos das eletricidades positiva e negativa devem ser entendidos como as velocidades de deriva dessas partículas eletrizadas em relação à matéria do condutor. Essa velocidade também é chamada de velocidade de deslocamento ou de arraste em relação ao corpo material do condutor, isto é, em relação ao fio metálico. Ou seja, Weber assume que quando há uma corrente elétrica em um fio, em cada ponto do fio uma partícula positivamente eletrizada desloca-se em uma direção em relação ao condutor, enquanto que uma partícula negativamente eletrizada desloca-se na direção oposta em relação ao condutor. Ver ainda a Nota de rodapé 46 na página 30.

positiva no segundo.

Cada uma das duas forças *repulsivas* teria de ser *igual* a essas duas forças *atrativas*, caso as leis reconhecidas da *eletrostática* tivessem uma *aplicação incondicional para o nosso caso*, já que as massas repulsivas de mesmo tipo são iguais às massas atrativas de tipos diferentes,[244] e atuam entre si à mesma distância. Contudo, saber se essas leis *eletrostáticas* reconhecidas possuem uma *aplicação incondicional* para o nosso caso, não pode ser decidido *a priori*, já que essas leis referem-se principalmente apenas a tais massas elétricas que estão situadas em *equilíbrio* e em *repouso* mútuo, enquanto que nossas massas estão em movimento entre si. Consequentemente, apenas a *experiência* pode decidir, se a lei eletrostática permite ou não tal *aplicação ampliada* também para o nosso caso.

Os dois primeiros *fatos* mencionados anteriormente referem-se claramente principalmente a forças que atuam nos *portadores ponderáveis de corrente*;[245] contudo, podemos considerar essas forças como sendo as *resultantes* das forças que atuam nas *massas elétricas* contidas nos portadores ponderáveis. Falando estritamente, a maneira de considerar essas forças só é permissível quando essas massas elétricas estão conectadas a seus portadores ponderáveis comuns de tal forma que elas não possam ser colocadas em movimento independentemente deles, e como esse não é o caso no circuito galvânico mas, ao contrário, as massas elétricas estão em movimento enquanto seus portadores estão em repouso, Ampère, como afirmado na página 42 da Introdução,[246] chamou particularmente a atenção para esse fato, considerando que assim a força que atua sobre o portador ponderável poderia ser significativamente modificada. Contudo, embora as massas elétricas possam ser deslocadas na direção do fio condutor, elas não são de forma alguma *livremente móveis* nessa direção; já que de outra maneira elas teriam de *persistir* no movimento uma vez que ele fosse transmitido a elas nessa direção, sem um novo ímpeto externo (isto é, sem a *força eletromotriz* que continua atuando), o que não é o caso; porque nenhuma corrente galvânica continua *por si própria* mesmo que a corrente seja permanentemente fechada. Em vez disso, sua intensidade em cada instante é correspondente apenas à *força eletromotriz* existente, como determinada pela lei de Ohm; assim a corrente cessa por si só, tão logo essa força [eletromotriz] desapareça. Disso segue que têm de ser transmitidas ao portador ponderável não apenas aquelas forças que atuam nas massas elétricas em tais direções (perpendiculares ao fio condutor) tal que as massas só podem ser movidas conjuntamente com o portador ponderável, mas que esse mesmo fato também ocorre mesmo para tais forças que atuam na direção do fio condutor e que deslocam as massas elétricas no portador, com uma única diferença, a saber, que essa última transmissão requer um intervalo de tempo, embora muito pequeno, o que não é o caso para a primeira transmissão. A ação *imediata* das forças paralelas ao fio condutor consiste apenas em um movimento das massas elétricas nessa direção; contudo, a ação desse movimento é uma *resistência* do portador ponderável, por meio da qual, em um tempo imensuravelmente curto, o movimento é novamente cancelado. Através dessa *resistência*, durante o intervalo de tempo em que esse movimento é cancelado, todas as forças que haviam induzido anteriormente esse movimento, são transmitidas *indiretamente* aos corpos ponderáveis que exercitam

[244]Por massas repulsivas de mesmo tipo, Weber entende duas partículas negativamente eletrizadas que se repelem, ou então duas partículas positivamente eletrizadas que se repelem. Já por massas atrativas de tipos diferentes, Weber entende a atração entre uma partícula positivamente eletrizada e uma partícula negativamente eletrizada. Weber está assumindo aqui que os valores das cargas das partículas positivas e negativas de cada elemento de corrente possuem o mesmo módulo, embora suas cargas elétricas sejam de sinais opostos.

[245]Em alemão: *ponderablen Stromträger*. Isto é, nos pequenos pedaços de fio que possuem peso.

[246][Web46, pág. 29 das *Obras* de Weber].

a resistência. Finalmente, como estamos lidando com as ações de forças que possuem a capacidade de comunicar uma velocidade *mensurável* ao próprio portador *ponderável*, então, por outro lado, aquelas ações das forças, que perturbam apenas momentaneamente as massas *imponderáveis*, podem ser desprezadas com a mesma justificativa com a qual desprezamos a *massa da eletricidade* comparada com a massa de seu portador ponderável.[247] Contudo, a partir disso segue que a força atuando no *portador de corrente*, como afirmado anteriormente, tem de ser considerada como a *resultante* de todas as forças atuando nas *massas elétricas* contidas no portador de corrente.

Isso pressupõe, como mostrado pelos *dois primeiros fatos apresentados anteriormente*, que a *resultante* dessas quatro interações entre as massas elétricas contidas nos dois elementos de corrente que estão sendo considerados, que, de acordo com as leis da *eletrostática*, teria de ser nula, será tanto mais *diferente* de zero, quanto maior for a *velocidade* com a qual as massas elétricas fluem através dos dois elementos de corrente, isto é, quanto maior forem as intensidades de corrente.

Portanto, disso segue-se que as leis *eletrostáticas não se aplicam incondicionalmente* para massas elétricas que estejam *em movimento* entre si mas, ao contrário, elas apenas fornecem um *valor limite* para as forças que essas massas exercem reciprocamente entre si, ao qual o *verdadeiro valor* dessas forças mais se aproxima, quanto menores forem os movimentos recíprocos entre as massas, e em relação ao qual, ao contrário, o *valor verdadeiro* mais se afasta, quanto maiores forem os movimentos recíprocos. Portanto, aos valores que as leis *eletrostáticas* fornecem para a força exercida entre si por *duas massas elétricas*, tem de ser adicionada uma *componente que depende do movimento recíproco entre elas*, caso essa força tenha de ser determinada corretamente não apenas para o caso de repouso mútuo e equilíbrio, mas de forma geral, ou seja, incluindo qualquer *movimento* arbitrário de duas massas entre si. Buscaremos agora esse *complemento* que fornece para as leis eletrostáticas uma aplicação mais geral.

O *primeiro fato* citado anteriormente mostra não apenas que a soma das forças repulsivas entre massas elétricas de mesmo tipo nos elementos de corrente que estão sendo considerados *é diferente* da soma das forças atrativas entre as massas de tipo diferente, mas também indica quando a primeira soma é *maior* do que a última, e também quando é *menor*, sendo que todas as determinações resultando disso podem ser unificadas na simples afirmação a seguir:

> *que massas elétricas que se deslocam em sentidos opostos agem mais fracamente umas sobre as outras do que aquelas que se deslocam no mesmo sentido.*

Afinal de contas, (1) se o sentido da corrente é *o mesmo* nos dois elementos, então ocorre *repulsão*, consequentemente, a *força atrativa entre massas de tipos opostos* tem de ser *mais fraca* do que as forças repulsivas entre massas de mesmo tipo. Contudo, nesse caso são as massas de tipos diferentes que estão em *movimentos opostos*. Caso, contudo, (2) os sentidos de corrente nos dois elementos sejam *opostos*, então ocorre *atração*; consequentemente, as *forças repulsivas entre massas do mesmo tipo* tem de ser *mais fraca* do que as forças atrativas entre massas de tipos diferentes. Contudo, nesse caso são as massas de mesmo tipo que são colocadas em *movimento oposto*. Nos dois casos são assim as massas que estão *em movimentos opostos* que atuam *mais fracamente* entre si, confirmando a afirmação anterior.

O *primeiro fato*, ao qual a declaração anterior se referia, também permite que seja acrescentada a seguinte disposição mais precisa:

[247] Ver a Nota de rodapé 238 na página 140.

que quanto maior for o quadrado da velocidade relativa entre duas massas elétricas (repulsivas ou atrativas, conforme sejam do mesmo tipo ou de tipos opostos), mais fraca será a ação entre elas.

Se r denotar a distância entre duas massas elétricas, a *velocidade relativa* entre elas pode ser expressada como dr/dt, sendo positiva ou negativa, conforme as duas massas estejam se afastando ou se aproximando; contudo, como essa diferença entre aproximação e afastamento ou, em resumo, a diferença de sinal para dr/dt, não tem influência no valor da força, foi necessário introduzir na regra mencionada anteriormente, no lugar da própria velocidade relativa, seu *quadrado*.

Se e e e' denotam as massas elétricas positivas nos dois elementos, e u e u' suas velocidades *absolutas*, que têm um valor positivo ou negativo dependendo do sentido da corrente, então $-e$ e $-e'$ serão as massas negativas, e $-u$ e $-u'$ suas velocidades *absolutas*.[248] Nos casos contidos pelo *primeiro fato*, nos quais todas as massas elétricas estão em movimento *ao longo de uma única linha reta*, as velocidades *relativas* são obtidas a partir das [velocidades] *absolutas* pela subtração simples, a saber, para massas *do mesmo tipo*:

$$+e \quad \text{e} \quad +e', \quad \text{a velocidade relativa é} \quad \frac{dr}{dt} = u - u' \ ,$$

[248]Weber está assumindo que no primeiro elemento de corrente existem partículas carregadas positivamente e negativamente com cargas elétricas iguais e opostas, e e $-e$, enquanto que no segundo elemento de corrente existem partículas carregadas positivamente e negativamente com cargas elétricas iguais e opostas, e' e $-e'$. Além disso, está assumindo que as partículas e e $-e$ deslocam-se em relação ao fio condutor do primeiro elemento de corrente com velocidades de deriva iguais e opostas, u e $-u$, enquanto que as partículas e' e $-e'$ deslocam-se em relação ao fio condutor do segundo elemento de corrente com velocidades de deriva iguais e opostas, u' e $-u'$. Weber denomina essas velocidades u, $-u$, u' e $-u'$ de *velocidades absolutas*. De acordo com o contexto da discussão apresentada nesse trabalho de 1846, essas velocidades absolutas devem ser entendidas como as velocidades de deriva em relação ao fio, ou seja, as velocidades das partículas eletrizadas em relação ao corpo material do condutor por onde flui a corrente. Fechner havia feito uma suposição análoga em 1845, sendo essa a concepção usual daquela época de como ocorria a condução elétrica em condutores metálicos, ver as Notas de rodapé 46 e 243 nas páginas 30 e 142, respectivamente. Essa interpretação do significado daquilo que Weber denomina de *velocidade absoluta* é obtida a partir da discussão de Weber nesse trabalho de 1846. Essa interpretação também era clara para os contemporâneos de Weber. Como visto no Capítulo 5, Maxwell descreveu as suposições de Weber com as seguintes palavras em seu primeiro artigo sobre eletromagnetismo de 1855 (publicado em 1858), [Max58, págs. 66-67 do artigo de 1858 e págs. 207-209 do livro de Niven], com ênfase em itálico do próprio Maxwell:

1. Que duas partículas de eletricidade quando estão em movimento não se repelem mutuamente com a mesma força que existia quando estavam em repouso, mas que a força é alterada por uma quantidade que depende do movimento relativo entre as duas partículas, de tal forma que a expressão para a repulsão na distância r é dada por

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 + a\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + br\frac{d^2r}{dt^2}\right] \ .$$

2. Que quando a eletricidade está se deslocando em um condutor, a velocidade do fluido positivo *em relação à matéria do condutor* é igual e oposta à velocidade do fluido negativo.

3. Que a ação total de um elemento condutor sobre um outro elemento condutor é a resultante das ações mútuas das massas de eletricidade dos dois tipos que estão contidas em cada elemento.

4. Que a força eletromotriz em cada ponto é a diferença dessas forças atuando sobre os fluidos positivo e negativo.

$$-e \quad \text{e} \quad -e', \quad \text{a velocidade relativa é} \quad \frac{dr}{dt} = -u + u' \ ;$$

já para massas [elétricas] de tipos diferentes:

$$+e \quad \text{e} \quad -e', \quad \text{a velocidade relativa é} \quad \frac{dr}{dt} = u + u' \ ,$$

$$-e \quad \text{e} \quad +e', \quad \text{a velocidade relativa é} \quad \frac{dr}{dt} = -u - u' \ .$$

Disso resulta, de acordo com o princípio anterior da interação entre massas *do mesmo tipo* (entre duas massas positivas, assim como entre duas massas negativas), uma diminuição dependente de[249]

$$\frac{dr^2}{dt^2} = (u - u')^2 \ ,$$

em comparação como o caso de repouso e equilíbrio considerado na eletrostática; para a interação entre massas *de tipos diferentes*, ao contrário, ocorre uma diminuição dependente de

$$\frac{dr^2}{dt^2} = (u + u')^2 \ .$$

A forma mais simples que a lei dessa diminuição deve possuir é aquela na qual o valor da força para o caso de repouso e equilíbrio é multiplicado pelo fator

$$\left(1 - a^2 \frac{dr^2}{dt^2}\right) \ ,$$

de onde a seguinte expressão serviria então para a *determinação completa da força*:

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2 \frac{dr^2}{dt^2}\right) \ ,$$

na qual e e e' possuem valores positivos ou negativos, dependendo se as massas elétricas que essas grandezas denotam pertencem ao fluido positivo ou negativo. [A grandeza] a^2 é uma constante.

No nosso caso, quando tentamos utilizar essa forma mais simples, resultam as seguintes quatro interações entre as massas elétricas nos dois elementos de corrente:

1. entre $+e$ e $+e'$ o resultado é a força $+\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2 (u - u')^2\right)$,
2. entre $-e$ e $-e'$ o resultado é a força $+\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2 (u - u')^2\right)$,
3. entre $+e$ e $-e'$ o resultado é a força $-\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2 (u + u')^2\right)$,
4. entre $-e$ e $+e'$ o resultado é a força $-\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2 (u + u')^2\right)$.

[249]A notação $\frac{dr^2}{dt^2}$ deve ser entendida como $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$.

A soma das duas primeiras forças, isto é, a soma das *repulsões entre massas do mesmo tipo*, é assim

$$= +2\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2\left(u - u'\right)^2\right) \ ;$$

a soma das duas últimas forças, isto é, a soma das *atrações entre massas de tipos diferentes*, é

$$= -2\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2\left(u + u'\right)^2\right) \ .$$

Essas duas somas são então, além de seus sinais (que distinguem repulsão e atração), distinguidas de acordo com seus valores. A soma algébrica entre elas, que fornece *a resultante* de todas as quatro interações e, consequentemente, a força que é transmitida pelas massas elétricas ao próprio *portador de corrente*, e na qual é baseada a lei de Ampère, é daqui por diante

$$= +8\frac{ee'}{r^2}a^2 \cdot uu' \ ,$$

isto é, segue-se que essa força, em concordância completa com a lei de Ampère, é diretamente proporcional à intensidade de corrente nos dois elementos de corrente, e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os dois elementos de corrente.[250]

Observamos além disso que a expressão anterior é *positiva* e, consequentemente, denota uma *repulsão entre os elementos de corrente*, caso tanto u quanto u' possuam *ambas* um valor positivo ou um valor negativo, isto é, se a eletricidade flui através dos dois elementos de corrente no mesmo sentido; e que se *apenas uma das duas for positiva, a outra negativa*, a expressão anterior torna-se *negativa*, o que denota uma *atração entre os elementos de corrente*, caso a eletricidade esteja fluindo através deles *em sentidos opostos*. Todos esses resultados correspondem precisamente ao *primeiro fato* citado anteriormente.

Se procedermos agora ao *segundo fato citado anteriormente*, então é claro que a adição dada à lei eletrostática não é mais suficiente aqui, já que para todos os casos incluídos nesse segundo fato, ela fornece um valor da velocidade relativa entre as massas elétricas

$$\frac{dr}{dt} = 0 \ .$$

Ou seja, se seguirmos duas partículas elétricas ao longo de suas trajetórias, o resultado é que a distância relativa entre elas vai diminuindo até o instante que está sendo considerado aqui, e a partir desse momento aumenta novamente e, portanto, no próprio instante em questão, não ocorre qualquer aumento ou diminuição na distância.[251] Consequentemente, para todos os casos, a própria lei eletrostática seria aplicada para determinar as quatro interações das massas elétricas nos dois elementos de corrente, sem aplicar um suplemento à lei, sendo que

[250]Weber está assumindo que a intensidade de corrente i no primeiro elemento é proporcional ao produto eu, enquanto que a intensidade de corrente i' no segundo elemento é proporcional ao produto $e'u'$.

[251]Essa situação está ilustrada na Figura dessa Nota de rodapé, a saber:

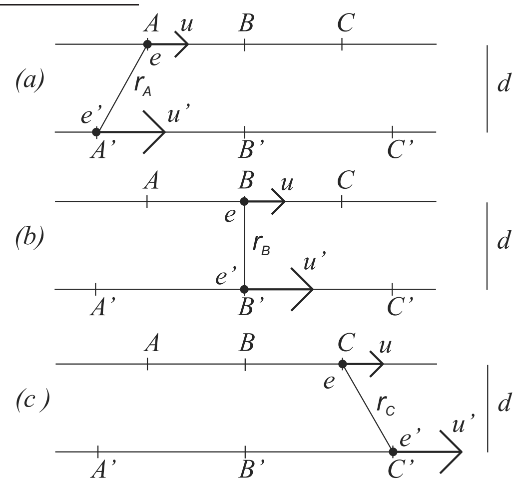
de acordo com isso os dois elementos de corrente não teriam qualquer ação entre si,[252] o que não é o caso.

Contudo, é facilmente provado que para essa *segunda* classe de fatos, na qual o valor da velocidade relativa dr/dt desaparece, o valor da *aceleração relativa* d^2r/dt^2 torna-se mais relevante, enquanto que para a *primeira* classe, na qual o último valor d^2r/dt^2 desaparece, o primeiro [fator] dr/dt torna-se mais significativo.

Assumimos assim que o valor da interação entre massas elétricas em movimento, como determinado pela lei eletrostática, requer um suplemento que, contudo, depende não apenas do *quadrado da velocidade relativa* entre as duas massas $= dr^2/dt^2$, mas também da *aceleração relativa* $= d^2r/dt^2$; a forma mais simples que a lei geral de interação entre duas massas elétricas pode ter, é aquela na qual o valor da força para o caso de repouso e equilíbrio é multiplicado pelo fator

$$\left(1 - a^2\frac{dr^2}{dt^2} + b\frac{d^2r}{dt^2}\right)$$

e no qual, portanto, a seguinte expressão serviria para uma determinação completa da força:[253]



Temos dois fios retilíneos paralelos separados pela distância d, sendo e e e' duas partículas positivas que supomos estarem deslocando-se para a direita com velocidades u e u', respectivamente, com $u' > u$. (a) No instante t_a a partícula e encontra-se em A, a partícula e' encontra-se em A', estando elas separadas pela distância r_A. (b) A distância entre elas vai diminuindo até que no instante t_b a partícula e encontra-se em B, a partícula e' encontra-se em B', estando elas separadas pela distância mínima $r_B = d$. (c) A distância entre elas vai aumentando até que no instante t_c, com $t_c > t_b > t_a$, a partícula e encontra-se em C, a partícula e' encontra-se em C', estando elas separadas pela distância r_C. Antes de t_b a distância entre e e e' vai diminuindo ao longo do tempo, ou seja, $dr/dt < 0$. Depois de t_b a distância entre e e e' vai aumentando ao longo do tempo, ou seja, $dr/dt > 0$. Logo, exatamente no instante t_b em que estão na distância mínima $r_B = d$, deslocando-se no mesmo sentido que é ortogonal à reta que as une nesse instante, temos $dr/dt = 0$, como afirmado por Weber. O mesmo vai ocorrer entre uma partícula positiva de um elemento e uma partícula negativa do outro elemento, ou com uma partícula negativa de cada elemento.

[252] Já que são neutros eletricamente. Portanto, a força eletrostática entre os dois elementos de corrente se anula.

[253] A próxima equação deve ser entendiada como:

$$\frac{ee'}{r^2}\left[1 - a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + b\frac{d^2r}{dt^2}\right] .$$

Além disso, deve ser lembrado que para Weber forças positivas significam repulsão entre os corpos que estão interagindo, enquanto que forças negativas significam atração, ver o primeiro parágrafo da Seção 6.8,

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2\frac{dr^2}{dt^2} + b\frac{d^2r}{dt^2}\right) \ ,$$

na qual e e e' possuem valores positivos e negativos conforme as massas elétricas que essas grandezas denotam pertençam ao fluido positivo ou negativo. [A grandeza] a^2 representa a mesma constante que antes; b é uma outra grandeza independente da velocidade e da aceleração, cujo sinal e valor ainda precisam ser determinados mais detalhadamente.[254]

Se, como antes, e e e' denotam agora as massas elétricas positivas nos dois elementos de corrente, u e u' suas velocidades *absolutas*, $-e$ e $-e'$, as massas negativas, $-u$ e $-u'$ suas velocidades *absolutas*, e se R denotar a distância entre os elementos de corrente, r a distância entre as duas massas elétricas *positivas*, então para o primeiro instante de tempo [teremos] $r = R$, mas como as massas elétricas estão em movimento, r logo se modifica, enquanto R permanece inalterado, e após decorrer o intervalo de tempo t, obtém-se a seguinte equação para determinar o valor de r, calculado a partir do instante inicial:

$$r^2 = R^2 + (u - u')^2 \, t^2 \ ,$$

consequentemente, como R, u e u' são constantes,

$$rdr = (u - u')^2 \, tdt \ ,$$

e

$$rd^2r + dr^2 = (u - u')^2 \, dt^2 \ ,$$

o que fornece os valores da *velocidade relativa* e *aceleração relativa* no final do intervalo de tempo t, a saber:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(u - u')^2}{r} t \ ,$$

e

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{(u - u')^2}{r}\left(1 - \frac{(u - u')^2}{r^2} t^2\right) \ .$$

Se aplicarmos essas determinações gerais ao instante considerado para o qual $t = 0$, obteremos os valores da *velocidade e aceleração relativas entre as duas massas positivas* a serem introduzidas em nossa expressão, a saber:

$$\frac{dr}{dt} = 0 \ ,$$

e

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{(u - u')^2}{r} \ ,$$

consequentemente, para a primeira das quatro interações obteremos:

---

página 83.

[254] Além disso, em seguida Weber vai mostrar que a grandeza b depende da distância r entre as partículas que estão interagindo. Portanto, diferentemente da constante a^2, a grandeza b não é uma constante, embora seja independente da velocidade e da aceleração entre as partículas.

$$1.\ \text{entre} \quad +e \quad \text{e} \quad +e' \quad \text{a força} \quad +\frac{ee'}{r^2}\left(1+\frac{b}{r}(u-u')^2\right)\ .$$

É auto-evidente que as interações remanescentes podem ser deduzidas dessa primeira [expressão] através da substituição das massas e velocidades correspondentes; obteremos então:

$$2.\ \text{entre} \quad -e \quad \text{e} \quad -e' \quad \text{a força} \quad +\frac{ee'}{r^2}\left(1+\frac{b}{r}(u-u')^2\right)\ ,$$

$$3.\ \text{entre} \quad +e \quad \text{e} \quad -e' \quad \text{a força} \quad -\frac{ee'}{r^2}\left(1+\frac{b}{r}(u+u')^2\right)\ ,$$

$$4.\ \text{entre} \quad -e \quad \text{e} \quad +e' \quad \text{a força} \quad -\frac{ee'}{r^2}\left(1+\frac{b}{r}(u+u')^2\right)\ .$$

A soma das duas primeiras forças, isto é, a soma das *repulsões entre massas do mesmo tipo*, é assim

$$=+2\frac{ee'}{r^2}\left(1+\frac{b}{r}(u-u')^2\right)\ .$$

A soma das duas últimas forças, isto é, a soma das *atrações entre massas de tipos diferentes*, é, contudo,

$$=-2\frac{ee'}{r^2}\left(1+\frac{b}{r}(u+u')^2\right)\ .$$

Portanto, essas duas somas, além de seus sinais (distinguindo repulsão e atração), *são distinguidas* por seus valores. A soma algébrica entre elas, que fornece *a resultante* de todas as quatro forças e, consequentemente, a força que é transmitida pelas massas elétricas ao próprio *portador de corrente*, e na qual é baseada a lei de Ampère, é então de acordo com isso

$$=-8\frac{ee'}{r^2}\cdot\frac{b}{r}\cdot uu'\ ,$$

isto é, essa força emerge de acordo com isso em total concordância com a lei de Ampère, diretamente proporcional à intensidade de corrente nos dois elementos, e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os dois elementos de corrente.[255]

Observamos além disso que se b for positivo, a expressão acima seria *negativa* e, consequentemente, denotaria uma *atração entre os elementos de corrente*, caso tanto u quanto u' tenha um valor positivo ou um valor negativo, isto é, se a eletricidade fluir através dos dois elementos de corrente no *mesmo* sentido; se, contudo, apenas uma das duas [velocidades] for positiva, enquanto a outra é negativa, então a expressão acima será *positiva*, o que denota uma *repulsão* entre os elementos de corrente, se a eletricidade fluir através deles em sentidos *opostos*. Todos esses resultados correspondem precisamente ao *segundo fato* apresentado anteriormente.

[255]Já que Weber vai mostrar logo em seguida que a grandeza b é diretamente proporcional à distância r entre as partículas que estão interagindo. Ver ainda a Nota de rodapé 250.

Se, finalmente, retornarmos à própria fórmula de Ampère, que inclui os dois fatos como casos especiais, de acordo com a qual a repulsão entre dois elementos de corrente é a seguinte:[256]

$$-\frac{ii'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)dsds' \ ,$$

na qual as letras possuem o significado dado na página[257] 83, então, para os casos incluídos no *primeiro fato*,[258]

$$\varepsilon = 0^{\text{o}} \quad \text{ou} \quad = 180^{\text{o}} \ ,$$

caso ϑ e ϑ' sejam *ambos*

$$= 0^{\text{o}} \quad \text{ou} \quad = 180^{\text{o}} \ ,$$

ou se *apenas* um dos dois [ângulos] for

$$= 0^{\text{o}}, \quad \text{o } \textit{outro [ângulo]} = 180^{\text{o}}.$$

Consequentemente, o valor procurado para a força nos casos incluídos no *primeiro fato*, de acordo com a lei de Ampère, é

$$= \mp\frac{1}{2}\cdot\frac{ii'}{r^2}dsds' \ .$$

Para os casos incluídos no *segundo fato*,[259]

$$\varepsilon = 0^{\text{o}} \quad \text{ou} \quad 180^{\text{o}},$$

[256] Conforme discutido na Nota de rodapé 139 na página 83, Weber apresentou na Seção 6.8 a força de Ampère com um sinal negativo na frente de tudo. Aqui, devido a um erro de impressão no original, apareceu um sinal positivo na frente de tudo, ou seja:

$$\frac{ii'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)dsds' \ .$$

Corrigi esse sinal colocando um sinal negativo na próxima equação, para que fique compatível da maneira como Weber apresentou a força de Ampère na Seção 6.8, ver a página 83. O sinal negativo na frente da força de Ampère também vai ser incluído por Weber na Seção 6.8 e em outras partes desse artigo de 1846, reforçando que o sinal positivo apresentado aqui foi um erro de impressão.

[257] [Web46, pág. 70 das *Obras* de Weber].

[258] Ver as definições dos ângulos ε, ϑ e ϑ' na Figura da Nota de rodapé 138 na página 82. O primeiro fato está ilustrado na Nota de rodapé 239 na página 141. Na situação (a) da Figura na Nota de rodapé 239, temos $r > 0$, $i > 0$, $i' > 0$ e $\varepsilon = \vartheta = \vartheta' = 0^{\text{o}}$. A força de Ampère como escrita por Weber é dada por $-(ii'/r^2)[\cos\varepsilon - (3/2)\cos\vartheta\cos\vartheta']dsds'$ reduz-se então a $+ii'dsds'/(2r^2)$. Como essa força é positiva, temos então uma repulsão entre os elementos de corrente, de acordo com a definição de Weber sobre forças positivas e negativas dada logo após a expressão da força de Ampère no primeiro parágrafo da Seção 6.8. O mesmo vai ocorrer quando as duas correntes estiverem fluindo para a esquerda, ou seja, na situação (b) da Figura na Nota de rodapé 239, quando $r > 0$, $i > 0$, $i' > 0$, $\varepsilon = 0^{\text{o}}$ enquanto $\vartheta = \vartheta' = 180^{\text{o}}$. Já na situação (c) da Figura na Nota de rodapé 239, temos $r > 0$, $i > 0$, $i' > 0$, $\varepsilon = 180^{\text{o}}$, $\vartheta = 0^{\text{o}}$ e $\vartheta' = 180^{\text{o}}$. A força de Ampère dada por $-(ii'/r^2)[\cos\varepsilon - (3/2)\cos\vartheta\cos\vartheta']dsds'$ reduz-se então a $-ii'dsds'/(2r^2)$. Como essa força é negativa, temos então uma atração entre os elementos de corrente, de acordo com a definição de Weber sobre forças positivas e negativas dada logo após a expressão da força de Ampère no primeiro parágrafo da Seção 6.8. O mesmo vai ocorrer se i estiver fluindo para a esquerda e i' para a direita, ou seja, na situação (d) da Figura na Nota de rodapé 239, quando $r > 0$, $i > 0$, $i' > 0$, $\varepsilon = 180^{\text{o}}$, $\vartheta = 180^{\text{o}}$ e $\vartheta' = 0^{\text{o}}$.

[259] Ver as definições dos ângulos ε, ϑ e ϑ' na Figura da Nota de rodapé 138 na página 82. O segundo fato está ilustrado na Nota de rodapé 240 na página 141. Os ângulos ϑ e ϑ' para essas situações, como apresentados por Weber a seguir, estão representados na Figura dessa Nota de rodapé, a saber:

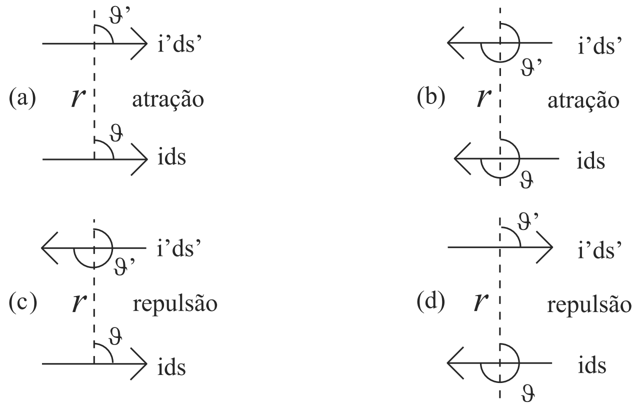
caso ϑ e ϑ' sejam *ambos*

$$= 90^o \quad \text{ou} \quad = 270^o,$$

ou se *apenas um* dos dois [ângulos] for

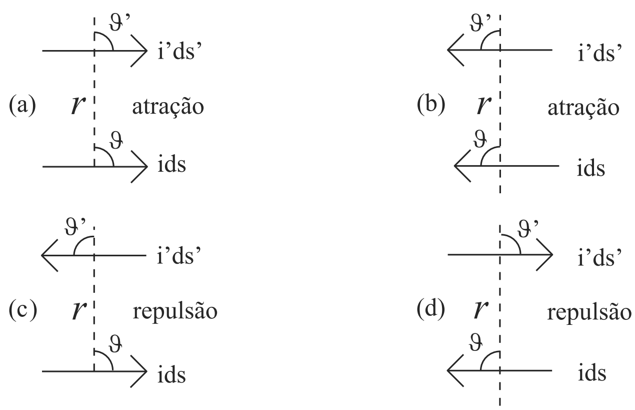
$$= 90^o, \quad \text{o } \textit{outro [ângulo]} = 270^o.$$

Consequentemente, o valor procurado para a força nos casos incluídos no *segundo fato*, de acordo com a lei de Ampère, é



Na situação (a) temos $r > 0$, $i > 0$, $i' > 0$, $\varepsilon = 0^o$ e $\vartheta = \vartheta' = 90^o$. A força de Ampère como escrita por Weber é dada por $-(ii'/r^2)[\cos\varepsilon - (3/2)\cos\vartheta\cos\vartheta']dsds'$. Nesse caso ela reduz-se a $-ii'dsds'/(r^2)$. Como essa força é negativa, temos então uma atração entre os elementos de corrente, de acordo com a definição de Weber de forças positivas e negativas dada logo após a expressão da força de Ampère no primeiro parágrafo da Seção 6.8. O mesmo vai acontecer se as duas correntes estiverem fluindo para a esquerda, situação (b), quando então $r > 0$, $i > 0$, $i' > 0$, $\varepsilon = 0^o$ e $\vartheta = \vartheta' = 270^o$. Já na situação (c) temos $r > 0$, $i > 0$, $i' > 0$, $\varepsilon = 180^o$, $\vartheta = 90^o$ e $\vartheta' = 270^o$. A força de Ampère como escrita por Weber é dada por $-(ii'/r^2)[\cos\varepsilon - (3/2)\cos\vartheta\cos\vartheta']dsds'$. Nesse caso ela reduz-se a $+ii'dsds'/(r^2)$. Como essa força é positiva, temos então uma repulsão entre os elementos de corrente, de acordo com a definição dada por Weber de forças positivas e negativas logo após a expressão da força de Ampère no primeiro parágrafo da Seção 6.8. O mesmo vai ocorrer se i estiver fluindo para a esquerda e i' para a direita, situação (d), ou seja, quando $r > 0$, $i > 0$, $i' > 0$, $\varepsilon = 180^o$, $\vartheta = 270^o$ e $\vartheta' = 90^o$.

Ampère provavelmente representaria os ângulos ϑ e ϑ' entre 0^o e 180^o, como dado na próxima Figura dessa Nota de rodapé, a saber:



Nas situações (a) e (b) temos $r > 0$, $i > 0$, $i' > 0$, $\varepsilon = 0^o$ e $\vartheta = \vartheta' = 90^o$. Nas situações (c) e (d) temos $r > 0$, $i > 0$, $i' > 0$, $\varepsilon = 180^o$ e $\vartheta = 90^o = \vartheta' = 90^o$. Usando mais uma vez a força de Ampère como escrita por Weber na forma $-(ii'/r^2)[\cos\varepsilon - (3/2)\cos\vartheta\cos\vartheta']dsds'$ chegamos nos seguintes resultados: (a) e (b), $-ii'dsds'/(r^2)$, já para (c) e (d), $+ii'dsds'/(r^2)$. De acordo com a definição dada por Weber de forças positivas e negativas logo após a expressão da força de Ampère no primeiro parágrafo da Seção 6.8, temos então atração nos casos (a) e (b). Já para (c) e (d) obtemos uma repulsão. Tudo isso concorda com os resultados anteriores dessa Nota de rodapé.

$$= \pm \frac{ii'}{r^2} ds ds' \ .$$

De acordo com a lei fundamental de Ampère, também obtemos (sem considerar o sinal) um valor dobrado para o último caso em relação ao primeiro [caso].

Isso também resulta de nossas próprias determinações, se fizermos

$$a^2 = \frac{1}{2} \frac{b}{r} \ ,$$

de onde o sinal e o valor de b ficam determinados de forma mais precisa, a saber:

$$b = 2ra^2 \ .$$

Se substituirmos esse valor de b em nossa expressão geral para a interação entre duas massas elétricas, a *força repulsiva* que resulta será dada por[260]

$$= \frac{ee'}{r^2} \left(1 - a^2 \frac{dr^2}{dt^2} + 2a^2 \cdot r \frac{d^2 r}{dt^2} \right) \ .$$

O *terceiro fato apresentado anteriormente* não é baseado em última instância, como nos dois fatos anteriores, em forças que atuam apenas no *portador de corrente*, mas em vez disso em forças que atuam nas próprias *massas elétricas* e as desloca em seus portadores, tentando separar massas de tipos opostos; isto é, ele é baseado em forças *eletromotrizes* que são exercidas por massas elétricas em movimento em um condutor galvânico [ao atuarem] sobre eletricidade em repouso. Essas forças, contudo, *não são determinadas* pela lei *eletrostática* e nem pela lei *eletrodinâmica* de Ampère, já que essa *última* [lei] está relacionada apenas a forças transmitidas ao portador de corrente, e a *primeira* [lei], caso ela fosse aplicável, produziria o valor da força eletromotriz = 0. Assim essas forças constituem essencialmente uma *nova classe*, que só passamos a conhecer a partir da *descoberta* de Faraday.

Se considerarmos mais uma vez apenas as *massas elétricas* no elemento de corrente, assim como no elemento sem corrente, temos novamente em cada um deles, massas iguais de eletricidade positiva e negativa; especificamente, em qualquer instante no elemento de corrente essas duas massas estão em movimento com velocidades igualmente grandes apontando para direções opostas, e essas velocidades aumentam ou diminuem simultaneamente em valores iguais; por outro lado, no elemento sem corrente, as duas massas ainda estão em repouso e em equilíbrio. Além disso, entre essas quatro massas, têm de ser distinguidas quatro interações, a saber, duas repulsivas e duas atrativas, as primeiras entre massas *do mesmo tipo*, as últimas [interações ocorrendo] entre as *massas de tipos diferentes*.

Agora, a partir do *fato* que uma corrente *é produzida* no elemento no qual previamente não havia corrente, temos de concluir que *uma outra força* diferente daquela atuando na massa *negativa* tem de estar atuando sobre a massa elétrica *positiva* nesse elemento, na direção dessa última [força], já que essas massas só podem receber esse movimento *oposto* através de uma tal *diferença* nas forças que estão atuando sobre elas, [movimento esse] em que consiste essencialmente a corrente que surge. Expressamos então o fato da seguinte forma:

> *que a soma das duas forças que são exercidas pelas massas elétricas positiva e negativa no elemento de corrente [ao atuar] sobre a massa positiva em repouso no elemento sem corrente, na direção desse último [elemento], é diferente da*

[260]Ver a Nota de rodapé 253.

soma das duas forças que essas massas exercem no citado elemento de corrente [ao atuar] sobre a massa negativa em repouso no elemento sem corrente, na direção do último [elemento]; que, contudo, a diferença das duas somas, isto é, a própria força eletromotriz, depende da mudança na velocidade das duas massas elétricas no elemento de corrente dado, aumentando, diminuindo e desaparecendo juntamente com essa mudança.

Assim, também por esse *terceiro fato* somos levados a adicionar às forças elétricas determinadas pela lei *eletrostática* um *suplemento que depende do movimento*, e a única questão é se isto justifica a adição que foi baseada nos dois primeiros fatos. Portanto, esse *terceiro fato* fornece um *critério* para testar os resultados já obtidos e é especialmente adaptado para sua rejeição ou comprovação mais firme.

Se denotarmos agora, como anteriormente, e e e' como sendo as massas elétricas positivas nos dois elementos, u e 0 suas velocidades *absolutas*, R a distância entre os elementos de fio, e r a distância entre as duas massas elétricas positivas: então para o primeiro instante de tempo, $r = R$, mas como a massa e se afasta ou se aproxima da massa em repouso e' com uma velocidade variável u, logo r vai ser modificada, enquanto que R permanece inalterada, e temos para a determinação do valor de r, após ter transcorrido o intervalo de tempo t, e calculado desse instante em diante,

$$r = R \pm \int_0^t u dt \ ,$$

na qual vale o sinal *superior* se a massa e está localizada no lado positivo da massa e' e, consequentemente, fica ainda mais distanciada dela com uma velocidade positiva; por outro lado, caso a massa e esteja localizada no lado negativo da massa e' e, consequentemente, se aproxime dela com uma velocidade positiva, valerá o sinal inferior.

Por meio da diferenciação obtemos:

$$dr = \pm u dt \ ,$$

e

$$d^2 r = \pm du dt \ .$$

De acordo com isso, os valores da *velocidade relativa* e *aceleração relativa* entre as duas massas ao final do intervalo de tempo t são então:

$$\frac{dr}{dt} = \pm u \ ,$$

e

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \pm \frac{du}{dt} \ ;$$

nas quais u e du são funções de t. Se aplicarmos agora essas determinações gerais ao instante de tempo considerado, e denotarmos os valores que u e du assumem quando $t = 0$ como u_0 e du_0, então, de acordo com a lei geral de interação entre duas massas elétricas a que chegamos pelos *dois primeiros fatos*, obteremos como a primeira de nossas quatro interações:

1. entre $+e$ e $+e'$ a força $+\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2 u_0^2 \pm 2a^2 r \frac{du_0}{dt}\right)$.

Também torna-se claro que as interações remanescentes podem ser deduzidas dessa primeira [interação] através da substituição das massas, velocidades e acelerações correspondentes; obtemos então:

$$
\begin{array}{l}
2.\ \text{entre } -e \text{ e } +e' \text{ a força } -\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2u_0^2 \mp 2a^2r\frac{du_0}{dt}\right) \ , \\
3.\ \text{entre } +e \text{ e } -e' \text{ a força } -\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2u_0^2 \pm 2a^2r\frac{du_0}{dt}\right) \ , \\
4.\ \text{entre } -e \text{ e } -e' \text{ a força } +\frac{ee'}{r^2}\left(1 - a^2u_0^2 \mp 2a^2r\frac{du_0}{dt}\right) \ .
\end{array}
$$

A soma das duas primeiras forças, isto é, a soma das forças atuando sobre a *massa positiva* $+e'$ *no elemento sem corrente* é, portanto:

$$
= \pm 4\frac{ee'}{r}a^2\frac{du_0}{dt} \ .
$$

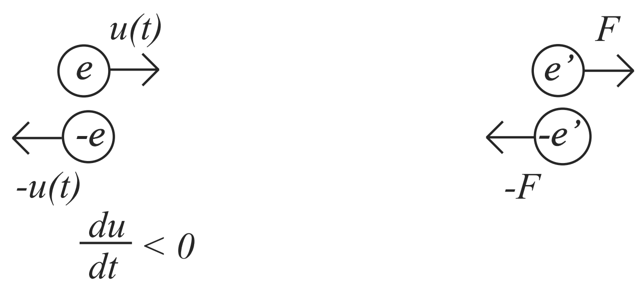
A soma das duas últimas forças, isto é, a soma das forças atuando sobre a *massa negativa* $-e'$ *no elemento sem corrente* é, contudo:

$$
= \mp 4\frac{ee'}{r}a^2\frac{du_0}{dt} \ .
$$

Essas duas somas são diferentes por seus *sinais opostos* (distinguindo repulsão e atração).[261] A *diferença* entre elas fornece a *força eletromotriz* que tenta separar as massas positiva e negativa no elemento sem corrente,

$$
= \pm 8\frac{ee'}{r}a^2\frac{du_0}{dt} \ ,
$$

[261]Pela definição de Weber, uma força positiva representa uma repulsão entre os corpos que estão interagindo, enquanto que uma força negativa representa uma atração entre eles. Seja então um elemento de corrente ids composto das partículas com cargas e e $-e$ deslocando-se em direções opostas com velocidades de deriva $u(t)$ e $-u(t)$ variáveis com o tempo, como indicado nessa Nota de rodapé. A corrente i flui para a direita, em direção a um elemento de condutor com cargas e' e $-e'$, paralelo com ids e ao longo da reta r que os une. Vamos supor que inicialmente não haja corrente elétrica no elemento de condutor:



De acordo com Weber, a força de e sobre e' somada com a força de $-e$ sobre e' tem o valor $-4ee'a^2(du_0/dt)/r$. Logo, se a variação de velocidade $du_0/dt < 0$, essa expressão será positiva, indicando uma repulsão. Ou seja, a carga positiva e' vai sofrer uma força para a direita, como indicado nessa Figura. Já a força de e sobre $-e'$ somada com a força de $-e$ sobre $-e'$ tem o valor $+4ee'a^2(du_0/dt)/r$. Portanto, com $du_0/dt < 0$ essa força será negativa, indicando uma atração. Ou seja, a carga negativa $-e'$ vai sofrer uma força para a esquerda, como indicado nessa Figura. Essas forças em sentidos opostos atuando sobre e' e $-e'$ vão fazer com que elas se separarem, induzindo uma corrente i' no elemento de condutor que aponta para a direita, ou seja, no mesmo sentido da corrente indutora. Isso está de acordo com o terceiro fato mencionado por Weber e ilustrado na Nota de rodapé 241 na página 141. Caso i esteja aumentando com o tempo, invertem-se as direções das forças atuando sobre e' e $-e'$, de tal forma que nesse novo caso a corrente induzida será na direção oposta à corrente indutora i, novamente de acordo com o terceiro fato apontado por Weber.

isto é, a *força eletromotriz* é diretamente proporcional à mudança na velocidade de deriva[262] que ocorre no momento considerado e inversamente proporcional à distância entre o elemento de corrente e o elemento sem corrente.

Além disso, no que diz respeito aos sinais duplos em nossa expressão para a *força eletromotriz*, eles podem ser eliminados se eles forem baseados na distância r e assim imputarmos e ela valores positivos e negativos, calculando r a partir do local da massa em repouso e' como sendo o ponto inicial e, especificamente, como uma grandeza positiva quando a massa e calculada a partir desse ponto inicial está localizada no lado positivo (em direção ao qual estão direcionadas as velocidades positivas), e como uma grandeza negativa quando a massa e está localizada no lado negativo desse ponto inicial. Se, por exemplo, na Figura 15, A denotar a posição da massa em repouso e', BAC a linha de direção dada, e se o lado no qual C está localizado for estabelecido como sendo o lado positivo, então r será positiva se a massa e estiver no ponto C, [ou então r será] negativa quando a massa e estiver no ponto B.

Fig. 15.

Se, portanto, dois elementos de corrente semelhantes estão localizados em B e C, através dos quais a eletricidade está fluindo *no mesmo sentido*, e a intensidade de suas correntes aumentar e diminuir do mesmo valor, então esses dois elementos de corrente exercerão forças elétricas opostas nas massas elétricas que estão em repouso em A, de tal forma que essa massa, que é repelida por C, é atraída por B, e vice-versa; dessa forma é *duplicada* a força que tende a separar as massas positiva e negativa em A por meio da operação combinada dos dois elementos de corrente em B e C.

Finalmente, caso r seja positiva, se, por exemplo, o elemento de corrente estiver localizado em C, e se, além disso, tanto u quanto du possuírem valores negativos ou positivos, isto é, se a velocidade de deriva absoluta em C aumentar, independente de sua direção, então a expressão anterior terá um valor positivo ou negativo, caso u tenha um valor positivo ou negativo, ou seja, quando a intensidade de corrente estiver *aumentando*, uma *força eletromotriz* atuará de C repulsivamente ou atrativamente sobre a massa elétrica positiva em A, se a própria corrente em C estiver direcionada para a frente ou para trás, e assim excitará em A uma corrente *oposta* àquela [corrente] presente em C, o que corresponde totalmente às determinações contidas no *terceiro fato* citado anteriormente.[263]

Segue-se disso que esse *terceiro fato* confirma o resultado deduzido dos dois primeiros [fatos], já que *o mesmo complemento* da lei eletrostática para uma lei geral que serviu para explicar os dois primeiros fatos, também é suficiente para explicar o terceiro [fato].

[262]Em alemão: *Stromgeschwindigkeit*. Essa expressão pode ser traduzida como *velocidade de deriva*, *velocidade de arraste* ou *velocidade da corrente*. Weber está se referindo aqui à velocidade de deriva de cada partícula eletrizada em relação ao fio com corrente, isto é, em relação à matéria do condutor. Ver também as Notas de rodapé 45, 46, 243 e 248.

[263]Uma ilustração do terceiro fato encontra-se na Nota de rodapé 241 na página 141.

6.20 Comparação com Outras Leis Fundamentais

Na Seção anterior, seguindo o método experimental, procuramos completar a formulação eletrostática para a força repulsiva ou atrativa com que massas elétricas do mesmo tipo ou de tipos diferentes agem entre si à distância, de tal maneira que a formulação fosse aplicável não apenas quando as duas massas estão em repouso entre si, mas também quando estão em movimento uma contra a outra. Testamos e confirmamos essa expansão com base em fatos particulares e na próxima Seção apresentaremos esse teste com mais generalidade.

Assumindo a correção dos resultados que alcançamos, surgiria aqui um caso no qual a força com que duas massas atuam uma na outra dependeria não apenas *do valor das massas e da distância entre elas*, mas também de sua *velocidade relativa e aceleração relativa*. O cálculo dessas forças encontrará assim em muitos casos dificuldades matemáticas maiores do que o cálculo de tais forças que dependem apenas do valor das massas e de suas distâncias. Deveria ser esperado que se essa dependência das forças elétricas não apenas do valor das massas elétricas e de suas distâncias, mas também de suas velocidades e acelerações relativas, estivesse firmemente estabelecida, que essa mesma dependência, mesmo que tendo um alcance menor, também existiria em outras forças, de acordo com investigações mais precisas.

Dessa maneira seria introduzido um elemento completamente novo na dependência das forças em relações físicas dadas, e o domínio das forças, cuja determinação necessitaria levar em consideração esse novo elemento, formaria uma classe específica necessitando uma investigação especial.

Como, contudo, também deve ser altamente desejável, para o propósito de simplificar e facilitar nossas investigações, que o domínio dessas forças que dependem apenas do valor das massas e de suas distâncias, seja estendido o máximo possível, então *apenas a experiência* pode decidir, se outras forças, que também dependem das velocidades e acelerações mútuas das massas, devem ou não ser assumidas como existentes. Essa questão não pode ser decidida *a priori*, já que formalmente, a suposição de tais forças não contém uma contradição, nem qualquer coisa obscura ou indeterminada.

As leis da dependência das forças em relação a determinadas condições físicas são chamadas de *leis físicas fundamentais* e, de acordo com o objetivo da física, não se destinam a fornecer uma *explicação* das forças a partir de suas verdadeiras causas, mas apenas um método geral útil e claramente demonstrado para a determinação *quantitativa* das forças de acordo com as unidades fundamentais[264] estabelecidas na física para o espaço e o tempo. Portanto, do ponto de vista físico, não se pode objetar ao fato de que uma força seja uma função *de uma relação que depende do tempo*, nem tampouco que ela seja uma função de uma *distância*, porque uma relação dependente do tempo é uma quantidade tão mensurável quanto a distância; ambas, portanto, por sua natureza, são adequadas para uma *determinação* quantitativa precisa, mesmo que inadequadas para buscar nelas a *causa interna* de uma força.

Portanto, o único argumento que pode ser usado contra a introdução de uma relação dependente do tempo na expressão geral de uma força é a *analogia de outras leis fundamentais da física*, por exemplo, a lei da gravitação, onde isso não acontece. Entretanto, tal analogia só pode ser considerada obrigatória se oferecer meios e maneiras de alcançar o objetivo, mas quando a analogia de casos conhecidos não for suficiente, novas maneiras devem ser tentadas de acordo com a natureza do assunto.

Portanto, se a introdução de tais *relações dependentes do tempo* na expressão geral para

[264]Ver a Nota de rodapé 135 na página 79.

uma força não pode ser rejeitada em geral, isto deve ser ainda menos o caso, se essas relações forem essenciais para a determinação completa do *estado existente* das massas que atuam umas sobre as outras, pois em qualquer caso a força que duas massas exercem uma sobre a outra, uma vez que *nem sempre* permanece a mesma, deve ser pensada como dependente *da condição atual* de ambas as massas. Contudo, a determinação completa da condição atual de duas massas envolve necessariamente, além da determinação de suas *posições relativas* por meio de sua distância mútua r, a determinação de seus *movimentos relativos* por meio da velocidade relativa dr/dt entre elas. Pois, de acordo com o princípio da inércia, não se pode deixar de considerar a velocidade de um corpo como parte essencial do seu estado atual, porque a razão da inércia, de acordo com esse princípio, está no próprio corpo e, consequentemente, a permanência em *diferentes* movimentos requer *diferentes* estados internos do corpo, que, inacessíveis à nossa observação, só podem ser distinguidos pelas suas ações que emergem ao longo do tempo.

6.21 Dedução da Lei de Ampère para a Interação entre Correntes Elétricas. Transformação da Lei de Ampère

Aquilo que foi provado nas Seções anteriores para alguns fatos especiais, será provado agora de forma mais geral e mais precisa para todos os fatos contidos na lei de Ampère. A lei de Ampère determina a *ação total* que um elemento de corrente exerce sobre outro [elemento de corrente], dependendo da *distância* entre os dois elementos, de suas *intensidades de corrente*, e dos três *ângulos* que as direções dos elementos de corrente fazem entre si e com a linha reta que os conecta. Agora, se for possível reduzir essa *ação total*, assim determinada, a *forças elétricas elementares*, então *em primeiro lugar* a fórmula de Ampère precisa ser capaz de ser decomposta em várias partes que correspondem às ações entre *cada par de massas elétricas* nos dois elementos de corrente, em particular, à ação da massa positiva de um elemento sobre a massa positiva do outro, da massa negativa de um elemento sobre a massa negativa do outro, da massa positiva do primeiro elemento sobre a [massa] negativa do último e, finalmente, da massa negativa do primeiro elemento sobre a [massa] positiva do último. *Em segundo lugar*, cada uma dessas partes, consideradas como uma *força elétrica elementar*, tem de ser totalmente dependente de tais grandezas, que pertençam exclusivamente à natureza e às relações mútuas entre as duas massas elétricas às quais a parte se refere, e tem de ser determinada completamente por esse meio, independentemente de outras condições. *Em terceiro lugar* e finalmente, todas essas *forças elétricas elementares* teriam de ser capazes de serem reduzidas a uma *lei geral*. Contudo, não é necessário fazer qualquer tipo de hipótese prévia sobre essa lei geral; em vez disso, a lei de Ampère, sob uma tal transformação, teria de levar diretamente à formulação dessa lei geral e decidir sobre a admissibilidade ou inadmissibilidade de tal hipótese apresentada previamente. De início é necessário responder à seguinte questão:

> se a fórmula de Ampère permite um transformação tal que as intensidades de corrente contidas nela, i e i', e os ângulos ε, ϑ e ϑ', que os dois elementos de corrente fazem entre si e com a linha reta que conecta os dois elementos, desaparecem da fórmula, e se em vez desses [elementos], só são introduzidas novas grandezas que se referem completa e exclusivamente às próprias massas elétricas e às suas relações mútuas.

Essa transformação vai ser agora de fato realizada aqui e então será examinado se a expressão para a força eletrodinâmica, transformada dessa forma, permite a necessária decomposição em quatro partes, que correspondem às quatro ações parciais, das quais seria composta a ação total.

A fórmula de Ampère para a força repulsiva entre dois elementos de corrente é como segue:[265]

$$-\frac{ii'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)\cdot dsds' \ ,$$

na qual as letras possuem o significado dado na Seção 6.8, página[266] 83.

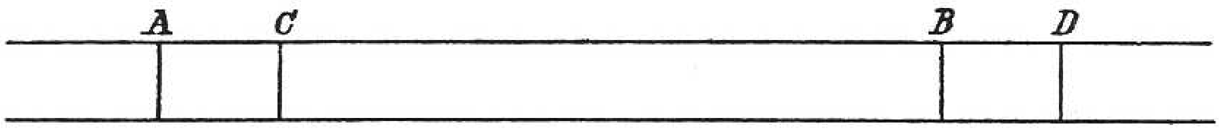


Fig. 16.

Na Figura 16, AB é o segmento de um fio condutor de comprimento $= 1$, e a quantidade de eletricidade positiva distribuída uniformemente nele é denominada por e, de tal forma que eds é a massa de eletricidade positiva que contém o elemento de corrente cujo comprimento $= ds$.

Com a velocidade constante u que todas as componentes elétricas positivas possuem no fio condutor AB quando uma corrente constante o atravessa, em um segundo a componente que está mais distante na frente percorre a trajetória BD, a que está mais atrás [percorre] a trajetória AC, e a massa elétrica e, que no início do segundo estava distribuída uniformemente no segmento $AB = 1$, está localizada no final do segundo no segmento $CD = 1$. Portanto, durante um segundo, toda a eletricidade que, no final do segundo, está contida no outro lado de B no segmento do fio condutor $BD = u$, atravessou a seção reta do fio condutor em B. Essa eletricidade, em conformidade com a definição de intensidade de corrente dada no início da Seção 6.2 (de acordo com a qual ela é proporcional à quantidade de eletricidade atravessando uma seção reta do circuito em um segundo), pode agora ser colocada $= i/a$, na qual a denota uma constante. Resulta então:

$$\frac{i}{a} : e = u : 1 \ ,$$

consequentemente $i = aeu$. O valor de a é diferente daquele valor dado na Seção 6.19.

Resulta da mesma forma que, se u' denota a velocidade de deriva[267] da eletricidade em um outro fio condutor,

$$i' = ae'u' \ .$$

Se substituirmos esses valores na fórmula de Ampère, essa expressão ficará como:

[265] O sinal negativo apresentado aqui na frente da força de Ampère coincide com aquele apresentado na Seção 6.8, mas é o oposto daquele apresentado na Seção 6.19. Ver as Notas de rodapé 139 e 256.

[266] [Web46, pág. 70 das *Obras* de Weber]. Os ângulos ε, ϑ e ϑ' são mostrados na Figura da Nota de rodapé 138 na página 82.

[267] Em alemão: *Strömungsgeschwindigkeit*. Ver também a Nota de rodapé 262 na página 156.

$$-\frac{eds \cdot e'ds'}{r^2} a^2 uu' \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2} \cos\vartheta \cos\vartheta' \right) \ ,$$

na qual, portanto, o primeiro fator $eds \cdot e'ds'/r^2$ denota o produto das duas *massas elétricas* atuando entre si nos dois elementos de corrente, dividido pelo quadrado da *distância* entre elas.

Além disso, Ampère havia mostrado na página 207 de seu Tratado,[268] que valem as seguintes relações:

$$\cos\vartheta = \frac{dr}{ds} \ , \qquad\qquad \cos\vartheta' = -\frac{dr}{ds'} \ ,$$

e

$$\cos\varepsilon = -r\frac{d^2r}{dsds'} - \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} \ .$$

Se substituirmos esses valores, a fórmula de Ampère assumirá a seguinte forma:

$$-\frac{eds \cdot e'ds'}{r^2} \cdot a^2 uu' \left(\frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - r\frac{d^2r}{dsds'} \right) \ .$$

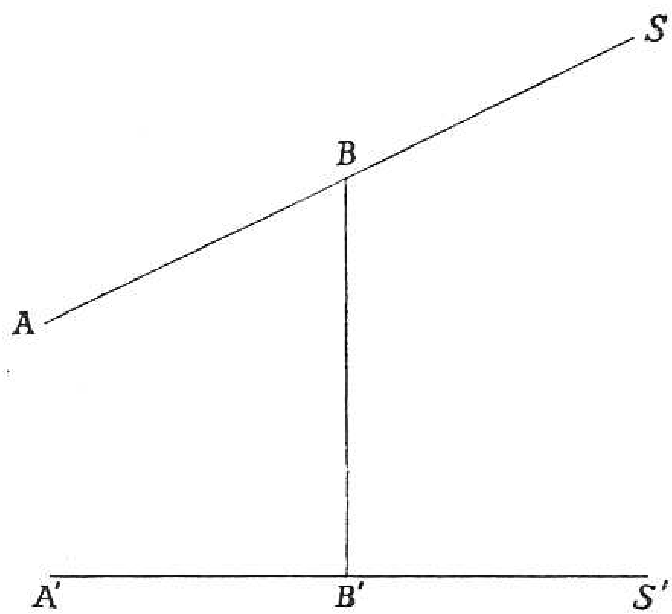


Fig.17.

Seja o elemento ds do fio condutor ABS localizado em B na Figura 17; o ponto inicial do fio condutor é colocado em A, consequentemente, $AB = s$. Seja o elemento ds' do fio condutor $A'B'S'$ localizado em B',[269] seja A' o ponto inicial desse fio, $A'B' = s'$ e $BB' = r$. Essa última grandeza r, se forem dados os fios condutores ABS e $A'B'S'$, será uma função de s e s', e então serão obtidas as seguintes expressões para dr e d^2r:

[268]Ver [Amp23, pág. 207], [Amp26, pág. 35], [AC11, págs. 389-390] e [AC15, pág. 360].
[269]Devido a uma falha de impressão, no texto original aparece aqui B em vez de B'.

$$dr = \frac{dr}{ds}ds + \frac{dr}{ds'}ds' \ ,$$

e

$$d^2r = \frac{d^2r}{ds^2}ds^2 + 2\frac{d^2r}{dsds'}dsds' + \frac{d^2r}{ds'^2}ds'^2 \ .$$

Se s e s' denotarem agora os comprimentos dos fios condutores desde seus pontos iniciais até os próprios elementos de corrente que estamos considerando, então s e s' terão valores constantes para dois elementos de corrente dados. Contudo, s e s' também podem significar o comprimento dos fios condutores desde seus pontos iniciais até as *massas elétricas* existindo agora nos elementos de corrente sendo considerados, mas que estão fluindo através deles. Com esse último significado, s e s' serão grandezas variáveis com o tempo t, e então teremos:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds'} \cdot \frac{ds'}{dt} \ ,$$

e

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{ds^2} \cdot \frac{ds^2}{dt^2} + 2\frac{d^2r}{dsds'} \cdot \frac{dsds'}{dt^2} + \frac{d^2r}{ds'^2} \cdot \frac{ds'^2}{dt^2} \ .$$

Aqui ds/dt é o elemento de trajetória da massa elétrica dividido pelo elemento de tempo no qual ele foi percorrido, isto é, a velocidade da massa elétrica e, portanto, $ds/dt = u$, quando consideramos inicialmente a massa *positiva*. Da mesma forma temos então $ds'/dt = u'$. Se substituirmos esses valores teremos então

$$\frac{dr}{dt} = u\frac{dr}{ds} + u'\frac{dr}{ds'} \ ,$$

e

$$\frac{d^2r}{dt^2} = u^2\frac{d^2r}{ds^2} + 2uu'\frac{d^2r}{dsds'} + u'^2\frac{d^2r}{ds'^2} \ .$$

A partir dessa última equação, e da equação obtida da primeira expressão, [a saber,]

$$\frac{dr^2}{dt^2} = u^2\frac{dr^2}{ds^2} + 2uu'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + u'^2\frac{d^2r}{ds'^2} \ ,$$

são obtidos os seguintes valores para $2uu'\frac{d^2r}{dsds'}$ e $2uu'\frac{drdr}{dsds'}$:

$$2uu'\frac{d^2r}{dsds'} = \frac{d^2r}{dt^2} - u^2\frac{d^2r}{ds^2} - u'^2\frac{d^2r}{ds'^2} \ ,$$

e

$$2uu'\frac{drdr}{dsds'} = \frac{dr^2}{dt^2} - u^2\frac{dr^2}{ds^2} - u'^2\frac{dr^2}{ds'^2} \ ,$$

a partir dos quais segue-se que:

$$uu'\left(\frac{1}{2}\frac{drdr}{dsds'} - r\frac{d^2r}{dsds'}\right) = \left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right) - \left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{ds^2}\right)u^2$$

$$- \left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds'^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{ds'^2}\right)u'^2 \ .$$

Se forem substituídos esses valores, então a fórmula de Ampère assumirá a seguinte forma:

$$-\frac{eds \cdot e'ds'}{r^2}a^2\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{dt^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{dt^2}\right) - \left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{ds^2}\right)u^2\right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{4}\frac{dr^2}{ds'^2} - \frac{1}{2}r\frac{d^2r}{ds'^2}\right)u'^2\right\} \ .$$

Nessa transformação da fórmula de Ampère, só foram introduzidas as *massas elétricas positivas* que se deslocam em suas trajetórias com as velocidades u e u'. É claro que também podemos introduzir as massas elétricas *negativas* no lugar das positivas. Resulta então, se isso ocorre da mesma forma para os dois elementos de corrente, que as duas massas introduzidas são portanto novamente *do mesmo tipo*, mas suas velocidades, de acordo com as determinações dadas para as correntes galvânicas na página[270] 145, possuem ambas os valores opostos, a saber, $-u$ e $-u'$, na mesma expressão. Portanto, se r_1, ζ e ζ' denotarem para as massas *negativas* as mesmas coisas que r, s e s' denotam para as [massas] *positivas*, então obteremos inicialmente a fórmula de Ampère na seguinte forma:

$$-\frac{eds \cdot e'ds'}{r_1^2} \cdot a^2\left\{\left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{1}{2}r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}\right) - \left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{d\zeta^2} - \frac{1}{2}r_1\frac{d^2r_1}{d\zeta^2}\right)u^2\right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{4}\frac{dr_1^2}{d\zeta'^2} - \frac{1}{2}r_1\frac{d^2r_1'}{d\zeta'^2}\right)u'^2\right\} \ .$$

Contudo, no instante que está sendo considerado, no qual aquelas massas *positivas* (às quais se referem [as grandezas] r, s e s') e essas massas *negativas* (às quais se referem [as grandezas] r_1, ζ e ζ') atravessam os mesmos elementos de corrente, temos que:

$$r = r_1 \ , \qquad s = \zeta \ , \qquad s' = \zeta' \ .$$

Além disso, também ocorre que

$$\frac{dr_1}{d\zeta} = \frac{dr}{ds} \ , \qquad \frac{d^2r_1}{d\zeta^2} = \frac{d^2r}{ds^2} \ , \qquad \frac{dr_1}{d\zeta'} = \frac{dr}{ds'} \ , \qquad \frac{d^2r_1}{d\zeta'^2} = \frac{d^2r}{ds'^2} \ ,$$

já que todos esses valores dependem simplesmente da posição dos elementos de corrente através dos quais fluem as massas *positivas* e *negativas*, mas são independentes do movimento das massas nesses elementos de corrente. Finalmente,

$$\frac{d\zeta}{dt} = -u = -\frac{ds}{dt} \ , \qquad \frac{d\zeta'}{dt} = -u' = -\frac{ds'}{dt} \ ,$$

consequentemente,

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_1}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \frac{dr_1}{d\zeta'} \cdot \frac{d\zeta'}{dt} = -\left(\frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds'} \cdot \frac{ds'}{dt}\right) = -\frac{dr}{dt} \ ,$$

o que fornece[271]

[270][Web46, pág. 139 das *Obras* de Weber].

[271]Devido a um erro de impressão, a próxima equação apareceu no texto original como:

$$\frac{dr_1^2}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2} \ .$$

Encontramos da mesma forma:

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \ .$$

Ao substituir esses valores, a última expressão transforma-se na primeira.

Ocorre um caso diferente quando são introduzidas uma massa *positiva* e uma *negativa*, a saber, com massas *de tipos diferentes*. Se mantivermos a massa *positiva* no primeiro elemento de corrente, a *negativa* no segundo, e se denotarmos a distância entre elas por r_2, então a fórmula de Ampère será obtida da seguinte forma:

$$+\frac{eds \cdot e'ds'}{r_2^2} \cdot a^2 \left\{ \left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{1}{2} r_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} \right) - \left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{ds^2} - \frac{1}{2} r_2 \frac{d^2 r_2}{ds^2} \right) u^2 \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{4}\frac{dr_2^2}{d\zeta'^2} - \frac{1}{2} r_2 \frac{d^2 r_2'}{d\zeta'^2} \right) u'^2 \right\} \ .$$

Por outro lado, se mantivermos a massa *negativa* no primeiro elemento de corrente, a *positiva* no segundo, e se denotarmos a distância entre elas por r_3, então a fórmula de Ampère ficará com a seguinte forma:

$$+\frac{eds \cdot e'ds'}{r_3^2} \cdot a^2 \left\{ \left(\frac{1}{4}\frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{1}{2} r_3 \frac{d^2 r_3}{dt^2} \right) - \left(\frac{1}{4}\frac{dr_3^2}{d\zeta^2} - \frac{1}{2} r_3 \frac{d^2 r_3}{d\zeta^2} \right) u^2 \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{4}\frac{dr_3^2}{ds'^2} - \frac{1}{2} r_3 \frac{d^2 r_3'}{ds'^2} \right) u'^2 \right\} \ .$$

Aqui também, $r_2 = r_3 = r$,

$$\frac{dr_2}{ds} = \frac{dr_3}{d\zeta} = \frac{dr}{ds} \ , \qquad \frac{d^2 r_2}{ds^2} = \frac{d^2 r_3}{d\zeta^2} = \frac{d^2 r}{ds^2} \ ,$$

$$\frac{dr_2}{d\zeta'} = \frac{dr_3}{ds'} = \frac{dr}{ds'} \ , \qquad \frac{d^2 r_2}{ds'^2} = \frac{d^2 r_3}{ds'^2} = \frac{d^2 r}{ds'^2} \ ;$$

contudo, resulta que

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{dr_2}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{dr_2}{d\zeta'} \cdot \frac{d\zeta'}{dt} = +\frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} - \frac{dr}{ds'} \cdot \frac{ds'}{dt} \ ,$$

$$\frac{dr_3}{dt} = \frac{dr_3}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dt} + \frac{dr_3}{ds'} \cdot \frac{ds'}{dt} = -\frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{dr}{ds'} \cdot \frac{ds'}{dt} = -\frac{dr_2}{dt} \ ,$$

consequentemente, $dr_2^2/dt^2 = dr_3^2/dt^2$ é diferente de dr^2/dt^2. Encontramos da mesma forma $d^2 r_2/dt^2 = d^2 r_3/dt^2$ sendo diferente de $d^2 r/dt^2$. Ao substituir esses valores nos dois casos em

---

$$\frac{dr_1}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2} \ .$$

A equação correta deveria ser $\frac{dr_1^2}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt^2}$, como a corrigimos, isto é, $(\frac{dr_1}{dt})^2 = (\frac{dr}{dt})^2$.

que introduzimos massas de *tipos diferentes*, obtemos a mesma expressão para a fórmula de Ampère, a saber:

$$+eds \cdot e'ds' \cdot a^2 \left\{ \frac{1}{r_2^2} \left(\frac{1}{4} \frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{1}{2} r_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} \right) - \left(\frac{1}{4} \frac{dr^2}{ds^2} - \frac{1}{2} r \frac{d^2 r}{ds^2} \right) \frac{u^2}{r^2} \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{4} \frac{dr^2}{ds'^2} - \frac{1}{2} r \frac{dr^2}{ds'^2} \right) \frac{u'^4}{r^2} \right\} .$$

Agora como as duas expressões, [a saber,] a primeira que foi obtida introduzindo massas *do mesmo tipo*, assim como a última obtida ao introduzir massas *de tipos diferentes*, representam a força com a qual dois elementos de corrente atuam entre si, são ambas idênticas com a fórmula de Ampère, então uma terceira [expressão] será deduzida a partir delas para a mesma força, também idêntica com a fórmula de Ampère, se considerarmos a soma de suas metades, isto é,

$$-\frac{a^2}{2} \frac{eds \cdot e'ds'}{r^2} \left(\frac{1}{4} \frac{dr^2}{dt^2} - \frac{1}{2} r \frac{d^2 r}{dt^2} \right) + \frac{a^2}{2} \frac{eds \cdot e'ds'}{r_2^2} \left(\frac{1}{4} \frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{1}{2} r_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} \right) .$$

Essa última expressão, equivalente à fórmula de Ampère, é a *transformação* procurada. Pois dessa maneira são eliminadas as grandezas i, i', ε, ϑ e ϑ', e só são introduzidas grandezas no lugar delas que estão relacionadas parcialmente com *os mesmos tipos* de massas elétricas, parcialmente com *tipos diferentes* de massas elétricas, e com suas relações mútuas.

Essa expressão *transformada* da fórmula de Ampère pode agora ser representada como uma soma de quatro partes que podem ser consideradas como as *forças elétricas elementares*, a saber, na seguinte maneira:

$+\frac{eds \cdot e'ds'}{r^2} \left(1 - \frac{a^2}{16} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8} r \frac{d^2 r}{dt^2} \right)$, como a ação de $+eds$ sobre $+e'ds'$;
$+\frac{eds \cdot e'ds'}{r_1^2} \left(1 - \frac{a^2}{16} \frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8} r_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} \right)$, como a ação de $-eds$ sobre $-e'ds'$;
$-\frac{eds \cdot e'ds'}{r_2^2} \left(1 - \frac{a^2}{16} \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8} r_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} \right)$, como a ação de $+eds$ sobre $-e'ds'$;
$-\frac{eds \cdot e'ds'}{r_3^2} \left(1 - \frac{a^2}{16} \frac{dr_3^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8} r_3 \frac{d^2 r_3}{dt^2} \right)$, como a ação de $-eds$ sobre $+e'ds'$.

Cada uma dessas quatro ações parciais reduz-se para o caso de repouso, no qual $dr/dt = dr_1/dt = dr_2/dt = dr_3/dt = 0$ e da mesma forma $d^2r/dt^2 = d^2r_1/dt^2 = d^2r_2/dt^2 = d^2r_3/dt^2 = 0$, ao mesmo valor que é dado para esse caso pela lei fundamental da *eletrostática*; pois essas quatro forças são expressas nesse caso pelo produto das massas atuando entre si, dividido pelo quadrado da distância entre elas. Conforme cada produto tenha um valor positivo ou negativo, as forças atuam para repelir ou atrair.

Se, como na eletrostática, as massas elétricas forem denotadas simplesmente por e e e', e se forem dados valores positivos ou negativos a essas próprias massas, caso elas pertençam ao fluido positivo ou negativo, então todas essas ações parciais poderão ser enquadradas na *lei geral* na qual a força repulsiva dessas massas é representada por[272]

[272]A próxima equação deve ser entendida como:

$$\frac{ee'}{r^2} \left[1 - \frac{a^2}{16} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{a^2}{8} r \frac{d^2 r}{dt^2} \right] .$$

Além disso, deve ser lembrado que para Weber forças positivas significam repulsão entre os corpos que estão interagindo, enquanto que forças negativas significam atração, ver o primeiro parágrafo da Seção 6.8, página 83.

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right) \ .$$

Portanto, a partir dessa análise da lei de Ampère, que é uma expressão mais precisa de uma classe muito extensa de fatos, segue-se a mesma *lei elétrica fundamental* que foi estabelecida nas Seções anteriores ao introduzir apenas fatos particulares, e isso foi demonstrado sem hipóteses.

6.22 Teoria de Dois Elementos de Corrente Constante

Tendo chegado à *lei elétrica fundamental* expressa na Seção anterior, podemos colocá-la no topo da teoria da eletricidade, e deduzir dela sinteticamente um sistema de consequências, sendo esse o propósito final de tal lei.

As consequências que podem ser deduzidas dela para a eletricidade estática são encontradas no clássico Tratado de Poisson nas *Mémoires de l'academie des sciences de l'institut de France* para o ano de 1812,[273] pois a lei fundamental anterior é, para o caso da estática, idêntica àquela lei que Poisson, na obra citada, colocou no topo da eletrostática.

No caso de eletricidade *em movimento*, inicialmente será considerado o movimento *uniforme* da eletricidade de correntes galvânicas em condutores em repouso, ao qual se relaciona a lei de Ampère. Agora, como a lei elétrica fundamental anterior foi desenvolvida analiticamente a partir da lei de Ampère, a lei de Ampère, por sua vez, tem de seguir sinteticamente dessa lei fundamental. Essa dedução será de fato apresentada aqui.

Em dois elementos de corrente α e α', que, juntamente com a linha reta que os conecta, estão contidos em planos que formam o ângulo ω entre si,[274] são dadas quatro *massas elétricas*, a saber, uma *positiva* e uma *negativa de mesmo valor* em cada elemento de corrente.

Para o elemento α, $+\alpha e$ representa a massa *positiva* que desloca-se com velocidade constante $+u$ na direção do elemento α, que forma o ângulo ϑ com a linha reta r direcionada do primeiro elemento para o segundo; para o mesmo elemento, $-\alpha e$ denota a massa *negativa* que desloca-se na mesma direção com a velocidade constante $-u$, a saber, para trás.

As letras acentuadas $\pm\alpha' e'$, $\pm u'$ e ϑ' denotam para o outro elemento α' as mesmas coisas que as letras sem acento denotam para o primeiro elemento α.

Entre essas quatro massas, têm de ser consideradas as seguintes quatro ações:

$$\begin{aligned}
&\text{de } +\alpha e \text{ em } +\alpha' e' \ ,\\
&\text{de } -\alpha e \text{ em } -\alpha' e' \ ,\\
&\text{de } +\alpha e \text{ em } -\alpha' e' \ ,\\
&\text{de } -\alpha e \text{ em } +\alpha' e' \ .
\end{aligned}$$

As quatro distâncias entre essas massas que estão atuando entre si à distância, no instante que está sendo considerado no qual todas essas massas estão localizadas nos dois elementos de corrente α e α', são iguais à distância r dada entre esses dois elementos. Contudo, como essas quatro distâncias não permanecem sempre iguais, devido aos movimentos diferentes das massas, elas serão denominadas por r_1, r_2, r_3, r_4, e, portanto, no momento em consideração:

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r \ .$$

[273]Siméon Denis Poisson (1781-1840). Ver [Poi12a], [Poi12b] com tradução para o inglês em [Poi19], e [Poi13]. A lei a que Poisson e Weber se referem é a força de Coulomb entre partículas eletrizadas, ver a Nota de rodapé 60 na página 35.

[274]Esse ângulo ω é mostrado na Figura da Nota de rodapé 138 na página 82.

A aplicação da lei fundamental dada no final da Seção anterior fornece então diretamente os valores para essas quatro ações parciais, sequencialmente:

$$+\frac{\alpha e\cdot\alpha' e'}{r_1^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}\right) \ ,$$

$$+\frac{\alpha e\cdot\alpha' e'}{r_2^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r_2\frac{d^2r_2}{dt^2}\right) \ ,$$

$$-\frac{\alpha e\cdot\alpha' e'}{r_3^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr_3^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r_3\frac{d^2r_3}{dt^2}\right) \ ,$$

e

$$-\frac{\alpha e\cdot\alpha' e'}{r_4^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr_4^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r_4\frac{d^2r_4}{dt^2}\right) \ .$$

Essas quatro forças são transferidas das massas elétricas $+\alpha' e'$ e $-\alpha' e'$, sobre as quais elas atuam diretamente, de acordo com a Seção 6.19, página[275] 143, para a massa ponderável do elemento α', combinando-se lá em uma resultante que é igual à soma algébrica dessas forças. Esta soma é, no que diz respeito à já mencionada igualdade de distâncias,

$$\begin{aligned}-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{\alpha e\cdot\alpha' e'}{r^2}\Bigg\{&\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)\\ &-2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{d^2r_2}{dt^2}-\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\Bigg\} \ .\end{aligned}$$

Se a massa $+\alpha e$ avança agora em sua trajetória no elemento de tempo dt com velocidade $+u$ através do elemento de deslocamento $+udt$, trajetória essa que forma o ângulo ϑ com a linha reta r_1, enquanto que a massa $+\alpha' e'$ avança em sua trajetória no mesmo elemento de tempo dt com velocidade $+u'$ através do elemento de deslocamento $+u'dt$, sendo que essa trajetória forma o ângulo ϑ' com a linha reta estendida r_1, e se esses pequenos deslocamentos são projetados na direção r_1, então

$$r_1+dr_1=r_1-udt\cdot\cos\vartheta+u'dt\cdot\cos\vartheta' \ ,$$

na qual dr_1 denota a mudança no comprimento da linha reta conectando as duas massas positivas no elemento de tempo dt. Disso segue que

$$\frac{dr_1}{dt}=-u\cos\vartheta+u'\cos\vartheta' \ .$$

Resulta da mesma forma para as duas massas negativas $-\alpha e$ e $-\alpha' e'$:

$$\frac{dr_2}{dt}=+u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta' \ ;$$

além disso, para a [massa] positiva $+\alpha e$ e para a negativa $-\alpha' e'$:

$$\frac{dr_3}{dt}=-u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta' \ ;$$

[275][Web46, pág. 137 das *Obras* de Weber].

finalmente, para a [massa] negativa $-\alpha e$ e para a positiva $+\alpha' e'$:

$$\frac{dr_4}{dt} = +u\cos\vartheta + u'\cos\vartheta' \ .$$

Portanto,

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2}\right) = -8uu'\cos\vartheta\cos\vartheta' \ .$$

Agora como, além disso, as velocidades u e u' são constantes, resulta disso, quando as *mudanças* nos ângulos ϑ e ϑ' (que claramente possuem eles próprios o mesmo valor no instante que está sendo considerado para todos os quatro pares de massas, mas cujos valores mudam com a passagem do tempo e tornam-se desiguais) durante o elemento de tempo dt são denotadas

para o primeiro par de massas, $d\vartheta_1$ e $d\vartheta_1'$,
para o segundo par de massas, $d\vartheta_2$ e $d\vartheta_2'$,
para o terceiro par de massas, $d\vartheta_3$ e $d\vartheta_3'$,
para o quarto par de massas, $d\vartheta_4$ e $d\vartheta_4'$,

através da diferenciação dos primeiros coeficientes diferenciais:[276]

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} = +u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_1}{dt} - u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_1'}{dt} \ ,$$

$$\frac{d^2r_2}{dt^2} = -u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_2}{dt} + u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_2'}{dt} \ ,$$

$$\frac{d^2r_3}{dt^2} = +u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_3}{dt} + u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_3'}{dt} \ ,$$

e

$$\frac{d^2r_4}{dt^2} = -u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_4}{dt} - u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_4'}{dt} \ .$$

Portanto,

$$\left(\frac{d^2r_1}{dt^2} + \frac{d^2r_2}{dt^2} - \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2}\right) = +u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$

$$- u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\left(\frac{d\vartheta_1'}{dt} - \frac{d\vartheta_2'}{dt} + \frac{d\vartheta_3'}{dt} - \frac{d\vartheta_4'}{dt}\right) \ .$$

Suponha agora que AB na Figura 18 represente a linha r.

[276]Em alemão: *durch Differentiation der ersten Differentialkoefficienten.* Essa expressão pode ser traduzida por "através da diferenciação dos primeiros coeficientes diferenciais", "através da diferenciação das derivadas de primeira ordem" ou "através da diferenciação dos primeiros quocientes diferenciais".

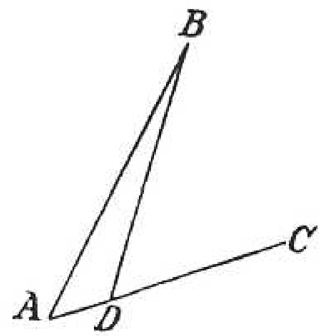


Fig. 18.

Suponha que a massa $+\alpha e$ esteja localizada em A e se desloque na direção AC com a velocidade $+u$ no elemento de tempo dt através [da distância] $AD = +udt$. O ângulo que a direção da corrente AC forma com AB, é $BAC = \vartheta$. Como resultado do movimento de A para D, o ângulo BAC torna-se BDC, e

$$BDC = BAC + ABD = \vartheta + \frac{udt}{r} \operatorname{sen} \vartheta \ .$$

A linha AB na Figura 19, que novamente representa r, é estendida para B'.

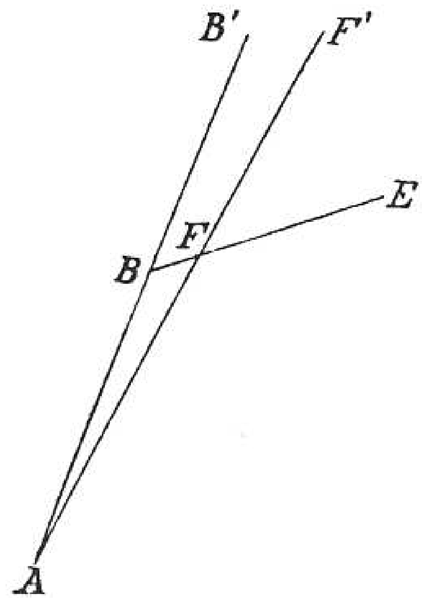


Fig. 19.

A massa $+\alpha' e'$ está localizada em B e desloca-se na direção BE com velocidade $+u'$ no elemento de tempo dt através [da distância] $BF = +u'dt$. O ângulo que a direção da corrente BE forma com BB', é $B'BE = \vartheta'$. Como resultado do movimento de B para F, o ângulo $B'BE$ torna-se $F'FE$, e

$$\vartheta' = B'BE = AFB + BAF = F'FE + \frac{u'dt}{r} \operatorname{sen} \vartheta' \ ,$$

por conseguinte

$$F'FE = \vartheta' - \frac{u'dt}{r} \operatorname{sen} \vartheta' \ .$$

Finalmente, se através do centro de uma esfera forem traçadas linhas paralelas à direção AB e às duas direções de corrente AC e BE nas Figuras 18 e 19, que cortam a superfície da esfera em R, U e U' na Figura 20, e se R for conectado com U e U' pelos maiores arcos de círculo, então o plano do arco $UR = \vartheta$ será paralelo ao plano BAC na Figura 18, o plano do arco $U'R = \vartheta'$ será paralelo ao plano $B'BE$ na Figura 19, e o ângulo formado pelos dois planos em R será o ângulo denominado de ω.

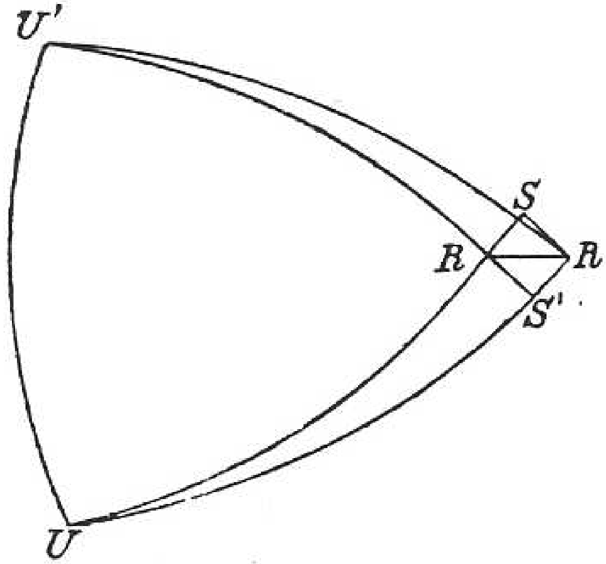


Fig. 20.

Seja o arco UR estendido para S, $U'R$ para S', e seja

$$RS = +\frac{udt}{r} \operatorname{sen} \vartheta' \ , \qquad\qquad RS' = -\frac{u'dt}{r} \operatorname{sen} \vartheta' \ .$$

Nesse caso US é o arco do ângulo BDC na Figura 18, e $U'S'$ é o arco do ângulo $F'FE$ na Figura 19. O elemento da superfície da esfera na qual estão localizados R, S e S', também pode ser considerado como um elemento do plano tocando a superfície da esfera em R, e os elementos de arco RS e RS' são linhas retas nesse plano. Se o paralelogramo $RSR'S'$ for completado nesse plano, então uma linha traçada através do centro da esfera paralela à linha reta conectando as duas massas ao final do elemento de tempo dt passará através do ponto R'. Segue-se disso que a direção dessa linha reta é modificada pelo movimento simultâneo das duas massas exatamente como ela mudaria caso uma massa estivesse em repouso e seu movimento, considerado na direção oposta, fosse atribuído à outra massa. Os dois movimentos, transferidos para um ponto dessa forma, podem então ser combinados de acordo com a lei dos paralelogramos, sendo então obtido o resultado já citado.

Finalmente, se R' for conectado com U e U' por meio dos maiores arcos de círculo, então

$$UR' = \vartheta + d\vartheta_1 = UR + d\vartheta_1 \ ,$$

e

$$U'R' = \vartheta' + d\vartheta_1' = U'R + d\vartheta_1' \ .$$

Segue-se que:

$$d\vartheta_1 = UR' - UR = RS + RS' \cos\omega \ ,$$

e

$$d\vartheta_1' = U'R' - U'R = RS' + RS \cos\omega \ .$$

Agora, como $RS = +\frac{udt}{r} \operatorname{sen}\vartheta$ e $RS' = -\frac{u'dt}{r} \operatorname{sen}\vartheta'$, segue-se que:

$$d\vartheta_1 = +\frac{udt}{r} \operatorname{sen}\vartheta - \frac{u'dt}{r} \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega \ ,$$

e

$$d\vartheta_1' = -\frac{u'dt}{r} \operatorname{sen}\vartheta' + \frac{udt}{r} \operatorname{sen}\vartheta \cos\omega \ .$$

De acordo com isso:

$$r\frac{d\vartheta_1}{dt} = +u \operatorname{sen}\vartheta - u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega \ ,$$

e

$$r\frac{d\vartheta_1'}{dt} = -u' \operatorname{sen}\vartheta' + u \operatorname{sen}\vartheta \cos\omega \ .$$

Da mesma forma, resulta para as duas massas *negativas* $-\alpha e$ e $-\alpha' e'$:

$$r\frac{d\vartheta_2}{dt} = -u \operatorname{sen}\vartheta + u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega \ ,$$

e

$$r\frac{d\vartheta_2'}{dt} = +u' \operatorname{sen}\vartheta' - u \operatorname{sen}\vartheta \cos\omega \ ,$$

além disso, para a massa positiva $+\alpha e$ e para a negativa $-\alpha' e'$:

$$r\frac{d\vartheta_3}{dt} = +u \operatorname{sen}\vartheta + u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega \ ,$$

e

$$r\frac{d\vartheta_3'}{dt} = +u' \operatorname{sen}\vartheta' + u \operatorname{sen}\vartheta \cos\omega \ ,$$

finalmente, para a massa negativa $-\alpha e$ e para a positiva $+\alpha' e'$:

$$r\frac{d\vartheta_4}{dt} = -u \operatorname{sen}\vartheta - u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega \ ,$$

e

$$r\frac{d\vartheta'_4}{dt} = -u' \operatorname{sen}\vartheta' - u \operatorname{sen}\vartheta \cos\omega \ .$$

Se esses valores forem substituídos agora, resultará então a seguinte equação:[277]

[277][Nota de Wilhelm Weber:] Essa equação também pode ser deduzida das equações de movimento das quatro massas elétricas. Traçamos um plano paralelo com α' através do elemento α. Seja O aquele ponto nesse plano no qual a direção α é cortada pela direção α', que é projetada nesse plano. Seja O a origem das coordenadas, seja a direção α considerada como o eixo x, e seja o eixo z perpendicular ao plano mencionado anteriormente. Além disso, imagine que as duas massas sempre se deslocam para a frente uniformemente nas mesmas direções, e escolha como o ponto inicial do tempo t aquele instante para o qual as coordenadas da massa considerada por último em α' são

$$x' = 0, \qquad y' = 0, \qquad z' = c \ .$$

Se ε denotar então o ângulo que as direções α e α' formam entre si, x, y, z as coordenadas da massa considerada por último em α, e se u e u' [representarem] as velocidades das duas massas, então as equações de movimento serão:

para uma massa:	para a outra massa:
$x = b + ut$	$x' = u't \cdot \cos\varepsilon$
$y = 0$	$y' = u't \cdot \operatorname{sen}\varepsilon$
$z = 0$	$z' = c$

nas quais b e c são constantes dadas. De acordo com isso:

$$x' - x = (u'\cos\varepsilon - u) \cdot t - b \ ,$$

$$y' - y = u't \cdot \operatorname{sen}\varepsilon \ ,$$

e

$$z' - z = c \ ,$$

além disso, como $r_1^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$,

$$r_1^2 = [(u'\cos\varepsilon - u) \cdot t - b]^2 + u'^2 t^2 \operatorname{sen}^2\varepsilon + c^2 \ .$$

Se essa equação for diferenciada com relação a r_1 e t, obteremos:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{1}{r_1} \cdot [(u'\cos\varepsilon - u) \cdot t - b]\,(u'\cos\varepsilon - u) + u'^2 t \cdot \operatorname{sen}^2\varepsilon \ ,$$

e, através de diferenciações repetidas:

$$r_1\frac{d^2r_1}{dt^2} + \frac{dr_1^2}{dt^2} = u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon \ .$$

Agora, para o instante no qual as duas massas alcançaram α e α', se ϑ denotar o ângulo que a direção de α para α' forma com o *primeiro* eixo coordenado,

$$x' - x = r_1\cos\vartheta \ .$$

Se forem traçadas linhas paralelas com os três eixos coordenados, além disso com a direção de α para α', e finalmente com a própria direção α', através do centro de uma esfera, cuja superfície é cortada em

$$X, \ Y, \ Z, \ R \text{ e } P \ ,$$

$$r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{d^2r_2}{dt^2}-\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)=-8uu'\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega\ .$$

Se esses valores e aqueles encontrados para $\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)$ forem substituídos na expressão anterior para a resultante das quatro ações parciais, obteremos então o seguinte valor para ela:

---

então RY será o arco do ângulo que a linha de α para α' forma com o *segundo* eixo coordenado e, portanto, no instante em que as duas massas alcançam α e α',

$$y'-y=r_1\cos RY\ .$$

Contudo, nos triângulos esféricos PRX e PRY, como o raio P (que é paralelo à direção α') está contido no mesmo círculo máximo com os raios X e Y (que é paralelo ao plano dos eixos coordenados x e y), [temos:]

$$\cos RX\operatorname{sen}PY+\cos RY\operatorname{sen}PX=\cos PR\operatorname{sen}XY\ ,$$

e, além disso:

$$XY=90^{\circ}\ ,\quad PX=\varepsilon\ ,\quad RX=\vartheta\ ,\quad PR=\vartheta'\ ,$$

onde ϑ' denota o ângulo que a linha de α para α' forma com a direção do próprio α'. Se forem substituídos esses valores, obteremos:

$$\cos RY=\frac{\cos\vartheta'-\cos\vartheta\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon}\ ,$$

portanto,

$$y'-y=r_1\cdot\frac{\cos\vartheta'-\cos\vartheta\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon}\ .$$

Se agora t nas equações anteriores para $x'-x$ e $y'-y$ denotar aquele valor que corresponde ao instante no qual as duas massas alcançaram α e α', então os valores anteriores para $x'-x$ e $y'-y$ deverão ser colocados iguais àqueles [valores] que acabaram de ser encontrados, ou

$$(u'\cos\varepsilon-u)t-b=r_1\cos\vartheta\ ,$$

e

$$u't\cdot\operatorname{sen}\varepsilon=r_1\cdot\frac{\cos\vartheta'-\cos\vartheta\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}\varepsilon}\ .$$

Se esses valores forem substituídos na expressão para $\frac{dr_1}{dt}$, o resultado será:

$$\frac{dr_1}{dt}=+\ u'\cos\vartheta'-u\cos\vartheta\ .$$

Se você subtrair o quadrado disso do valor encontrado para $r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{dr_1^2}{dt^2}$, você obterá:

$$r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}=u^2\operatorname{sen}^2\vartheta+u'^2\operatorname{sen}^2\vartheta'-2uu'\left(\cos\varepsilon-\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)\ ,$$

ou, se for introduzido o ângulo ω, de acordo com a equação $\cos\varepsilon=\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega+\cos\vartheta\cos\vartheta'$,

$$r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}=u^2\operatorname{sen}^2\vartheta+u'^2\operatorname{sen}^2\vartheta'-2uu'\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega\ .$$

As derivadas correspondentes dos outros pares de massas são encontradas da mesma forma, fornecendo então conjuntamente a equação anterior.

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot aeu \cdot ae'u' \left(\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' \right) .$$

Se substituirmos aqui, de acordo com a página[278] 159,

$$aeu = i \ , \qquad\qquad ae'u' = i' \ ,$$

então, de acordo com essa dedução a partir da lei elétrica fundamental estabelecida, resultará para a força repulsiva entre dois elementos de corrente o mesmo valor que aquele de acordo com a lei de Ampère, a saber:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2} ii' \left(\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' \right) ,$$

ou, quando ε denotar o ângulo formado entre os dois elementos α e α', e onde então $\cos\varepsilon = \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega + \cos\vartheta\cos\vartheta'$,

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2} ii' \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' \right) .$$

Isso determina completamente as ações à distância entre correntes elétricas *constantes* em fios condutores *estacionários*. As conclusões tiradas da lei fundamental até o momento foram todas confirmadas experimentalmente.

6.23 Teoria da Indução Eletrovoltaica

Ainda falta desenvolver, a partir da lei elétrica fundamental estabelecida, as ações das correntes elétricas *variáveis* em condutores *móveis*, sendo que esse desenvolvimento inclui a *teoria da indução eletrovoltaica*.[279]

A *indução eletrovoltaica* se diferencia da *eletrodinâmica* de Ampère, pois ela lida com a *geração* de correntes, sendo que esse assunto está totalmente excluído da eletrodinâmica de Ampère.

A seguir vai aquilo que é conhecido *empiricamente* sobre a indução eletrovoltaica. Em primeiro lugar, sabemos que ela pode ser produzida de duas maneiras essencialmente diferentes, a saber, correntes podem ser induzidas por meio de correntes *constantes* e por meio de correntes *variáveis*. A indução ocorre por meio de correntes *constantes* quando um fio condutor, através do qual a corrente constante está fluindo, se aproxima ou se afasta do fio condutor no qual uma corrente é para ser induzida, ou então quando, vice-versa, o último fio se aproxima ou se afasta do primeiro. Parece ser indiferente para a ação se apenas um, ou se apenas o outro fio, ou se ambos são movidos, desde que o movimento *relativo* seja o mesmo. Se dois fios são paralelos entre si, então uma corrente de direção oposta [à corrente indutora] será induzida ao aproximá-los, já uma corrente de mesma direção será induzida ao afastá-los. A indução ocorre por meio de correntes *variáveis* mesmo quando o fio condutor, através do qual flui a corrente variável, permanece imóvel[280] em relação ao fio no qual uma corrente é para ser induzida. Se os dois fios são paralelos entre si, o aumento da intensidade

[278] [Web46, pág. 152 das *Obras* de Weber].

[279] Ver a Nota de rodapé 173 na página 105.

[280] Em alemão: *unverrückt*. Essa palavra pode ser traduzida como imóvel, inalterado, impassível ou imperturbável.

de corrente induz uma corrente de direção oposta [à corrente indutora], enquanto que uma diminuição da intensidade induz uma corrente de mesma direção.

Em segundo lugar, sabemos empiricamente que a indução causada por uma corrente constante em um fio condutor que se move em direção à corrente constante, é a mesma que a indução causada por um ímã no mesmo fio condutor, caso a força eletrodinâmica de repulsão ou atração, que aquela corrente exerceria nesse fio condutor quando uma determinada corrente atravessasse esse último, for igual à força eletromagnética que o ímã exerceria no mesmo fio sob as mesmas condições. Ver a Seção 6.11, página[281] 114.

Estas descobertas empíricas podem ser usadas para verificar a exatidão das leis de *indução eletrovoltaica* a serem estabelecidas.

Além disso, deve ser observado que a teoria da *indução eletrovoltaica* é uma teoria das *forças eletromotrizes* por meio das quais as próprias *correntes induzidas* ainda não estão completamente determinadas. Para determinar completamente as próprias *correntes induzidas*, tanto no que diz respeito às suas *intensidades*, quanto às forças eletrodinâmicas de repulsão e atração, assim como as induções *secundárias* que elas próprias irão produzir, é necessário, além da determinação da *força eletromotriz* a ser obtida da teoria da *indução eletrovoltaica*, uma indicação da *resistência* de todo o circuito ao qual o fio condutor induzido pertence, como é óbvio a partir da dependência fornecida pela lei de Ohm da intensidade de corrente em relação à força eletromotriz e à resistência total do circuito.

Finalmente, o desenvolvimento completo das ações de correntes elétricas *não-uniformes* em condutores *móveis* inclui não apenas a *teoria da indução eletrovoltaica*, ou seja, ela não apenas explica a geração, aumento e diminuição das correntes nos condutores ponderáveis, mas inclui também todas as forças *eletrodinâmicas* de repulsão e atração que são ações dessas correntes já citadas e que movem os próprios condutores ponderáveis.

Nas próximas Seções pretendemos *em primeiro lugar* apresentar uma consideração inicial de casos particulares e *então* seguir com o desenvolvimento geral das ações das correntes elétricas que *não são uniformes*, já que ocorrem em *correntes galvânicas* de intensidade variável, enquanto que os condutores ponderáveis estão *em movimento*.

6.24 Lei da Produção de uma Corrente em um Condutor que se Aproxima ou se Afasta de um Elemento de Corrente Constante em Repouso

O caso mais simples de *indução eletrovoltaica* ao qual pode ser aplicada a lei fundamental estabelecida é aquele no qual, dos dois elementos, apenas um deles, a saber, o indutor, já contém uma corrente, especificamente, uma corrente de intensidade constante, e a distância entre os dois elementos é alterada simplesmente por meio do movimento do outro elemento, a saber, o induzido.

Se α denota agora o comprimento do elemento indutor, α' o comprimento do elemento induzido, então quatro massas elétricas devem ser diferenciadas nesses dois elementos, a saber:

$$+\alpha e \, , \quad -\alpha e \, , \quad +\alpha' e' \, , \quad -\alpha' e' \, .$$

[281] [Web46, pág. 103 das *Obras* de Weber].

A *primeira* dessas massas, $+\alpha e$, desloca-se com velocidade *constante* $+u$ na direção do elemento α em repouso, que forma o ângulo ϑ com a linha reta traçada de α para α'; a *segunda*, $-\alpha e$, desloca-se na mesma direção com velocidade $-u$, a saber, para trás; a *terceira*, $+\alpha' e'$, que de fato está parada no elemento α', é *levada para frente* por ele com velocidade $+u'$ naquela direção que forma o ângulo ϑ' com a linha reta estendida traçada de α para α'; e com essa mesma linha reta, está em um plano que forma o ângulo ω com o plano contendo o elemento α e essa linha reta; e finalmente a *quarta*, $-\alpha' e'$, que também está parada no elemento α', é levada para a frente por esse elemento com a mesma velocidade $+u'$ na mesma direção que a terceira massa.[282] As distâncias das duas primeiras massas para as duas segundas [massas] são todas iguais no instante em questão à distância r na qual se encontram os elementos α e α' nesse momento; contudo, como elas não permanecem iguais [ao longo do tempo], elas devem ser denominadas,[283] como na página[284] 165, r_1, r_2, r_3, r_4.

A aplicação da lei fundamental fornece então, como na página[285] 166, as seguintes quatro ações parciais entre essas quatro massas:

$$+\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_1^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8} r_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2}\right) \ ,$$

$$+\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_2^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8} r_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2}\right) \ ,$$

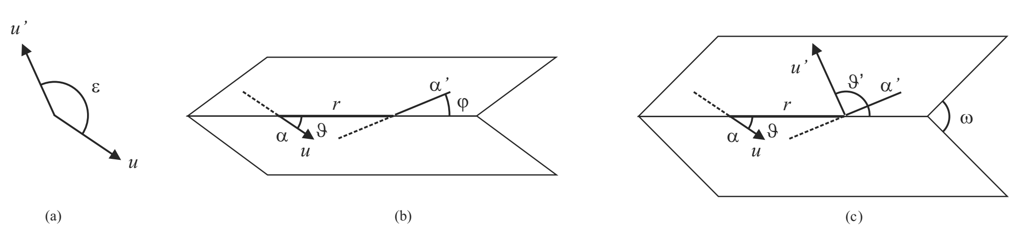
$$-\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_3^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\frac{dr_3^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8} r_3 \frac{d^2 r_3}{dt^2}\right) \ ,$$

e

$$-\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r_4^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\frac{dr_4^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8} r_4 \frac{d^2 r_4}{dt^2}\right) \ .$$

Essas quatro ações parciais podem agora ser combinadas inicialmente em duas forças, das quais uma [força] é a ação das duas massas dos elementos indutores $+\alpha e$ e $-\alpha e$ sobre a massa *positiva* $+\alpha' e'$ do elemento induzido, a outra [força é] a ação das mesmas massas sobre a massa *negativa* $-\alpha' e'$ do elemento induzido. A primeira força é a soma da primeira e quarta [ações], a última [força] é a soma da segunda e terceira [ações]. Assim a primeira

[282] Os ângulos ϑ, ϑ', ω, ε e φ para esse caso estão representados na Figura dessa Nota de rodapé:



(a) Aqui ε é o ângulo entre as direções u e u'. (b) O elemento α forma o ângulo ϑ com a linha reta traçada de α para α'. Já α' forma o ângulo φ com a linha reta r estendida de α para α'. (c) Além disso, as direções u e r formam um plano. Da mesma forma, as direções u' e r formam um outro plano. O ângulo entre esses dois planos é denotado por ω.

[283] Ver o início da Seção 6.22.

[284] [Web46, pág. 158 das *Obras* de Weber].

[285] [Web46, pág. 158 das *Obras* de Weber].

força, levando em consideração a igualdade de r_1, r_2, r_3 e r_4 com r no momento em questão, é

$$= -\frac{a^2}{16} \cdot \frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r^2} \left\{ \left(\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} \right) - 2r \left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} \right) \right\} \ ;$$

a última força é

$$= -\frac{a^2}{16} \cdot \frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r^2} \left\{ \left(\frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{dr_3^2}{dt^2} \right) - 2r \left(\frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} \right) \right\} \ .$$

Na medida em que os movimentos das duas massas elétricas $+\alpha' e'$ e $-\alpha' e'$ em seu portador ponderável $+\alpha'$, produzidos por essas forças, são quase imediatamente cancelados pela *resistência* do portador, e assim todas as forças agindo sobre essas massas são imediatamente transferidas para esse portador, a *soma* dessas duas forças, como na página[286] 166, fornece a força que move o próprio portador $+\alpha'$, [a saber:]

$$-\frac{a^2}{16} \cdot \frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r^2} \left\{ \left(\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} \right) \right.$$
$$\left. - \ 2r \left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} \right) \right\} \ .$$

Antes desta transferência a seu portador das forças que atuam originalmente sobre as massas elétricas, as próprias massas elétricas são um pouco deslocadas no seu portador, e se esse deslocamento for *diferente* para a massa positiva $+\alpha' e'$ e para a massa negativa $-\alpha' e'$, ambas sendo assim *separadas* entre si, uma corrente galvânica será produzida no portador α', e a força que causa essa separação é chamada de *força eletromotriz*. É claro que essa *força eletromotriz* depende da *diferença* das duas forças anteriores, isto é:

$$-\frac{a^2}{16} \cdot \frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r^2} \left\{ \left(\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} \right) \right.$$
$$\left. - \ 2r \left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} \right) \right\} \ .$$

De acordo com a determinação dada na Seção 6.22 para *dois* elementos *estacionários* de corrente *constante* em relação ao movimento de suas massas elétricas, o valor obtido lá para a primeira *soma* era igual à força determinada pela lei de Ampère,

$$= -\frac{\alpha \alpha'}{r^2} i i' \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta' \right) \ ;$$

contudo, lá o valor dessa última *diferença* seria então

$$= 0 \ .$$

Contudo, de acordo com as determinações fornecidas nessa Seção para um elemento de corrente *constante e em repouso* e para um elemento de fio *deslocando-se sem corrente*, com relação às suas massas elétricas, o valor da soma anterior vai ser

[286] [Web46, pág. 159 das *Obras* de Weber].

$$= 0 \ ,$$

e o valor dessa última *diferença* vai ser

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2} a e' u' i \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' \right) \ ,$$

como será demonstrado a seguir.

Para esse fim só é necessário, nas derivadas determinadas na página[287] 166, colocar $+u'$ no lugar de $-u'$ para a velocidade da massa *negativa*; obtemos então:

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_3}{dt} = -u\cos\vartheta + u'\cos\vartheta' \ ,$$

e

$$\frac{dr_2}{dt} = \frac{dr_4}{dt} = +u\cos\vartheta + u'\cos\vartheta' \ .$$

Consequentemente:

$$\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} = 0 \ .$$

Por outro lado:

$$\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} = -8uu'\cos\vartheta\cos\vartheta' \ .$$

Obtemos ainda:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} = +u\,\mathrm{sen}\,\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_1}{dt} - u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta_1'}{dt} \ ,$$

$$\frac{d^2r_2}{dt^2} = -u\,\mathrm{sen}\,\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_2}{dt} - u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta_2'}{dt} \ ,$$

$$\frac{d^2r_3}{dt^2} = +u\,\mathrm{sen}\,\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_3}{dt} - u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta_3'}{dt} \ ,$$

e

$$\frac{d^2r_4}{dt^2} = -u\,\mathrm{sen}\,\vartheta \cdot \frac{d\vartheta_4}{dt} - u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta' \cdot \frac{d\vartheta_4'}{dt} \ ,$$

portanto:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} + \frac{d^2r_2}{dt^2} - \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2} = +u\,\mathrm{sen}\,\vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt} \right)$$

$$-u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta' \left(\frac{d\vartheta_1'}{dt} + \frac{d\vartheta_2'}{dt} - \frac{d\vartheta_3'}{dt} + \frac{d\vartheta_4'}{dt} \right) \ .$$

Por outro lado:

[287] [Web46, pág. 159 das *Obras* de Weber].

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} - \frac{d^2r_2}{dt^2} + \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2} = +u \operatorname{sen} \vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt} \right)$$

$$-u' \operatorname{sen} \vartheta' \left(\frac{d\vartheta_1'}{dt} - \frac{d\vartheta_2'}{dt} + \frac{d\vartheta_3'}{dt} - \frac{d\vartheta_4'}{dt} \right) .$$

Além disso, de acordo com a página[288] 170 e as seguintes, se também atribuirmos a velocidade $+u'$ à massa *negativa* do elemento induzido $-\alpha' e'$, segue que[289]

$$r\frac{d\vartheta_1}{dt} = r\frac{d\vartheta_3}{dt} = +u \operatorname{sen} \vartheta - u' \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega \ ,$$

$$r\frac{d\vartheta_2}{dt} = r\frac{d\vartheta_4}{dt} = -u \operatorname{sen} \vartheta - u' \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega \ ,$$

$$r\frac{d\vartheta_1'}{dt} = r\frac{d\vartheta_3'}{dt} = -u' \operatorname{sen} \vartheta' + u \operatorname{sen} \vartheta \cos \omega \ ,$$

e

$$r\frac{d\vartheta_2'}{dt} = r\frac{d\vartheta_4'}{dt} = -u' \operatorname{sen} \vartheta' - u \operatorname{sen} \vartheta \cos \omega \ ,$$

de onde resulta que:

$$r\left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt} \right) = r\left(\frac{d\vartheta_1'}{dt} + \frac{d\vartheta_2'}{dt} - \frac{d\vartheta_3'}{dt} - \frac{d\vartheta_4'}{dt} \right) = 0 \ ;$$

porém

$$r\left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt} \right) = -4u' \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega \ ,$$

e

$$r\left(\frac{d\vartheta_1'}{dt} - \frac{d\vartheta_2'}{dt} + \frac{d\vartheta_3'}{dt} - \frac{d\vartheta_4'}{dt} \right) = +4u \operatorname{sen} \vartheta \cos \omega \ .$$

Disso segue que:

$$r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2} + \frac{d^2r_2}{dt^2} - \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2} \right) = 0 \ ,$$

e

$$r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2} - \frac{d^2r_2}{dt^2} + \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2} \right) = -8uu' \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega \ .$$

Substituindo esses valores, é obtida a *soma* das duas forças que atuam nas massas *positiva* e *negativa* do elemento induzido,

$$= 0 \ ,$$

[288][Web46, pág. 162 e seguintes das *Obras* de Weber].
[289]O ângulo ω citado aqui é mostrado na Nota de rodapé 282 na página 175.

em contraste, a *diferença* entre elas é

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2} aeu \cdot ae'u' \left(\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' \right) \ ,$$

ou como, de acordo com a página[290] 173, $\cos\varepsilon = \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega + \cos\vartheta\cos\vartheta'$ e, de acordo com a página[291] 159, $aeu = i$, [obtemos então:]

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i \cdot ae'u' \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' \right) \ ,$$

o que era para ser provado.

Agora, a força determinada dessa forma procura separar entre si as eletricidades *positiva* e *negativa* no elemento induzido α' na direção da linha reta r. Contudo, na realidade essa separação só pode ocorrer na direção de α', já que em um condutor linear uma corrente galvânica só pode ocorrer na direção do condutor. Portanto, se tomarmos as componentes da força anterior na direção do elemento α' e perpendicularmente a ele, então apenas a primeira parte é considerada como uma *força eletromotriz*, e, caso φ denote o ângulo que o elemento α' faz com a linha reta r estendida,[292] esse termo é

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' \right) \cdot ae'u' \cos\varphi \ .$$

Usualmente entende-se por *força eletromotriz* à força aceleradora exercida pela força absoluta dada sobre a massa elétrica e' contida na unidade de comprimento do fio condutor induzido, a qual é obtida pela divisão do valor anterior por e'. Finalmente, a *força eletromotriz* de um elemento de corrente constante em repouso [ao atuar] sobre um elemento de fio móvel seria portanto obtida como

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' \right) \cdot au' \cos\varphi \ .$$

Agora, se essa expressão tiver um valor *positivo* ou *negativo*, a corrente induzida será *positiva* ou *negativa*, onde entende-se por corrente positiva aquela na qual a eletricidade positiva desloca-se na direção do elemento α' que forma o ângulo φ com a linha reta r estendida.

Se, por exemplo, os elementos α e α' forem paralelos entre si, e a direção na qual esse último se desloca com velocidade $+u'$ for no plano dos dois elementos e perpendicular a eles, então, quando α' *se afastar* de α por meio desse movimento,

$$\vartheta = \varphi \ , \qquad \cos\vartheta' = \operatorname{sen}\vartheta \ , \qquad \cos\varepsilon = 0 \ ,$$

portanto a *força eletromotriz* será

$$= +\frac{3}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i \operatorname{sen}\vartheta \cos^2\vartheta \cdot au' \ .$$

Esse valor é sempre *positivo* quando $\vartheta < 180^{\text{o}}$, e esse valor *positivo* denota aqui uma corrente induzida na mesma direção que a indutora, o que está em conformidade com o que a experiência empírica forneceu para esse caso.

290[Web46, pág. 164 das *Obras* de Weber].
291[Web46, pág. 152 das *Obras* de Weber].
292Esse ângulo φ é mostrado na Nota de rodapé 282 na página 175.

Nessas mesmas condições, com a única diferença que o elemento α' *se aproxime* do elemento α por meio de seu movimento,

$$\vartheta = \varphi \ , \qquad \cos\vartheta' = -\operatorname{sen}\vartheta \ , \qquad \cos\varepsilon = 0 \ ,$$

portanto a *força eletromotriz* será

$$= -\frac{3}{2} i \operatorname{sen}\vartheta \cos^2\vartheta \cdot au' \ .$$

O valor *negativo* dessa força denota uma corrente induzida de direção oposta à corrente indutora, novamente de acordo com o que a experiência empírica forneceu para esse caso.

6.25 Comparação com as Proposições Empíricas da Seção 11

As experiências apresentadas nas Seções 6.10 e 6.11 relacionam-se ao caso de *indução eletrovoltaica* considerada na Seção anterior. Para a determinação *quantitativa* da *indução eletrovoltaica* nesse caso, a [seguinte] proposição foi apresentada e testada empiricamente,

> *que a indução [produzida] por uma corrente constante em repouso [ao atuar sobre] um fio condutor em movimento em direção a essa corrente em repouso, é a mesma que a indução no mesmo fio condutor [produzida] por um ímã, caso a força eletrodinâmica, que aquela corrente constante exerceria naquele fio condutor com uma corrente fluindo por ele, fosse igual à força eletromagnética que o ímã exerceria no fio através do qual estivesse fluindo a mesma corrente.*

Para estabelecer empiricamente essa proposição, foram feitas as seguintes experiências:

1. Foi medida a força *eletrodinâmica* que uma corrente fechada A exercia sobre outra corrente fechada B.

2. A corrente fechada A foi substituída por um ímã C, e foi medida a força *eletromagnética* que C exercia em B.

3. O condutor fechado B, sem corrente, foi colocado em um movimento específico, e foi medida a corrente que foi então produzida [em B] pela corrente A no condutor móvel por meio da *indução eletrovoltaica*.

4. Dado o mesmo movimento do condutor fechado B, foi medida a corrente produzida [em B] por meio da *indução magnética* do ímã C, que havia substituído a corrente A.

Em conformidade com estas quatro experiências, as quatro leis a seguir devem agora ser compiladas para comparação:

1. A lei da ação *eletrodinâmica* de um circuito fechado sobre um elemento de corrente.

2. A lei da ação *eletromagnética* de um ímã sobre um elemento de corrente.

3. A lei da *indução eletrovoltaica* [exercida] por um circuito fechado em um elemento de um condutor móvel.

4. A lei da *indução magnética* [produzida] por um ímã em um elemento de um condutor móvel.

6.25.1 Lei da Ação Eletrodinâmica de um Circuito Fechado sobre um Elemento de Corrente

Essa lei está desenvolvida na página[293] 99 no item 3 da Nota de rodapé, para o caso no qual o circuito fechado delimita um plano e atua à distância. Em vez de retornar a essa lei especial, volto aqui a uma lei mais geral que Ampère forneceu na página 214 de seu Tratado,[294] e que está apresentada na página[295] 83 do presente Tratado. De acordo com essa lei, a força eletrodinâmica atuando sobre o elemento de corrente α' é decomposta ao longo dos três eixos coordenados ortogonais, cuja origem encontra-se no centro do elemento α', nas componentes X, Y, Z, que são determinadas como segue:

$$X = -\frac{ii'}{2}\alpha' \left(C\cos\mu - B\cos\nu\right) \ ,$$

$$Y = -\frac{ii'}{2}\alpha' \left(A\cos\nu - C\cos\lambda\right) \ ,$$

e

$$Z = -\frac{ii'}{2}\alpha' \left(B\cos\lambda - A\cos\mu\right) \ ,$$

nas quais $A = \int \frac{ydz-zdy}{r^3}$, $B = \int \frac{zdx-xdz}{r^3}$, $C = \int \frac{xdy-ydx}{r^3}$, α' denota o comprimento do elemento de corrente sobre o qual se atua, λ, μ, ν os ângulos que α' forma com os três eixos coordenados, sendo ainda i e i' as intensidades da corrente fechada e do elemento de corrente.

6.25.2 Lei da Ação Eletromagnética de um Ímã sobre um Elemento de Corrente

De acordo com a lei fundamental do eletromagnetismo, a força eletromagnética que uma massa do fluido magnético Norte ou Sul $\pm\mu$ exerce sobre um elemento de corrente de comprimento α' e de intensidade de corrente i' à distância r, quando φ denota o ângulo que α' forma com r, é representada por

$$\pm\frac{i'\alpha'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \operatorname{sen}\varphi}{r^2} \ ,$$

na qual $i'\sqrt{\frac{1}{2}}$ substitui χ' de acordo com a página[296] 97, e essa força tenta mover o elemento de corrente em uma direção perpendicular a α' e r.[297] Segue-se dessa expressão a intensidade e a direção das duas forças que as duas massas de fluido magnético Norte e Sul contidas em um *pequeno* ímã exercem sobre o elemento de corrente. Essas duas forças podem ser combinadas de acordo com a lei do paralelogramo e, se m'[298] denotar o momento magnético, ψ o ângulo que o eixo magnético faz com a linha reta r, ε o ângulo que a direção α' faz com a direção D situada no plano do eixo magnético e da reta r, de cujo ângulo com a linha

[293] Ver o item 3 da Nota de rodapé 157 na página 95, [Web46, pág. 86 das *Obras* de Weber].

[294] Ver [Amp23, pág. 214], [Amp26, pág. 42], [AC11, págs. 396-397] e [AC15, pág. 366].

[295] [Web46, pág. 70 das *Obras* de Weber].

[296] [Web46, pág. 86 das *Obras* de Weber].

[297] Ver a Nota de rodapé 155 na página 95.

[298] No original aparece m em vez de m'. Substituímos a grandeza m por m'.

reta r o seno está para $\operatorname{sen}\psi$ assim como $1 : \sqrt{1+3\cos^2\psi}$, e se, finalmente, por brevidade, $\frac{1}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\psi}$ for denotado por $\mathfrak{d}$, disso vem o seguinte *valor* da resultante:

$$= \frac{i'}{\sqrt{2}}\alpha' m' \mathfrak{d} \operatorname{sen}\varepsilon \ .$$

A *direção* dessa resultante é perpendicular às direções α' e D. Se, agora, denotarmos por

$$a, \quad b, \quad c$$

os cossenos dos ângulos que a resultante assim determinada forma com três eixos coordenados ortogonais, cujas origens estão no centro do elemento α', e que decompõem a resultante de acordo com a direção desses eixos, então serão obtidas as seguintes três componentes:

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' \cdot a\mathfrak{d} \operatorname{sen}\varepsilon \ ,$$

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' \cdot b\mathfrak{d} \operatorname{sen}\varepsilon \ ,$$

e

$$\frac{i'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' m' \cdot c\mathfrak{d} \operatorname{sen}\varepsilon \ ,$$

sendo ainda obtidas as seguintes equações para a, b, c quando os ângulos que a direção do elemento α' formam com os eixos coordenados são denotados por

$$\lambda \ , \quad \mu \ , \quad \nu \ ,$$

e os cossenos dos ângulos que a direção D forma com os mesmos eixos coordenados são denotadas por

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}} \ , \quad \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}} \ , \quad \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}} \ ,$$

a saber:

$$a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + c\mathfrak{c} = 0 \ ,$$

$$a\cos\lambda + b\cos\mu + c\cos\nu = 0 \ ,$$

$$aa + bb + cc = 1 \ ,$$

e

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\cos\lambda + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}\cos\mu + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}\cos\nu = \cos\varepsilon \ .$$

Essas equações, pela eliminação de b e c, fornecem o valor de a como

$$a = \frac{\mathfrak{b}\cos\nu - \mathfrak{c}\cos\mu}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}}\cos\lambda + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}}\cos\mu + \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}\cos\nu\right)^2}} = \frac{\mathfrak{b}\cos\nu - \mathfrak{c}\cos\mu}{\mathfrak{d}\operatorname{sen}\varepsilon} \ ,$$

e da mesma forma, [são obtidos] os seguintes valores de b e c:

$$b = \frac{\mathfrak{c}\cos\lambda - \mathfrak{a}\cos\nu}{\mathfrak{d}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon} \ ,$$

e

$$c = \frac{\mathfrak{a}\cos\mu - \mathfrak{b}\cos\lambda}{\mathfrak{d}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon} \ .$$

Se essas expressões são substituídas nas expressões para as três componentes da força eletromagnética, serão obtidos os seguintes valores para essa força:

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}}\cdot\alpha' m' \left(\mathfrak{c}\cos\mu - \mathfrak{b}\cos\nu\right) \ ,$$

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}}\cdot\alpha' m' \left(\mathfrak{a}\cos\nu - \mathfrak{c}\cos\lambda\right) \ ,$$

e

$$-\frac{i'}{\sqrt{2}}\cdot\alpha' m' \left(\mathfrak{b}\cos\lambda - \mathfrak{a}\cos\mu\right) \ .$$

Para um ímã grande, que é composto de muitos ímãs pequenos, as três componentes X', Y', Z' da força eletromagnética que ele exerce sobre o elemento de corrente α' serão determinadas daqui para a frente como segue:

$$X' = -\frac{i'}{\sqrt{2}}\cdot\alpha' \left(C'\cos\mu - B'\cos\nu\right) \ ,$$

$$Y' = -\frac{i'}{\sqrt{2}}\cdot\alpha' \left(A'\cos\nu - C'\cos\lambda\right) \ ,$$

e

$$Z' = -\frac{i'}{\sqrt{2}}\cdot\alpha' \left(B'\cos\lambda - A'\cos\mu\right) \ ,$$

nas quais $A' = S(\mathfrak{a}m')$, $B' = S(\mathfrak{b}m')$, $C' = S(\mathfrak{c}m')$.[299]

6.25.3 Lei da Indução Eletrovoltaica de um Circuito Fechado sobre um Elemento de um Condutor Móvel

A lei elementar de indução desenvolvida na Seção anterior, que é válida para qualquer *elemento* indutor α, fornece o seguinte valor para a força *eletromotriz* com a qual um desses elementos α tenta separar entre si as massas elétricas positiva e negativa no elemento induzido α' ao longo da direção da linha reta r:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)\cdot a u' \ ,$$

na qual $+u'$ denota a velocidade com a qual o elemento induzido α' se desloca, sendo ε e ϑ' os ângulos que a direção desse movimento forma com a direção na qual a eletricidade

[299] O símbolo S aqui significa somatória ou integral. Isto é, $A' = \int(\mathfrak{a}m')$, $B' = \int(\mathfrak{b}m')$ e $C' = \int(\mathfrak{c}m')$.

positiva flui no elemento de corrente indutor α, e com a linha reta r estendida.[300] [O ângulo] ϑ denota, assim como na teoria de dois elementos de corrente constante na Seção 6.22, o ângulo que a direção na qual a eletricidade positiva flui no primeiro elemento α, forma com a linha reta r.

Se esse valor para a força *eletromotriz* for comparada com o valor encontrado na página[301] 173 para a *força eletrodinâmica* na teoria de dois elementos de corrente constante, de acordo com a lei de Ampère, resultará então a seguinte relação simples entre as duas, a saber, que a primeira força é obtida da última pela multiplicação com o fator constante au'/i', desde que a direção na qual a eletricidade positiva flui no elemento α', na última força, seja a mesma direção na qual o próprio elemento induzido α' se desloca, na primeira força, isto é

$$\beta = \lambda \ , \qquad \gamma = \mu \ , \qquad \delta = \nu \ ,$$

quando os ângulos formados pelas duas direções com os três eixos coordenados ortogonais são denotados por, respectivamente,

$$\lambda \ , \quad \mu \ , \quad \nu \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \beta \ , \quad \gamma \ , \quad \delta \ ,$$

pois então os valores de ε e ϑ' serão iguais nas duas expressões.

A partir disso, agora é evidente, sob a suposição feita, que os valores apresentados em (1)[302] para a *força eletrodinâmica* X, Y, Z também só precisam ser multiplicados pelo fator constante au'/i', para obter assim as componentes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ da força *eletromotriz* que um *circuito fechado* exerce sobre o elemento induzido α'. A partir disso segue que:

$$\mathfrak{X} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' \left(C\cos\gamma - B\cos\delta\right) \ ,$$

$$\mathfrak{Y} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' \left(A\cos\delta - C\cos\beta\right) \ ,$$

e

$$\mathfrak{Z} = -\frac{au'}{2} \cdot i\alpha' \left(B\cos\beta - A\cos\gamma\right) \ ,$$

nas quais A, B, C possuem o mesmo significado que em (1).[303]

6.25.4 Lei da Indução Magnética de um Ímã sobre um Elemento de um Condutor Móvel

A partir da *força eletromagnética elementar*, determinada de acordo com a lei fundamental do eletromagnetismo, que uma massa de fluido magnético Norte ou Sul, $\pm\mu$, exerce sobre um elemento de corrente de comprimento α' e de intensidade de corrente i' à distância r, quando φ denota o ângulo que a direção do fluxo da eletricidade positiva em α' forma com

[300]Os ângulos ε e ϑ' são mostrados na Figura da Nota de rodapé 282 na página 175.
[301][Web46, pág. 164 das *Obras* de Weber].
[302]Isto é, na Subseção 6.25.1.
[303]Isto é, possuem o mesmo significado que na Subseção 6.25.1.

a linha reta r, a saber, a partir da força atuante citada em (2),[304] normal ao plano paralelo com r e α'[305]

$$\pm \frac{i'\alpha'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \operatorname{sen} \varphi}{r^2} \ ,$$

obtemos, pela multiplicação com o fator constante ku'/i', de acordo com a lei fundamental da indução magnética, a *força eletromotriz elementar* com a qual essa massa magnética tenta separar as eletricidades positiva e negativa no elemento induzido α', em uma direção normal ao plano paralelo com r e α', quando o elemento induzido α' está se deslocando aqui com a velocidade u'[306] na mesma direção que a eletricidade positiva flui lá no elemento α'. Portanto, essa *força eletromotriz* é

$$= \ \pm \frac{k\alpha' u'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \operatorname{sen} \varphi}{r^2} \ .$$

Aqui k denota um fator constante independente de u', cujo valor, contudo, até o momento ainda não foi determinado mais exatamente por qualquer medição.

Se denotarmos os ângulos que em um caso a direção na qual a eletricidade positiva é deslocada no elemento α', no outro caso a direção na qual se desloca o próprio elemento induzido α', formam com os três eixos coordenados ortogonais, como sendo dados por, respectivamente,

$$\lambda \ , \quad \mu \ , \quad \nu \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \beta \ , \quad \gamma \ , \quad \delta \ ,$$

então, sob a igualdade de direções que acabamos de supor,

$$\beta = \lambda \ , \quad \gamma = \mu \ , \quad \delta = \nu \ .$$

Aqui também é óbvio, considerando a identidade assumida das duas direções mencionadas, que os valores de X', Y', Z' apresentados em (2)[307] só precisam ser multiplicados pelo fator constante ku'/i' para obter assim as componentes $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ da força eletromotriz que um *ímã inteiro* exerce sobre o elemento induzido α'. A partir disso segue-se que:

$$\mathfrak{X}' = -\frac{ku'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' \left(C' \cos\gamma - B' \cos\delta \right) \ ,$$

$$\mathfrak{Y}' = -\frac{ku'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' \left(A' \cos\delta - C' \cos\beta \right) \ ,$$

e

$$\mathfrak{Z}' = -\frac{ku'}{\sqrt{2}} \cdot \alpha' \left(B' \cos\beta - A' \cos\gamma \right) \ ,$$

[304]Isto é, na Subseção 6.25.2.

[305]Devido a um erro de impressão no texto alemão original, a próxima equação apareceu com a' no lugar de α', a saber

$$\pm \frac{i'a'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\mu \operatorname{sen} \varphi}{r^2} \ .$$

[306]Devido a um erro de impressão no texto original em alemão, apareceu aqui u no lugar de u'.

[307]Isto é, na Subseção 6.25.2.

nas quais A', B', C' possuem os mesmos significados que em (2).[308]

Serão agora examinadas as relações entre as leis estabelecidas aqui e as proposições empíricas mencionadas no início. Ora, a partir das leis anteriores, quando as forças *eletrodinâmicas* estão para as forças *eletromagnéticas* na razão $1 : n$, a saber, quando

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = n \ ,$$

ou, substituindo por X, Y, Z e X', Y', Z' seus valores encontrados anteriormente, se

$$\frac{C'\cos\mu - B'\cos\nu}{C\cos\mu - B\cos\nu} = \frac{A'\cos\nu - C'\cos\lambda}{A\cos\nu - C\cos\lambda} = \frac{B'\cos\lambda - A'\cos\mu}{B\cos\lambda - A\cos\mu} = \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot n \ ,$$

consequentemente

$$A' = \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot nA \ , \qquad B' = \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot nB \ , \qquad C' = \frac{i}{\sqrt{2}}\cdot nC \ ,$$

resulta então a seguinte razão da força *eletromotriz* obtida por meio da *indução eletrovoltaica* e por meio da *indução magnética*:

$$\frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{X}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai}\cdot\frac{C'\cos\gamma - B'\cos\delta}{C\cos\gamma - B\cos\delta} = \frac{k}{a}\cdot n \ ,$$

$$\frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Y}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai}\cdot\frac{A'\cos\delta - C'\cos\beta}{A\cos\delta - C\cos\beta} = \frac{k}{a}\cdot n \ ,$$

e

$$\frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}} = \frac{k\sqrt{2}}{ai}\cdot\frac{B'\cos\beta - A'\cos\gamma}{B\cos\beta - A\cos\gamma} = \frac{k}{a}\cdot n \ .$$

Isso produz finalmente o seguinte resultado:

$$\frac{X'}{X} : \frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{X}} = \frac{Y'}{Y} : \frac{\mathfrak{Y}'}{\mathfrak{Y}} = \frac{Z'}{Z} : \frac{\mathfrak{Z}'}{\mathfrak{Z}} = a : k \ ,$$

que está de acordo com a proposição empírica mencionada no início, já que a razão $a : k$ é *constante*. Contudo, essa proposição empírica ensina ainda mais do que a comparação das leis anteriores, já que ela torna essa razão constante igual à *unidade*, sendo que por meio disso o fator constante na lei fundamental da indução magnética, k, um fator ainda não determinado por qualquer medição, torna-se igual ao fator constante a na lei fundamental elétrica. Especificamente, isso também teria de acontecer, se não existisse fluido magnético no ímã, mas se, de acordo com Ampère, todas as ações dos ímãs fossem produzidas por correntes elétricas contidas neles.

6.26 Comparação com os Teoremas Estabelecidos por Fechner e Neumann

Fechner foi o primeiro a tentar explicar os fenômenos de indução de Faraday a partir dos fenômenos eletrodinâmicos de Ampère desenvolvendo a conexão interna entre eles, sendo

[308]Isto é, essas grandezas possuem o mesmo significado que na Subseção 6.25.2.

que anteriormente esses fenômenos haviam sido relacionados entre si por Lenz apenas por meio de uma regra empírica;[309] Fechner publicou a explicação nos *Annalen* de Poggendorff, 1845, Vol. LXIV, página 337.[310] Ao fazer isso, Fechner se limitou àquela forma de *indução eletrovoltaica* que foi discutida na Seção anterior, a saber, àquela indução exercida por uma corrente constante em repouso sobre um fio condutor deslocando-se em direção a ela. Para essa forma de *indução eletrovoltaica*, Fechner de fato foi bem sucedido ao descobrir a *conexão intrínseca* com os fenômenos eletrodinâmicos de Ampère, e ao basear uma explicação sobre eles na lei da Ampère, de certa forma *generalizada*, válida para estes últimos fenômenos. — Essa *conexão intrínseca* consiste essencialmente no fato de que, com relação a essa indução, independente da corrente produzida inicialmente pela indução, estamos lidando, assim como no caso dos fenômenos de Ampère, com *interações entre correntes elétricas*, portanto a explicação dos dois tipos de fenômeno teria de se basear nas leis dessas interações. A eletricidade no fio condutor induzido, diz Fechner especificamente, também começaria a fluir, tão logo esse fio condutor fosse *movido*, especificamente devido ao fato de que ele participa no movimento de seu portador. As correntes elétricas em tais fios condutores induzidos só são diferenciadas das correntes galvânicas nos fios condutores no fato de que massas iguais de eletricidade *positiva* e *negativa* se deslocam simultaneamente com a mesma velocidade em direções *opostas* nas últimas, e nas *mesmas direções* nas primeiras.[311] A *generalização* fornecida por Fechner à lei de Ampère consiste, *em primeiro lugar*, no fato de que a força que, de acordo com Ampère, atua no portador ponderável, atuaria originalmente com a mesma intensidade e na mesma direção sobre as massas elétricas localizadas no portador, sendo inicialmente comunicadas por elas ao portador; *em segundo lugar*, no fato de que a lei de Ampère não vale apenas para a ação total de uma corrente galvânica sobre outra, mas também para as duas ações parciais, que a primeira corrente exerceria sobre as eletricidades *positiva* e *negativa* da segunda [corrente].

Essa explicação está de acordo com a teoria dessa indução desenvolvida na Seção anterior; pois encontramos lá a justificativa para generalizar a lei de Ampère, sob a qual está baseada essa explicação. Isso pode ser provado, se considerarmos em particular as duas forças atuando nas eletricidades *positiva* e *negativa*, como afirmado na página[312] 166, onde encontramos que a lei de Ampère é válida não apenas para todas as quatro forças [juntas], mas também para quaisquer duas delas.

Além disso, o próprio Fechner já observou que o ponto de vista a partir do qual ele interpretou a conexão dos fenômenos de indução de Faraday com os fenômenos eletrodinâmicos de Ampère não é tão geral de tal forma que pudesse ser estendido a todos os fenômenos de indução de Faraday. Tão logo o fio indutor esteja *em repouso*, os fenômenos de indução não podem ser obtidos a partir de seu ponto de vista, já que então está fora de questão o movimento da eletricidade no fio induzido. Sobre esse ponto, Fechner diz, *obra citada*, página 341:[313]

Em vez de mover o fio (neutro) $a'b'$ em direção ao fio (excitador) estacionário ab no

[309] Ver a Nota de rodapé 44 na página 30.

[310] [Fec45] com tradução para o inglês em [Fec21]. Esse trabalho está traduzido no Capítulo 4.

[311] Isto é, nas correntes galvânicas as cargas positivas e negativas se deslocariam em relação ao fio com a mesma velocidade em direções opostas, enquanto que nos fios condutores que estão sendo movidos, essas cargas positivas e negativas deslocam-se com a mesma velocidade na mesma direção, isto é, com a mesma velocidade do próprio condutor ao qual pertencem.

[312] [Web46, pág. 158 das *Obras* de Weber].

[313] [Fec45, pág. 341]. Ver a página 28 dessa tradução em português.

experimento de indução, pode-se proceder ao contrário, e a indução ainda ocorrerá. Isso deve ser tomado como *dado empírico* para provar que a única coisa que importa aqui é a relação dos movimentos, e que é admissível substituir o movimento do fio excitado e o repouso do fio neutro, pelo contrário, a fim de poder aplicar o princípio na forma indicada.

Neumann baseou sua investigação na regra empírica pela qual Lenz ligou os fenômenos de indução de Faraday aos fenômenos eletrodinâmicos de Ampère, e encontrou um suplemento a isso na proposição de que a intensidade da indução é proporcional à velocidade do movimento do fio induzido, quando a indução foi produzida por um movimento desse último [fio]. Essas duas regras empíricas se complementam de tal forma, que Neumann foi capaz de deduzir delas as *leis gerais das correntes induzidas*, pois as leis seguindo imediatamente delas para o caso no qual a indução é produzida por um movimento do condutor induzido, são de um tipo que pode encontrar aplicação imediatamente em campos mais amplos sem sofrer modificação, e podem ser estendidas a todas as formas de indução. Essas *leis gerais das correntes induzidas* de Neumann dificilmente devem ser sujeitas a qualquer dúvida, considerando tanto sua conexão interna uma com a outra quanto as regras empíricas ligadas a elas, e, portanto, é interessante comparar os resultados da teoria desenvolvida anteriormente com essas leis deduzidas por Neumann de maneiras completamente diferentes.

Como o Tratado de Neumann, submetido para a *königliche Akademie der Wissenschaften* em Berlim ainda não foi publicado, posso apenas me referir ao resumo que acabou de aparecer nos *Annalen* de Poggendorff, no primeiro número desse ano, do qual tiro a seguinte passagem:[314]

A partir do teorema de Lenz de que a ação que a corrente ou ímã indutor exerce sobre o condutor induzido sempre produz, quando a indução é produzida por um movimento do último,[315] uma influência inibidora nesse movimento, juntamente com o teorema de que a intensidade da indução momentânea é proporcional à velocidade desse movimento, é deduzida a lei geral de indução linear:

$$Eds = -\varepsilon vCds \ .$$

Aqui ds significa um elemento do fio induzido, Eds a força eletromotriz induzida no elemento ds; v é a velocidade com que ds se desloca, C é a ação do indutor sobre ds, decomposta de acordo com a direção na qual ds é movido, supondo que esse elemento tem a unidade de corrente fluindo por ele. A grandeza ε, que é independente da natureza do condutor induzido, pode ser tratada como uma constante no caso de indução linear, mas é uma função do tempo, tal que ela diminui muito rapidamente, quando seu argumento tem um valor considerável, e pode ser tratada como tal no caso da indução em superfície e na indução em corpos.

A partir da teoria desenvolvida anteriormente, resultou a seguinte expressão, no final da Seção 6.24, para a força *eletromotriz* induzida no elemento α', na qual u' denota a velocidade com a qual α' se desloca:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)\cdot au'\cos\varphi \ .$$

[314][Neu46] e [Neu48a]. Ver ainda a Nota de rodapé 68 na página 36.

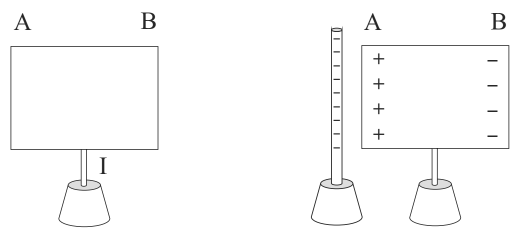
[315]Isto é, por um movimento do fio sobre o qual a corrente vai ser induzida.

Essa expressão era o valor, decomposto na direção do elemento α', da força de separação total[316] exercida pelo indutor α na direção da linha reta r de conexão, a partir da qual, pela eliminação do fator $\cos\varphi$, é obtida mais uma vez a força total. Na Seção 6.25, em (3),[317] essa força total foi comparada com a força *eletrodinâmica*, determinada pela lei de Ampère, que o indutor α exerceria no elemento α', quando α' estivesse paralelo à direção na qual o elemento α' foi movido para fins de indução, e se uma corrente fluísse através dele nessa direção, cuja intensidade fosse $= i'$. Ou seja, obtemos aquela força *eletrodinâmica* total exercida na direção da linha reta de conexão r ao multiplicar essa força *eletrodinâmica* pelo fator au'/i'. A própria expressão anterior é obtida ao multiplicar a mesma força, *decomposta na direção do elemento induzido* α', pelo fator au'/i'. Portanto, se essa força eletrodinâmica, decomposta na direção do elemento induzido α', for denominada

$$i'\alpha' \cdot D \ ,$$

então a expressão anterior deve ser colocada como:

[316]Em alemão: *scheidenden Kraft*. Essa expressão pode ser traduzida como "força de separação", "força separadora", "força de segregação" ou "força segregadora". Apresento aqui um exemplo simples de uma força de separação. Considere uma placa metálica AB que está isolada eletricamente da Terra por meio de um suporte isolante I como mostrado na Figura (a) dessa Nota de rodapé:



(a) (b)

Se um canudo plástico eletrizado negativamente for colocado próximo do lado A dessa placa, as partículas eletrizadas na placa vão se separar como mostrado na Figura (b). O lado A da placa vai ficar positivamente eletrizado, enquanto que o lado B vai ficar negativamente eletrizado. Essa polarização da placa é causada pela força elétrica do canudo eletrizado negativamente atuando nos elétrons livres da placa. Apresentei várias experiências interessantes sobre esse tópico feitas com material simples e barato, juntamente com muitas citações de fontes originais, nos dois volumes do livro *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, que estão disponíveis em português, inglês, italiano e russo: [Ass10a], [Ass10b], [Ass15b], [Ass17], [Ass18a], [Ass18b] e [Ass19].

Um outro efeito de uma força de separação ocorre na eletrólise. Em geral as forças elétricas são proporcionais ao valor da carga q da partícula teste sobre a qual atuam. Uma partícula positivamente eletrizada com $q > 0$ sofre uma força em uma direção, enquanto que uma partícula negativamente eletrizada com $q < 0$ será forçada na direção oposta. Caso essas partículas estejam livres para se deslocar como no caso da eletrólise, será produzida uma corrente dupla devido a essa força elétrica de separação. Isto é, as partículas positivas vão se deslocar em uma direção e as partículas negativas vão se deslocar na direção oposta.

Já uma força de separação magnética pode ser entendida como qualquer força que ocasiona a magnetização de um material como o ferro ou aço. Essa força pode ser ocasionada pela presença de um ímã nas proximidades desse pedaço de ferro ou aço. Nesse caso ela pode ser chamada de força magnetizadora ou força magnetizante. Essa força de separação magnética também pode ser ocasionada pela presença de um circuito no qual flui uma corrente constante, sendo esse circuito colocado nas proximidades ou ao redor do pedaço de ferro ou aço que se quer imantar. Nesse último caso pode-se falar de uma força de separação eletromagnética, força eletromagnetizadora, força eletromagnetizante, ou de uma magnetização produzida por correntes elétricas.

[317]Isto é, na Subseção 6.25.3.

$$= -au'D\alpha' \ .$$

Aqui, u' e α' devem ser escritas como v e ds, de acordo com a notação de Neumann; portanto, a teoria desenvolvida anteriormente produz a seguinte equação nessa notação:

$$Eds = -avDds \ ,$$

na qual a denota um fator constante independente da natureza do condutor induzido, assim como ε na equação de Neumann, já que aqui é uma questão de indução linear. Portanto as duas equações concordam entre si, exceto pelos fatores C e D. Esses fatores também têm em comum a propriedade de, ao serem multiplicados por ds, expressar a força *eletrodinâmica*, decomposta em uma direção definida, que o indutor exerceria sobre um elemento ds, considerado como estando localizado no local em que flui a unidade de corrente induzida. Contudo, os dois fatores se diferenciam mutuamente:

1. pela direção que seria dada ao elemento ds, considerado como estando no local da indução, e

2. através da direção na qual é para ser decomposta a força eletrodinâmica exercida sobre esse elemento.

Especificamente, essas duas direções estão *trocadas* na lei de Neumann.

Como pode ser visto disso, a lei de Neumann iria *contradizer* a nossa se quiséssemos aplicá-la a um elemento de corrente individual como sendo o indutor, já que então os fatores C e D teriam valores totalmente diferentes. Contudo, é óbvio que a lei de Neumann, de acordo com sua dedução, vale em primeiro lugar não para aquele elemento de corrente indutor individual, mas apenas para um circuito fechado ou para um ímã como indutores, especificamente porque o teorema de Lenz a partir do qual ela é deduzida, sendo baseado na experiência, vale apenas para circuitos fechados e para ímãs. Ora essa *contradição aparente* desaparece automaticamente tão logo a aplicação da lei de Neumann esteja confinada a circuitos fechados que atuam como indutores, sendo que esses circuitos fechados podem ser substituídos por ímãs, já que nesse caso a identidade dos fatores C e D pode ser então provada da seguinte maneira.

De acordo com Ampère, as três componentes X, Y, Z daquela força que um circuito fechado de intensidade i, para o qual a posição dos elementos é determinada pelas coordenadas x, y, z, exerce sobre qualquer outro elemento de corrente ds' de intensidade de corrente i', cuja direção faz os ângulos λ, μ, ν com os eixos coordenados, quando a origem das coordenadas está no centro do elemento ds', são

$$X = -\frac{1}{2}ii'ds'\left(\cos\mu \cdot \int \frac{xdy - ydx}{r^3} - \cos\nu \cdot \int \frac{zdx - xdz}{r^3}\right) \ ,$$

$$Y = -\frac{1}{2}ii'ds'\left(\cos\nu \cdot \int \frac{ydz - zdy}{r^3} - \cos\lambda \cdot \int \frac{xdy - ydx}{r^3}\right) \ ,$$

e

$$Z = -\frac{1}{2}ii'ds'\left(\cos\lambda \cdot \int \frac{zdx - xdz}{r^3} - \cos\mu \cdot \int \frac{ydz - zdy}{r^3}\right) \ .$$

A partir disso podem ser deduzidos os fatores C e D para circuitos fechados atuando como indutores.

Pois, *em primeiro lugar*, é obtido o fator C na lei de Neumann, caso X_1, Y_1, Z_1 denotem os valores de X, Y, Z quando fazemos $i' = 1$ e quando λ, μ, ν são os ângulos que o elemento induzido forma com os eixos coordenados. A saber, se α, β, γ são os ângulos que a direção na qual é deslocado o elemento induzido forma com os três eixos coordenados, então

$$Cds' = X_1 \cos\alpha + Y_1 \cos\beta + Z_1 \cos\gamma \ .$$

Essa expressão é simplificada se for escolhido um sistema de coordenadas no qual a direção do eixo x coincida com a direção *na qual é movido o elemento induzido*. Nesse caso

$$\cos\alpha = 1 \ , \quad \cos\beta = 0 \ , \quad \cos\gamma = 0 \ ,$$

portanto

$$Cds' = X_1 = -\frac{1}{2} i ds' \left(\cos\mu \int \frac{xdy - ydx}{r^3} - \cos\nu \int \frac{zdx - xdz}{r^3} \right) \ .$$

Em segundo lugar, o fator D é obtido se os valores assumidos por X, Y, Z forem denotados X', Y', Z', quando fazemos $i' = 1$, e quando $\lambda = \alpha'$, $\mu = \beta'$, $\nu = \gamma'$, onde α', β', γ' são os ângulos que a direção na qual o elemento induzido é movido forma com os três eixos coordenados (que assim seriam idênticos com α, β, γ, se fosse escolhido o mesmo sistema de coordenadas). Se então, de acordo com o presente sistema de coordenadas, λ', μ', ν' são os ângulos que o elemento induzido forma com os três eixos coordenados (que assim seriam idênticos com λ, μ, ν, se o presente sistema de coordenadas fosse idêntico com o sistema de coordenadas anterior), então:

$$Dds' = X' \cos\lambda' + Y' \cos\mu' + Z' \cos\nu' \ .$$

Essa expressão é simplificada se escolhermos um sistema de coordenadas diferente, como anteriormente, a saber, um sistema no qual a direção do eixo x coincida com a direção *do próprio elemento induzido*, já que então

$$\cos\lambda' = 1 \ , \quad \cos\mu' = 0 \ , \quad \cos\nu' = 0 \ ,$$

portanto:

$$Dds' = X' = -\frac{1}{2} i ds' \left(\cos\beta' \int \frac{xdy - ydx}{r^3} - \cos\gamma' \int \frac{zdx - xdz}{r^3} \right) \ .$$

Agora os dois sistemas de coordenadas, a saber, aquele no qual o eixo x é paralelo à direção *na qual o elemento induzido é movido*, e aquele no qual o eixo x é paralelo à direção *do próprio elemento induzido*, podem ter em comum o eixo y, se esse eixo for normal às duas direções, [a saber,] aquela do elemento induzido e aquela de seu movimento. Assumindo isso, ocorrerá que

$$\cos\mu = 0 \ , \qquad \cos\beta' = 0 \ , \qquad \cos\nu = \cos\gamma' \ ,$$

e como, além disso, pode ser provado que

$$\int \frac{zdx - xdz}{r^3}$$

tem um valor igual de acordo com os dois sistemas de coordenadas, então

$$C = D \ ,$$

o que era para ser provado. Que $zdx - xdz$ tem o mesmo valor para todos sistemas de coordenadas ortogonais nos quais, como nos dois sistemas anteriores, a origem coincide com o eixo y, é evidente a partir do fato de que $\frac{1}{2}(zdx - xdz)$ representa a área do triângulo projetada em um plano normal ao eixo comum y, que é formado pela origem comum das coordenadas, e pelo elemento de corrente em questão. A linha reta r, que conecta o elemento de corrente em questão com o elemento induzido, tem um valor completamente independente do sistema de coordenadas escolhido. Disso resulta que o valor do quociente[318] $(zdx - xdz)/r^3$ para os dois sistemas de coordenadas utilizados anteriormente é sempre o mesmo, portanto, também é [igual] o valor da integral estendida para todo o circuito fechado $\int \frac{zdx - xdz}{r^3}$.

Segue disso que a lei de Neumann para o domínio dos fenômenos aos quais, em virtude de sua dedução, ela se refere, a saber, no qual todos os indutores são ímãs ou então circuitos fechados, concorda com a lei deduzida a partir da teoria desenvolvida anteriormente, mas que não é permitida a aplicação da lei de Neumann fora de seu domínio para circuitos abertos.

6.27 Lei da Excitação de uma Corrente em um Condutor em Repouso, quando um Elemento de Corrente Constante se Aproxima ou se Afasta Dele

A lei da *indução voltaica* para esse caso no qual o condutor induzido está em repouso e o elemento de corrente indutor está em movimento, pode ser deduzida da mesma forma que foi feito no primeiro caso a partir da lei elétrica fundamental estabelecida. Contudo, não é necessário apresentar essa dedução, já que uma consideração simples mostra que o segundo caso tem de levar à mesma lei que o primeiro caso.

Ou seja, a lei elétrica fundamental, a partir da qual são deduzidas todas as leis de *indução eletrovoltaica*, faz com que a ação de uma massa elétrica sobre outra dependa apenas da distância, velocidade, e aceleração *relativas* entre elas. Contudo, essas [grandezas] permanecem inalteradas por um movimento *comum* atribuído às duas massas: portanto, a ação de uma massa elétrica sobre outra não é modificada por esse movimento *comum*. Consequentemente, tal movimento *comum* pode ser atribuído a todas as massas elétricas sem modificar suas ações, portanto, sem modificar a indução que depende dessas ações. Logo, se temos um elemento de corrente indutor α, que está em movimento com a velocidade *absoluta* u' em qualquer direção, enquanto que o elemento induzido α' está em repouso *absoluto*, então, sem modificar a indução, podemos atribuir aos dois elementos, e também às massas elétricas contidas neles, um movimento *comum* de velocidade u' naquela direção que é diametralmente oposta à direção na qual o elemento de corrente α de fato está em movimento. Ao adicionar esse movimento comum, o elemento indutor α fica em repouso, enquanto que agora o elemento induzido α' desloca-se com a mesma velocidade que o elemento de corrente [α] está de fato se deslocando, mas na direção oposta. Portanto, a partir da lei fundamental estabelecida, tem de resultar a mesma indução para o mesmo movimento *relativo* entre os dois elementos, independentemente de, durante esse movimento relativo, um ou o outro ou

[318] Devido a um erro de impressão, a próxima equação apareceu no texto original como $zdx - xdz/r^3$.

nenhum dos dois elementos estar em repouso *absoluto*. Como é bem conhecido, a experiência empírica está de acordo com esse resultado.

6.28 Lei da Excitação de uma Corrente em um Condutor Devido à Variação da Intensidade de Corrente em um Condutor Próximo

Se α e α' denotam os comprimentos dos elementos indutor e induzido, [respectivamente,] então nos dois elementos quatro massas elétricas podem ser distinguidas:

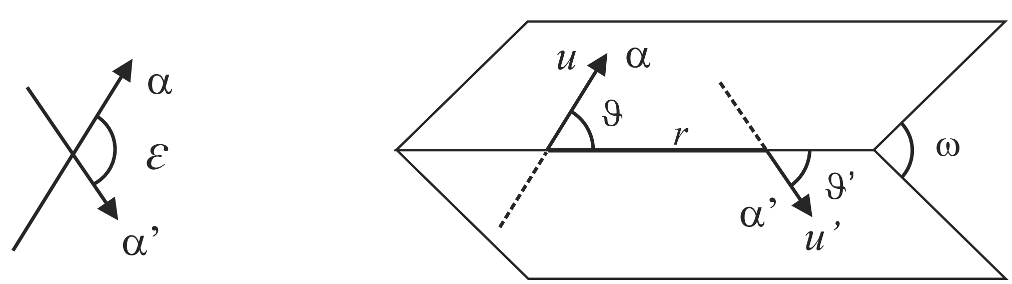
$$+\alpha e\ , \quad -\alpha e\ , \quad +\alpha' e'\ , \quad -\alpha' e'\ .$$

A *primeira* dessas massas $+\alpha e$ desloca-se com a velocidade *variável* u na direção do elemento em repouso α, que faz o ângulo ϑ com a linha reta traçada de α para α', e du denota a mudança em u durante o elemento de tempo dt; a *segunda*, $-\alpha e$, desloca-se, de acordo com as determinações relacionadas a uma corrente galvânica, na mesma direção com velocidade $-u$, isto é, para trás, e $-du$ denota a mudança nessa velocidade durante o elemento de tempo dt; a *terceira*, $+\alpha' e'$, desloca-se com velocidade constante $+u'$ na direção do elemento em repouso α', que faz o ângulo ϑ' com a linha reta traçada e estendida de α para α'; e finalmente a *quarta*, $-\alpha' e'$, desloca-se, novamente de acordo com as determinações relacionadas a uma corrente galvânica, na mesma direção com velocidade $-u'$, a saber, para trás.[319] As distâncias dessas primeiras duas massas até as segundas [massas elétricas] têm todas elas próprias o mesmo valor no momento em questão no qual há uma distância r entre os dois elementos α e α'; contudo, como elas não permanecem iguais, serão denotadas por r_1, r_2, r_3, r_4.

A partir da *soma* das forças que estão atuando nas eletricidade *positiva* e *negativa* no elemento α', isto é, para a força que move o próprio elemento α', obtemos a mesma expressão que na Seção 6.24, a saber:

$$-\frac{a^2}{16} \cdot \frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r^2} \left\{ \left(\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{dr_2^2}{dt^2} - \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2} \right) \right.$$
$$\left. - 2r \left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} \right) \right\} \ .$$

[319]Os ângulos ϑ, ϑ', ω e ε para esse caso estão representados na Figura dessa Nota de rodapé:



(a) (b)

Aqui ε é o ângulo entre as direções α e α'. Além disso, as direções α' e r formam um plano. Da mesma forma, as direções α e r formam um outro plano. O ângulo entre esses dois planos é denotado por ω.

Contudo, para a *diferença* entre essas forças, da qual depende a *indução*, [obtemos:]

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{\alpha e\cdot\alpha' e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)\right.$$
$$\left.-\,2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\}\ .$$

Além disso, continuam valendo as mesmas derivadas de primeira ordem[320] que aquelas obtidos na Seção 6.22, a saber:

$$\frac{dr_1}{dt}=-\frac{dr_2}{dt}=-u\cos\vartheta+u'\cos\vartheta'\ ,$$

e

$$\frac{dr_3}{dt}=-\frac{dr_4}{dt}=-u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta'\ .$$

Portanto

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8uu'\cos\vartheta\cos\vartheta'\ ,$$

e

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=0\ .$$

Contudo, como a velocidade u é agora variável, obtemos valores para as derivadas de segunda ordem que são diferentes daqueles na Seção 6.22 na qual a velocidade u era constante, a saber:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2}=+u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_1}{dt}-u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_1'}{dt}-\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt}\ ,$$

$$\frac{d^2r_2}{dt^2}=-u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_2}{dt}+u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_2'}{dt}+\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt}\ ,$$

$$\frac{d^2r_3}{dt^2}=+u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_3}{dt}+u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_3'}{dt}-\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt}\ ,$$

e

$$\frac{d^2r_4}{dt^2}=-u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_4}{dt}-u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_4'}{dt}+\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt}\ .$$

Portanto, resulta para

$$\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{d^2r_2}{dt^2}-\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)=+u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}-\frac{d\vartheta_2}{dt}-\frac{d\vartheta_3}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$-\,u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\left(\frac{d\vartheta_1'}{dt}-\frac{d\vartheta_2'}{dt}+\frac{d\vartheta_3'}{dt}-\frac{d\vartheta_4'}{dt}\right)$$

[320]Em alemão: *ersten Differentialkoefficienten*. Ver a Nota de rodapé 276.

o mesmo valor que na Seção 6.22, a saber, quando substituímos os valores $d\vartheta_1/dt$, $d\vartheta_1'/dt$, e assim por diante, desenvolvidos lá na página[321] 170,

$$r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{d^2r_2}{dt^2}-\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)=-8uu'\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega\ .$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)=+u\operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{d\vartheta_3}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$
$$-\ u'\operatorname{sen}\vartheta'\left(\frac{d\vartheta_1'}{dt}+\frac{d\vartheta_2'}{dt}-\frac{d\vartheta_3'}{dt}-\frac{d\vartheta_4'}{dt}\right)-4\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt}\ .$$

Contudo, como de acordo com a página[322] 170, os valores

$$\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{d\vartheta_2}{dt}=\frac{d\vartheta_3}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}=\frac{d\vartheta_1'}{dt}+\frac{d\vartheta_2'}{dt}=\frac{d\vartheta_3'}{dt}+\frac{d\vartheta_4'}{dt}=0\ ,$$

então

$$\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)=-4\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt}\ .$$

Se substituirmos esses valores, obteremos a *soma* das forças atuando sobre as eletricidades *positiva* e *negativa* no elemento α', assim como na Seção 6.22

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\cdot aeu\cdot ae'u'\left(\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega-\frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)\ ,$$

a saber, a força atuando no elemento α', quando a intensidade de corrente é variável, é obtida com o mesmo valor do que no caso em que a corrente é constante, e a lei de Ampère também é aplicável para correntes variáveis.

Por outro lado, a *diferença* entre aquelas duas forças atuando nas eletricidades *positiva* e *negativa* no elemento α', da qual depende a *indução*, resulta como

$$=-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cdot a^2ee'\cdot\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt}\ ,$$

ou, uma vez que de acordo com a página[323] 159, $aeu=i$, consequentemente, como u é variável, [temos] $ae\cdot du=di$, [então:]

$$=-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cdot ae'\cdot\cos\vartheta\cdot\frac{di}{dt}\ .$$

A força determinada dessa forma tenta separar as eletricidades *positiva* e *negativa* no elemento induzido α' na direção da linha reta r. Mas não pode ocorrer a separação nessa direção, ela só pode ocorrer na direção do próprio elemento induzido α', que forma o ângulo ϑ' com a linha reta r estendida. Decompondo então essa força total, que tenta separar as duas eletricidades em α', ao longo dessa direção, isto é, multiplicando a *diferença* anterior por $\cos\vartheta'$, obtemos a força que produz a separação real:

[321] [Web46, pág. 162 das *Obras* de Weber].
[322] [Web46, pág. 162 das *Obras* de Weber].
[323] [Web46, pág. 152 das *Obras* de Weber].

$$= -\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} \cdot ae' \cdot \cos\vartheta \cos\vartheta' \cdot \frac{di}{dt} \ .$$

Se esse valor for dividido por e', vai resultar a força *eletromotriz*, com o significado usual, exercida pelo elemento indutor α sobre o elemento induzido α' (ver a Seção 6.24, página[324] 179):

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r} \cdot \cos\vartheta \cos\vartheta' \cdot \frac{di}{dt} \ .$$

A *indução* durante o elemento de tempo dt, a saber, o produto desse elemento de tempo com a força eletromotriz atuante, é, portanto

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r} \cdot \cos\vartheta \cos\vartheta' \cdot di \ ,$$

logo a *indução* para qualquer período de tempo, no qual a intensidade da corrente indutora cresce até i, enquanto que r, ϑ e ϑ' permanecem inalteráveis,

$$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha'}{r} i \cos\vartheta \cos\vartheta' \ .$$

O valor *positivo* dessa expressão denota um corrente induzida no elemento α' na direção de α', que faz o ângulo ϑ' com a linha reta r estendida; o valor *negativo* denota uma corrente induzida na direção oposta.

Se os dois elementos α e α' forem paralelos entre si, e $\vartheta = \vartheta'$, então a expressão anterior tem um valor *negativo* para uma intensidade de corrente que está *aumentando*, ou para um valor positivo de i, ou seja, quando a intensidade de corrente aumenta em α, uma corrente é excitada em α' na direção oposta à corrente indutora.[325] Ocorre o contrário quando a intensidade de corrente diminui. Esses dois resultados concordam com fatos conhecidos. A proporcionalidade da indução em relação à mudança na intensidade i da corrente indutora também corresponde à experiência empírica, até onde vai a estimativa sem medição precisa.

6.29 Comparação das Ações Indutoras de Correntes Constantes sobre um Condutor Móvel com as Ações Indutoras de Correntes Variáveis sobre Condutores em Repouso

Na Seção anterior as leis da *indução eletrovoltaica* foram deduzidas da lei elétrica fundamental, concordando com a experiência empírica, não apenas para o caso no qual a indução eletrovoltaica é produzida por correntes *constantes* atuando em condutores móveis, mas também para o caso no qual ela é produzida por correntes *variáveis* atuando sobre condutores *em repouso*. As *leis da indução* para esses dois casos são bem diferentes, e devido a isso é muito interessante que apesar disso elas produzam relações muito simples entre as ações das duas induções.

[324] [Web46, pág. 170 das *Obras* de Weber].

[325] Em conformidade com o terceiro fato mencionado anteriormente, ver a Nota de rodapé 241 na página 141.

Uma tal simples relação entre a ação de indução de correntes *constantes* sobre um condutor *móvel* e a ação de indução de correntes *variáveis* sobre um condutor em repouso, resulta das leis já desenvolvidas nas Seções 6.24 e 6.28 para elementos indutores e induzidos individuais, quando o movimento do elemento induzido ocorre, no primeiro caso, na direção da linha reta r. Pois se calcularmos com essa suposição a ação de indução total que um elemento de corrente com intensidade i constante produz enquanto o elemento induzido é infinitamente afastado de uma dada posição paralelo a si próprio na direção da linha reta r, ou, a partir de uma distância infinita, se aproxima daquela posição [dada], encontramos então que a ação dessa indução total é igual àquela [ação] que o elemento indutor produziria no elemento induzido, caso a intensidade de corrente no elemento indutor diminuísse ou aumentasse de i, enquanto o elemento induzido continuasse na posição dada. Isso portanto fornece inicialmente a regra para esse caso específico, *que, pelo surgimento ou desaparecimento de uma corrente próxima a um condutor, a mesma corrente é induzida nesse condutor como se aquela corrente tivesse continuado uniformemente, mas tivesse sido deslocada de uma grande distância para a vizinhança do condutor ou, inversamente, tivesse sido deslocada dessa vizinhança para uma grande distância.*

Esse teorema resulta facilmente como segue para esse caso especial citado. A expressão encontrada no final da Seção 6.24 para a força eletromotriz é para ser multiplicada pelo elemento de tempo dt para obter a *ação de indução* correspondente a esse elemento de tempo dt, ou correspondendo ao elemento de deslocamento $u'dt$ percorrido durante esse elemento de tempo. O valor da integral desse produto entre limites de tempo definidos ou limites de deslocamento definidos fornece então a *ação de indução* total correspondente ao intervalo de tempo ou ao deslocamento percorrido nesse intervalo de tempo

$$= -ai \int \frac{\alpha\alpha'}{r^2} \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2} \cos\vartheta \cos\vartheta' \right) \cos\varphi \cdot u'dt \ .$$

Em nosso caso, no qual o movimento ocorre ao longo da linha reta r, temos

$$u'dt = dr \ , \qquad \text{e} \qquad \cos\vartheta' = 1 \ .$$

De acordo com a Seção 6.24, $\cos\varepsilon = \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega + \cos\vartheta \cos\vartheta'$, portanto, aqui:

$$\cos\varepsilon = \cos\vartheta \ .$$

Como, finalmente, os ângulos ϑ e φ possuem valores constantes durante o movimento na direção da linha reta r do elemento α' sempre paralelo a si próprio, a *ação de indução* é

$$= +\frac{ai}{2} \cdot \alpha\alpha' \cos\vartheta \cos\varphi \cdot \int \frac{dr}{r^2} \ .$$

O valor dessa integral entre os limites $r = r$ até $r = \infty$, a saber, a *ação de indução*, enquanto o elemento induzido é movido infinitamente para longe de uma dada posição, é

$$= +\frac{ai}{2} \frac{\alpha\alpha'}{r} \cos\vartheta \cos\varphi \ ;$$

entre os limites $r = \infty$ até $r = r$, a saber, a *ação de indução*, enquanto o elemento induzido, [partindo] de uma distância infinita, *chega* a uma dada posição, é, ao contrário,

$$= -\frac{ai}{2} \frac{\alpha\alpha'}{r} \cos\vartheta \cos\varphi \ .$$

Se for levado em consideração que φ denota aqui, de acordo com a Seção 6.24, o mesmo ângulo que é [representado por] ϑ' na Seção 6.28, a saber, o ângulo que o elemento induzido α' faz com a linha reta r prolongada, vê-se então que a ação de indução é igual àquela [ação] que, de acordo com a lei dada na Seção 6.28, é obtida quando o elemento induzido α' permanece na posição dada, enquanto desaparece ou surge a intensidade de corrente i no elemento indutor α.

A relação encontrada para as duas ações de indução pode ser expressa de forma mais geral, não para elementos individuais, mas para *correntes e condutores fechados*. Pode ser primeiro considerado o caso no qual todos os elementos do condutor fechado induzido possuem o mesmo movimento paralelo.

A *ação de indução* do elemento de corrente α sobre o elemento induzido α' é, como antes,

$$= -ai \int \frac{\alpha\alpha'}{r^2} \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2} \cos\vartheta \cos\vartheta' \right) \cos\varphi \cdot u'dt \ .$$

Se β e β' denotarem agora os ângulos que os dois elementos α e α' fazem com o plano produzido pela linha reta r durante o movimento do elemento α', e, além disso, se γ e γ' denotarem os ângulos que as projeções de α e α' fazem nesse plano com a direção do movimento, então

$$\cos\vartheta = \cos\beta \cos(\vartheta' - \gamma) \ ,$$

$$\cos\varphi = \cos\beta' \cos(\vartheta' - \gamma') \ ,$$

e

$$\cos\varepsilon = \cos\beta \cos\gamma \ .$$

A projeção do elemento de deslocamento $u'dt$ sobre a linha reta r fornece o valor de dr para o elemento de tempo dt,

$$dr = u'dt \cdot \cos\vartheta' \qquad \text{ou} \qquad u'dt = \sec\vartheta' \cdot dr \ .$$

Se esses valores forem substituídos, a *ação de indução* de α sobre α' vai se tornar

$$= -\int ai\alpha\alpha' \cos\beta \cos\beta' \left(\cos\gamma \sec\vartheta' - \frac{3}{2} \cos(\vartheta' - \gamma) \right) \cos(\vartheta' - \gamma') \cdot \frac{dr}{r^2} \ ,$$

ou, quando $\cos(\vartheta' - \gamma)$ e $\cos(\vartheta' - \gamma')$ são desenvolvidos,

$$= +\frac{ai}{2} \int \alpha\alpha' \cos\beta \cos\beta' \cdot dR \ ,$$

na qual, por brevidade, a seguinte expressão é denominada por dR:

$$\big(\cos\gamma \cos\gamma' - 2 \cos\gamma \,\mathrm{sen}\,\gamma' \tan\vartheta' - 3 \cos(\gamma + \gamma') \,\mathrm{sen}^2\vartheta'$$

$$+ \, 3 \,\mathrm{sen}\,(\gamma + \gamma') \,\mathrm{sen}\,\vartheta' \cos\vartheta' \big) \cdot \frac{dr}{r^2} \ .$$

Se for levado em consideração que no movimento paralelo e igual de todos os elementos, cada um deles é deslocado *paralelo a si próprio*, portanto os ângulos β, β', γ, γ' são constantes, e se fizermos

$$\operatorname{sen}\vartheta' = \frac{b}{r} \; , \qquad \cos\vartheta' = \frac{\sqrt{r^2-b^2}}{r} \; , \qquad \tan\vartheta' = \frac{b}{\sqrt{r^2-b^2}} \; ,$$

nas quais b denota a perpendicular de α até a trajetória do elemento induzido α', então a integração pode ser efetuada, e a seguinte expressão é obtida como uma *integral indefinida*:

$$-\frac{ai}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\vartheta\cos\varphi - \frac{ai}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\beta\cos\beta'\operatorname{sen}(\gamma'-\gamma)\cot\vartheta' \; .$$

A *ação de indução* procurada é a *integral definida* ou a diferença entre os dois valores que a expressão recebe quando os dois valores limites para r, ϑ, φ, e ϑ' são substituídos nela.

Se for formada a mesma expressão, como para os elementos α e α', para *todas* as combinações de elementos indutores e induzidos que estão contidos no circuito fechado e no condutor fechado, e se a *soma* de todas elas for denotada por

$$-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\vartheta\cos\varphi - \frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\beta\cos\beta'\operatorname{sen}(\gamma'-\gamma)\cot\vartheta' \; ,$$

então a ação de indução do circuito fechado sobre o condutor fechado será igual à diferença entre os valores que essa soma recebe quando são substituídos nela os valores de r, ϑ, φ e ϑ', correspondendo aos valores no início e no fim da indução.

Agora, a *soma* anterior consiste de dois termos, e será provado que o *último termo* é nulo para todos os valores de r e ϑ'. Portanto, a *ação de indução* de um circuito *fechado* sobre um condutor *fechado* reduz-se à diferença entre os dois valores que o *primeiro termo* da soma anterior assume, quando são substituídos nele os valores de r, ϑ, φ, correspondendo ao início e ao fim da indução.

Que o *último termo* da soma anterior é, de fato,

$$-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\beta\cos\beta'\operatorname{sen}(\gamma'-\gamma)\cot\vartheta' = 0 \; ,$$

pode ser facilmente provado se analisarmos os elementos indutor e induzido de acordo com o teorema que, para determinar a interação entre dois elementos, para qualquer um deles, podem ser colocados três outros [elementos] em seu lugar, que formam as três arestas de um paralelepípedo, cuja diagonal é ocupada pelo elemento dado. Sobre esse teorema ver a Seção 6.31 a seguir.

De acordo com isso, se os dois elementos α e α' forem decompostos em três elementos cada, dos quais o *primeiro* seria paralelo à direção do movimento, o *segundo* perpendicular a r, no plano produzido por r quando α' está em movimento, o *terceiro* perpendicular aos outros dois, e se eles forem denominados

$$\alpha_1 \; , \quad \alpha_2 \; , \quad \alpha_3 \; , \qquad \text{e} \qquad \alpha_1' \; , \quad \alpha_2' \; , \quad \alpha_3' \; ,$$

então $[\alpha\alpha'/r]\cdot\cos\beta\cos\beta'\operatorname{sen}(\gamma'-\gamma)\cot\vartheta'$ torna-se uma soma de 9 termos. Para os dois termos proporcionais a $\alpha_3\alpha_1'$ e $\alpha_3\alpha_2'$, o fator é $\cos\beta = 0$; para os dois termos proporcionais a $\alpha_1\alpha_3'$ e $\alpha_2\alpha_3'$, o fator é $\cos\beta' = 0$; para o termo proporcional a $\alpha_3\alpha_3'$, os dois fatores são $\cos\beta = \cos\beta' = 0$; finalmente, para o sexto e sétimo termos, que são proporcionais a $\alpha_1\alpha_1'$ e $\alpha_2\alpha_2'$, o fator é $\operatorname{sen}(\gamma'-\gamma) = 0$. Portanto, sobram apenas dois outros termos, a saber, aqueles proporcionais a $\alpha_1\alpha_2'$ e $\alpha_2\alpha_1'$, para os quais $\cos\beta = 1$, $\cos\beta' = 1$, $\operatorname{sen}(\gamma'-\gamma) = \mp\cos\vartheta'$; assim esses dois termos são:

$$\pm\frac{ai}{2}\cdot\frac{\alpha_1\alpha_2'}{r}\cos\vartheta'\cot\vartheta' \qquad \text{e} \qquad \pm\,\frac{ai}{2}\cdot\frac{\alpha_2\alpha_1'}{r}\cos\vartheta'\cot\vartheta'\ ,$$

e por brevidade podem ser denominados A e B. Se procedermos agora de maneira similar com cada dois elementos do circuito fechado e do condutor fechado, encontraremos então que, entre os termos remanescentes formados dessa forma, vão existir dois termos pelos quais A e B serão cancelados, e que serão denominados A' e B'. Se isso vale em geral, então segue-se que

$$-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\beta\cos\beta'\,\mathrm{sen}\,(\gamma'-\gamma)\cot\vartheta'=0\ ,$$

o que era para ser provado.

Agora, o elemento A', pelo qual A foi cancelado, é encontrado da seguinte maneira. Através do centro do elemento *indutor* α como vértice, sejam colocadas duas superfícies cônicas, cujo eixo comum delas seja paralelo à direção do movimento, isto é, paralelo a α_1. Suponha que as duas superfícies cônicas delimitem o elemento *induzido* α'. É evidente que pelo menos um *segundo* elemento $\mathfrak{a}'$ do *circuito fechado* ainda seria delimitado pelas mesmas superfícies cônicas. E, especificamente, uma corrente que flui em α' *da superfície cônica externa para a [superfície cônica] interna*, tem de fluir em $\mathfrak{a}'$ inversamente *da [superfície cônica] interna para a externa*. O valor de ϑ' é o mesmo para os dois elementos. Se decompormos agora o segundo elemento $\mathfrak{a}'$ da mesma forma que o primeiro [elemento] α', e se denotarmos como $\mathfrak{a}_2'$ aquele elemento lateral que, perpendicular à [linha reta] r' conectando $\mathfrak{a}'$ com α, está no plano produzido por r' pelo movimento de $\mathfrak{a}'$, então o termo proporcional a $\alpha_1\mathfrak{a}_2'$ será o termo A', pelo qual A é cancelado. Contudo,

$$A'=\mp\frac{ai}{2}\cdot\frac{\alpha_1\mathfrak{a}_2'}{r'}\cdot\cos\vartheta'\cot\vartheta'\ ,$$

e $\alpha_2':\mathfrak{a}_2'$ está na razão de suas distâncias do ápice comum das duas superfícies cônicas, isto é, como $r:r'$, portanto

$$\frac{\mathfrak{a}_2'}{r'}=\frac{\alpha_2'}{r}\ .$$

Se forem substituídos esses valores, então

$$A'=\mp\frac{ai}{2}\frac{\alpha_1\alpha_2'}{r}\cdot\cos\vartheta'\cot\vartheta'\ ,$$

e é, exceto pelo sinal, igual ao valor de A. A partir da *direção oposta* na qual, como afirmado anteriormente, os elementos α' e $\mathfrak{a}'$, ou α_2' e $\mathfrak{a}_2'$, têm a mesma corrente fluindo através deles, pode ser facilmente reconhecido que, quando em A, $\mathrm{sen}\,(\gamma'-\gamma)=\mp\cos\vartheta'$, então em A', $\mathrm{sen}\,(\gamma'-\gamma)=\pm\cos\vartheta'$, e que, portanto, os valores de A e A' sempre possuem sinais opostos; logos essas duas grandezas se cancelam.

Pode ocorrer que além de α' e $\mathfrak{a}'$, ainda um *terceiro* elemento do condutor seja limitado pelas mesmas superfícies cônicas; então, contudo, tem de existir necessariamente, se o condutor for *fechado*, ainda também um *quarto* [elemento], e o mesmo vai ser verdadeiro para o terceiro e quarto assim como foi para o primeiro e segundo, e assim por diante.

Encontra-se de forma similar B', que cancela B, quando o centro do elemento *induzido* α' é feito o vértice de duas superfícies cônicas, cujo eixo comum delas seja paralelo à direção do movimento, e que delimitam o elemento *indutor* α. As mesmas superfícies cônicas delimitam então, do *indutor fechado*, ainda um segundo elemento, de cuja decomposição resulta B', assim como ocorreu com A' anteriormente a partir da decomposição do elemento $\mathfrak{a}'$.

A partir do cancelamento mútuo de todos os termos denominados A, A', B, B', e assim por diante, segue-se agora que para *correntes fechadas e condutores fechados*, é válida a equação:

$$-\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\beta\cos\beta'\operatorname{sen}(\gamma'-\gamma)\cot\vartheta' = 0 \ .$$

A partir disso segue-se agora, *em primeiro lugar*, quando um condutor fechado com todas as suas partes é deslocado identicamente e paralelamente *sempre na mesma direção*, a *ação de indução* será

$$= \frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0 - \frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_1}\cos\vartheta_1\cos\vartheta_1 \ ,$$

na qual os valores de r, ϑ, φ são denominados r_0, ϑ_0, φ_0 para o início da indução, e r_1, ϑ_1, φ_1 para o final [da indução]. Se fizermos $r_1 = \infty$, a saber, quando o condutor fechado, a partir de uma posição dada, for removido infinitamente distante da corrente indutora, então a ação de indução total produzida dessa forma será

$$= \frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0 \ ,$$

a mesma [ação] que resulta, de acordo com a Seção anterior, para o mesmo condutor de corrente *indutora* e para o mesmo condutor [de corrente] *induzida*, quando eles *continuam* em suas posições mútuas iniciais e a corrente i desaparece no primeiro.[326]

Em segundo lugar, quando um condutor fechado com todas as suas partes é apenas deslocado ligeiramente, de forma idêntica e paralela, em qualquer direção definida, e então é deslocado novamente em uma direção um pouco *modificada*, e assim por diante, e quando os valores de r, ϑ, φ são denominados r_0, ϑ_0, φ_0 no início da indução, ao final do primeiro ou no início do segundo deslocamento são denominados r_1, ϑ_1, φ_1, no final do segundo ou no início do terceiro deslocamento são denominados r_2, ϑ_2, φ_2, e assim por diante, segue-se que a *ação de indução* total será

$$= +\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0 - \frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_1}\cos\vartheta_1\cos\varphi_1$$

$$+\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_1}\cos\vartheta_1\cos\varphi_1 - \frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_2}\cos\vartheta_2\cos\varphi_2$$

$$+ \text{ e assim por diante.}$$

Se r_n, ϑ_n, φ_n denotarem os valores de r, ϑ, φ ao final de todos esses movimentos efetuados sucessivamente em direções *diferentes*, então, como todos os termos se cancelam, exceto o primeiro e o último, o valor indicado da ação de indução total reduz-se a

$$\frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0 - \frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_n}\cos\vartheta_n\cos\varphi_n \ ,$$

[326]Isto é, quando a corrente no condutor que está induzindo vai de i para zero.

a partir do qual vemos que, quando $r_n = \infty$, a *ação de indução* será a mesma quando um condutor fechado é removido de uma dada posição com relação a uma corrente fechada, até ficar infinitamente distante da corrente indutora através de uma trajetória *curva* arbitrária, mas de tal forma que todas as partes sempre permaneçam paralelas entre si, como se tudo isso ocorresse através de uma trajetória *em linha reta*, ou como se o condutor fechado *continuasse* em sua posição original e a corrente i no condutor indutor *desaparecesse*, a saber,

$$= \frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0 \ .$$

Se, *em terceiro lugar* e finalmente, o condutor fechado desloca-se com total arbitrariedade, então o movimento de qualquer um de seus elementos em qualquer instante pode ser decomposto em uma *rotação* ao redor de seu centro, e em um *deslocamento* paralelo de todo o elemento. A ação de indução da *rotação* do elemento ao redor de seu centro é $= 0$, já que r permanece inalterada por esse meio, portanto $dr = 0$. O *deslocamento* de cada elemento pode ser decomposto em três deslocamentos nas direções dos três eixos coordenados. Então, para o deslocamento paralelo de todos os elementos do condutor fechado em *qualquer uma* dessas direções,

$$\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\beta\cos\beta'\,\mathrm{sen}\,(\gamma'-\gamma)\cos\vartheta' = 0 \ ,$$

sendo que a partir disso pode ser facilmente visto que mesmo em um *movimento arbitrário* do condutor fechado, segue-se que a *ação de indução*

$$= \frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_0}\cos\vartheta_0\cos\varphi_0 - \frac{ai}{2}\mathbf{S}\frac{\alpha\alpha'}{r_n}\cos\vartheta_n\cos\varphi_n \ ,$$

na qual r_0, ϑ_0, φ_0 e r_n, ϑ_n, φ_n denotam os valores de r, ϑ, φ no início e no final da indução.

A relação discutida aqui entre a ação de indução de uma corrente *constante* fechada sobre um condutor fechado *em movimento*, e entre a ação de indução de uma corrente *variável* fechada sobre um condutor fechado *em repouso*, já foi apresentada por Neumann com maior generalidade na *obra citada*. Neumann constrói sobre a base *empírica* citada na Seção 6.26, a conclusão de que toda a ação indutiva, que corresponde ao deslocamento do condutor induzido de uma posição para outra, é independente das posições intermediárias pelas quais ele passa, e da velocidade com a qual ele se desloca, e depende apenas da diferença nos *valores potenciais* do indutor no início e no final do caminho. Após Neumann ter apresentado esse teorema para a ação de indução de correntes *constantes* sobre condutores *móveis*, ele continua na página 39, *obra citada*:[327]

> A partir da independência da força eletromotriz induzida em relação ao próprio movimento, infere-se que *qualquer causa* que produz uma mudança no valor do *potencial* de uma corrente fechada com relação a um condutor fechado induz uma corrente cuja força eletromotriz é expressa por meio de uma *mudança* que ocorreu no *potencial*.

Com a ajuda desse teorema Neumann reduziu a determinação do segundo tipo de *indução eletrovoltaica*, a saber, aquela de uma corrente *variável* atuando sobre um condutor em repouso, àquela [indução] do primeiro tipo, a saber, de uma corrente *constante* atuando sobre um condutor *em movimento*. A relação mencionada anteriormente entre as duas ações de

[327][Neu46, pág. 39]. Ver ainda a Nota de rodapé 68 na página 36.

indução segue disso por si só. A razão final para todas essas relações pode agora ser diretamente demonstrada pela *lei elétrica fundamental*,[328] segundo a qual duas massas elétricas agem uma sobre a outra à distância.

6.30 Lei Geral da Indução Eletrovoltaica

Após ter considerado os dois casos principais de *indução eletrovoltaica*, a saber, na qual ou a corrente é *constante*, mas o condutor está *em movimento*, ou na qual a corrente é *variável*, mas o condutor está *imóvel*, pode ser facilmente desenvolvida a lei geral da determinação das ações de condutores *deslocando-se arbitrariamente e através do qual uma corrente flui de acordo com as leis do galvanismo*.

Sejam α e α' novamente os comprimentos de dois elementos, dos quais o primeiro, α, é considerado em repouso. De acordo com a Seção 6.27, essa suposição não restringe a generalidade do tratamento, já que cada movimento do elemento α pode ser transferido para α', atribuindo-lhe a direção oposta em α'. Assim como anteriormente, as seguintes quatro massas elétricas são distinguidas nesses dois elementos:

$$+\alpha e\ , \quad -\alpha e\ , \quad +\alpha' e'\ , \quad -\alpha' e'\ .$$

A *primeira* dessas massas, $+\alpha e$, desloca-se com velocidade $+u$ na direção do elemento α em repouso, que forma o ângulo ϑ com a linha reta traçada de α para α'. Essa velocidade é modificada em $+du$ durante o intervalo de tempo dt. A *segunda* massa $-\alpha e$, em conformidade com as determinações dadas para uma corrente galvânica, desloca-se na mesma direção com velocidade $-u$, a saber, para trás, e essa velocidade modifica-se em $-du$ durante o intervalo de tempo dt. A *terceira* massa $+\alpha' e'$ desloca-se com velocidade $+u'$ na direção do elemento α', que faz o ângulo ϑ' com a linha reta traçada e estendida de α para α'. Essa velocidade modifica-se em $+du'$ no intervalo de tempo dt. Contudo, essa massa elétrica também compartilha o movimento do próprio elemento α', que ocorre com velocidade v em uma direção que faz o ângulo η com a linha reta traçada e estendida de α para α', e está contida em um plano que passa por essa linha reta, que forma o ângulo ϖ com o plano que passa pela mesma linha reta paralela ao elemento α.[329] A velocidade v modifica-se em dv durante o intervalo de tempo dt. A *quarta* massa $-\alpha' e'$, em conformidade com as determinações para uma corrente galvânica, desloca-se na mesma direção que o elemento α' com velocidade $-u'$, que se modifica em $-du'$ no intervalo de tempo dt; contudo, adicionalmente, ela compartilha com a massa anterior a velocidade v do próprio elemento α' na direção já especificada. As distâncias das duas primeiras massas até as duas últimas são todas, no instante em questão, iguais à distância r entre os dois próprios elementos; contudo, como elas não permanecem iguais, elas são denominadas por r_1, r_2, r_3, r_4. Se dois planos forem traçados através da linha reta que vai de α para α', um paralelo a α, o outro paralelo a α', então ω vai denotar o ângulo formado por esses dois planos.[330]

[328] Ou seja, pela força de Weber.

[329] O ângulo que estou denominando aqui como ϖ aparece no texto original de Weber como mostrado nessa Nota de rodapé. Como não encontrei esse símbolo no editor de textos LaTex, estou substituindo-o por ϖ:

[330] Os ângulos ε, ϑ, ϑ', ω, η e ϖ para esse caso estão representados na Figura dessa Nota de rodapé:

Para a *soma* das forças que atuam nas eletricidades *positiva* e *negativa* no elemento α', isto é, para a força que move o próprio elemento α', obtemos então a mesma expressão que na Seção 6.24, a saber:

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{\alpha e\cdot\alpha' e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)\right.$$

$$\left.-\ 2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{d^2r_2}{dt^2}-\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\} \ .$$

Contudo, para a *diferença* entre essas forças, da qual depende a *indução*, [obtemos:]

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{\alpha e\cdot\alpha' e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)\right.$$

$$\left.-\ 2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\} \ .$$

Além disso, quando, juntamente com o movimento das massas elétricas em seus condutores, também levamos em consideração o movimento que elas compartilham com seus condutores, as derivadas de primeira ordem são encontradas na maneira apresentada na Seção 6.22, ao adicionar aos valores lá encontrados a velocidade do elemento α', decomposta na direção da linha reta r. Obtemos então:

$$\frac{dr_1}{dt}=-u\cos\vartheta+u'\cos\vartheta'+v\cos\eta \ ,$$

$$\frac{dr_2}{dt}=+u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta'+v\cos\eta \ ,$$

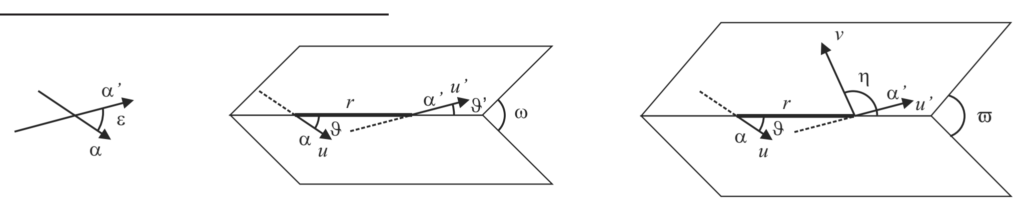
$$\frac{dr_3}{dt}=-u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta'+v\cos\eta \ ,$$

e

$$\frac{dr_4}{dt}=+u\cos\vartheta+u'\cos\vartheta'+v\cos\eta \ .$$

Portanto:

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8uu'\cos\vartheta\cos\vartheta' \ ,$$



(a) (b) (c)

Em (a) temos ε, o ângulo entre as direções α e α'. Em (b) temos os ângulos ϑ e ϑ'. Além disso, as direções α e r formam um plano, enquanto que as direções α' e r formam um outro plano. O ângulo entre esses dois planos é denotado por ω. Em (c) temos o ângulo η. Além disso, as direções v e r formam um plano, enquanto que as direções α e r formam um outro plano. O ângulo entre esses dois planos é denotado por ϖ.

e

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2} - \frac{dr_2^2}{dt^2} + \frac{dr_3^2}{dt^2} - \frac{dr_4^2}{dt^2}\right) = -8uv\cos\vartheta\cos\eta \ .$$

As derivadas de segunda ordem são obtidas como na Seção 6.22, quando, além disso, são consideradas a variabilidade das velocidades u, u', v, a saber:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2} = +u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_1}{dt} - u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_1'}{dt} - v\,\mathrm{sen}\,\eta\frac{d\eta_1}{dt} - \cos\vartheta\frac{du}{dt} + \cos\vartheta'\frac{du'}{dt} + \cos\eta\frac{dv}{dt} \ ,$$

$$\frac{d^2r_2}{dt^2} = -u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_2}{dt} + u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_2'}{dt} - v\,\mathrm{sen}\,\eta\frac{d\eta_2}{dt} + \cos\vartheta\frac{du}{dt} - \cos\vartheta'\frac{du'}{dt} + \cos\eta\frac{dv}{dt} \ ,$$

$$\frac{d^2r_3}{dt^2} = +u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_3}{dt} + u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_3'}{dt} - v\,\mathrm{sen}\,\eta\frac{d\eta_3}{dt} - \cos\vartheta\frac{du}{dt} - \cos\vartheta'\frac{du'}{dt} + \cos\eta\frac{dv}{dt} \ ,$$

e

$$\frac{d^2r_4}{dt^2} = -u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\frac{d\vartheta_4}{dt} - u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\cdot\frac{d\vartheta_4'}{dt} - v\,\mathrm{sen}\,\eta\frac{d\eta_4}{dt} + \cos\vartheta\frac{du}{dt} + \cos\vartheta'\frac{du'}{dt} + \cos\eta\frac{dv}{dt} \ .$$

Portanto

$$\left(\frac{d^2r_1}{dt^2} + \frac{d^2r_2}{dt^2} - \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2}\right) = +u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$

$$-u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\left(\frac{d\vartheta_1'}{dt} - \frac{d\vartheta_2'}{dt} + \frac{d\vartheta_3'}{dt} - \frac{d\vartheta_4'}{dt}\right) - v\,\mathrm{sen}\,\eta\left(\frac{d\eta_1}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} - \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right) \ ,$$

e

$$\left(\frac{d^2r_1}{dt^2} - \frac{d^2r_2}{dt^2} + \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2}\right) = +u\,\mathrm{sen}\,\vartheta\left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$

$$- u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\left(\frac{d\vartheta_1'}{dt} + \frac{d\vartheta_2'}{dt} - \frac{d\vartheta_3'}{dt} - \frac{d\vartheta_4'}{dt}\right) - v\,\mathrm{sen}\,\eta\left(\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{d\eta_2}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right)$$

$$- 4\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt} \ .$$

Para a determinação das derivadas $d\vartheta_1/dt$, $d\vartheta_1'/dt$, $d\eta_1/dt$, e assim por diante, procedemos agora como na página[331] 167 e seguintes, ou como na Nota de rodapé na página 171.[332] Ou seja, a direção da reta r_1 muda

no plano do ângulo $\vartheta = +\frac{udt}{r_1}\cdot\mathrm{sen}\,\vartheta$,
no plano do ângulo $\vartheta' = -\frac{u'dt}{r_1}\cdot\mathrm{sen}\,\vartheta'$,

[331][Web46, pág. 159 das *Obras* de Weber].
[332]Ver a Nota de rodapé 277 na página 171, [Web46, pág. 162 das *Obras* de Weber].

$$\text{e no plano do ângulo } \eta = -\tfrac{vdt}{r_1} \cdot \operatorname{sen} \eta \ .$$

Se traçarmos agora linhas paralelas à linha r, e com as direcionalidades das velocidades u, u' e v, através do centro de uma esfera que corta a superfície (Figura 21) em R, U, U', e V, e conecta R com U, U' e V através dos maiores arcos circulares, então o plano contendo o arco $UR = \vartheta$, formará o ângulo designado como ω com o plano do arco $U'R = \vartheta'$, e formará o ângulo designado como ϖ com o plano do arco $VR = \eta$.

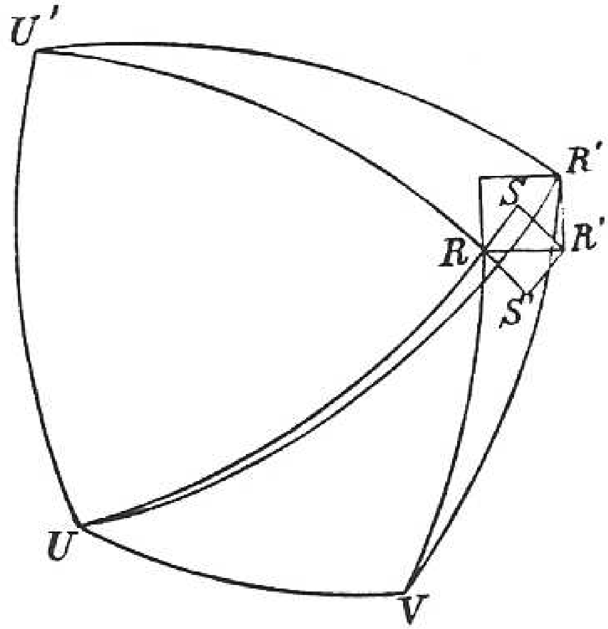


Fig. 21.

Seja o arco UR estendido até S, $U'R$ até S', e VR até T,[333] e sejam

$$RS = +\frac{udt}{r_1} \operatorname{sen} \vartheta \ , \qquad RS' = -\frac{u'dt}{r_1} \operatorname{sen} \vartheta' \ , \qquad RT = -\frac{vdt}{r_1} \operatorname{sen} \eta \ .$$

O elemento da superfície da esfera na qual estão R, S, S' e T pode agora, como na página[334] 169, ser considerado como um elemento do plano tocando a esfera em R, e os elementos de arco RS, RS' e RT como linhas retas nesse plano. Se for completado o paralelogramo $RSR'S'$ nesse plano, se for traçada a diagonal RR' e se for completado o segundo paralelogramo $RR'R''T$, então uma linha traçada através do centro paralela à linha reta r_1, que conecta as duas massas *positivas* $+\alpha e$ e $+\alpha' e'$ ao final do elemento de tempo dt, passará através do ponto R''.

Finalmente, se R'' for conectado com U, U' e V pelos maiores arcos de círculo, então

$$UR'' = \vartheta + d\vartheta_1 = UR + d\vartheta_1 \ ,$$

$$U'R'' = \vartheta' + d\vartheta_1' = U'R + d\vartheta_1' \ ,$$

e

[333]O ponto T na extremidade da continuação do arco VR não foi representado na Figura 21.

[334][Web46, pág. 161 das *Obras* de Weber].

$$VR'' = \eta + d\eta' = VR + d\eta_1 \ .$$

Disso segue que

$$d\vartheta_1 = UR'' - UR = RS + RS' \cos\omega + RT \cos\varpi \ ,$$

$$d\vartheta_1' = U'R' - U'R = RS' + RS \cos\omega + RT \cos(\omega + \varpi) \ ,$$

e

$$d\eta_1 = VR'' - VR = RT + RS \cos\varpi + RS' \cos(\omega + \varpi) \ .$$

Se forem substituídos os valores apresentados anteriormente de RS, RS' e RT, obteremos então:

$$r_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} = +u \operatorname{sen}\vartheta - u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos\varpi \ ,$$

$$r_1 \frac{d\vartheta_1'}{dt} = -u' \operatorname{sen}\vartheta' + u \operatorname{sen}\vartheta \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos(\omega + \varpi) \ ,$$

e

$$r_1 \frac{d\eta_1}{dt} = -v \operatorname{sen}\eta + u \operatorname{sen}\vartheta \cos\varpi - u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos(\omega + \varpi) \ .$$

Da mesma forma, o resultado para as duas massas *negativas* $-\alpha e$ e $-\alpha' e'$, é dado por:

$$r_2 \frac{d\vartheta_2}{dt} = -u \operatorname{sen}\vartheta + u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos\varpi \ ,$$

$$r_2 \frac{d\vartheta_2'}{dt} = +u' \operatorname{sen}\vartheta' - u \operatorname{sen}\vartheta \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos(\omega + \varpi) \ ,$$

e

$$r_2 \frac{d\eta_2}{dt} = -v \operatorname{sen}\eta - u \operatorname{sen}\vartheta \cos\varpi + u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos(\omega + \varpi) \ ;$$

além disso, para a massa *positiva* $+\alpha e$ e para a massa *negativa* $-\alpha' e'$:

$$r_3 \frac{d\vartheta_3}{dt} = +u \operatorname{sen}\vartheta + u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos\varpi \ ,$$

$$r_3 \frac{d\vartheta_3'}{dt} = +u' \operatorname{sen}\vartheta' + u \operatorname{sen}\vartheta \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos(\omega + \varpi) \ ,$$

e

$$r_3 \frac{d\eta_3}{dt} = -v \operatorname{sen}\eta + u \operatorname{sen}\vartheta \cos\varpi + u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos(\omega + \varpi) \ ;$$

finalmente, para a [massa] *negativa* $-\alpha e$ e para a *positiva* $+\alpha' e'$:

$$r_4 \frac{d\vartheta_4}{dt} = -u \operatorname{sen}\vartheta - u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos\varpi \ ,$$

$$r_4 \frac{d\vartheta'_4}{dt} = -u' \operatorname{sen} \vartheta' - u \operatorname{sen} \vartheta \cos \omega - v \operatorname{sen} \eta \cos(\omega + \varpi) \ ,$$

e

$$r_4 \frac{d\eta_4}{dt} = -v \operatorname{sen} \eta - u \operatorname{sen} \vartheta \cos \varpi - u' \operatorname{sen} \vartheta' \cos(\omega + \varpi) \ .$$

Agora, como para o instante que está sendo considerado, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$, obtemos disso:

$$r \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt} \right) = -4u' \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega \ ,$$

e

$$r \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt} \right) = -4v \operatorname{sen} \eta \cos \varpi \ ;$$

além disso:

$$r \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} - \frac{d\vartheta'_2}{dt} + \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt} \right) = +4u \operatorname{sen} \vartheta \cos \omega \ ,$$

e

$$r \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} + \frac{d\vartheta'_2}{dt} - \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta_4}{dt} \right) = 0 \ ,$$

finalmente:

$$r \left(\frac{d\eta_1}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} - \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt} \right) = 0 \ ,$$

e

$$r \left(\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{d\eta_2}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt} \right) = +4u \operatorname{sen} \vartheta \cos \varpi \ .$$

Se substituirmos esses valores nos agregados das derivadas de segunda ordem dadas anteriormente, obteremos então:

$$r \left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} \right) = -8uu' \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega \ ,$$

e

$$r \left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} \right) = -8uv \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \eta \cos \varpi - 4r \cos \vartheta \cdot \frac{du}{dt} \ .$$

Esses valores, finalmente, fornecem a *soma* das forças que atuam nas eletricidades *positiva* e *negativa* no elemento α':

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot aeu \cdot ae'u' \left(\operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega - \frac{1}{2} \cos \vartheta \cos \vartheta' \right) \ ,$$

a saber, a força eletrodinâmica atuando sobre o elemento ponderável α' é determinada para condutores móveis e intensidades variáveis de corrente, assim como para condutores em repouso e intensidades constantes de corrente, e a lei de Ampère encontra aplicação geral com relação a essas forças para posições dadas dos elementos de corrente e intensidades de corrente dadas. A aplicação dessa lei só requer que as intensidades de corrente sejam dadas *para cada instante individual*, com inclusão da porção adicionada resultando da *indução*.

A *diferença* das forças atuando sobre as eletricidades *positiva* e *negativa* no elemento α' resulta da mesma maneira dada por:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\cdot aeu\cdot ae'u'\left(\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos\varpi-\frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta\right)-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}a^2ee'\cdot\cos\vartheta\cdot\frac{du}{dt}\ ,$$

ou, já que, de acordo com a página[335] 159, $aeu=i$, e como u é variável, $ae\cdot du=di$, [resulta como:]

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos\varpi-\frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta\right)\cdot ae'v$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}ae'\cdot\cos\vartheta\cdot\frac{di}{dt}\ .$$

Agora, a força determinada dessa forma tenta separar as eletricidades *positiva* e *negativa* no elemento induzido α' na direção da linha reta r. Contudo, a separação não pode ocorrer nessa direção, mas apenas na direção do próprio elemento induzido α', que faz o ângulo ϑ' com a linha reta r estendida. Se, portanto, decompormos toda essa força nessa direção, ou seja, se multiplicarmos esse valor por $\cos\vartheta'$, obteremos então a força que de fato produz a separação, [a saber:]

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos\varpi-\frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta\right)\cdot ae'v\cos\vartheta'$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}ae'\cdot\cos\vartheta\cos\vartheta'\cdot\frac{di}{dt}\ .$$

Se esse valor for dividido por e', o resultado será então a força *eletromotriz*, com o significado usual (ver a Seção 6.24, página[336] 179), exercida pelo elemento indutor α sobre o elemento induzido α'

$$=-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos\varpi-\frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta\right)\cdot av\cos\vartheta'-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}a\cos\vartheta\cos\vartheta'\cdot\frac{di}{dt}\ .$$

Se colocarmos a mudança na intensidade de corrente

$$\frac{di}{dt}=0\ ,$$

então encontraremos mais uma vez a mesma lei que foi encontrada na Seção 6.24 para a indução de um elemento de corrente *constante* sobre o elemento *móvel* de um condutor, e então a força *eletromotriz* será

[335] [Web46, pág. 152 das *Obras* de Weber].
[336] [Web46, pág. 170 das *Obras* de Weber].

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i \left(\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\eta \cos\varpi - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta \right) \cdot av\cos\vartheta' \ ,$$

na qual os mesmos ângulos que foram denominados ϑ', ω, φ na Seção 6.24, são denominados [agora] η, ϖ e ϑ', e a velocidade que era chamada de u', é [agora] denominada v.

Por outro lado, se, no valor geral, fizermos

$$v = 0 \ ,$$

obteremos a mesma lei que foi encontrada na Seção 6.28 para a indução de um elemento de corrente *variável* atuando sobre o elemento de um condutor *em repouso*, e então a força *eletromotriz* será

$$= -\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} a\cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot \frac{di}{dt} \ .$$

A força eletromotriz de um elemento de corrente *variável* atuando sobre um elemento *móvel* de um condutor é, portanto, a soma das forças eletromotrizes que ocorreriam,

1. se o elemento do condutor *não estivesse em movimento* no instante que está sendo considerado,

2. quando o elemento do condutor estivesse de fato em movimento, mas a *intensidade de corrente* do elemento indutor no instante que estiver sendo considerado permanecesse *inalterada*.

Com isto é dada de forma completa a lei geral para determinar as ações de condutores *deslocando-se de forma arbitrária* com uma corrente fluindo por eles *de acordo com as leis galvânicas*, se for assumido que todos os movimentos elétricos em condutores lineares incluídos no nome de *correntes galvânicas*, de fato concordam precisamente com as determinações fornecidas na página 142 e na página 145.[337] Contudo, mesmo que não seja duvidado que todas as *correntes galvânicas* estejam próximas dessas determinações, ainda assim pequenos desvios podem ser corretamente esperados, dada a grande variedade de *fontes de galvanismo*. Esses desvios e suas influências sobre as *medições eletrodinâmicas* serão discutidos aqui com mais detalhes.

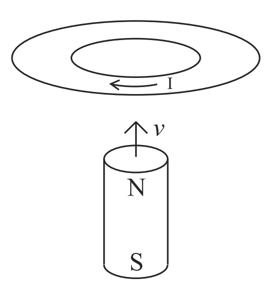
De acordo com as determinações dadas na página 142 e na página 145,[338] cada elemento de corrente deve conter a *mesma quantidade* de eletricidade positiva e negativa, e ambas devem fluir através do elemento com *a mesma velocidade*, mas em direções opostas. Caso uma corrente *constante* fosse constituída apenas de tais elementos, cujas posições respectivas permanecessem inalteradas, então eles não exerceriam mutuamente qualquer força *eletromotriz* entre si, ver a Seção 6.24, página[339] 176. As forças *eletromotrizes* que iriam sobrepujar a resistência dos elementos individuais e que desse modo, de acordo com a página[340] 143, provocariam a continuação da corrente simultaneamente em todos os elementos, teria então de existir *independentemente dos elementos de corrente*, e seria distribuída em todos os elementos de corrente proporcionalmente às suas resistências, caso a corrente tenha de continuar a existir uniformemente em todos os elementos.

[337][Web46, páginas 135 e 139 das *Obras* de Weber].
[338][Web46, páginas 135 e 139 das *Obras* de Weber].
[339][Web46, pág. 168 das *Obras* de Weber].
[340][Web46, pág. 136 das *Obras* de Weber].

Dependendo da natureza das *fontes de galvanismo* gerando as forças eletromotrizes *originais*, que são independentes da interação entre os próprios elementos de corrente, essa relação igual entre as forças e a resistência a ser vencida por elas em todos os elementos do condutor vai ocorrer algumas vezes, mas em outras vezes não [vai ocorrer]. Um exemplo do primeiro caso é um condutor homogêneo na forma de um anel no qual uma corrente galvânica é induzida pelo movimento de um ímã ao longo da direção normal ao plano do círculo e passando através do centro do círculo.[341] Nesse caso seria obtida uma força *eletromotriz* atuando uniformemente em todos os elementos do círculo por meio da *indução magnética*, e como a *resistência* também é a mesma para todos os elementos, as condições ficam satisfeitas dessa forma para que haja a presença uniforme da corrente em todos os segmentos. Contudo, dada a natureza das coisas, tal caso ocorre raramente; como regra, não vai ocorrer uma relação igual entre as forças eletromotrizes *originais* e a *resistência* em todos os elementos, logo as desigualdades têm de ser equalizadas por meio da *interação* entre os elementos. Agora, se tal interação dos elementos de uma corrente constante, uma interação consistindo em forças eletromotrizes, não é para ser excluída, então a definição de correntes galvânicas precisa ser ampliada.

Deve ser entendido por uma *corrente galvânica*, em oposição aos outros movimentos elétricos que não estão contidos nesse nome, um movimento da eletricidade em um condutor fechado, tal que as mesmas quantidades de eletricidade positiva e negativa fluam através de todas as suas seções retas simultaneamente em direções opostas. Essa igualdade das eletricidades positiva e negativa *atravessando* [as seções retas do condutor] não pressupõe necessariamente a igualdade das massas *móveis* positiva e negativa que foi assumida anteriormente, mas em vez disso, pode existir mesmo quando essas massas possuem valores diferentes, desde que a massa *maior* desloque-se *mais lentamente*, enquanto que a massa *menor* desloca-se *mais rapidamente*.[342] Em uma corrente galvânica desse último tipo, surgem *novas* forças eletromotrizes a partir da interação entre os elementos, sendo que por meio dessas forças a relação desigual das forças eletromotrizes *originais* pode ser equalizada. Pois tão logo a quantidade *positiva* de eletricidade em um elemento seja diferente da [quantidade] *negativa*, a saber, tão logo o elemento, devido a um excesso de uma eletricidade, fique carregado com *eletricidade livre*, essa própria *eletricidade livre*, *de acordo com as leis da excitação da eletricidade por meio da separação*, torna-se uma fonte de forças *eletromotrizes* para todos os outros elementos, nos quais, através do aumento dessa carga, [as forças eletromotrizes] podem ser aumentadas de tal forma que, adicionadas às forças eletromotrizes *originais*, elas tornam-se proporcionais à resistência em todos os elementos, sendo que para isso, nos circuitos galvânicos com os quais estamos familiarizados, é suficiente um valor muito pequeno

[341] Essa situação está ilustrada na Figura dessa Nota de rodapé:



[342] As massas maiores e menores a que Weber se refere aqui devem ser entendidas como quantidades maiores ou menores de carga.

da carga elétrica.

A investigação de como essa carga nos elementos individuais em um circuito galvânico fechado *surge* espontaneamente em virtude da desigualdade inicial da corrente nas diferentes partes do circuito, e aumenta até que seja satisfeita a condição dada de uma corrente uniforme em todas as partes do circuito, leva à *mecânica interna do circuito galvânico* e está fora do escopo desse Tratado,[343] já que para chegar a isso precisam ser levadas em conta a ação de massas elétricas sobre massas *adjacentes*. Independentemente da investigação da geração dessas cargas, e as leis resultantes de sua intensidade e distribuição, iremos aqui discutir apenas a influência que elas possuem, *quando estão presentes*, nas medições eletrodinâmicas. A discussão dessa influência é importante nessa conexão, já que a presença de tais cargas é para ser considerada uma regra que possui apenas exceções raras. Embora essa influência possa ser tão pequena que, mesmo sem levá-la em consideração, os cálculos estejam de acordo com a experiência na maioria dos casos, ainda assim pode ser útil saber no que consiste essa influência e como ela pode tornar-se considerável.

Sob as condições estabelecidas na página[344] 203, pense na massa *positiva* $+\alpha e$ no elemento α como tendo aumentado de $m\alpha e$, onde m denota uma pequena fração, enquanto que ao mesmo tempo a velocidade $+u$ dessa massa é considerada como tendo diminuído pelo pequeno valor $+mu$; da mesma forma pense na massa *positiva*[345] $+\alpha' e'$ como tendo aumentado de $n\alpha' e'$, e sua velocidade $+u'$ como tendo diminuído de nu'. Devem ser determinadas as forças atuando nas duas massas elétricas no elemento α' que surgem através dessas mudanças.

As duas forças que a massa *positiva* $+\alpha e$ no elemento α exercia sobre as massas *positiva* e *negativa* $+\alpha' e'$ e $-\alpha' e'$ no elemento α', eram

$$+\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\frac{dr_1^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8} r \frac{d^2 r_1}{dt^2}\right) ,$$

e

$$-\frac{\alpha e \cdot \alpha' e'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\frac{dr_3^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8} r \frac{d^2 r_3}{dt^2}\right) ,$$

nas quais, de acordo com a página[346] 204, vamos fazer

$$\frac{dr_1}{dt} = -u\cos\vartheta + u'\cos\vartheta' + v\cos\eta ,$$

e

$$\frac{dr_3}{dt} = -u\cos\vartheta - u'\cos\vartheta' + v\cos\eta ,$$

e, de acordo com as páginas 205 e 207:[347]

$$r\frac{d^2 r_1}{dt^2} = +u^2 \operatorname{sen}^2\vartheta + u'^2 \operatorname{sen}^2\vartheta' + v^2 \operatorname{sen}^2\eta$$

[343] Mas esse assunto será tratado na Segunda Memória de Weber traduzida no Capítulo 15.

[344] [Web46, pág. 196 das *Obras* de Weber].

[345] Devido a um erro de impressão no texto alemão original, a próxima expressão matemática apareceu como $+\alpha' e$, em vez de $+\alpha' e'$.

[346] [Web46, pág. 198 das *Obras* de Weber].

[347] [Web46, páginas 198 e 200 das *Obras* de Weber].

$$-\ 2\left(uu'\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega+uv\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos\varpi-u'v\operatorname{sen}\vartheta'\operatorname{sen}\eta\cos(\omega+\varpi)\right)\ ,$$

e

$$-\ r\left(\cos\vartheta\frac{du}{dt}-\cos\vartheta'\frac{du'}{dt}-\cos\eta\frac{dv}{dt}\right)$$

$$r\frac{d^2r_3}{dt^2}=+u^2\operatorname{sen}^2\vartheta+u'^2\operatorname{sen}^2\vartheta'+v^2\operatorname{sen}^2\eta$$

$$+\ 2\left(uu'\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega-uv\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos\varpi-u'v\operatorname{sen}\vartheta'\operatorname{sen}\eta\cos(\omega+\varpi)\right)$$

$$-\ r\left(\cos\vartheta\frac{du}{dt}+\cos\vartheta'\frac{du'}{dt}-\cos\eta\frac{dv}{dt}\right)\ .$$

A *diferença* entre essas duas forças, da qual depende a força *eletromotriz*, pode ser feita

$$=2\frac{\alpha e\cdot\alpha'e'}{r^2}\ ,$$

já que os termos remanescentes são muito pequenos em comparação com esse primeiro termo. Agora, se $(1+m)e$ for substiuído no lugar de e e multiplicado por $\cos\vartheta'/e'$, e se for subtraído o valor original multiplicado por $\cos\vartheta'/e'$, obteremos, de acordo com as páginas 179 e 209,[348] a força *eletromotriz* que surge devido à eletrização do elemento α com eletricidade livre e que atua no elemento α'

$$=2m\frac{\alpha\alpha'}{r^2}e\cos\vartheta'\ .$$

A eletrização do próprio elemento α', que sofre a ação, não altera a força eletromotriz; pois se, nessa diferença, $(1+n)e'$ for substituído no lugar de e' e multiplicado por $\cos\vartheta'/(1+n)e'$, e se for subtraído o valor original multiplicado por $\cos\vartheta'/e'$, não vai sobrar nada.

A *soma* dessas duas forças, da qual depende a força *eletrodinâmica* atuando sobre o portador ponderável, é obtida pela substituição dos valores a que chegamos

$$=-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\cdot ae\cdot ae'\left[uu'\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega-u'v\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos(\omega+\varpi)\right.$$
$$\left.-\ \frac{1}{2}uu'\cos\vartheta\cos\vartheta'+\frac{1}{2}u'v\cos\vartheta'\cos\eta-\frac{1}{4}r\cos\vartheta'\cdot\frac{du}{dt}\right]\ .$$

A partir dessa expressão é obtido:

1. a parte que surge do aumento na massa $+\alpha e$, da força com a qual os elementos α e α' se repelem, quando $(1+m)e$ é substituído no lugar de e, e é subtraído o valor original,

$$=-\frac{m}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r^2}\cdot ae\cdot ae'\left[uu'\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega-u'v\operatorname{sen}\vartheta'\operatorname{sen}\eta\cos(\omega+\varpi)\right.$$

$$\left.-\ \frac{1}{2}uu'\cos\vartheta\cos\vartheta'+u'v\cos\vartheta'\cos\eta-\frac{1}{4}r\cos\vartheta'\frac{du}{dt}\right]\ ;$$

[348][Web46, páginas 170 e 202 das *Obras* de Weber].

2. a parte da força que surge da diminuição na velocidade $+u$, quando $(1-m)u$ é substituído no lugar de u, e quando é subtraído o valor original,

$$= +\frac{m}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot ae \cdot ae' \left[uu' \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega - \frac{1}{2} uu' \cos \vartheta \cos \vartheta' \right] \ ;$$

3. a parte da força que surge do aumento na massa $+\alpha' e'$, quando $(1+n)e'$ é substituído no lugar de e', e quando é subtraído o valor original,

$$= -\frac{n}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot ae \cdot ae' \left[uu' \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega - u'v \operatorname{sen} \vartheta' \operatorname{sen} \eta \cos(\omega + \varpi) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} uu' \cos \vartheta \cos \vartheta' + \frac{1}{2} u'v \cos \vartheta' \cos \eta - \frac{1}{4} r \cos \vartheta' \frac{du'}{dt} \right] \ ;$$

4. a parte da força que surge da diminuição na velocidade $+u'$, quando $(1-n)u'$ é substituído no lugar de u', e quando é subtraído o valor original,

$$= +\frac{n}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot ae \cdot ae' \left[uu' \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega - u'v \operatorname{sen} \vartheta' \operatorname{sen} \eta' \cos(\omega + \varpi) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} uu' \cos \vartheta \cos \vartheta' + \frac{1}{2} u'v \cos \vartheta' \cos \eta \right] \ .$$

Se são combinadas todas essas partes que surgem, obteremos a influência que a eletrização dos elementos α e α' com eletricidade livre *positiva* (caso m e n tenha valores positivos) ou *negativa* (caso m e n tenham valores negativos) tem sobre a força repulsiva *eletrodinâmica* exercida entre α e α'; mais precisamente, ela será o aumento resultante nessa força repulsiva, quando fizermos $aev = \chi$, $ae'u' = i'$ e $ae'du' = di'$,

$$= + \ \frac{m}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r^2} \chi i' \left(\operatorname{sen} \vartheta' \operatorname{sen} \eta \cos(\omega + \varpi) - \frac{1}{2} \cos \vartheta' \cos \eta \right) + \ \frac{m+n}{8}\frac{\alpha\alpha'}{r} ae \cos \vartheta' \cdot \frac{di'}{dt} \ .$$

Portanto, essa influência desaparece completamente quando é considerada a ação de um elemento de corrente *constante em repouso*, para o qual $v = 0$ e $di' = 0$. Além disso, essa influência também desaparece em um elemento de corrente *constante em movimento* α', quando o elemento α atuando sobre ele não possui eletricidade livre, já que nesse caso $m = 0$ e $di' = 0$. Finalmente, se a eletricidade livre estiver presente no elemento α, vai existir aquela influência em uma força que é igual à força que seria exercida sobre o elemento de corrente α' por um outro elemento de corrente que se encontre no lugar de α, quando as massas contidas nele, $+\frac{1}{2}m\alpha e$ e $-\frac{1}{2}m\alpha e$, fluíssem com velocidades $-v$ e $+v$ na direção com a qual o elemento de corrente α' é deslocado com velocidade $+v$. A necessidade dessa influência também pode ser examinada a partir do ponto de vista de Fechner na Seção 6.16, página[349]

[349][Web46, pág. 179 das *Obras* de Weber].

187. Finalmente, para o caso no qual ocorre uma mudança na intensidade de corrente i' no elemento de corrente α', sobre o qual a ação é exercida, deve ser adicionado ao que foi obtido anteriormente uma influência proporcional a essa mudança di', e [proporcional] à soma das eletricidades livres presentes nos dois elementos α e α', que determinam o último termo na fórmula.

6.31 Sobre a Influência da Mudança de Velocidade e Direção da Eletricidade que se Move em uma Corrente

No método para determinar a corrente galvânica dado na Seção 6.19, no qual é baseada a lei descrevendo duas massas elétricas atuando entre si à distância, no lugar da corrente *real*, na qual a velocidade da eletricidade móvel, em sua passagem de uma partícula ponderável para a outra, provavelmente flutua em uma *alteração contínua*, assume-se uma corrente *ideal* com velocidade *uniforme*. Essa substituição foi necessária para simplificar o tratamento, e parece que ela pode ser permitida já que é simplesmente uma questão de ação *à distância*. Falta agora provar essa suposição inicial na lei elétrica.

Vamos supor duas massas elétricas, e e e', que no final do tempo t encontram-se a uma distância mútua r. Vamos assumir que a velocidade relativa entre elas até esse instante seja uma constante $= \gamma$. A força repulsiva entre as duas massas no último instante do período de tempo t dado seria, de acordo com a lei elétrica fundamental:

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2\right) .$$

No próximo elemento de tempo ε ocorre uma aceleração

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \alpha ,$$

por meio da qual a força repulsiva durante a duração desse período de tempo será

$$= \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2\right) + \frac{a^2}{8} \cdot \frac{ee'}{r}\alpha .$$

Multiplicamos agora o aumento da força que ocorreu entre o instante anterior e o atual pelo próprio elemento de tempo ε. Obtemos assim a quantidade pela qual aumentou a ação repulsiva por essa aceleração ao longo da trajetória dr pela qual as próprias massas e e e' se distanciaram no tempo ε,

$$= \frac{a^2}{8} \cdot \frac{ee'}{r} \cdot \alpha\varepsilon .$$

A velocidade relativa das duas massas, que antes do elemento de tempo ε era $= \gamma$, é então, após esse elemento de tempo,

$$= \gamma + \alpha\varepsilon .$$

Se essa [velocidade relativa] permanecer inalterada, então a força repulsiva entre as duas massas, quando elas chegarem à distância [mútua] ρ,

$$= \frac{ee'}{\rho^2}\left(1 + \frac{a^2}{16}(\gamma + \alpha\varepsilon)^2\right) \ ,$$

que, quando $\alpha\varepsilon$ for muito pequena em comparação com γ, torna-se

$$= \frac{ee'}{\rho^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2 - \frac{a^2}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right) \ .$$

Multiplicando essa expressão pelo tempo

$$\frac{d\rho}{\gamma + \alpha\varepsilon}$$

durante o qual as duas massas se distanciaram pelo elemento linear $d\rho$, e integrando entre os limites $\rho = r$ até $\rho = r_1$, obtemos a ação repulsiva entre as duas massas ao longo da distância $r_1 - r$ como

$$= \frac{ee'}{\gamma + \alpha\varepsilon}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2 - \frac{a^2}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) \ .$$

Finalmente, no instante no qual as duas massas estão na distância [mútua] r_1, ocorre uma desaceleração

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\alpha \ ,$$

que, da mesma forma que a aceleração anterior, durou apenas durante o elemento de tempo ε, de tal forma que agora a velocidade relativa das duas massas retorna novamente para seu valor original

$$= \gamma \ ,$$

e durante a trajetória percorrida no elemento de tempo ε ocorre uma diminuição na ação repulsiva

$$= -\frac{a^2}{8} \cdot \frac{ee'}{r_1} \cdot \alpha\varepsilon \ .$$

Obtemos então como a soma da ação repulsiva ao longo de toda a trajetória $r_1 - r$, incluindo os dois elementos de tempo ε, nos quais ocorreram a aceleração e a desaceleração,

$$= +\frac{a^2}{8}\frac{ee'}{r}\alpha\varepsilon + \frac{ee'}{\gamma + \alpha\varepsilon}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2 - \frac{a^2}{8}\alpha\gamma\varepsilon\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) - \frac{a^2}{8} \cdot \frac{ee'}{r_1}\alpha\varepsilon \ ,$$

ou, quando $\alpha\varepsilon$ é muito pequena em comparação com γ,

$$= \frac{ee'}{\gamma + \alpha\varepsilon}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) \ .$$

Contudo, o tempo para o qual vale essa soma, é

$$= \frac{r_1 - r}{\gamma + \alpha\varepsilon} \ .$$

Se dividirmos a soma por esse tempo, será obtida a força repulsiva média durante esse tempo:

$$= \frac{ee'}{rr_1}\left(1 - \frac{a^2}{16}\gamma^2\right) ,$$

isto é, o mesmo valor que teria ocorrido se a trajetória $r_1 - r$ tivesse sido percorrida na velocidade [relativa] original γ. Segue-se assim que se a velocidade relativa das duas massas elétricas, chegando sucessivamente em duas distâncias de separação diferentes, for a mesma, [então] a força repulsiva média entre elas ao longo desse intervalo de tempo será a mesma que a força repulsiva média que elas teriam tido, caso tivessem viajado com a velocidade relativa inicial desde a primeira distância mútua até a última.

Esse teorema pode agora ser aplicado para provar a suposição anterior. Afinal de contas, quando uma partícula de eletricidade desloca-se em uma corrente galvânica de uma molécula ponderável para outra, ela chegará em lugares tanto antes quanto após a molécula, nos quais sua velocidade é a mesma que a velocidade de uma outra partícula elétrica deslocando-se em uma outra corrente. A força repulsiva média entre as duas partículas durante a transição da primeira partícula de uma posição para a outra, é então a mesma como se ambas as partículas tivessem passado pelo espaço em sua velocidade relativa inicial uniformemente, isto é, como se nenhuma mudança na velocidade da eletricidade fluindo tivesse ocorrido durante a transição de uma molécula do condutor ponderável para a outra.

Além da mudança na velocidade das partículas elétricas enquanto elas se deslocam de uma molécula do condutor ponderável para a próxima, também temos de considerar as mudanças na direção pela qual as partículas que estão se aproximando se evitam. Vemos facilmente que dentro de distâncias mensuráveis do elemento de corrente que está sendo considerado, não ocorrem variações significativas nas distâncias e, de acordo com isso, só restam variações periódicas na velocidade relativa produzidas por essas mudanças de direção, sendo que essas variações já foram incluídas anteriormente.

Fica claro então que no lugar de uma corrente na qual a velocidade e a direção da eletricidade que está fluindo estejam sujeitas a uma mudança periódica, podemos substituir com razão em seu lugar uma corrente *uniforme*, como foi feito na Seção 6.19.

Também é permitido que, no lugar de um elemento de corrente reto, seja colocado um elemento curvado, desde que os pontos iniciais e finais permaneçam inalterados, e que não seja permitida uma diferença perceptível da linha reta que os une. Finalmente, como acontece na Seção 6.29, no lugar de um elemento, podem ser considerados três elementos, que se comportam com relação ao primeiro elemento como as arestas de um paralelepípedo em relação à sua diagonal.

6.32 Formulações Diferentes da Lei Fundamental Geral da Ação Elétrica

A lei elétrica fundamental encontrada pode ser expressa de formas diferentes que serão ilustradas por alguns exemplos.

1) Como a distância r é sempre uma grandeza positiva, ela pode ser escrita como ρ^2. Isso fornece[350]

[350]As próximas equações devem ser entendidas como:

$$dr = 2\rho d\rho , \qquad d^2r = 2\rho d^2\rho + 2(d\rho)^2 .$$

$$dr = 2\rho d\rho \ , \qquad\qquad d^2r = 2\rho d^2\rho + 2d\rho^2 \ ,$$

portanto[351]

$$r = \rho^2 \ , \qquad\qquad \frac{dr^2}{dt^2} = 4\rho^2\frac{d\rho^2}{dt^2} \ , \qquad\qquad \frac{d^2r}{dt^2} = 2\rho\frac{d^2\rho}{dt^2} + 2\frac{d\rho^2}{dt^2} \ .$$

Se esses valores forem substituídos na fórmula $\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right)$, será obtida a seguinte fórmula *mais curta*:

$$\frac{ee'}{\rho^4}\left(1 + \frac{a^2}{4}\rho^3\frac{d^2\rho}{dt^2}\right) \ .$$

2) Por *velocidade relativa reduzida* das massas e e e' deve ser entendida aquela velocidade relativa que essas massas (que ao final do tempo t têm a distância r, a velocidade relativa dr/dt, e a aceleração relativa d^2r/dt^2) possuiriam, *se essa última fosse constante*, no instante $(t-\vartheta)$, no qual as duas [massas], de acordo com essa premissa, se encontrariam em um ponto. Se v denotar essa *velocidade relativa reduzida*, então de acordo com a lei bem conhecida da *aceleração uniforme*:

$$\frac{dr}{dt} - v = \frac{d^2r}{dt^2} \cdot \vartheta \ ,$$

e

$$r = v\vartheta + \frac{1}{2}\frac{d^2r}{dt^2} \cdot \vartheta^2 \ .$$

Ao eliminar ϑ, essas duas equações fornecem:

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt^2} - r\frac{d^2r}{dt^2} \ .$$

Se esses valores forem substituídos na fórmula $\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right)$, será obtida a seguinte fórmula *mais curta*:

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{a^2}{16}v^2\right) \ ,$$

que pode ser expressa verbalmente da seguinte maneira:

> *A diminuição, causada por esse movimento, na força com a qual duas massas elétricas exerceriam entre si, se elas não estivessem em movimento, é proporcional ao quadrado da velocidade relativa reduzida entre elas.*

[351] Essas equações devem ser entendidas como:

$$r = \rho^2 \ , \qquad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 4\rho^2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \ , \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = 2\rho\frac{d^2\rho}{dt^2} + 2\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \ .$$

3) Se $\frac{ee'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right)$ for a *força absoluta* com a qual a massa e atua na massa e' e a repele, e, por seu lado, e' atua na [massa] e e a repele, então segue disso a *força acelerativa* para a massa e[352]

$$=\frac{e'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right) \ ,$$

para a massa e',

$$=\frac{e}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right) \ .$$

Resulta então a seguinte *aceleração relativa* entre as duas massas:

$$=\frac{e+e'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right) \ .$$

Se for adicionada a isso aquela *aceleração relativa* que resulta para as mesmas massas, parcialmente devido à persistência do movimento entre elas em suas trajetórias atuais, parcialmente da influência de outros corpos, que seriam denominadas conjuntamente como f, então será obtida a seguinte equação para a *aceleração relativa total*, isto é, para d^2r/dt^2:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{e+e'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right)+f \ .$$

Com a ajuda dessa equação, a derivada d^2r/dt^2 pode ser determinada e seu valor colocado na fórmula $\frac{ee'}{r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right)$, que torna-se então a seguinte expressão representando a força com a qual duas massas elétricas atuam entre si, independente da *aceleração relativa* entre elas:[353]

---

[352]O que Weber chama aqui de força acelerativa para a massa e (em alemão: *beschleunigende Kraft für die Masse* e) é a aceleração da partícula com carga e em relação a um sistema de referência inercial quando supomos um sistema de unidades para o qual a massa inercial dessa partícula é igual a e. Na sua Sexta Memória principal publicada em 1871, [Web71], que já está traduzida para o inglês (W. Weber, *Philosophical Magazine*, Vol. 42, págs. 1-20 e 119-149 (1872), *Electrodynamic measurements — Sixth Memoir, relating specially to the principle of the conservation of energy*), [Web72], ver também [Web21d], Weber generalizou esse resultado considerando as massas inerciais das partículas com cargas e e e' como sendo dadas por, respectivamente, ε e ε'. Nesse caso ele estava considerando um sistema de unidades para o qual a unidade de massa é um miligrama; ver especialmente [Web71, págs. 2-3] e [Web21d, pág. 69]. Nesse caso a aceleração da partícula com massa e seria dada por, de acordo com a segunda lei do movimento de Newton:

$$a=\frac{ee'}{\varepsilon r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right) \ .$$

Pelo mesmo raciocínio a aceleração a' da partícula de carga e' seria dada por:

$$a'=\frac{ee'}{\varepsilon' r^2}\left(1-\frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{a^2}{8}r\frac{d^2r}{dt^2}\right) \ .$$

[353]No artigo de 1871 citado na Nota de rodapé 352, essa expressão assumiu a seguinte forma mais geral, ver [Web72, págs. 3, 4 e 147] e [Web21d, págs. 69 e 109-110]:

$$\frac{ee'}{rr-\frac{2r}{cc}\cdot\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}ee'}\cdot\left(1-\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2rf}{cc}\right) \ .$$

Nessa equação e e e' são as cargas das partículas com massas inerciais ε e ε', sendo que Weber ainda

$$\frac{ee'}{r^2 - \frac{a^2}{8}(e+e')r} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{16}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8}rf\right) \ .$$

De acordo com isso, essa força depende do valor das massas, da distância entre elas, da velocidade relativa entre elas e, finalmente, daquela aceleração relativa f, que pertence a elas parcialmente como um resultado da persistência do movimento já existente delas e parcialmente como um resultado de forças atuando nelas [sendo exercidas] por *outros corpos*.

Parece seguir disso, que a *interação direta entre duas massas elétricas* não dependeria apenas dessas próprias massas e das relações entre elas, mas também dependeria da presença de *terceiros* corpos. Agora, é bem conhecido que Berzelius[354] já supôs a possibilidade da *interação direta entre dois corpos depender da presença de um terceiro [corpo]*, e deu o nome de *catalíticas* às forças resultando dessa suposição. Se utilizarmos esse nome, então pode ser dito daqui por diante que os *fenômenos elétricos* também se originam parcialmente de *forças catalíticas*.

Contudo, essa demonstração de forças *catalíticas* para a *eletricidade* não é uma inferência *rigorosa* da lei elétrica fundamental encontrada. Isso só seria assim se tivéssemos que necessariamente combinar com essa lei fundamental a *ideia* de que ela só determina as forças que as massas elétricas exercem *diretamente* umas sobre as outras à distância. Contudo, é possível *conceber* que as forças incluídas na lei fundamental encontrada também são o tipo de forças que duas massas elétricas exercem *indiretamente* entre si e que, portanto, têm de depender, *em primeiro lugar* do *meio intermediário*[355] e, *além disso*, [têm de depender] de todos os *corpos, que atuam nesse meio*. Pode ocorrer facilmente que tais forças exercidas *indiretamente*, quando o meio intermediário escapa à nossa observação, *pareçam ser forças catalíticas*, embora elas não o sejam. Para poder falar de forças *catalíticas* nesses casos, o conceito de força *catalítica* teria de ser modificado fundamentalmente. Isto é, por força catalítica teríamos de entender o tipo de força exercida *indiretamente*, o que pode ser determinado por uma *regra geral*, por meio de um conhecimento positivo dos corpos a cuja influência o meio *intermediário* está sujeito, sem conhecer, contudo, esse *próprio meio*. A lei elétrica fundamental encontrada fornece uma regra geral para determinar as forças *catalíticas* nesse sentido.

Contudo, uma outra questão ainda não decidida é saber se o conhecimento do meio *intermediário*, mesmo se ele não for necessário para a determinação das forças, ainda assim seria *útil*. Isto é, a regra geral para a determinação das forças talvez pudesse ser expressa ainda mais *simplesmente*, quando fosse levado em consideração o meio intermediário, do que era possível de outra maneira na *lei elétrica fundamental apresentada aqui*. Contudo, para decidir essa questão, é necessária a própria *investigação do meio intermediário*, o que talvez pudesse elucidar muitas outras coisas também.

A *ideia da existência* de tal meio intermediário já é encontrada na *ideia do fluido elétrico*

---

substituiu $4/a$ por c. Essa constante c havia sido medida por Weber e Kohlrausch entre 1854 e 1856, que encontraram seu valor como sendo dado por $439\,450 \times 10^6$ mm/s. Isto é, seu valor é essencialmente $\sqrt{2}$ vezes a velocidade da luz no vácuo. Essa constante c de Weber não deve ser confundida com a constante c que aparece nos livros didáticos atuais que é igual à velocidade da luz no vácuo. Weber e Kohlrausch publicaram três trabalhos principais relacionados com essa medição: [Web55] com tradução para o inglês em [Web21e]; [WK56] com tradução para o português em [WK08] e para o inglês em [WK03] e [WK21]; e [KW57] com tradução para o inglês em [KW21]. Ver ainda [Ass21c].

[354] Jöns Jacob Berzelius (1779-1848). Ver [Ber36c], [Ber36a] e [Ber36b].

[355] Em alemão: *vermittelnden Medium*. Essa expressão pode ser traduzida como meio intermediário, meio mediador ou meio transmissor.

neutro difundido em todos os lugares, e mesmo se esse *fluido neutro*, sem considerar os condutores, tenha até o momento escapado das observações dos físicos, contudo há agora esperança de que podemos ser bem sucedidos em ganhar uma elucidação mais direta, de várias formas novas, desse fluido difundido por toda parte. Talvez em outros corpos, com exceção dos condutores, não ocorram correntes [elétricas], mas apenas *vibrações*, que só poderão ser observadas com mais precisão no futuro, usando os métodos discutidos na Seção 6.16. Além disso, preciso apenas lembrar da última descoberta de Faraday sobre a influência *das correntes elétricas sobre as vibrações da luz*,[356] o que não torna improvável que o meio elétrico neutro difundido em todos os lugares seja o próprio éter que está em toda parte, que cria e propaga as vibrações luminosas,[357] ou que ao menos os dois [meios] estejam interconectados tão intimamente, que as observações das vibrações da luz possam ser capazes de explicar o comportamento do meio elétrico neutro.

Ampère já chamou a atenção para a possibilidade de uma ação *indireta* das massas elétricas entre si, como citado na Introdução na página[358,359] 42,

> em que se atribuem os *fenômenos eletrodinâmicos* aos *movimentos causados no éter* pelas correntes elétricas.

Contudo, o próprio Ampère afirmou que o exame dessa possibilidade seria uma investigação extraordinariamente difícil que ele não teria tempo de realizar.

Se, além disso, aparecerem novos dados empíricos, tais como, por exemplo, aqueles que talvez vão surgir do aprofundamento das experiências realizadas de acordo com a Seção 6.16 sobre *vibrações elétricas*, e da descoberta de Faraday, que sejam particularmente apropriados para a eliminação gradual das dificuldades que não foram vencidas por Ampère, então a lei elétrica fundamental na forma dada aqui, independente do meio intermediário, poderá fornecer uma base que não será insignificante para expressar essa lei em outra forma, dependente do meio intermediário.

[356] [Far46a].

[357] Mais tarde Maxwell apresentou ideias semelhantes às de Weber ao apresentar sua teoria eletromagnética da luz no Capítulo XX de seu livro *Tratado de Eletricidade e Magnetismo* publicado em 1873, [Max73b] e [Max54b].

[358] [Web46, pág. 30 das *Obras* de Weber].

[359] Ver [Amp23, pág. 301], [Amp26, pág. 129], [AC11, pág. 468] e [AC15, pág. 425].

Capítulo 7

Introdução ao Resumo da Primeira Memória de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas

A. K. T. Assis[360]

Apresento aqui a tradução do resumo da Primeira grande Memória de Weber sobre *Medições Eletrodinâmicas*. Esse resumo foi publicado originalmente em 1848.[361] Sua tradução para o inglês foi publicada entre 1852 e 2021.[362] O título desse artigo em alemão tem o mesmo nome que o título da Primeira Memória de Weber de 1846, a saber, *Elektrodynamische Maassbestimmungen*.[363] Para evitar uma confusão entre esses dois trabalhos que apresentam diferenças entre si, vou usar em português o título que foi dado para a tradução desse trabalho em inglês e que foi publicado durante a vida de Weber, a saber, *Sobre a Medição das Forças Eletrodinâmicas*.[364]

A grande importância desse resumo de 1848 é que Weber apresentou aqui pela primeira vez uma energia potencial dependente da velocidade a partir da qual podia deduzir sua lei de força que havia introduzido em 1846.

[360] Homepage: `www.ifi.unicamp.br/~assis`

[361] [Web48a].

[362] [Web52c], [Web66d], [Web19] e [Web21l].

[363] [Web46] e [Web48a]. A Primeira Memória de Weber está traduzida no Capítulo 6.

[364] [Web52c].

Capítulo 8

[Weber, 1848a] Sobre a Medição das Forças Eletrodinâmicas

Wilhelm Weber[365,366]

Um quarto de século se passou desde que Ampère lançou as bases da eletrodinâmica,[367] uma ciência que apresenta a verdadeira conexão entre as leis do magnetismo e do eletromagnetismo e que as reduz a um princípio fundamental, assim como foi efetuado com as leis de Kepler pela teoria da gravitação de Newton.[368] Mas se compararmos o desenvolvimento adicional que teve a eletrodinâmica com o desenvolvimento da teoria da gravitação de Newton, encontraremos uma grande diferença na fertilidade desses dois princípios fundamentais. A teoria da gravitação de Newton tornou-se a fonte de inúmeras pesquisas novas em astronomia, sendo que através desses resultados foi eliminada toda a dúvida e obscuridade relacionada ao maior princípio da ciência. A eletrodinâmica de Ampère não levou a qualquer resultado desse tipo; em vez disso pode ser considerado que todos os avanços que desde então ocorreram de fato foram feitos independentemente da teoria de Ampère, como, por exemplo, a descoberta da indução e de suas leis por Faraday. Se o princípio fundamental da eletrodinâmica for, como a lei da gravitação, uma lei verdadeira da natureza, poderíamos supor que ele teria se mostrado útil como um guia para a descoberta e investigação de diferentes classes de fenômenos naturais que são dependentes dele ou que estão conectados com ele; contudo, se esse princípio não for uma lei da natureza, deveríamos esperar que, considerando o grande interesse e as diversas atividades que esse ramo específico da filosofia natural experienciou nos últimos vinte e cinco anos, ele já teria sido refutado há muito tempo. O motivo pelo qual não aconteceu uma coisa nem outra, depende do fato de que no desenvolvimento da eletrodinâmica não aconteceu uma combinação da observação com a teoria assim como houve na teoria geral da gravitação. Ampère, mais teórico do que experimentador, aplicou brilhantemente os menores resultados experimentais ao seu sistema, e deu-lhe um desenvolvimento tão refinado que o estado bruto de observações a que se referia originalmente

[365][Web48a] com traduções para o inglês em [Web52c], [Web66d], [Web19] e [Web21l].

[366]As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o editor do Volume 3 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:], todas as outras Notas são de minha autoria.

[367]Ver a Nota de rodapé 10 na página 19.

[368]Johannes Kepler (1571-1630) e Isaac Newton (1642-1727). Ver a Nota de rodapé 61 na página 35. Ver também o livro de Koestler para uma bela descrição de vida e obra de Kepler, [Koe89].

não parecia mais corresponder às condições da teoria desenvolvida. A eletrodinâmica, seja para sua comprovação e extensão mais segura, ou para sua refutação, necessita que sejamos capazes de examinar cuidadosamente os pontos especiais em questão, de tal forma a fornecer um órgão apropriado para o que poderia ser chamado de espírito da teoria nas observações, sem o desenvolvimento do qual nenhum desdobramento de seus poderes é possível.

As experiências apresentadas a seguir mostrarão que um método mais elaborado de fazer observações eletrodinâmicas é importante e significativo não apenas para a prova do princípio fundamental da eletrodinâmica, mas também porque ele torna-se a fonte de novas observações que não poderiam ser feitas de outra maneira.

8.1 Descrição do Instrumento

O instrumento a ser descrito é adaptado para observações e medições delicadas das forças eletrodinâmicas; e sua superioridade em relação àqueles instrumentos propostos anteriormente por Ampère depende essencialmente do seguinte arranjo.

Os dois condutores galvânicos cuja ação recíproca é para ser observada consistem em dois finos fios de cobre cobertos com seda que, como multiplicadores,[369] são enrolados na parte externa das cavidades de duas estruturas cilíndricas. Uma dessas duas bobinas envolve um espaço que tem tamanho suficiente para permitir que a outra bobina seja colocada dentro dele e tenha liberdade de movimento.

Quando uma corrente galvânica atravessa os fios das duas bobinas, uma delas exerce uma ação rotatória sobre a outra, sendo que essa ação tem sua maior intensidade quando os centros das duas bobinas coincidem, e quando são ortogonais entre si os dois planos em relação aos quais são paralelos os enrolamentos das duas bobinas. O diâmetro comum das duas bobinas é o eixo de rotação. Essa posição respectiva das duas bobinas constitui a posição normal que elas assumem no instrumento. Portanto, também o diâmetro comum das duas bobinas, ou o eixo de rotação delas, possui uma posição vertical de tal forma que a rotação possa ser executada em um plano horizontal.

Aquela bobina que é para ser girada tem de ser colocada em conexão com dois condutores imóveis para permitir a entrada e saída da corrente [elétrica]; e a principal tarefa do instrumento é a de realizar essas combinações de tal maneira que a rotação da bobina não sofra a mínima interferência mesmo quando o impulso é o menor possível, como ocorre quando essas conexões ocorrem por meio de duas pontas que terminam os condutores imóveis, que mergulham em duas taças metálicas preenchidas com mercúrio, assim como no arranjo de Ampère. Em vez dessas conexões, que devido ao atrito inevitável não permitem a rotação livre da bobina, no arranjo atual são usados dois fios de conexão longos e finos, que são presos em suas extremidades superiores a dois ganchos metálicos fixos, nos quais terminam os dois condutores imóveis, e [que são presos] em suas extremidades inferiores à estrutura da bobina, sendo lá unidos firmemente às extremidades dos fios da bobina. A bobina fica dependurada livremente por esses dois fios de conexão, e cada fio suporta metade do peso da bobina, sendo que por meio desse arranjo os fios ficam igualmente tensos.

Esses dois fios de conexão efetuam assim a passagem da corrente galvânica por um dos condutores imóveis para a bobina, e o retorno [da corrente] pelo outro condutor imóvel; e eles realizam isso sem que o menor atrito interfira com a rotação da bobina.

[369] Ver a Nota de rodapé 96 na página 47.

Esses fios de conexão também são úteis já que cada rotação da bobina de um certo ângulo corresponde a um torque de rotação definido,[370] que tende a diminuir o ângulo, e é proporcional ao seno do ângulo de rotação; portanto, é formado uma escala[371] para todos os torques com a ajuda da qual pode ser medido qualquer torque agindo sobre a bobina. Isso ocorre de acordo com aquelas leis simples que Gauss desenvolveu no caso do magnetômetro bifilar.[372] Finalmente, essa escala pode ser tornada à vontade mais fina ou mais grosseira, ou como for necessário na ocasião, através da aproximação ou separação entre os dois fios de conexão.

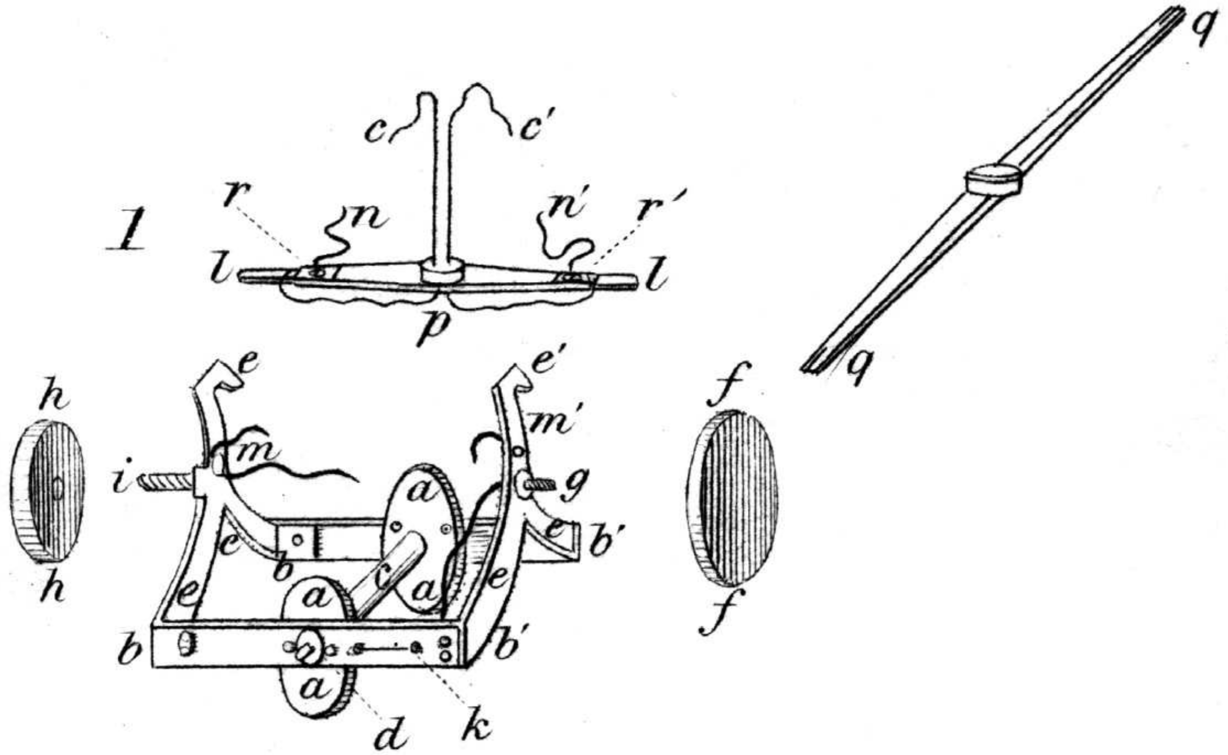
Como esse método de suspensão não é acompanhado de qualquer atrito, ele permite o aumento do peso da bobina suspensa, que pode ter qualquer valor, desde que não seja maior do que o peso que os fios de conexão podem suportar. Portanto, um fio muito longo pode ser enrolado muitas vezes ao redor da bobina, e assim pode ser obtida uma grande multiplicação da força galvânica. Além disso, essa bobina giratória pode, sem prejuízo, ser carregada com um espelho que também gira e aqui, assim como no magnetômetro de Gauss, pode ser usado para a medição precisa dos ângulos; pois desde que o atrito seja excluído, a aplicação dos instrumentos ópticos finos nesse caso também não apresenta qualquer impedimento.

No que diz respeito ao detalhes da construção do instrumento, como isso foi descrito bem perfeitamente pelo Sr. Leyser,[373] o fabricante de instrumentos de Leipzig, vou inserir a explicação que ele forneceu, e que se refere às gravuras feitas por ele, Figuras 1 a 10. O instrumento é denominado um *eletrodinamômetro*.

8.2 Descrição do Eletrodinamômetro

A Figura 1 representa a pequena estrutura para apoiar a bobina que oscila no multiplicador, vista diagonalmente.

[370] Em alemão: *ein bestimmtes Drehungsmoment*. Ver a Nota de rodapé 119 na página 65.
[371] Ver a Nota de rodapé 211 na página 126.
[372] [Gau38b] com traduções para o inglês em [Gau41c] e [Gau21c].
[373] Ver a Nota de rodapé 124 na página 66.



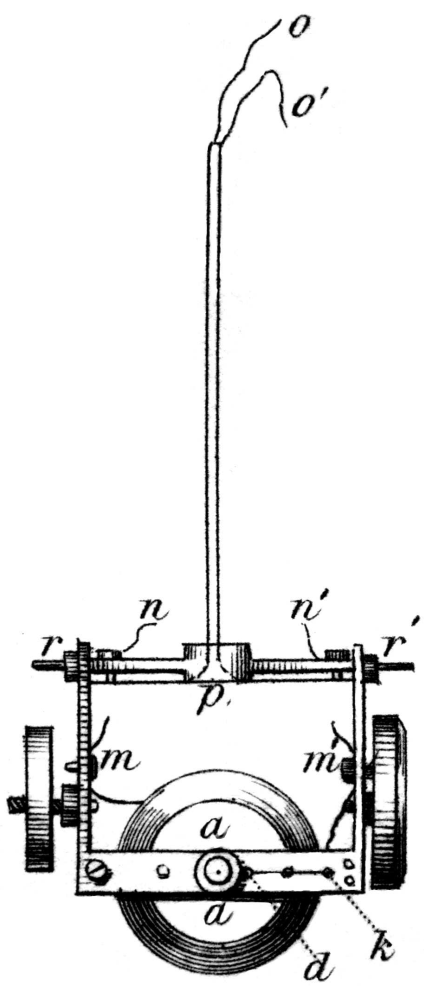
Essa estrutura consiste em dois discos de marfim,[374] aa e aa, que são fixados em duas placas de marfim, bb' e bb'; a distância entre eles é regulada por um pequeno cilindro de marfim, c. Esse último [cilindro] é oco, de tal forma que uma haste metálica pode atravessá-lo e, por meio de um parafuso, cada um dos discos com sua placa pode ser fixado às extremidades do cilindro; e assim é formada uma bobina para a recepção do fio. O início do fio a ser enrolado atravessa o buraquinho d para continuar por fora. Quando o fio é colocado neste cilindro e a extremidade fixada por meio da seda, os suportes metálicos eee e eee' do cilindro são fixados às extremidades das placas mencionadas anteriormente; assim, um suporte, eee', ao qual o espelho ff está aparafusado em g, é rebitado em $b'b'$; enquanto que o outro suporte, eee, ao qual está fixado o contrapeso hh pelo parafuso i, é aparafusado em bb; de tal maneira que esse suporte possa ser girado em torno desses parafusos bb de volta na direção de bb', para que toda a bobina possa ser colocada convenientemente no multiplicador. — O início da bobina, que antes era conduzido para fora pela abertura d, agora é guiado um pouco ao longo da placa bb' em direção a b' até que a extensão da bobina permita que ele entre novamente em k dentro da moldura, para depois subir até o suporte do espelho, onde entra em contato metálico com o suporte por um pequeno parafuso m' acima do ponto de fixação do espelho. A extremidade da bobina também é colocada em contato metálico com o outro suporte por meio do parafuso m; contudo, essa extremidade tem de ser longa o suficiente para não ficar no caminho do suporte quando ele é lançado de volta. Quando o espelho ff for agora colocado em g, e seu contrapeso hh em i, a bobina estará preparada para suspensão no multiplicador por fios metálicos bifilares. Com essa finalidade, os dois suportes da bobina terminam em e e e' em ganchos ou peças na forma [da letra] ípsilon $[\Upsilon]$, e os fios metálicos bifilares são equipados abaixo com uma pequena barra transversal de marfim, ll, que em cada extremidade termina em uma placa de metal e essa novamente em um pequeno cilindro de metal; sendo que esse último se ajusta dentro dos ganchos ou ípsilons anteriores

[374]Ver a Nota de rodapé 101 na página 51.

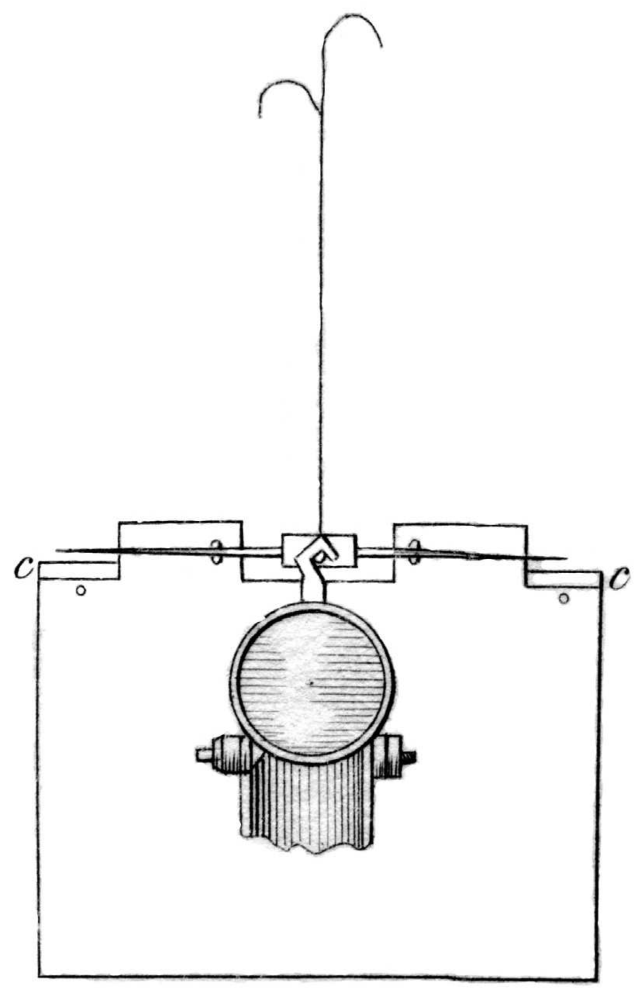
do suporte, e assim recebem a bobina. Os fios metálicos bifilares no e $n'o'$ são unidos na barra transversal ll da seguinte maneira. O começo n do fio no é preso por meio de um parafuso à placa metálica r, percorre uma pequena distância em direção a l, e então retorna através de um pequeno buraco no final da placa abaixo da barra ll até seu centro p, onde ele atravessa novamente um pequeno buraco acima da barra, e pode então continuar para o e além. O fio $n'o'$ é arranjado da mesma maneira, contudo sua direção é invertida; no centro p da barra ll cada [fio] tem uma abertura separada através da qual ele passa; essas [aberturas] estão muito próximas entre si, mas estão separadas e são mantidas isoladas [eletricamente] pelo marfim. O ponteiro qq é colocado no centro da barra, antes que sejam inseridos os fios metálicos no e $n'o'$.

A Figura 2 apresenta a visão lateral da bobina oscilante enrolada barra, equipada com espelho e contrapeso, e dependurada nos fios metálicos bifilares. O ponteiro só pode ser notado em sua visão frontal muito estreita.

2



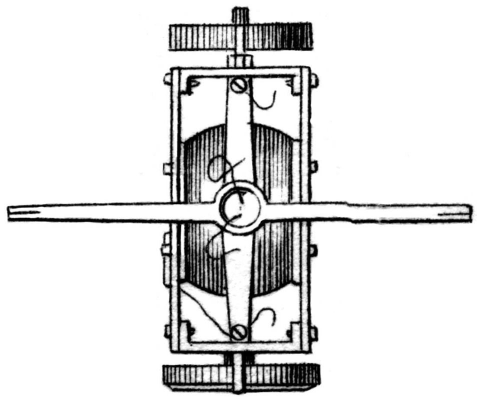
3



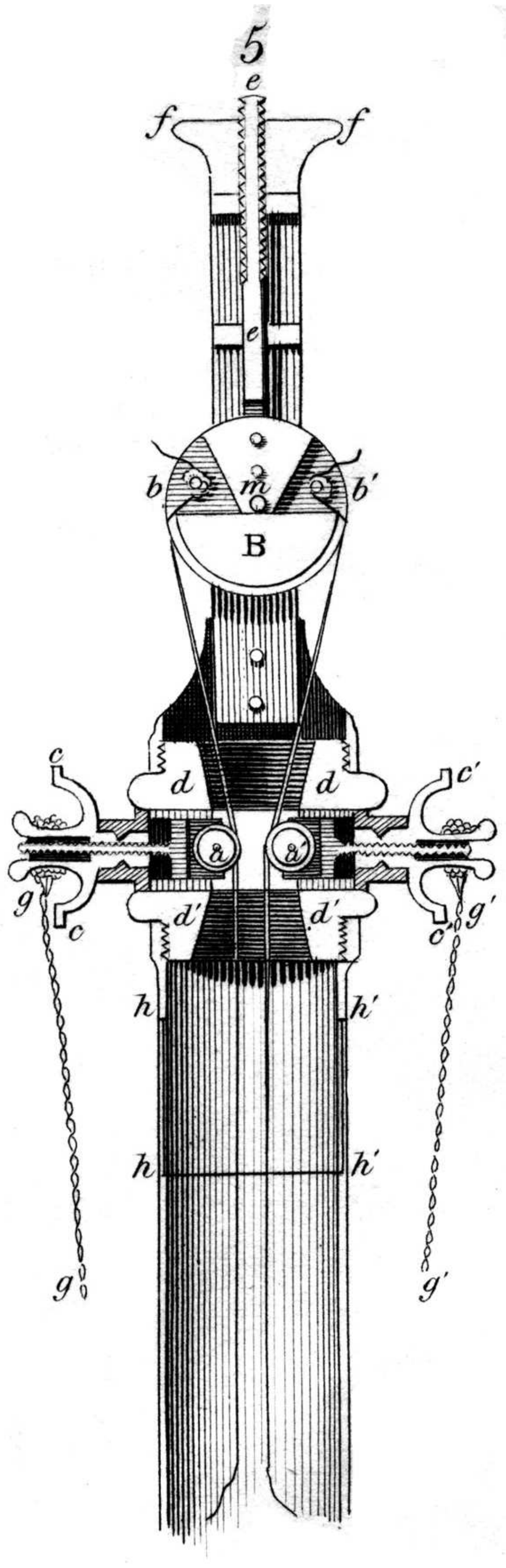
A Figura 3 representa a bobina vista ortogonalmente à superfície do espelho; são vistos claramente os ganchos ou ípsilons, e também o ponteiro pairando sobre as lâminas da escala cc.

A Figura 4 apresenta a vista de cima, na qual a barra e o ponteiro formam uma cruz ortogonal.

4



A Figura 5 serve para ilustrar o percurso adicional dos fios metálicos bifilares até sua fixação; para fins de clareza, ela é representada com o dobro do tamanho das outras figuras e em seção vertical.

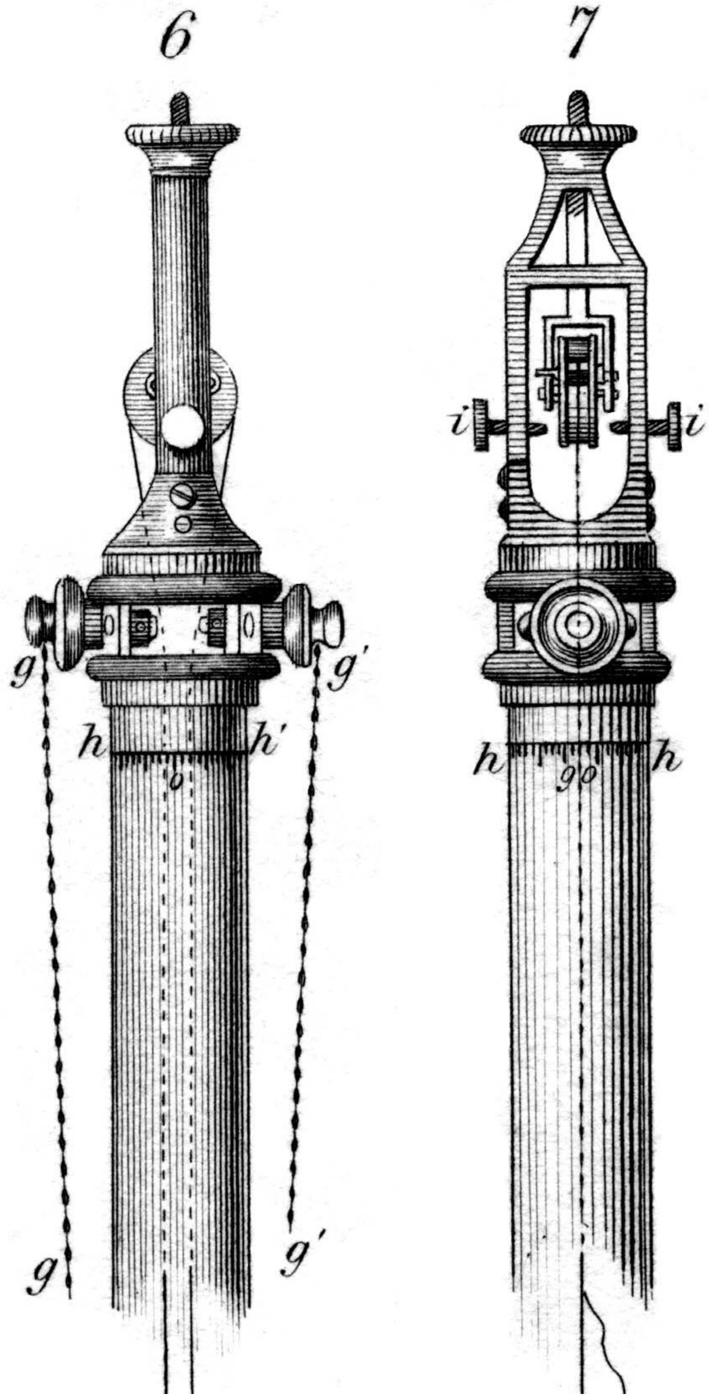


Os fios metálicos bifilares continuam a subir a partir de o e o' dentro de um tubo de latão;[375] eles estão enrolados ao redor dos cilindrinhos móveis a e a', e são finalmente fixados

[375]Os pontos o e o' são mostrados na Figura 2.

à roldana de marfim B em b e b' ao redor de pinos giratórios. Os fios podem ser enrolados ou desenrolados nesses pinos ou pequenos cilindros por meio de uma pequena chave, caso o peso da bobina vibratória torne isso necessário; os pequenos cilindros a e a' também são girados necessariamente em cada uma dessas operações. O próprio cilindro de marfim B, no entanto, pode ser aparafusado para cima ou para baixo com a forquilha e parafuso ee por meio da porca ff; e assim a bobina vibratória pode ser arranjada na posição apropriada em relação ao multiplicador, no centro do qual ela deve oscilar. Ao mesmo tempo a roldana B, que pode girar na forquilha ee ao redor do pino m, assume um estado de equilíbrio tão logo a bobina vibratória é livremente suspensa nos fios metálicos bifilares, já que esses fios atuam em b e b' como se fosse na extremidades de uma alavanca, que tem seu fulcro em m. Assim o peso da bobina vibratória é dividido igualmente entre os dois fios.

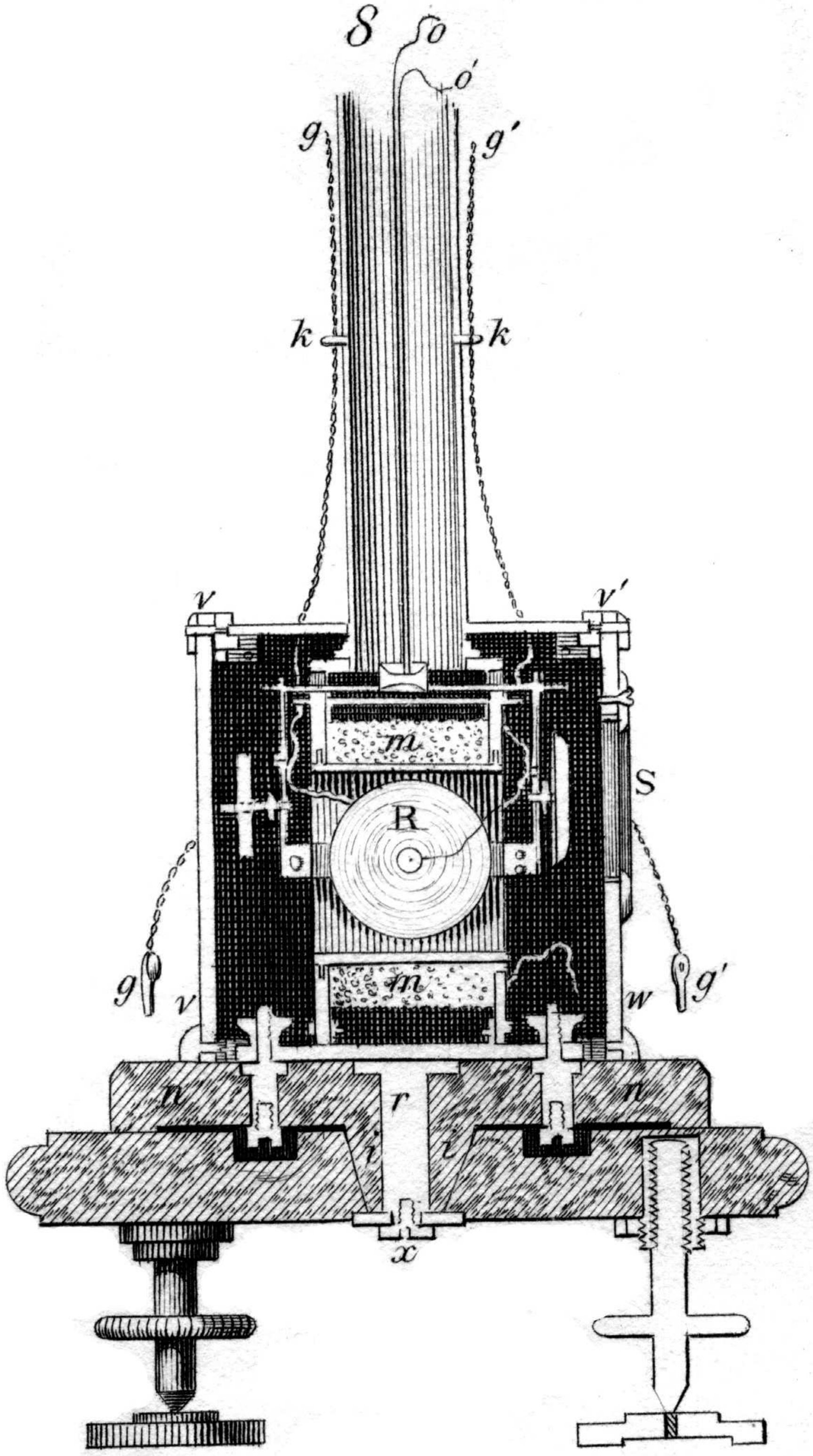
Para permitir a aproximação ou separação entre os dois fios bifilares, os cilindrinhos a e a' são colocados em forquilhas largas que, como visto na Figura [5], terminam em parafusos, por meio dos quais eles podem ser aproximados ou separados entre duas placas metálicas (indicadas pelas linhas hachuradas verticais) com as porcas cc e $c'c'$. As porcas cc e $c'c'$ estão ajustadas em um tipo de caixa, indicada na Figura [5] por meio de linhas traçadas obliquamente, na qual são fixadas por um pino, mas não são impedidas em suas rotações. O cilindrinho a, com sua forquilha e parafuso, placa e porca cc, é isolado do cilindrinho a', com sua forquilha e parafuso, placa e porca $c'c'$, já que os discos circulares dd e $d'd'$, que são perfurados no centro e que os conectam acima e abaixo, são feitos de marfim. Para permitir que os fios metálicos bifilares sejam removidos convenientemente, as porcas cc e $c'c'$ terminam em projeções na forma de trompetes, como mostrado na Figura [5], ao redor das quais fica dependurado um fio gg e $g'g'$ enrolado três vezes. Portanto uma corrente galvânica percorre a seguinte trajetória: — Se ela entra em g, ela sobe até g, é comunicada à porca cc e ao cilindrinho a (se ela subir para b, como b é isolado, ela retorna), e desce os filamentos até o; de o ela procede (Figura 2) para baixo através do centro p da barra transversal, então vai para sua extremidade r, de onde ela desce pelo contato metálico com o suporte, e em m entra na extremidade da própria bobina, continua ao longo de suas espiras, fazendo novamente sua saída em d, mas passando novamente ao outro suporte em m' através de k, segue de r' ao longo da barra transversal até seu centro, e daí sobe para o'; de o' a corrente (Figura 5) segue novamente para o outro cilindrinho a' para a porca $c'c'$, e chega finalmente no outro fio condutor, $g'g'$. Assim a corrente, para chegar em um fio condutor $g'g'$ a partir do outro [fio] gg, tem de necessariamente atravessar a bobina vibratória, desde que o fio de g para g' seja perfeitamente isolado. Para anular a torção dos fios metálicos bifilares, toda a porção superior do instrumento até hh e $h'h'$ gira horizontalmente, e vem com um círculo de torção e um ponteiro, como é visto claramente nas Figuras 6 e 7 em hh'.



As Figuras 6 e 7 não têm intersecção, e a Figura 6 corresponde à Figura 2. A Figura 7 exibe mais claramente a roldana B com a forquilha e parafuso ee' da Figura 5; ii representam aqui dois parafusos para fixar a roldana B ao transportar o instrumento, sendo que sem essa precaução os fios bifilares seriam facilmente danificados.

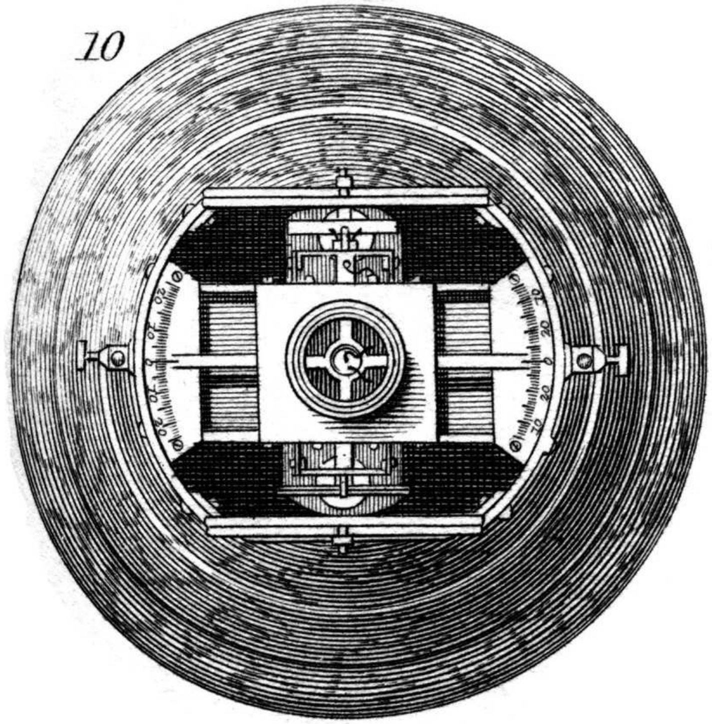
Passamos agora à Figura 8 que exibe em uma seção vertical a parte inferior do instrumento, com o multiplicador e a base de pedra serpentina.[376]

[376]Em alemão: *Serpentinstein*. Talvez Weber esteja se referindo à rocha serpentinito.



Reconhecemos aqui em primeiro lugar a Figura 2, suspensa pelos fios metálicos bifilares o e o', também como vista em seção vertical. As letras mm exibem uma seção do multiplicador, enrolado em um tambor de latão com lados de madeira, no interior do qual é colocada a bobina vibratória R. Esses lados de madeira suportam os tubos dentro dos quais descem os fios bifilares; as duas escalas para o ponteiro também são fixadas neles.

A Figura 10, uma visão do instrumento como visto de cima, exibe mais acuradamente a escala e as placas metálicas às quais é preso o tubo.

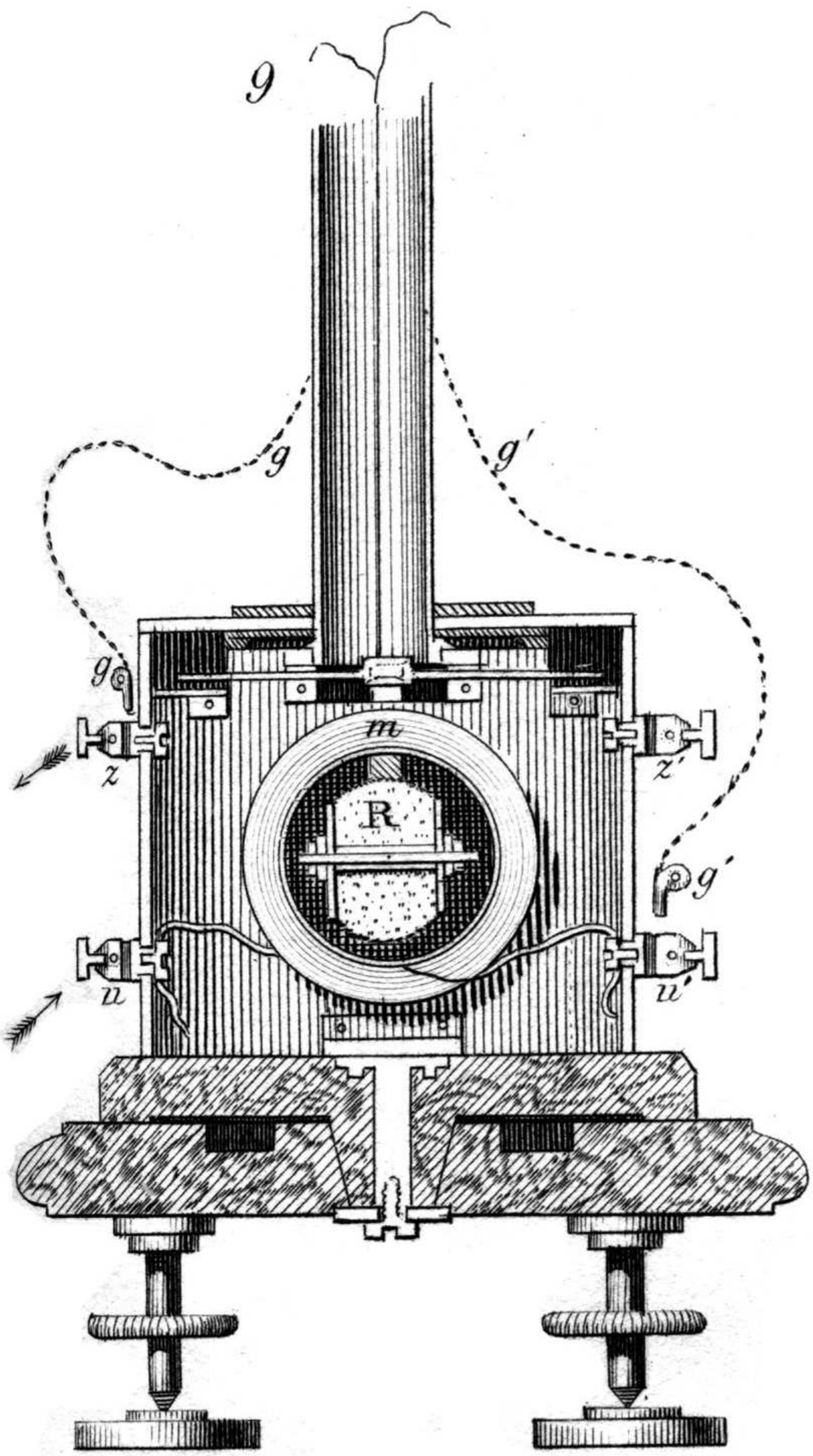


Os lados desse multiplicador estão em conexão com uma faixa de cobre que pode ser conectada por meio de dois parafusos com a parte superior nn do pé de serpentina. Essa porção nn com seu cone ii [como vistos na Figura 8] pode girar na parte inferior do pé de serpentina, sendo mantida em conexão com ela pelo parafuso metálico r por meio do parafuso x. — Como mostrado na Figura 8, o espelho e o contrapeso se projetam em direção aos lados de madeira do multiplicador, portanto, o conjunto é protegido da influência de uma corrente de ar por uma tampa cilíndrica de madeira, que é presa às beiradas superiores dos lados de madeira do multiplicador. Contudo, na direção do espelho para o contrapeso, essa cobertura cilíndrica é achatada, de forma a permitir uma visão livre através da cavidade do multiplicador. O lado plano da cobertura próximo ao espelho pode ser aberto ou fechado à vontade por uma placa de madeira que, contudo, para nos permitir o uso do espelho, vem com um vidro paralelo plano S. Todo o outro lado plano da tampa, que é virado em direção ao contrapeso, pode ser fechado ou aberto por uma placa de vidro. Assim a bobina vibratória, quando os lados da tampa estão fechados, ainda pode ser vista, e sua oscilação livre na cavidade do multiplicador pode ser observada e regulada por meio de três parafusos na base de serpentina. Além disso, de cima para baixo, acima da escala graduada, a tampa é fechada por duas placas de vidro, que são móveis uma em direção à outra em sulcos metálicos, e perfuradas em um formato semicircular no centro, para permitir que as atravesse o tubo no qual são suspensos os fios bifilares. Na Figura 8, vv exibe a placa de vidro de lado; $v'w$ é a placa de madeira com o vidro paralelo plano S no outro lado; vv' é uma das placas de vidro superiores. As letras kk são ilhós[377] através dos quais descem os fios condutores gg e $g'g'$ na Figura 6; esses fios são fixados nos ilhós para que não fiquem pendurados em todo o seu comprimento; eles terminam em pinos ou pequenos cilindros.

A Figura 9 também exibe uma seção vertical, mas ortogonal à seção da Figura 8; m é o

[377]Ver a Nota de rodapé 103 na página 53.

multiplicador e U uma seção da bobina vibratória dentro dele.



Ao lado da caixa percebemos quatro botões metálicos, marcados pelas letras $uu'zz'$. Esses botões são perfurados transversalmente, e a perfuração mais distante da caixa vem com um parafuso; ele é fixado ao lado interior da caixa por um outro parafuso. Esses dois botões, u e u', estão em contato metálico com o início e com o final do multiplicador, de tal forma que uma corrente do botão u pode atravessar o multiplicador até o botão u', e *vice-versa*. Os outros dois botões, z e z', estão isolados perfeitamente; mas todos os quatro botões são muito úteis para inverter a corrente e para ocasionar várias combinações. Nesta Figura [9] também podemos ver o ponteiro pairando sobre os mostradores, assim como na Figura 3, na qual se supõe que a tampa tenha sido removida.

Vamos agora traçar o caminho de uma corrente galvânica que entra no instrumento pelo botão u; ela passa de u através do multiplicador m e vai em direção a u'; se o fio condutor $g'g'$ com sua extremidade cilíndrica metálica for inserido agora nesse botão, a corrente sobe em $g'g'$, e (Figura 5) vai em direção à porca $c'c'$ acima do cilindrinho a', desce então dentro do tubo para o'; de lá (Figura 2), de o' através do centro p da barra transversal para $r'm'kd$, através da bobina vibratória para $mrpo$, e (Figura 5) para o, subindo acima do cilindrinho a na porca cc para o segundo fio condutor gg e (Figura 9) desce através de gg para o botão z, onde a condução passa então para a outra das duas superfícies excitadoras.

Por meio da parte giratória superior da base de serpentina, o instrumento pode ser direcionado para qualquer lado de uma sala ou quarto como for necessário.

Todas as figuras são feitas com o tamanho de um quarto da grandeza linear do eletrodinamômetro, exceto a Figura 5, que tem a metade do tamanho real.

O fio da bobina vibratória tem 200 metros de comprimento, aquele do multiplicador 300 [metros]; o primeiro forma ao redor de 1200 espiras, o último aproximadamente 900. O comprimento dos fios bifilares — que são muito finos, compostos de prata e foram aquecidos até a vermelhidão — desde a barra transversa até os pequenos cilindros aa', era de meio metro.

O preço do instrumento é de 70 táleres.[378]

8.3 Observações para Provar o Princípio Fundamental da Eletrodinâmica

As próximas observações não foram feitas com o instrumento que acabou de ser descrito. Contudo, é desnecessário descrever separadamente o instrumento que foi utilizado nessa ocasião, já que ele só difere do anterior em aspectos secundários, que foram arranjados de forma menos conveniente. Apenas uma modificação importante tem de ser mencionada, a saber, que o multiplicador, que na descrição anterior assume uma posição imutável, na qual seu centro coincide com o centro da bobina bifilar suspensa, foi deixado móvel, de tal maneira que podia ser colocado em qualquer posição em relação à bobina vibratória com o objetivo de ampliar as observações para todas as posições relativas entre os dois condutores galvânicos que atuam entre si. Agora, como esses dois condutores formam duas bobinas, sendo que uma delas pode envolver a outra, e no instrumento descrito anteriormente a bobina menor interior era suspensa por dois fios, para atuar como se fosse uma agulha de galvanômetro, enquanto que a bobina maior externa era fixa e formava o multiplicador; foi necessário com o objetivo atual inverter o arranjo, e suspender a bobina maior e externa por dois fios de tal forma a usar a bobina menor interna como um multiplicador, já que apenas dessa maneira a posição do multiplicador podia ser alterada à vontade sem interferir com a suspensão bifilar.

[378]Em alemão: "*70 Thaler Preuss. Kourant*". O táler foi uma moeda de prata usada na Europa por quase quatrocentos anos. Seu nome sobreviveu em várias moedas contemporâneas, tais como o dólar.

Observa-se de imediato que a bobina externa, devido ao seu tamanho, tem um momento de inércia maior, o que ocasiona um maior período de oscilação; contudo, essa influência pode ser facilmente compensada quando necessário ao modificar o arranjo da suspensão bifilar.

No que diz respeito às próprias observações, ainda falta ser apontado que para tornar os resultados comparáveis, foi medida precisamente por um segundo observador com um galvanômetro a intensidade da corrente fluindo pelos dois condutores do dinamômetro, simultaneamente com a observação do dinamômetro. Isso foi necessário, já que não se pode garantir a constância da intensidade da corrente durante uma série contínua de experiências, mesmo quando é usada a assim chamada bateria constante de Grove ou de Bunsen.[379]

A primeira experiência foi feita ao passar três correntes de intensidades diferentes, a saber, de 3, 2 e 1 elementos de Grove, através dos dois condutores do dinamômetro e observando as deflexões simultâneas do dinamômetro e galvanômetro. Após efetuar as reduções necessárias, foram obtidas as seguintes médias das deflexões:

Número de elementos de Grove	Deflexões	
	do dinamômetro	do galvanômetro
3	440,038	108,426
2	198,255	72,398
1	50,915	36,332

Essas observações estão reduzidas de tal forma que a primeira [observação] fornece uma medida da força eletrodinâmica com a qual os dois condutores do dinamômetro atuam um sobre o outro quando correntes de mesma intensidade os atravessam, enquanto que a última [observação] fornece uma medida dessa própria intensidade de corrente.

Se denotarmos as observações dinamométricas por δ, e as observações galvanométricas por γ, obteremos

$$\gamma = 5,155\,34\sqrt{\delta}\ ;$$

pois se calcularmos os valores de γ a partir dos valores observados de δ de acordo com essa fórmula, obteremos na ordem da série,

108,144
72,589
36,786,

que exibe menos diferenças dos valores de γ encontrados pela observação do que poderia ser antecipado, a saber:

$-0,282$
+0,191
+0,454.

Portanto, a força eletrodinâmica da ação recíproca entre dois fios condutores, através dos quais passam correntes de mesma intensidade, é proporcional ao quadrado dessa intensidade, que é exatamente aquilo que é necessário pelo princípio fundamental da eletrodinâmica.

[379]Ver as Notas de rodapé 115 e 128 nas páginas 61 e 70.

Foi feita então uma série ampliada de experiências com o objetivo de determinar a dependência da força eletrodinâmica com a qual dois fios condutores do dinamômetro atuam entre si, no que diz respeito à distância e posição relativa desses fios.

Com esse propósito o arranjo foi feito de tal maneira, que um fio condutor, isto é, o multiplicador, podia ser colocado em qualquer posição em relação ao outro, isto é, em relação à bobina bifilar suspensa, sendo que essa última formava a bobina maior que envolvia a bobina menor.

As duas bobinas sempre foram colocadas em tal posição que seus eixos estavam no mesmo plano horizontal e eram ortogonais entre si.

A distância entre as duas bobinas foi determinada pela distância entre seus centros, sendo assim assumida = 0 quando coincidiam os seus centros.

Quando isso não ocorria, além do valor da distância entre os dois centros, era necessário medir o ângulo que a linha unindo os dois pontos centrais formava com o eixo da bobina bifilar suspensa, sendo que através disso foi definida a direção na qual o centro do multiplicador estava afastado do centro da bobina bifilar suspensa. Com esse objetivo foram selecionadas quatro direções cardeais nas quais o ângulo anterior tinha o valor 0º, 90º, 180º e 270º, isto é, quando o eixo da bobina bifilar suspensa, como o eixo da agulha de um ímã, estava arranjado ao longo do meridiano magnético, o centro do multiplicador estava afastado do centro da bobina, algumas vezes na direção do meridiano, *para o Norte* ou *para o Sul*, e algumas vezes na direção ortogonal ao meridiano magnético, *para o Leste* ou *para o Oeste*. Em cada uma dessas direções diferentes o multiplicador era colocado sucessivamente em distâncias diferentes da bobina suspensa.

Esse arranjo das diferentes posições e distâncias entre os dois fios condutores do dinamômetro correspondem acuradamente, como pode ser visto, ao arranjo das diferentes posições e distâncias entre os dois ímãs que Gauss utilizou em suas medidas para demonstrar o princípio fundamental do magnetismo.[380] A bobina bifilar suspensa utilizada aqui ocupa o lugar da agulha magnética de Gauss e o multiplicador assume o lugar da barra defletora de Gauss. A única diferença importante é que a ação mútua entre os ímãs só podia ser observada a certa distância [entre eles]; consequentemente, nas observações magnéticas estava excluído aquele caso no qual os centros dos dois ímãs coincidiam; enquanto que nas medições eletrodinâmicas de que estamos falando agora, o sistema ainda podia ser completado pelo caso em que os centros das duas bobinas coincidiam.

Simultaneamente com as observações feitas no dinamômetro, a intensidade da corrente que atravessava as duas bobinas do dinamômetro era medida por um outro observador com um galvanômetro. Através dessas observações auxiliares foi possível reduzir todas as observações feitas no dinamômetro de acordo com a lei mostrada anteriormente — a saber, que a força eletrodinâmica é proporcional ao quadrado da intensidade da corrente — a uma mesma intensidade de corrente, tornando assim comparáveis entre si os resultados obtidos.

A próxima Tabela fornece os valores médios reduzidos que foram obtidos em exemplos diferentes. A primeira coluna vertical mostra a distância entre as duas bobinas do dinamômetro; acima das outras colunas é dada a direção formada pela linha unindo os dois centros com o eixo da bobina bifilar suspensa direcionado ao longo do meridiano magnético:

[380]Ver a Nota de rodapé 114 na página 59.

Distância em mm	para o Norte 0º	para o Leste 90º	para o Sul 180º	para o Oeste 270º
0	22960	22960	22960	22960
300	77,16	189,24	77,06	190,62
400	34,78	77,61	34,77	77,28
500	18,17	39,37	18,30	39,16
600	—	22,53	—	22,38

Observa-se imediatamente que quando os centros das duas bobinas do dinamômetro coincidem, ou quando a distância entre eles é = 0, desaparece a diferença que depende da mudança na direção em que o multiplicador é removido da bobina bifilar suspensa. Portanto, o resultado obtido nesse caso só podia ser repetido nessa Tabela nas várias colunas.

Além disso, essa Tabela mostra que os resultados obtidos para uma distância igual em direções opostas variando de 180º, concordam entre si até onde as observações podem ser comprovadas.

Esses valores, quando reduzidos ao tomar suas médias, após converter as divisões da escala em graus, minutos e segundos, fornecem a seguinte Tabela:

R	v	v'
0,3	$0^\circ 49' 22''$	$0^\circ 20' 3''$
0,4	$0^\circ 20' 8''$	$0^\circ 9' 2''$
0,5	$0^\circ 10' 12''$	$0^\circ 4' 44''$
0,6	$0^\circ 5' 50''$	—

na qual foi adotada a mesma notação que aquela utilizada por Gauss no seu trabalho *Intensitas vis magneticae, etc.* (ano 1833, Vol. XXVIII, pág. 604)[381,382] na comparação das observações magnéticas.

De acordo com o princípio fundamental da eletrodinâmica, devemos agora, como no trabalho de Gauss, expandir as tangentes dos ângulos de deflexão v e v' de acordo com potências ímpares decrescentes da distância R, e deve ser possível definir

$$\tan v = aR^{-3} + bR^{-5} \ ,$$

e

$$\tan v' = \frac{1}{2}aR^{-3} + cR^{-5} \ ,$$

onde a, b e c são constantes a serem determinadas pelas observações. Se fizermos agora em nosso caso

$$\tan v = 0,000\,3572R^{-3} + 0,000\,002\,755R^{-5} \ ,$$

e

$$\tan v' = 0,000\,1786R^{-3} - 0,000\,001\,886R^{-5} \ ,$$

obteremos a seguinte Tabela das deflexões *calculadas* e suas diferenças em relação às deflexões *obtidas pela observação*:

381[Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 109.

382Ver a Nota de rodapé 114 na página 59.

R	v	Diferença	v'	Diferença
0,3	$0°49'22''$	$0''$	$0°20'4''$	$-1''$
0,4	$0°20'7''$	$+1''$	$0°8'58''$	$+4''$
0,5	$0°10'8''$	$+4''$	$0°4'42''$	$+2''$
0,6	$0°5'49''$	$+1''$	—	—

Temos assim por essa concordância entre os valores calculados e aqueles obtidos pela observação a confirmação de uma das consequências mais universais e importantes do princípio fundamental da eletrodinâmica, a saber, *que as mesmas leis se aplicam às ações eletrodinâmicas à distância assim como às ações magnéticas.*

Nessa aplicação das leis do magnetismo para as observações eletrodinâmicas, tem de ser excluído aquele caso das observações eletrodinâmicas no qual os centros das duas bobinas do dinamômetro coincidem. Além disso, nessa extensão das leis do magnetismo para as observações eletrodinâmicas, os valores das três constantes têm de ser deduzidos das próprias observações, o que é desnecessário quando temos de recorrer ao próprio princípio fundamental eletrodinâmico, e quando calculamos diretamente a partir dele os resultados que as observações devem ter produzido de acordo com ele. A partir do princípio fundamental da eletrodinâmica,

- 1. para o caso no qual a linha reta unindo o centro das duas bobinas coincide com o eixo da bobina bifilar suspensa,

quando m denota o raio da bobina multiplicadora, n o raio da bobina bifilar suspensa, e a a distância entre os centros das duas bobinas, e quando, por brevidade, fazemos

$$\frac{m^2}{a^2+n^2} = v^2 \ ,$$

$$\frac{n^2}{a^2+n^2} = w^2 \ ,$$

$$\frac{4a^2+n^2}{16(a^2+n^2)} = f \ ,$$

e

$$\frac{8a^4+4a^2n^2+n^4}{64(a^2+n^2)^2} = g \ ,$$

o torque eletrodinâmico que a bobina multiplicadora exerce sobre a bobina bifilar suspensa, quando uma corrente de intensidade i atravessa as duas bobinas, é determinado com suficiente aproximação como sendo

$$= -\frac{\pi^2}{2} v^3 n^2 i^2 S \ ,$$

com S designando a seguinte série:

$$S = +\left[\frac{1}{3} - w^2\right]$$

$$-\ \frac{3}{2}\left[\frac{3}{5} - w^2 - \left(3 - 7w^2\right) f\right] v^2$$

$$+\frac{15}{8}\left[\frac{5}{7}-w^2-2\left(5-9w^2\right)f+3\left(5-11w^2\right)g\right]v^4$$

$$-\frac{35}{16}\left[\frac{7}{9}-w^2-3\left(7-11w^2\right)f+11\left(7-13w^2\right)g\right]v^6$$

$$+\frac{315}{128}\left[\frac{9}{11}-w^2-4\left(9-13w^2\right)f+26\left(9-15w^2\right)g\right]v^8$$

$$-\ etc.$$

Se substituirmos nessa equação os valores conhecidos a partir da medição direta, em milímetros,

$$m = 44,4\ ,$$

$$n = 55,8\ ,$$

e sucessivamente

$$a = 300, \qquad 400, \qquad 500,$$

obteremos para o torque procurado os seguintes três valores a serem multiplicados por $\pi^2 i^2$:

$$-\ 1,454\,4\ ,$$

$$-\ 0,654\,7\ ,$$

e

$$-\ 0,345\,2\ .$$

Além disso,

- 2. no caso em que a linha reta unindo os centros das duas bobinas é ortogonal ao eixo da bobina bifilar suspensa,

tendo m, n e a os mesmos significados, e

$$\frac{m^2}{a^2+n^2} = v^2\ ,$$

$$\frac{a^2}{a^2+n^2} = f\ ,$$

e

$$\frac{n^2}{a^2+n^2} = 4gv^2\ ,$$

o torque procurado é

$$= +\pi v^3 n^2 i^2 S' \ ,$$

com S' expressando a seguinte série:

$$S' = +\frac{1}{3}$$

$$-\frac{3}{2}\left[\frac{1}{5} - \frac{10}{3}fg\right]v^2$$

$$+\frac{15}{8}\left[\frac{1}{7} + \frac{2}{5}(1-14f)g + 42f^2g^2\right]v^4$$

$$-\frac{35}{16}\left[\frac{1}{9} + \frac{3}{7}(2-18f)g - \frac{54}{5}(1-11f)fg^2 - 572f^3g^3\right]v^6$$

$$+\frac{315}{128}\left[\frac{1}{11} + \frac{4}{9}(3-22f)g + \frac{12}{7}\left(1-22f+143f^2\right)g^2\right.$$

$$\left. + \frac{1144}{5}(1-10f)f^2g^3 + \frac{24310}{3}f^4g^4\right]v^8$$

$$- \textit{etc.}$$

Se colocarmos nessa série os valores especificados para m e n, e sucessivamente $a = 300,\ 400,\ 500$ e 600, obteremos para o torque procurado os seguintes valores a serem multiplicados por $\pi^2 i^2$:

$$+\ 3,562\,5\ ,$$

$$+\ 1,466\,1\ ,$$

$$+\ 0,742\,0\ ,$$

e

$$+\ 0,426\,7\ .$$

Finalmente,

- 3. naquele caso no qual os centros das duas bobinas coincidem, quando m denota o raio do multiplicador, e n' e n'' o raio menor e maior da bobina bifilar suspensa, o torque procurado é

$$= \frac{\pi^2 m^3}{n''-n'} i^2 \left[\frac{1}{3}\log\text{nat}\frac{n''}{n'} + \frac{9}{160}\left(\frac{1}{n''^2 - n'^2}\right)m^2 - \frac{225}{14336}\left(\frac{1}{n''^4} - \frac{1}{n'^4}\right)m^4\right.$$

$$\left. + \frac{6125}{884736}\left(\frac{1}{n''^6} - \frac{1}{n'^6}\right)m^6 + \frac{694575}{184549376}\left(\frac{1}{n''^8} - \frac{1}{n'^8}\right)m^8 + ...\right]\ .$$

Se substituirmos nessa fórmula os valores conhecidos por medição direta em milímetros,

$$m = 44,4 \ ,$$

$$n' = 50,25 \ ,$$

e

$$n'' = 61,35 \ ,$$

obteremos para o torque o seguinte valor a ser multiplicado por $\pi^2 i^2$:

$$+ \ 442,714 \ .$$

Esse valor sofre uma redução de aproximadamente $1/29$ quando levamos em consideração que todas as espiras das duas bobinas não estão no mesmo plano, sendo que nesse caso isso exerce uma influência maior devido à proximidade entre elas do que nos outros casos. O resultado anterior torna-se então reduzido a

$$+ \ 427,45 \cdot \pi^2 i^2 \ .$$

Os coeficientes numéricos assim calculados devem agora ser proporcionais aos valores observados; e devem ser iguais [aos valores observados] quando multiplicados por $\pi^2 i^2$, a intensidade i da corrente sendo expressa de acordo com as unidades com as quais foram baseadas as medições anteriores.

De fato, quando todos os coeficientes numéricos calculados são multiplicados por $53,06$, e então arranjados de acordo com a analogia dos valores observados, obtemos a seguinte Tabela dos valores calculados, e suas diferenças em relação aos valores encontrados pela observação:[383]

Distância em mm	Para o Norte ou para o Sul 0º ou 180º	Diferença	Para o Leste ou para o Oeste 90º ou 270º	Diferença
0	+ 22 680,00	+ 280,00	+ 22 680,00	+ 280,00
300	189,03	+ 0,90	77,17	$-0,06$
400	77,79	$-0,34$	34,74	+ 0,03
500	39,37	$-0,10$	18,31	$-0,07$
600	22,64	$-0,18$	—	—

Nessa comparação entre a teoria e a experiência, só o fator $53,06$ foi deduzido das observações; e isso só foi feito porque esse fator não podia ser determinado com precisão suficiente por meio de medições diretas. A obtenção direta desse fator é baseada na determinação da proporção daquela medida da intensidade da corrente na qual é baseada a escala do galvanômetro utilizado em relação à unidade absoluta a que se refere a expressão teórica. As medições necessárias para determinar essa proporção não puderam ser todas realizadas com a precisão necessária, já que não foram feitas medições com esse propósito. Contudo, esse fator foi determinado provisoriamente por medição direta, tão bem quanto permitido

[383] A quarta coluna da primeira linha aparece no texto original alemão como: *Südl. od. westl.*, isto é, *para o Sul ou para o Oeste*. Provavelmente a palavra *Südl.* deve ser um erro de impressão. A expressão correta deve ser como apareceu na tradução em inglês, isto é, *East or west*, [Web66d, pág. 504]. Também apliquei essa correção aqui.

pelas circunstâncias, sendo encontrado $= 49,5$. Este resultado também mostra uma concordância com o valor deduzido das observações, que não se poderia esperar que fosse maior nas circunstâncias.

8.4 Observações sobre a Ampliação do Domínio das Investigações Eletrodinâmicas

8.4.1 A. Observação da Indução Eletrovoltaica

Se a bobina bifilar suspensa do dinamômetro for colocada em oscilação enquanto uma corrente a atravessa, ou quando atravessa a bobina do multiplicador, ou quando atravessa as duas bobinas simultaneamente, esse movimento será *indutivo*, e vai excitar uma corrente no condutor através do qual nenhuma corrente estava fluindo, ou vai alterar a corrente atravessando esse condutor. Essa maneira de excitação da corrente é chamada de *indução eletrovoltaica*.[384] O movimento indutor, isto é, a velocidade da bobina oscilante, em cada ocasião é diminuído ou *reduzido* pela interação entre as correntes excitadas pela indução eletrovoltaica e aquelas conduzidas através da bobina. Essa *redução* das oscilações da bobina *ocasionadas* pela indução eletrovoltaica pode ser observada precisamente; e ao mesmo tempo pode ser determinada acuradamente o movimento da própria bobina oscilante que *produz* a *indução eletrovoltaica*; e essa utilização dupla do dinamômetro fornece os dados necessários para a investigação mais precisa das leis da indução eletrovoltaica.

A bobina bifilar suspensa fechada em si mesma foi colocada para oscilar até a maior extensão que a escala permitia que fossem feitas observações, e suas oscilações a partir do 0 foram contadas até que ficassem muito pequenas para permitir uma observação precisa. Durante a contagem, o valor do arco de oscilação foi medido de tempos em tempos. Essas experiências foram feitas *em primeiro lugar* sob a influência da indução eletrovoltaica, com uma corrente de três elementos de Grove sendo conduzida através da bobina multiplicadora; as mesmas experiências foram repetidas *depois disso*, após a remoção dos elementos [de Grove], sem a indução eletrovoltaica:

[384] Ver a Nota de rodapé 173 na página 105.

Com indução eletrovoltaica.		Sem indução eletrovoltaica.	
Contagem das oscilações	Arcos de oscilação	Contagem das oscilações	Arcos de oscilação
0.	764,10	0.	650,80
9.	679,14	14.	601,43
18.	604,05	25.	564,90
35.	484,15	52.	485,28
47.	414,60	82.	409,62
57.	365,50	109.	353,08
74.	292,27	134.	306,70
85.	253,30	163.	261,08
103.	200,80	189.	226,33
118.	165,56	212.	198,68
130.	141,37	232.	178,26
143.	119,33	254.	157,98
157.	100,49	284.	134,17
179.	75,59	309.	116,30
196.	60,58	328.	105,25
210.	50,08	369.	83,68
—	—	387.	75,45

É evidente pela comparação que a diminuição do valor do arco, que sem a influência da indução era em média de 180 avos de uma oscilação para a seguinte, aumentou para 77 avos com o auxílio da indução.

Se um ímã equivalente em termos eletromagnéticos for substituído pelo anel multiplicador com a corrente que passa por ele, encontra-se a diminuição do arco como sendo igualmente grande, isto é, a indução magnética desse ímã é igual à indução eletrovoltaica da corrente no multiplicador.

Também pode ser deduzida dessas experiências a velocidade que o movimento indutor precisa possuir para que a intensidade da corrente indutora seja igual à intensidade da corrente induzida.

8.4.2 B. Determinação da Duração das Correntes Momentâneas, Juntamente com a Aplicação para Experiências Fisiológicas

Quando é para ser determinada a intensidade de uma corrente constante *duradoura*, podem ser utilizados tanto o galvanômetro (o galvanômetro senoidal ou o galvanômetro tangencial)[385] quando o dinamômetro; mas se a corrente cuja intensidade é para ser determinada tem apenas uma duração *momentânea*, não é suficiente uma observação feita com qualquer um desses instrumentos, já que a deflexão observada não depende apenas da intensidade da corrente, mas também da própria duração. Portanto, é necessário ao investigar experimentalmente a intensidade da corrente determinar também sua duração.

Os dois instrumentos, isto é, o galvanômetro e o dinamômetro são complementares entre si, de tal forma que quando a mesma corrente momentânea é transmitida através deles, e é observada a deflexão produzida assim nos dois instrumentos, tanto a duração quanto

[385]Em alemão: *Sinus- oder Tangenten-Bussole*. Ver a Nota de rodapé 109 na página 55.

a intensidade da corrente momentânea podem ser determinadas dessas duas observações. Essa complementaridade mútua é baseada no fato de que a deflexão observada dos dois instrumentos depende da mesma maneira em relação à duração da corrente momentânea, ou seja, a deflexão é proporcional à duração da corrente, enquanto que ela não depende da mesma maneira em relação à intensidade da corrente, já que a deflexão do galvanômetro é proporcional à intensidade da corrente.[386]

Vamos indicar por s e ς à duração das oscilações do galvanômetro e dinamômetro;

e' e ε' à deflexão mantida pelos dois instrumentos quando a mesma corrente constante de intensidade i' é transmitida através deles;

enquanto que e e ε indicam o alcance da deflexão alcançada pelos dois instrumentos em consequência de uma corrente momentânea de duração ϑ e de intensidade i; nesse caso a seguinte equação fornece então a *duração* ϑ:

$$\vartheta = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{s^2}{\varsigma} \cdot \frac{\varepsilon'}{e'^2} \cdot \frac{e^2}{\varepsilon} \ ,$$

e a seguinte equação fornece a *intensidade* da corrente i:

$$i = \frac{\varsigma}{s} \cdot \frac{e'}{\varepsilon'} \cdot i' \cdot \frac{\varepsilon}{e} \ .$$

As grandezas s, ς, e', ε', i', e e ε nessas fórmulas podem ser determinadas por observação.

Essa combinação do dinamômetro com o galvanômetro é de importância especial na fisiologia para investigar com precisão a excitação dos nervos por meio de correntes galvânicas. Pois encontra-se que em especial os nervos sensoriais são rapidamente amortecidos por correntes contínuas e, portanto, para tais experiências frequentemente é necessário utilizar correntes momentâneas. Mas as impressões sensoriais observadas dependem menos da duração da corrente do que de sua intensidade; e é essencial conhecer essas duas grandezas.

8.4.3 C. Repetição da Experiência Fundamental de Ampère com Eletricidade Comum e Medição da Duração da Faísca Elétrica ao Descarregar uma Garrafa de Leiden

É evidente das observações anteriores que a ação da corrente sobre o dinamômetro depende mais da intensidade da corrente, sendo que ela é proporcional ao quadrado dessa intensidade, do que da duração da corrente em relação à qual ela é simplesmente proporcional. Portanto, segue que mesmo uma pequena quantidade de eletricidade, quando atravessa o dinamômetro em um período [de tempo] muito curto, de tal forma que ela forme uma corrente de duração muito curta mas com grande intensidade, vai produzir um efeito perceptível. De fato, isso acontece quando a pequena quantidade de eletricidade que pode ser coletada em uma garrafa ou bateria de Leiden[387] é transmitida durante sua descarga através do dinamômetro. Encontrou-se por esse meio que a experiência fundamental de Ampère que anteriormente havia sido feita apenas com poderosas baterias galvânicas, também podia ser feita com eletricidade comum.

Quando a mesma eletricidade coletada em garrafas de Leiden, após ter atravessado o dinamômetro, também atravessou um galvanômetro e quando foi medida a deflexão assim

[386] Enquanto que a deflexão do dinamômetro é proporcional ao quadrado da intensidade da corrente.

[387] Ver a Nota de rodapé 205 na página 125.

produzida nos dois instrumentos, de acordo com as regras anteriores, podia ser determinada a duração da corrente, isto é, a duração da faísca elétrica na descarga da garrafa de Leiden, e ao mesmo tempo a intensidade da corrente, assumindo que a corrente pudesse ser considerada como uniforme durante sua breve duração.

É bem conhecido que em experiências desse tipo a descarga da garrafa de Leiden é efetuada por meio de um barbante úmido, para evitar que ela ocorra através do ar em vez de ocorrer através dos finos fios dos dois instrumentos. Foram feitas desse jeito uma série de experiências. Uma bateria de oito garrafas sendo descarregada através de um barbante úmido de cânhamo com 7 milímetros de espessura e de vários comprimentos, os seguintes resultados foram encontrados:

Comprimento do barbante. Milímetros	Duração da faísca. Segundos
2 000	0,085 1
1 000	0,034 5
500	0,018 7
250	0,009 5

Portanto, a duração da faísca era aproximadamente proporcional ao comprimento do barbante; pois a duração observada da faísca é:

Segundos
0,081 6 + 0,003 5
0,040 8 − 0,006 3
0,020 4 − 0,001 7
0,010 2 − 0,000 7

A primeira parte da duração da faísca é assim exatamente proporcional ao comprimento do barbante; mas a segunda parte é tão pequena que pode ser considerada como tendo surgido do erro de observação que era inevitável.

É assim evidente que o resultado obtido pelo Prof. Wheatstone,[388] de acordo com o qual a duração da faísca na descarga por condutores metálicos simples é infinitamente curta em comparação com a duração encontrada nesse caso, está totalmente de acordo com esse resultado.

8.4.4 D. Aplicação do Dinamômetro para a Medição de Vibrações Sonoras

Quando ocorre uma alternância rápida de correntes positivas e negativas em um fio condutor, o movimento da eletricidade na corrente é convertido em uma *oscilação*. Contudo, uma oscilação desse tipo não pode ser observada com um galvanômetro (por exemplo, um galvanômetro senoidal ou um galvanômetro tangencial), já que nesse caso os efeitos das oscilações opostas sucessivas se cancelam.

Porém o caso é diferente com o dinamômetro, no qual a direção da oscilação nas duas bobinas muda simultaneamente, e no qual a deflexão observada é proporcional ao quadrado da intensidade da corrente; pois é evidente que a mudança simultânea da direção nas duas

[388]Ver a Nota de rodapé 217 na página 129.

bobinas não terá influência sobre a ação, já que no dinamômetro uma corrente negativa transmitida através das duas bobinas produz uma deflexão para o mesmo lado que uma corrente positiva transmitida através das duas bobinas. A ocorrência da deflexão do dinamômetro para um lado ou para o outro não depende da direção da corrente transmitida, como ocorre no galvanômetro, mas apenas do modo de conexão das extremidades dos fios das duas bobinas.

Porém uma vibração elétrica pode ser prontamente produzida em um fio condutor por uma barra de aço magnetizada que esteja vibrando de tal maneira a produzir um som musical, quando uma porção do fio condutor, enrolado como se fosse a bobina indutora, cerca a extremidade vibratória livre da barra, de tal forma que a direção da vibração [da barra] seja ortogonal ao plano das espiras do fio. Todas as vibrações da barra em uma direção produzem então correntes positivas no fio, e todas as vibrações para o outro lado produzem correntes negativas, que seguem uma à outra tão rapidamente quanto as próprias vibrações sonoras.

Quando as extremidades do fio da bobina indutora são unidas às extremidades do fio do dinamômetro, é observada uma deflexão desse último durante a vibração da barra, sendo que essa deflexão pode ser medida com precisão. Essa deflexão permanece inalterada enquanto a intensidade das vibrações sonoras permanecer inalterada, mas diminui rapidamente quado diminui a intensidade das vibrações sonoras; e quando a amplitude das vibrações sonoras tiver caído à metade, ela então chega a apenas à quarta parte.

Logo o dinamômetro apresenta uma maneira de estimar a intensidade das vibrações sonoras, o que é importante, já que ainda são muito necessários métodos apropriados para essas medições.

Além das investigações baseadas no uso do dinamômetro que foram consideradas até agora, há outras que serão tratadas a seguir, sendo que algumas modificações na construção desse instrumento para fins especiais também serão discutidas em mais detalhes.

8.5 Sobre a Conexão do Princípio Fundamental da Eletrodinâmica com o Princípio Fundamental da Eletrostática

O princípio fundamental da eletrostática afirma que quando duas massas elétricas (positivas ou negativas), denominadas e e e', estão separadas pela distância r, o valor da força com a qual as duas massas atuam reciprocamente entre si é expresso por

$$\frac{ee'}{r^2} ,$$

sendo que ocorre repulsão ou atração caso essa expressão tenha um valor positivo ou negativo.

Por outro lado, o princípio fundamental da eletrodinâmica é como segue. Quando dois elementos de corrente, cujos comprimentos são α e α' e as intensidades i e i', e que estão à distância r entre si, de tal forma que as direções nas quais a eletricidade positiva nos dois elementos se desloca formam entre si o ângulo ε, e forma com a linha reta que os conecta os ângulos ϑ e ϑ', então o valor da força com a qual os elementos de corrente atuam reciprocamente entre si é determinado pela expressão

$$
-\frac{\alpha\alpha' ii'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) ,
$$

sendo que ocorre repulsão ou atração quando essa expressão tem um valor positivo ou negativo.[389] As expressões do torque exercido por uma bobina do dinamômetro sobre a outra, desenvolvidas nas páginas[390] 241 e 243, foram todas deduzidas desse princípio fundamental.

O *primeiro* dos dois princípios fundamentais mencionados se refere a duas massas elétricas e à interação entre elas, o *último* a dois elementos de corrente e à interação entre eles. Uma conexão mais íntima entre os dois [princípios] só pode ser alcançada recorrendo, também no caso dos elementos de corrente, a uma consideração das massas elétricas que existem nos elementos de corrente e à interação entre elas.

Assim a próxima questão é saber quais massas elétricas estão contidas nos dois elementos de corrente, e em relação a quais relações mútuas entre essas massas dependem as ações recíprocas entre eles.

Se a massa de eletricidade positiva em uma porção do fio condutor com o tamanho de uma unidade de comprimento for representada por e sendo que, consequentemente, a massa da eletricidade positiva contida nos elementos de corrente cujos comprimentos são $= \alpha$, será representada por αe, e se u indicar a velocidade com que essa massa se desloca, o produto eu vai expressar aquela massa de eletricidade positiva que, em uma unidade de tempo, atravessa cada seção [reta] do fio condutor, com o qual a intensidade de corrente i deve ser ajustada proporcionalmente;[391] portanto, quando a designa um fator constante,

$$
aeu = i .
$$

Se agora αe representar a massa da eletricidade positiva no elemento de corrente α e u sua velocidade, $-\alpha e$ vai representar a massa de eletricidade negativa no mesmo elemento de corrente e $-u$ sua velocidade.

Temos também, quando se coloca

$$
ae'u' = i' ,
$$

a grandeza $\alpha' e'$ como sendo a massa de eletricidade positiva no segundo elemento de corrente α' e u' sua velocidade e, finalmente, $-\alpha' e'$ como sendo a massa de eletricidade negativa e $-u'$ sua velocidade. Se agora no lugar de i e i' na expressão da força que um elemento de corrente exerce sobre outro substituirmos seus valores $i = aeu$ e $i' = ae'u'$, obteremos então

$$
-\frac{\alpha e \alpha' e'}{r^2} a^2 uu' \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) .
$$

Se considerarmos agora *em primeiro lugar* nessa expressão $\alpha e \alpha' e'$ como sendo o produto das massas elétricas *positivas* αe e $\alpha' e'$ nos dois elementos de corrente, e uu' como sendo o produto de suas velocidades u e u', e se denotarmos por r à distância variável entre as duas massas em movimento; e se, finalmente, representarmos por $s_|$ e $s'_|$, o comprimento de uma

[389] Os ângulos ε, ϑ e ϑ' estão ilustrados na figura da Nota de rodapé 138 na página 82.

[390] [Web48a, páginas 229 e 230 das *Obras* de Weber].

[391] De acordo com o contexto da discussão apresentada nesse trabalho, essa velocidade u representa o movimento da partícula com carga elétrica e em relação à matéria do fio condutor, ou seja, é a suposta velocidade de arraste ou de deriva dessa partícula. Ver também as Notas de rodapé 243 e 262 nas páginas 142 e 156, respectivamente.

porção de cada um dos dois fios condutores, aos quais pertencem os elementos de corrente α e α', considerados a partir de um ponto definido de origem, procedendo na direção da eletricidade *positiva* e indo até o elemento de corrente que está sendo considerado, sabemos então que os cossenos dos dois ângulos ϑ e ϑ', que os dois fios condutores formam com a linha reta $r_|$ conectando-os, na posição dos elementos de corrente que estão sendo considerados, podem ser representados pelas derivadas parciais[392] de $r_|$ em relação a $s_|$ e $s'_|$; assim

$$\cos\vartheta = \frac{dr_|}{ds_|} , \qquad \cos\vartheta' = -\frac{dr_|}{ds'_|} ,$$

e temos então

$$\cos\varepsilon = -\, r_| \frac{d^2 r_|}{ds_| ds'_|} - \frac{dr_|}{ds_|}\frac{dr_|}{ds'_|} ,$$

como o cosseno do ângulo ε que as direções dos dois fios condutores fazem entre si. Além disso, se as derivadas mencionados anteriormente forem substituídas no lugar dos cossenos dos três ângulos ε, ϑ e ϑ', teremos

$$-\frac{\alpha e \alpha' e'}{{r_|}^2} a^2 uu' \left(\frac{1}{2}\frac{dr_|}{ds_|}\frac{dr_|}{ds'_|} - r_| \frac{d^2 r_|}{ds_| ds'_|} \right)$$

como sendo a expressão da força que um elemento de corrente exerce sobre o outro.

Em segundo lugar, se na expressão anterior $-\alpha e \alpha' e'$ for considerado como o produto da massa elétrica *positiva* αe de um elemento de corrente α com a massa elétrica *negativa* $-\alpha' e'$ do outro elemento de corrente α', e $-uu'$ for considerado como o produto de suas velocidades u e $-u'$; além disso, se a distância variável entre essas duas massas for denominada $r_{||}$ e se $s_|$ e $s'_{||}$ representarem o comprimento de uma porção de cada um dos dois fios condutores aos quais pertencem os elementos de corrente que estão sendo considerados, desde um ponto definido de origem, seguindo naquela direção na qual, no primeiro [elemento] flui a eletricidade *positiva* e no segundo [elemento] flui a eletricidade *negativa*, e indo até os elementos de corrente considerados, obteremos da mesma maneira

$$\cos\vartheta = \frac{dr_{||}}{ds_|} , \qquad \cos\vartheta' = \frac{dr_{||}}{ds'_{||}} , \qquad \cos\varepsilon = r_{||} \frac{d^2 r_{||}}{ds_| ds'_{||}} + \frac{dr_{||}}{ds_|}\frac{dr_{||}}{ds'_{||}} .$$

Ao substituir esses valores, teremos a seguinte expressão para a força com que um elemento de corrente atua sobre o outro:

$$+\frac{\alpha e \alpha' e'}{{r_{||}}^2} a^2 uu' \left(\frac{1}{2}\frac{dr_{||}}{ds_|}\frac{dr_{||}}{ds'_{||}} - r_{||} \frac{d^2 r_{||}}{ds_| ds'_{||}} \right) .$$

Se, *em terceiro lugar*, considerarmos na expressão original $\alpha e \alpha' e'$ como sendo o produto das massas elétricas *negativas* $-\alpha e$ e $-\alpha' e'$ nos dois elementos de corrente, e uu' como sendo o produto de suas velocidades $-u$ e $-u'$, e se $r_{|||}$ denotar a distância variável entre essas duas massas móveis e se, finalmente, $s_{||}$ e $s'_{||}$ denotarem o comprimento de uma porção de cada um dos dois fios condutores aos quais pertencem os elementos de corrente que estão sendo

[392]Em alemão: *durch die partiellen Differentialquotienten.* Essa expressão pode ser traduzida por derivadas parciais, quocientes diferenciais parciais ou coeficientes diferenciais parciais. Ver ainda a Nota de rodapé 276 na página 167.

considerados, calculados a partir de um ponto definido de origem, seguindo naquela direção em que flui a eletricidade *negativa*, indo até os elementos de corrente sob consideração; teremos

$$\cos\vartheta = -\frac{dr_{|||}}{dr_{||}} \ , \qquad\qquad \cos\vartheta' = \frac{dr_{|||}}{ds'_{||}} \ ,$$

e

$$\cos\varepsilon = -\ r_{|||}\frac{d^2r_{|||}}{ds_{||}ds'_{||}} - \frac{dr_{|||}}{ds_{||}}\frac{dr_{|||}}{ds'_{||}} \ .$$

Ao substituir esses valores, teremos uma terceira expressão para a força com que um elemento de corrente atua sobre o outro, a saber,

$$-\frac{\alpha e\alpha' e'}{{r_{|||}}^2}a^2uu'\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{|||}}{ds_{||}}\frac{dr_{|||}}{ds'_{||}} - r_{|||}\frac{d^2r_{|||}}{ds_{||}ds'_{||}}\right) \ .$$

Finalmente se, *em quarto lugar*, considerarmos na expressão original $-\alpha e\alpha' e'$ como sendo o produto da massa elétrica *negativa* $-\alpha e$ do elemento de corrente α com a massa elétrica *positiva* $\alpha' e'$ do elemento de corrente α', e $-uu'$ como sendo o produto de suas velocidades $-u$ e u'; e se, além disso, $r_{||||}$ designar a distância variável entre essas duas massas, e se $s_{||}$ e $s'_{|}$ for o comprimento de uma porção de cada um dos dois fios condutores aos quais pertencem os elementos de corrente que estão sendo considerados, calculados desde um ponto de origem definido, procedendo naquela direção na qual no primeiro [elemento] flui a eletricidade *negativa* e no segundo [elemento] flui a eletricidade *positiva*, [indo até os elementos de corrente sob consideração;] teremos

$$\cos\vartheta = -\frac{dr_{||||}}{ds_{||}} \ , \qquad\qquad \cos\vartheta' = -\frac{dr_{||||}}{ds'_{|}} \ ,$$

e

$$\cos\varepsilon = r_{||||}\frac{d^2r_{||||}}{ds_{||}ds'_{|}} + \frac{dr_{||||}}{ds_{||}}\frac{dr_{||||}}{ds'_{|}} \ .$$

Se esses valores forem agora substituídos, teremos a quarta expressão para a força com que um elemento de corrente atua sobre o outro, a saber

$$+\frac{\alpha e\alpha' e'}{{r_{||||}}^2}\alpha^2uu'\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{||||}}{ds_{||}}\frac{dr_{||||}}{ds'_{|}} - r_{||||}\frac{d^2r_{||||}}{ds_{||}ds'_{|}}\right) \ .$$

Agora naquele instante considerado no qual estão as massas elétricas mencionadas nos dois elementos α e α', as distâncias $r_|$, $r_{||}$, $r_{|||}$, $r_{||||}$, possuem todas o mesmo valor que será representado por r. Portanto, as quatro expressões da força eletrodinâmica entre os dois elementos de corrente α e α' ficam convertidas nas seguintes [formas]:

$$-\frac{\alpha e\alpha' e'}{r^2}a^2uu'\left(\frac{1}{2}\frac{dr_|}{ds_|}\frac{dr_|}{ds'_|} - r\frac{d^2r_|}{ds_|ds'_|}\right) \ , \qquad (1)$$

$$+\frac{\alpha e\alpha' e'}{r^2}a^2uu'\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{||}}{ds_{|}}\frac{dr_{||}}{ds'_{|}}-r\frac{d^2r_{||}}{ds_{|}ds'_{|}}\right) \ , \qquad (2)$$

$$-\frac{\alpha e\alpha' e'}{r^2}a^2uu'\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{|||}}{ds_{||}}\frac{dr_{|||}}{ds'_{||}}-r\frac{d^2r_{|||}}{ds_{||}ds'_{||}}\right) \ , \qquad (3)$$

e

$$+\frac{\alpha e\alpha' e'}{r^2}a^2uu'\left(\frac{1}{2}\frac{dr_{||||}}{ds_{||}}\frac{dr_{||||}}{ds'_{|}}-r\frac{d^2r_{||||}}{ds_{||}ds'_{|}}\right) \ , \qquad (4)$$

a partir das quais podemos construir uma quinta expressão, a saber:

$$-\frac{\alpha e\alpha' e'}{r^2}\frac{a^2}{4}uu'\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dr_{|}}{ds_{|}}\frac{dr_{|}}{ds'_{|}}-\frac{dr_{||}}{ds_{|}}\frac{dr_{||}}{ds'_{||}}+\frac{dr_{|||}}{ds_{||}}\frac{dr_{|||}}{ds'_{||}}-\frac{dr_{||||}}{ds_{||}}\frac{dr_{||||}}{ds'_{|}}\right)\right.$$
$$\left.-\ r\left(\frac{d^2r_{|}}{ds_{|}ds'_{|}}-\frac{d^2r_{||}}{ds_{|}ds'_{||}}+\frac{d^2r_{|||}}{ds_{||}ds'_{||}}-\frac{d^2r_{||||}}{ds_{||}ds'_{|}}\right)\right] \ . \qquad (5)$$

As quatro distâncias variáveis $r_{|}$, $r_{||}$, $r_{|||}$, $r_{||||}$, são agora, respectivamente, dependentes dos valores variáveis das trajetórias $s_{|}$ e $s'_{|}$, $s_{|}$ e $s'_{||}$, $s_{||}$ e $s'_{||}$, $s_{||}$ e $s'_{|}$, através das quais passaram as massas móveis a que se referem nos dois fios condutores dados e que, consequentemente, são novamente funções do tempo t. Ao desenvolver suas diferencias completas obtemos:

$$dr_{|}=\frac{dr_{|}}{ds_{|}}ds_{|}+\frac{dr_{|}}{ds'_{|}}ds'_{|} \ ,$$

$$dr_{||}=\frac{dr_{||}}{ds_{|}}ds_{|}+\frac{dr_{||}}{ds'_{||}}ds'_{||} \ ,$$

$$dr_{|||}=\frac{dr_{|||}}{ds_{||}}ds_{||}+\frac{dr_{|||}}{ds'_{||}}ds'_{||} \ ,$$

e

$$dr_{||||}=\frac{dr_{||||}}{ds_{||}}ds_{||}+\frac{dr_{||||}}{ds'_{|}}ds'_{|} \ ;$$

além disso,

$$d^2r_{|}=\frac{d^2r_{|}}{ds_{|}^2}ds_{|}^2+2\frac{d^2r_{|}}{ds_{|}ds'_{|}}ds_{|}ds'_{|}+\frac{d^2r_{|}}{ds'^2_{|}}ds'^2_{|} \ ,$$

$$d^2r_{||}=\frac{d^2r_{||}}{ds_{|}^2}ds_{|}^2+2\frac{d^2r_{||}}{ds_{|}ds'_{||}}ds_{|}ds'_{||}+\frac{d^2r_{||}}{ds'^2_{||}}ds'^2_{||} \ ,$$

$$d^2r_{|||}=\frac{d^2r_{|||}}{ds_{||}^2}ds_{||}^2+2\frac{d^2r_{|||}}{ds_{||}ds'_{||}}ds_{||}ds'_{||}+\frac{d^2r_{|||}}{ds'^2_{||}}ds'^2_{||} \ ,$$

e

$$d^2r_{||||} = \frac{d^2r_{||||}}{d{s_{||}}^2}d{s_{||}}^2 + 2\frac{d^2r_{||||}}{ds_{||}ds'_{|}}ds_{||}ds'_{|} + \frac{d^2r_{||||}}{d{s'_{|}}^2}d{s'_{|}}^2 \ .$$

Se essas diferenciais forem respectivamente divididas pelos elementos de tempo dt e por seus quadrados dt^2, e se admitirmos ainda que

$$\frac{ds_{|}}{dt} = \frac{ds_{||}}{dt} = u \ , \qquad \frac{ds'_{|}}{dt} = \frac{ds'_{||}}{dt} = u' \ ,$$

teremos

$$\frac{dr_{|}}{dt} = u\frac{dr_{|}}{ds_{|}} + u'\frac{dr_{|}}{ds'_{|}} \ ,$$

$$\frac{dr_{||}}{dt} = u\frac{dr_{||}}{ds_{|}} + u'\frac{dr_{||}}{ds'_{||}} \ ,$$

$$\frac{dr_{|||}}{dt} = u\frac{dr_{|||}}{ds_{||}} + u'\frac{dr_{|||}}{ds'_{||}} \ ,$$

e

$$\frac{dr_{||||}}{dt} = u\frac{dr_{||||}}{ds_{||}} + u'\frac{dr_{||||}}{ds'_{|}} \ ;$$

além disso,

$$\frac{d^2r_{|}}{dt^2} = u^2\frac{d^2r_{|}}{d{s_{|}}^2} + 2uu'\frac{d^2r_{|}}{ds_{|}ds'_{|}} + u'^2\frac{d^2r_{|}}{d{s'_{|}}^2} \ ,$$

$$\frac{d^2r_{||}}{dt^2} = u^2\frac{d^2r_{||}}{d{s_{|}}^2} + 2uu'\frac{d^2r_{||}}{ds_{|}ds'_{||}} + u'^2\frac{d^2r_{||}}{d{s'_{||}}^2} \ ,$$

$$\frac{d^2r_{|||}}{dt^2} = u^2\frac{d^2r_{|||}}{d{s_{||}}^2} + 2uu'\frac{d^2r_{|||}}{ds_{||}ds'_{||}} + u'^2\frac{d^2r_{|||}}{d{s'_{||}}^2} \ ,$$

e

$$\frac{d^2r_{||||}}{dt^2} = u^2\frac{d^2r_{||||}}{d{s_{||}}^2} + 2uu'\frac{d^2r_{||||}}{ds_{||}ds'_{|}} + u'^2\frac{d^2r_{||||}}{d{s'_{|}}^2} \ .$$

A partir dessas quatro últimas equações obtemos imediatamente:

$$2uu'\frac{d^2r_{|}}{ds_{|}ds'_{|}} = +\frac{d^2r_{|}}{dt^2} - u^2\frac{d^2r_{|}}{d{s_{|}}^2} - u'^2\frac{d^2r_{|}}{d{s'_{|}}^2} \ ,$$

$$-2uu'\frac{d^2r_{||}}{ds_{|}ds'_{||}} = -\frac{d^2r_{||}}{dt^2} + u^2\frac{d^2r_{||}}{d{s_{|}}^2} + u'^2\frac{d^2r_{||}}{d{s'_{||}}^2} \ ,$$

$$2uu'\frac{d^2r_{|||}}{ds_{|}ds'_{||}} = +\frac{d^2r_{|||}}{dt^2} - u^2\frac{d^2r_{|||}}{d{s_{||}}^2} - u'^2\frac{d^2r_{|||}}{d{s'_{||}}^2} \ ,$$

e

$$-2uu'\frac{d^2r_{||||}}{ds_{||}ds'_{|}} = -\frac{d^2r_{||||}}{dt^2} + u^2\frac{d^2r_{||||}}{{ds_{||}}^2} + u'^2\frac{d^2r_{||||}}{{ds'_{|}}^2} \ .$$

Agora as derivadas

$$\frac{d^2r_{|}}{{ds_{|}}^2} \ , \qquad \frac{d^2r_{||}}{{ds_{|}}^2} \ , \qquad \frac{d^2r_{|||}}{{ds_{||}}^2} \ , \qquad \frac{d^2r_{||||}}{{ds_{||}}^2} \ ,$$

possuem o mesmo valor, que depende apenas da posição e formato do *primeiro* fio condutor, e que iremos denominar d^2r/ds^2. Isso também se aplica às derivadas

$$\frac{d^2r_{|}}{{ds'_{|}}^2} \ , \qquad \frac{d^2r_{||}}{{ds'_{||}}^2} \ , \qquad \frac{d^2r_{|||}}{{ds'_{||}}^2} \ , \qquad \frac{d^2r_{||||}}{{ds'_{|}}^2} \ ,$$

todas as quais denotam as mesmas magnitudes, que são dependentes apenas da posição e do formato do *segundo* fio condutor, e que por brevidade denominaremos d^2r/ds'^2. Levando isso em consideração, ao somar as quatro últimas equações, obteremos:

$$2uu'\left(\frac{d^2r_{|}}{ds_{|}ds'_{|}} - \frac{d^2r_{||}}{ds_{|}ds'_{||}} + \frac{d^2r_{|||}}{ds_{||}ds'_{||}} - \frac{d^2r_{||||}}{ds_{||}ds'_{|}}\right)$$
$$= \frac{d^2r_{|}}{dt^2} - \frac{d^2r_{||}}{dt^2} + \frac{d^2r_{|||}}{dt^2} - \frac{d^2r_{||||}}{dt^2} \ .$$

No entanto, depois de elevar ao quadrado as quatro primeiras equações, obtemos:[393]

$$2uu'\frac{dr_{|}}{ds_{|}}\frac{dr_{|}}{ds'_{|}} = +\frac{{dr_{|}}^2}{dt^2} - u^2\frac{{dr_{|}}^2}{{ds_{|}}^2} - u'^2\frac{{dr_{|}}^2}{{ds'_{|}}^2} \ ,$$

$$-2uu'\frac{dr_{||}}{ds_{|}}\frac{dr_{||}}{ds'_{||}} = -\frac{{dr_{||}}^2}{dt^2} + u^2\frac{{dr_{||}}^2}{{ds_{|}}^2} + u'^2\frac{{dr_{||}}^2}{{ds'_{||}}^2} \ ,$$

$$2uu'\frac{dr_{|||}}{ds_{||}}\frac{dr_{|||}}{ds'_{||}} = +\frac{{dr_{|||}}^2}{dt^2} - u^2\frac{{dr_{|||}}^2}{{ds_{||}}^2} - u'^2\frac{{dr_{|||}}^2}{{ds'_{||}}^2} \ ,$$

[393] As quatro equações seguintes devem ser entendidas como:

$$2uu'\frac{dr_{|}}{ds_{|}}\frac{dr_{|}}{ds'_{|}} = +\left(\frac{dr_{|}}{dt}\right)^2 - u^2\left(\frac{dr_{|}}{ds_{|}}\right)^2 - (u')^2\left(\frac{dr_{|}}{ds'_{|}}\right)^2 \ ,$$

$$-2uu'\frac{dr_{||}}{ds_{|}}\frac{dr_{||}}{ds'_{||}} = -\left(\frac{dr_{||}}{dt}\right)^2 + u^2\left(\frac{dr_{||}}{ds_{|}}\right)^2 + (u')^2\left(\frac{dr_{||}}{ds'_{||}}\right)^2 \ ,$$

$$2uu'\frac{dr_{|||}}{ds_{||}}\frac{dr_{|||}}{ds'_{||}} = +\left(\frac{dr_{|||}}{dt}\right)^2 - u^2\left(\frac{dr_{|||}}{ds_{||}}\right)^2 - (u')^2\left(\frac{dr_{|||}}{ds'_{||}}\right)^2 \ ,$$

e

$$-2uu'\frac{dr_{||||}}{ds_{||}}\frac{dr_{||||}}{ds'_{|}} = -\left(\frac{dr_{||||}}{dt}\right)^2 + u^2\left(\frac{dr_{||||}}{ds_{||}}\right)^2 + (u')^2\left(\frac{dr_{||||}}{ds'_{|}}\right)^2 \ .$$

e

$$-2uu'\frac{dr_{||||}}{ds_{||}}\frac{dr_{||||}}{ds'_{|}} = -\frac{dr_{||||}{}^2}{dt^2} + u^2\frac{dr_{||||}{}^2}{ds_{||}{}^2} + u'^2\frac{dr_{||||}{}^2}{ds'^2_{|}} \ .$$

Agora as derivadas

$$\frac{dr_{|}{}^2}{ds_{|}{}^2} \ , \qquad \frac{dr_{||}{}^2}{ds_{|}{}^2} \ , \qquad \frac{dr_{|||}{}^2}{ds_{||}{}^2} \ , \qquad \frac{dr_{||||}{}^2}{ds_{||}{}^2}$$

também possuem o mesmo valor, que será denominado dr^2/ds^2, assim como possuem o mesmo valor [as seguintes grandezas:]

$$\frac{dr_{|}{}^2}{ds'^2_{|}} \ , \qquad \frac{dr_{||}{}^2}{ds'^{\,2}_{||}} \ , \qquad \frac{dr_{|||}{}^2}{ds'^{\,2}_{||}} \ , \qquad \frac{dr_{||||}{}^2}{ds'^2_{|}} \ ,$$

que serão denominadas dr^2/ds'^2.

Após fazer a somatória levando isso em consideração teremos

$$2uu'\left(\frac{dr_{|}}{ds_{|}}\frac{dr_{|}}{ds'_{|}} - \frac{dr_{||}}{ds_{|}}\frac{dr_{||}}{ds'_{||}} + \frac{dr_{|||}}{ds_{||}}\frac{dr_{|||}}{ds'_{||}} - \frac{dr_{||||}}{ds_{||}}\frac{dr_{||||}}{dr'_{|}}\right)$$
$$= \frac{dr_{|}{}^2}{dt^2} - \frac{dr_{||}{}^2}{dt^2} + \frac{dr_{|||}{}^2}{dt^2} - \frac{dr_{||||}{}^2}{dt^2} \ .$$

Ao substituir esses valores na quinta expressão encontrada para a força eletrodinâmica ela se torna

$$-\frac{\alpha e\alpha' e'}{r^2}\frac{a^2}{16}\left[\left(\frac{dr_{|}{}^2}{dt^2} - \frac{dr_{||}{}^2}{dt^2} + \frac{dr_{|||}{}^2}{dt^2} - \frac{dr_{||||}{}^2}{dt^2}\right)\right.$$
$$\left. - 2r\left(\frac{d^2r_{|}}{dt^2} - \frac{d^2r_{||}}{dt^2} + \frac{d^2r_{|||}}{dt^2} - \frac{d^2r_{||||}}{dt^2}\right)\right] \ ,$$

uma expressão que pode ser decomposta nos quatro membros a seguir:

$$-\frac{\alpha e\alpha' e'}{r_{|}{}^2}\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr_{|}{}^2}{dt^2} - 2r_{|}\frac{d^2r_{|}}{dt^2}\right) \ ,$$

$$+\frac{\alpha e\alpha' e'}{r_{||}{}^2}\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr_{||}{}^2}{dt^2} - 2r_{||}\frac{d^2r_{||}}{dt^2}\right) \ ,$$

$$-\frac{\alpha e\alpha' e'}{r_{|||}{}^2}\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr_{|||}{}^2}{dt^2} - 2r_{|||}\frac{d^2r_{|||}}{dt^2}\right) \ ,$$

e

$$+\frac{\alpha e\alpha' e'}{r_{||||}{}^2}\frac{a^2}{16}\left(\frac{dr_{||||}{}^2}{dt^2} - 2r_{||||}\frac{d^2r_{||||}}{dt^2}\right) \ .$$

Cada um desses quatro membros refere-se exclusivamente a *duas* das quatro massas elétricas distinguidas nos dois elementos de corrente, a saber, o *primeiro* membro refere-se às duas massas positivas αe e $\alpha' e'$, sendo que a distância relativa entre elas é $r_{|}$, velocidade

$dr_|/dt$, e aceleração $d^2r_|/dt^2$; o *segundo* [membro refere-se] à massa positiva αe no primeiro [elemento] e à massa negativa $-\alpha' e'$ no segundo elemento, cuja distância relativa entre elas é $r_{||}$, velocidade $dr_{||}/dt$, e aceleração $d^2r_{||}/dt^2$, e assim por diante; e de fato todos os quatro membros são compostos *exatamente da mesma maneira* das massas a que se referem, de suas distâncias, velocidades e acelerações.

Portanto, é evidente que se toda a expressão da força eletrodinâmica entre dois elementos de corrente for considerada como a soma de forças que cada duas das quatro massas elétricas que eles contêm exercem entre si, essa soma seria decomposta em seus *constituintes originais*, os quatro membros anteriores representando individualmente as quatro forças que as quatro massas elétricas nos dois elementos exercem entre si *aos pares*.

Logo, também a força com que qualquer massa positiva ou negativa E atua sobre qualquer outra massa positiva ou negativa E', à distância R, com uma velocidade relativa dR/dt, e aceleração relativa d^2R/dt^2, pode ser expressa como[394]

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{EE'}{R^2}\left(\frac{dR^2}{dt^2}-2R\frac{d^2R}{dt^2}\right) \ ;$$

pois esse princípio fundamental é necessário e ao mesmo tempo suficiente para permitir a dedução das leis eletrodinâmicas de Ampère, que foram confirmadas pelas experiências anteriores.

Contudo, esse novo princípio fundamental da eletrodinâmica é, por sua própria natureza, *mais geral* do que aquele princípio apresentado por Ampère; pois esse último [princípio] refere-se apenas ao caso especial no qual quatro massas elétricas são dadas simultaneamente, sujeitas às condições estabelecidas para elementos de corrente invariáveis e imóveis, enquanto que nenhuma restrição às condições indicadas ocorre no primeiro [princípio]. Consequentemente, esse [novo] princípio fundamental permite aplicações naqueles casos em que o último [princípio] é inaplicável, portanto ele tem uma maior utilidade.

Finalmente, se o recém-descoberto princípio fundamental da eletrodinâmica for comparado com o princípio fundamental da eletrostática mencionado no início [dessa Seção], veremos que cada um deles estima a força que *duas massas elétricas* exercem entre si; mas que nos casos considerados até aqui, uma das duas forças desaparece de cada vez, portanto apenas a outra força precisa ser considerada. Isso ocorre, *em primeiro lugar*, em todos os casos que pertencem à eletrostática, já que aqui sempre desaparece a força determinada pelo novo princípio da eletrodinâmica; mas isso também ocorre, *em segundo lugar*, em todos os casos que pertencem à eletrodinâmica que já estiveram sob consideração, nos quais se pressupõe que sempre existem relações nas quais todas as forças estimadas pelo princípio da eletrostática se cancelam mutuamente.[395]

Assim os dois princípios são complementares entre si e, portanto, podem ser combinados para formar um princípio fundamental geral *para toda a teoria da eletricidade*, que contém a eletrostática e a eletrodinâmica.

Pelo princípio fundamental da eletrostática, encontrou-se uma força

[394] A próxima expressão deve ser entendida como:

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{EE'}{R^2}\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2-2R\frac{d^2R}{dt^2}\right] \ .$$

[395] Como é o caso da interação entre dois elementos de corrente que são neutros eletricamente.

$$= \frac{EE'}{R^2}$$

para duas massas elétricas E e E' na distância R; se essa força for então adicionada àquela dada pelo novo princípio da eletrodinâmica,[396]

$$= -\frac{a^2}{16} \cdot \frac{EE'}{R^2} \left(\frac{dR^2}{dt^2} - 2R\frac{d^2R}{dt^2} \right) ,$$

obteremos como a expressão geral para a determinação completa da força que qualquer massa elétrica E exerce sobre uma outra [massa elétrica] E', estando elas imóveis ou em movimento,[397]

$$\frac{EE'}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{16} \cdot \frac{dR^2}{dt^2} + \frac{a^2}{8} \cdot R\frac{d^2R}{dt^2} \right) .$$

Para uma unidade de medida específica usada como base para a medição do tempo, na qual $a = 4$, essa expressão torna-se

$$\frac{EE'}{R^2} \left(1 - \frac{dR^2}{dt^2} + 2R\frac{d^2R}{dt^2} \right) .$$

Além disso, supondo que R e dR/dt sejam funções [do tempo] t, consequentemente assumindo que dR/dt seja considerada uma função de R, que vamos denominar por $[R]$, também podemos dizer que o *potencial* da massa E em relação à localização da massa E' é [dado por:]

$$= \frac{E}{R} \left(1 - [R]^2 \right) ;$$

pois as derivadas parciais dessa expressão, com relação às três coordenadas x, y, z, fornecem a força acelerativa decomposta na direção dos três eixos coordenados.

Finalmente, se por *velocidade relativa reduzida* das massas E e E' entendermos aquela velocidade relativa, que essas massas — que no momento considerado estão à distância R, com velocidade relativa dR/dt e aceleração d^2R/dt^2 — *se a última fosse constante*, naquele instante em que ambas, segundo esta hipótese, colidem em um ponto, e se V designar esta velocidade relativa reduzida, então a expressão anterior:

$$\frac{EE'}{R^2} \left(1 - \frac{dR^2}{dt^2} + 2R\frac{d^2R}{dt^2} \right) ,$$

ficará convertida na seguinte expressão:

[396] Por um erro de impressão a próxima equação apareceu no texto original na forma

$$= -\frac{a^2}{16} \cdot \frac{EE'}{R^2} \left(\frac{dR^2}{dt^2} - 2\frac{d^2R}{dt^2} \right) .$$

[397] A próxima equação deve ser entendida como

$$\frac{EE'}{R^2} \left[1 - \frac{a^2}{16} \cdot \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{a^2}{8} \cdot R\frac{d^2R}{dt^2} \right] .$$

$$\frac{EE'}{R^2}\left(1 - V^2\right) \ ,$$

que pode ser expressa verbalmente da seguinte maneira. *A diminuição, decorrente do movimento, da força com a qual duas massas elétricas agiriam uma sobre a outra se não estivessem em movimento, é proporcional ao quadrado de velocidade relativa reduzida entre elas.*

Assim a expressão dada para a determinação da força que duas massas elétricas exercem entre si está agora confirmada:

1. em todo o domínio da eletrostática;

2. naquele domínio da eletrodinâmica que lida com forças entre elementos de corrente imutáveis e imóveis;

3. portanto, só falta sua confirmação naquele domínio da eletrodinâmica que não está limitado ao estado imutável e imóvel dos elementos de corrente.

8.6 Teoria de Indução Eletrovoltaica

Já foi mencionado que o princípio da eletrodinâmica apresentado por Ampère refere-se apenas ao caso especial em que quatro massas elétricas estão sob as condições pressupostas para dois elementos de corrente imutáveis e imóveis. Em condições nas quais essas condições não existem, apenas o novo princípio fundamental pode ser aplicado para a determinação *a priori* das forças e fenômenos; e é exatamente dessa forma que será exibida a maior vantagem do novo princípio que surge de sua aplicação mais geral.

O caso no qual é inaplicável o princípio da eletrodinâmica apresentado por Ampère ocorre então quando um elemento de corrente é deslocado ou sua intensidade de corrente varia; sendo que além disso também pode ocorrer que em vez do outro elemento de corrente, pode estar presente apenas um elemento de condutor, sem que contudo qualquer corrente esteja presente nele. De fato, sabemos da experiência que correntes são então excitadas ou *induzidas*, e os fenômenos dessas correntes induzidas estão contidos sob a denominação de *indução eletrovoltaica*;[398] mas nenhum desses fenômenos podia ser previsto ou estimado *a priori* seja pelo princípio da eletrostática ou pelo princípio da eletrodinâmica apresentado por Ampère. Contudo, será mostrado que por meio do novo princípio fundamental apresentado aqui, podem ser deduzidas as leis para a determinação *a priori* de todos os fenômenos da indução eletrovoltaica. É evidente que as leis da indução eletrovoltaica deduzidas dessa maneira são corretas apenas até onde possuímos observações definidas.

Para o propósito dessa dedução, as grandezas relacionadas podem ser denominadas como segue: α e α' denotam os comprimentos dos dois elementos, sendo que o primeiro deles, α, é suposto *em repouso*. Essa suposição não limita a generalidade da consideração, já que todo movimento do elemento α pode ser transferido para α', ao atribuir a direção oposta a esse movimento em α'. As seguintes quatro massas elétricas são distinguidas nesses dois elementos, a saber,

$$+\alpha e \ , \quad -\alpha e \ , \quad +\alpha' e' \ , \quad -\alpha' e' \ .$$

[398] Ver a Nota de rodapé 173 na página 105.

A *primeira* dessas massas, $+\alpha e$, desloca-se com velocidade $+u$ na direção do elemento em repouso α, que faz o ângulo ϑ com a linha reta traçada de α para α'. Essa velocidade muda pelo valor $+du$ durante o elemento de tempo dt.

A *segunda* massa $-\alpha e$ desloca-se, de acordo com as determinações relacionadas a uma corrente galvânica, na mesma direção com velocidade $-u$, isto é, para trás, e essa velocidade durante o elemento de tempo dt altera-se em $-du$.

A *terceira* massa $+\alpha' e'$ desloca-se com velocidade $+u'$ na direção do elemento α', que faz o ângulo ϑ' com a reta traçada e estendida de α para α'. Essa velocidade no elemento de tempo dt altera-se em $+du'$. Além disso, essa massa elétrica compartilha do movimento do elemento α', que ocorre com velocidade v em uma direção que forma o ângulo η com a linha reta prolongada traçada de α para α', e que está contido em um plano que está ao longo dessa linha reta e que, juntamente com o plano que é paralelo com o elemento α e passando através da mesma linha reta [que os une], forma o ângulo γ. A velocidade v se altera em dv durante o elemento de tempo dt.

A *quarta* massa $-\alpha' e'$ desloca-se, de acordo com as determinações para uma corrente galvânica, na direção do elemento α', com a velocidade $-u'$ que altera-se em $-du'$ durante o elemento de tempo dt; mas, além disso, como a massa anterior, compartilha a velocidade v do elemento α' na direção já indicada.[399]

As distâncias das duas primeiras massas em relação às duas últimas, no instante que está sendo considerado, são iguais à distância r entre os dois próprios elementos; mas como elas não permanecem as mesmas [ao longo do tempo], serão denominadas por r_1, r_2, r_3, r_4.

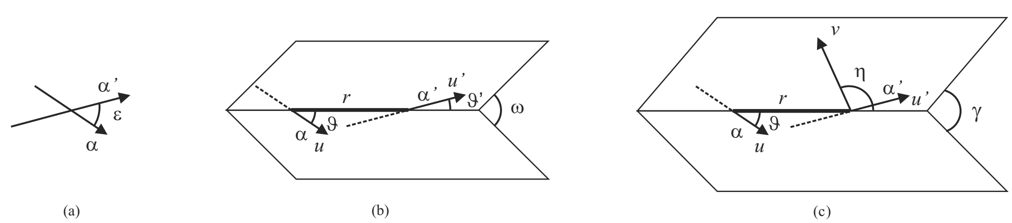
Por último, se dois planos passam através da linha reta traçada de α para α', um deles paralelo a α, o outro paralelo a α', o ângulo englobado por esses dois planos é denotado por ω.

Ao aplicar então o novo princípio, obtemos como a *soma* das forças que atuam na eletricidade *positiva* e *negativa* no elemento α', isto é, como a força que move o próprio elemento α', a seguinte expressão:

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{\alpha e\cdot\alpha' e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)\right.$$
$$\left.-\,2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}+\frac{d^2r_2}{dt^2}-\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\}\ .$$

Porém, para a *diferença* entre essas forças, da qual depende a *indução*, obtemos a seguinte expressão:

[399]Os ângulos ε, ϑ, ϑ', ω, η e γ para esse caso estão representados na Figura dessa Nota de rodapé:



Em (a) temos ε, o ângulo entre as direções α e α'. Em (b) temos os ângulos ϑ e ϑ'. Além disso, as direções α e r formam um plano, enquanto que as direções α' e r formam um outro plano. O ângulo entre esses dois planos é denotado por ω. Em (c) temos o ângulo η. Além disso, as direções v e r formam um plano, enquanto que as direções α e r formam um outro plano. O ângulo entre esses dois planos é denotado por γ.

$$-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{\alpha e\cdot\alpha' e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)\right.$$

$$\left.-\ 2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\}\ .$$

Além disso, quando é levado em consideração, além dos movimentos das massas elétricas nos condutores, o movimento comum a elas e a seus condutores, temos as seguintes expressões para as primeiras derivadas:

$$\frac{dr_1}{dt}=-u\cos\vartheta+u'\cos\vartheta'+v\cos\eta\ ,$$

$$\frac{dr_2}{dt}=+u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta'+v\cos\eta\ ,$$

$$\frac{dr_3}{dt}=-u\cos\vartheta-u'\cos\vartheta'+v\cos\eta\ ,$$

e

$$\frac{dr_4}{dt}=+u\cos\vartheta+u'\cos\vartheta'+v\cos\eta\ .$$

Portanto

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}+\frac{dr_2^2}{dt^2}-\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8uu'\cos\vartheta\cos\vartheta'\ ,$$

e

$$\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=-8uv\cos\vartheta\cos\eta\ .$$

Obtemos as derivadas de segunda ordem quando também é levada em consideração a variabilidade das velocidades u, u', e v:

$$\frac{d^2r_1}{dt^2}=+u\operatorname{sen}\vartheta\frac{d\vartheta_1}{dt}-u'\operatorname{sen}\vartheta'\frac{d\vartheta_1'}{dt}-v\operatorname{sen}\eta\frac{d\eta_1}{dt}$$

$$-\ \cos\vartheta\frac{du}{dt}+\cos\vartheta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt}\ ,$$

$$\frac{d^2r_2}{dt^2}=-u\operatorname{sen}\vartheta\frac{d\vartheta_2}{dt}+u'\operatorname{sen}\vartheta'\frac{d\vartheta_2'}{dt}-v\operatorname{sen}\eta\frac{d\eta_2}{dt}$$

$$+\ \cos\vartheta\frac{du}{dt}-\cos\vartheta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt}\ ,$$

$$\frac{d^2r_3}{dt^2}=+u\operatorname{sen}\vartheta\frac{d\vartheta_3}{dt}+u'\operatorname{sen}\vartheta'\frac{d\vartheta_3'}{dt}-v\operatorname{sen}\eta\frac{d\eta_3}{dt}$$

$$-\ \cos\vartheta\frac{du}{dt}-\cos\vartheta'\frac{du'}{dt}+\cos\eta\frac{dv}{dt}\ ,$$

e

$$\frac{d^2r_4}{dt^2} = -u \operatorname{sen}\vartheta \frac{d\vartheta_4}{dt} - u' \operatorname{sen}\vartheta' \frac{d\vartheta'_4}{dt} - v \operatorname{sen}\eta \frac{d\eta_4}{dt}$$

$$+ \ \cos\vartheta \frac{du}{dt} + \cos\vartheta' \frac{du'}{dt} + \cos\eta \frac{dv}{dt} \ .$$

Segue-se consequentemente:

$$\left(\frac{d^2r_1}{dt^2} + \frac{d^2r_2}{dt^2} - \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2}\right) = +u \operatorname{sen}\vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} - \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$

$$- \ u' \operatorname{sen}\vartheta' \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} - \frac{d\vartheta'_2}{dt} + \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right) - v \operatorname{sen}\eta \left(\frac{d\eta_1}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} - \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right) \ ,$$

e

$$\left(\frac{d^2r_1}{dt^2} - \frac{d^2r_2}{dt^2} + \frac{d^2r_3}{dt^2} - \frac{d^2r_4}{dt^2}\right) = +u \operatorname{sen}\vartheta \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt}\right)$$

$$- \ u' \operatorname{sen}\vartheta' \left(\frac{d\vartheta'_1}{dt} + \frac{d\vartheta'_2}{dt} - \frac{d\vartheta'_3}{dt} - \frac{d\vartheta'_4}{dt}\right) - v \operatorname{sen}\eta \left(\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{d\eta_2}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt}\right)$$

$$- \ 4\cos\vartheta \frac{du}{dt} \ .$$

As derivadas $d\vartheta_1/dt$, $d\vartheta'_1/dt$, $d\eta_1/dt$, etc. são facilmente desenvolvidas de acordo com leis bem conhecidas da trigonometria; e então obtemos as seguintes expressões, a saber:

$$r_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} = +u \operatorname{sen}\vartheta - u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos\gamma \ ,$$

$$r_1 \frac{d\vartheta'_1}{dt} = -u' \operatorname{sen}\vartheta' + u \operatorname{sen}\vartheta \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos(\omega + \gamma) \ ,$$

$$r_1 \frac{d\eta_1}{dt} = -v \operatorname{sen}\eta + u \operatorname{sen}\vartheta \cos\gamma - u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos(\omega + \gamma) \ ,$$

$$r_2 \frac{d\vartheta_2}{dt} = -u \operatorname{sen}\vartheta + u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos\gamma \ ,$$

$$r_2 \frac{d\vartheta'_2}{dt} = +u' \operatorname{sen}\vartheta' - u \operatorname{sen}\vartheta \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos(\omega + \gamma) \ ,$$

$$r_2 \frac{d\eta_2}{dt} = -v \operatorname{sen}\eta - u \operatorname{sen}\vartheta \cos\gamma + u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos(\omega + \gamma) \ ,$$

$$r_3 \frac{d\vartheta_3}{dt} = +u \operatorname{sen}\vartheta + u' \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos\gamma \ ,$$

$$r_3 \frac{d\vartheta'_3}{dt} = +u' \operatorname{sen}\vartheta' + u \operatorname{sen}\vartheta \cos\omega - v \operatorname{sen}\eta \cos(\omega + \gamma) \ ,$$

$$r_3 \frac{d\eta_3}{dt} = -v \operatorname{sen} \eta + u \operatorname{sen} \vartheta \cos \gamma + u' \operatorname{sen} \vartheta' \cos(\omega + \gamma) \ ,$$

$$r_4 \frac{d\vartheta_4}{dt} = -u \operatorname{sen} \vartheta - u' \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega - v \operatorname{sen} \eta \cos \gamma \ ,$$

$$r_4 \frac{d\vartheta_4'}{dt} = -u' \operatorname{sen} \vartheta' - u \operatorname{sen} \vartheta \cos \omega - v \operatorname{sen} \eta \cos(\omega + \gamma) \ ,$$

e

$$r_4 \frac{d\eta_4}{dt} = -v \operatorname{sen} \eta - u \operatorname{sen} \vartheta \cos \gamma - u' \operatorname{sen} \vartheta' \cos(\omega + \gamma) \ .$$

Agora como no instante que está sendo considerado $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$, obtemos assim:

$$r \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} - \frac{d\vartheta_2}{dt} - \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt} \right) = -4u' \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega \ ,$$

e

$$r \left(\frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{d\vartheta_2}{dt} + \frac{d\vartheta_3}{dt} + \frac{d\vartheta_4}{dt} \right) = -4v \operatorname{sen} \eta \cos \gamma \ ;$$

novamente:

$$r \left(\frac{d\vartheta_1'}{dt} - \frac{d\vartheta_2'}{dt} + \frac{d\vartheta_3'}{dt} - \frac{d\vartheta_4'}{dt} \right) = +4u \operatorname{sen} \vartheta \cos \omega \ ,$$

e

$$r \left(\frac{d\vartheta_1'}{dt} + \frac{d\vartheta_2'}{dt} - \frac{d\vartheta_3'}{dt} - \frac{d\vartheta_4'}{dt} \right) = 0 \ ;$$

por último:

$$r \left(\frac{d\eta_1}{dt} + \frac{d\eta_2}{dt} - \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt} \right) = 0 \ ,$$

e

$$r \left(\frac{d\eta_1}{dt} - \frac{d\eta_2}{dt} + \frac{d\eta_3}{dt} - \frac{d\eta_4}{dt} \right) = +4u \operatorname{sen} \vartheta \cos \gamma \ .$$

Ao substituir esses valores, obtemos:

$$r \left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{d^2 r_2}{dt^2} - \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} \right) = -8uu' \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta' \cos \omega \ ,$$

e

$$r \left(\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_2}{dt^2} + \frac{d^2 r_3}{dt^2} - \frac{d^2 r_4}{dt^2} \right) = -8uv \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \eta \cos \gamma - 4r \cos \vartheta \frac{du}{dt} \ .$$

Com esses valores, a *soma* das forças que atuam sobre a eletricidade *positiva* e *negativa* no elemento α' fica[400]

[400] Devido a um erro de impressão, a próxima equação apareceu no texto original como:

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot aeu \cdot ae'u' \left(\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' \right) \ .$$

Se nessa equação o ângulo que as direções dos dois elementos α e α' fazem entre si for denotado por ε, e se, como na página[401] 250, i e i' forem substituídos no lugar de aeu e[402] $ae'u'$, a soma anterior, após uma pequena transformação, torna-se:

$$= -\frac{\alpha\alpha' ii'}{r^2} \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta' \right) \ ,$$

[ou seja,] a mesma expressão a que Ampère chegou quando os elementos de corrente são imutáveis e imóveis, isto é, a força eletrodinâmica atuando sobre todo o elemento α' é determinada da mesma maneira quando os condutores estão em movimento e as intensidade de corrente são variáveis, do que quando as intensidade de corrente permanecem invariáveis e os condutores imóveis. Portanto, a lei de Ampère é de aplicação geral na determinação das forças que atuam sobre todo o elemento de corrente quando são dadas as posições dos elementos de corrente e as intensidades de corrente. A aplicação dessa lei só requer que as intensidades de corrente, quando variáveis, assim como as posições, quando variáveis, sejam dadas *para cada instante particular* e, além disso, [quando são dadas] as intensidades de corrente, incluindo aquela parte adicionada em cada instante como consequência da indução.

Mas no que diz respeito à *diferença* das forças que atuam na eletricidade *positiva* e *negativa* no elemento α', pela qual essas duas eletricidades são separadas entre si, e se deslocam no condutor em direções opostas, essa diferença torna-se agora

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot aeu \cdot ae'v \left(\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\eta \cos\gamma - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta \right) - \frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} a^2 ee' \cos\vartheta \frac{du}{dt} \ ,$$

ou, como $aeu = i$ e $aedu = di$,

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i \left(\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\eta \cos\gamma - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta \right) \cdot ae'v - \frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} ae' \cos\vartheta \frac{di}{dt} \ .$$

A força assim determinada tende então a separar a eletricidade *positiva* da *negativa* no elemento induzido α' na direção da linha reta r. Contudo, quando o condutor é linear, a separação não pode ocorrer nessa direção, mas apenas na direção do próprio elemento linear induzido α', que faz o ângulo ϑ' com a linha reta r. Ao decompor assim toda a força de separação[403] anterior nessa direção, isto é, ao multiplicar o valor anterior por $\cos\vartheta'$, encontramos a força que produz a verdadeira separação

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i \left(\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\eta \cos\gamma - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta \right) \cdot ae'v \cos\vartheta'$$

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2} \cdot aeu \cdot a'e'u' \left(\operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta' \cos\omega - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\eta \right) \ .$$

401[Web48a, página 238 das *Obras* de Weber].

402Devido a um erro de impressão, a próxima expressão apareceu como $a'e'u'$, sendo que a expressão correta devia ser $ae'u'$.

403Em alemão: *Scheidungskraft*, ver a Nota de rodapé 316 na página 189.

$$-\ \frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}ae'\cos\vartheta\cos\vartheta'\frac{di}{dt}\ .$$

Essa expressão, dividida por e', fornece a força *eletromotriz* exercida pelo elemento indutor α sobre o elemento induzido α', no sentido comum,

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos\gamma - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta\right)\cdot av\cos\vartheta'$$

$$-\ \frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}a\cos\vartheta\cos\vartheta'\frac{di}{dt}\ .$$

Essa é, portanto, *a lei geral de indução voltaica, como a mesma é deduzida a partir do novo princípio fundamental apresentado da teoria da eletricidade.*

Se agora, *em primeiro lugar*, considerarmos o caso *no qual não ocorre qualquer alteração na intensidade da corrente*, ou seja,

$$\frac{di}{dt} = 0\ ,$$

temos *a lei de indução exercida por um elemento de corrente constante sobre o elemento de um condutor deslocando-se em relação a ele*, isto é, a força *eletromotriz* torna-se

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos\gamma - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta\right)\cdot av\cos\vartheta'\ ,$$

ou, quando ε denota o ângulo que a direção do elemento indutor de corrente forma com a direção na qual é deslocado o próprio elemento induzido, torna-se por uma simples transformação

$$= -\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\eta\right)\cdot av\cos\vartheta'\ .$$

A corrente induzida é *positiva* ou *negativa* dependendo se essa expressão tem um valor *positivo* ou *negativo*; sendo que uma corrente positiva é entendida como aquela corrente na qual a eletricidade positiva se desloca na direção do elemento α', que forma o ângulo ϑ' com a linha reta estendida r.

Caso, por exemplo, os elementos α e α' forem paralelos entre si, e se a direção na qual o último é deslocado com velocidade v estiver contida no plano dessas duas paralelas, e ortogonal às suas direções, teremos, *quando α' se afasta de α por meio desse movimento*:

$$\vartheta = \vartheta'\ , \qquad \cos\eta = \operatorname{sen}\vartheta\ , \qquad \cos\varepsilon = 0\ ;$$

consequentemente a força *eletromotriz* fica na forma

$$= +\frac{3}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\operatorname{sen}\vartheta\cos^2\vartheta\cdot av\ .$$

Esse valor é sempre *positivo*, pois temos de considerar $\vartheta < 180^{\mathrm{o}}$; e esse valor *positivo* denota uma corrente induzida na mesma direção que a corrente indutora, em concordância com o que foi encontrado pela experiência para esse caso.

Sob as mesmas condições, apenas com a diferença que *o elemento α' por seu movimento se aproxima do elemento α*, teremos:

$$\vartheta = \vartheta' \ , \qquad \cos\eta = -\operatorname{sen}\vartheta \ , \qquad \cos\varepsilon = 0 \ ;$$

consequentemente a força *eletromotriz* torna-se nesse caso:

$$= -\frac{3}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i \operatorname{sen}\vartheta\cos^2\vartheta \cdot av \ .$$

O valor *negativo* dessa força denota uma corrente induzida na direção oposta à corrente indutora, também em conformidade com o que a experiência forneceu para esse caso.

Como é bem conhecido, a indução eletrovoltaica pode ser produzida de duas formas essencialmente diferentes; já que correntes podem ser induzidas por correntes *constantes* e por correntes *variáveis*. Ela é produzida por correntes *constantes* quando o condutor no qual flui a corrente se desloca em direção ao condutor no qual a corrente será induzida, ou *vice-versa*. Ela pode ser induzida por correntes *variáveis* mesmo quando o condutor através do qual flui a corrente permanece parado em relação ao condutor no qual uma corrente é para ser induzida.

Assim como a lei particular do primeiro tipo de indução eletrovoltaica foi encontrada imediatamente da *lei geral de indução eletrovoltaica* deduzida anteriormente ao inserir a equação condicional

$$\frac{di}{dt} = 0 \ ,$$

também encontramos a lei específica para o último tipo de indução eletrovoltaica a partir da equação condicional

$$v = 0 \ .$$

Assim se considerarmos, *em segundo lugar*, o caso no qual *não ocorre movimento entre os condutores*, ou quando $v = 0$, obtemos a *lei de indução de uma corrente variável [ao atuar] sobre um elemento de um condutor que não está em movimento*, ou o valor da força eletromotriz [da seguinte forma]:

$$= -\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r} a\cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot \frac{di}{dt} \ .$$

Portanto a indução durante o elemento de tempo dt, isto é, o produto desse elemento de tempo na *força eletromotriz* que está atuando, torna-se

$$= -\frac{a}{2}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot di \ ,$$

consequentemente a indução para qualquer período de tempo no qual a intensidade da corrente indutora aumenta de i, enquanto que r, ϑ e ϑ' permanecem inalterados, é

$$= -\frac{a}{2}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r} i\cos\vartheta\cos\vartheta' \ .$$

O valor *positivo* nessa expressão denota uma corrente induzida no elemento α' na direção de α', sendo que a linha reta r estendida forma o ângulo ϑ' com essa direção; o valor *negativo* denota uma corrente induzida na direção oposta.

Quando os dois elementos α e α' são paralelos, e $\vartheta = \vartheta'$, a expressão anterior, quando a intensidade da corrente está *aumentando*, ou quando o valor de i é positivo, tem um valor *negativo*, isto é, quando a intensidade da corrente está aumentando em α, é excitada uma corrente em α' em uma direção oposta à direção da corrente indutora. Acontece o contrário quando a intensidade da corrente diminui. Esses dois resultados concordam com fatos bem conhecidos. A proporcionalidade da indução em relação à variação da intensidade i da corrente indutora também está de acordo com a experiência.

Por último, se retornarmos da consideração desses dois tipos distintos de *indução eletrovoltaica* para o caso geral, no qual ao mesmo tempo é variável a intensidade da corrente indutora e os dois condutores estão em movimento entre si, a *força eletromotriz* exercida pelo elemento de corrente *variável* sobre o elemento *móvel* de um condutor é encontrada simplesmente como a *soma das forças eletromotrizes* que ocorreriam:

1. se o elemento do condutor *não estivesse em movimento* no instante que está sendo considerado;

2. se o elemento do condutor estivesse em movimento, mas a *intensidade da corrente* do elemento indutor *não* se alterasse no instante que está sendo considerado.

Capítulo 9

[Weber, 1848b] Sobre a Excitação e Ação do Diamagnetismo de Acordo com as Leis das Correntes Induzidas

Wilhelm Weber[404,405]

(Do *Berichten über die Verhandlung der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*. Volume 1 dos anos 1846 e 1847. Leipzig, 1848, págs. 346-358. Reunião de 28 de maio de 1847, com alguns acréscimos do autor.)

(Do *Annalen der Physik und Chemie* editado por J. C. Poggendorff, Vol. 73, Leipzig, 1848, págs. 241-256.)[406,407]

---

[404] [Web48b] e [Web48c], com traduções para o inglês em [Web52b], [Web66c] e [Web21j].

[405] As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o editor do Volume 3 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; as Notas de Richard Taylor, o editor das *Scientific Memoirs* onde foi publicada a tradução em inglês desse trabalho de Weber, são representadas por [Nota de Taylor:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

[406] [Nota de Heinrich Weber:] A redação desses dois tratados é a mesma, exceto por uma observação final que está impressa separadamente em um adendo na página 266.

[407] Heinrich Weber está se referindo aqui a [Web48c] e [Web48b]. A consideração final que aparece no *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse, Band I aus den Jahren 1846 und 1847*, [Web48b], foi publicada nas páginas 264-265 do Volume 3 das *Obras* de Weber. Já a consideração final que aparece nos *Annalen der Physik und Chemie*, [Web48c], foi publicada nas páginas 266-268 do Volume 3 das *Obras* de Weber. A tradução em português apresentada aqui segue a última versão desse artigo publicada nos *Annalen der Physik und Chemie*, [Web48c], com tradução para o inglês em [Web52b], [Web66c] e [Web21j].

A repulsão do bismuto por um ímã, observada pela primeira vez por Brugmanns em 1778,[408] permaneceu quase despercebida até que Faraday a redescobriu e investigou mais cuidadosamente,[409] e assim lançou as bases para a nova teoria do *diamagnetismo*, cujo desenvolvimento posterior tornou-se uma tarefa importante na física. Para resolver essa questão pouco pode ser esperado de medições mais precisas, devido à fraqueza das forças diamagnéticas dos corpos, mesmo quando eletroímãs muito poderosos atuam sobre eles e, portanto, é mais esperado que teremos um melhor conhecimento sobre a natureza do diamagnetismo a partir das *várias modificações* de suas ações, sendo que a descoberta dessas modificações é possível mesmo no caso das forças mais fracas. O objetivo das próximas experiências é de estabelecer com maior certeza e precisão, a partir de algumas modificações especiais das ações diamagnéticas, uma hipótese já apresentada por Faraday para explicar os fenômenos diamagnéticos e então, a partir de leis conhecidas, deduzir essa hipótese em si, que é necessária para a explicação dos fenômenos diamagnéticos.

O bismuto diamagnético repele o polo Sul e o polo Norte de um ímã, e é repelido por eles. Essa repulsão *indiferente* dos polos opostos poderia parecer de pouca importância se a origem da força magnética fosse buscada nas partículas metálicas invariáveis do próprio bismuto; pois estamos acostumados a assumir geralmente dos corpos ponderáveis[410] que eles oponham sem distinção uma resistência igual aos movimentos tanto dos dois fluidos magnéticos opostos quanto dos dois fluidos elétricos opostos. Porém a ação *à distância* poderia parecer mais surpreendente do que essa ação indiferente, se admitíssemos que a força diamagnética tem sua origem nas partículas metálicas invariáveis do próprio bismuto, já que seria o primeiro caso no qual teria sido observada a ação *à distância* de um corpo ponderável sobre um corpo imponderável. Portanto, parece importante acima de tudo decidir a questão se a fonte da força diamagnética atuando à distância é para ser encontrada nos constituintes ponderáveis invariáveis dos corpos, ou se ela surge de um *constituinte imponderável*, estando conectada a uma certa *distribuição* dele.

Para decidir essa questão é da maior importância a experiência feita pelo Sr. Reich, no sétimo Volume desses *Berichte*, pág. 252,[411,412] de acordo com a qual os polos Norte e Sul, quando atuam ao mesmo tempo sobre o mesmo lado de um pedaço de bismuto, não o repelem de forma alguma com a soma das forças que eles exerceriam individualmente, mas apenas com a diferença entre essas forças.[413]

A partir desse único experimento poderia ser concluído com a maior probabilidade, que a origem da força diamagnética não é para ser procurada nas partículas metálicas do bismuto que nunca variam, mas sim em um constituinte imponderável deslocando-se entre elas, o qual, com a aproximação do polo de um ímã, é deslocado e distribuído diferentemente de acordo com a diferença desse polo. A origem da força diamagnética é assim colocada na

[408] Sebald Justinus Brugmans (1763-1819). Ele observou que o bismuto era repelido pelo polo magnético de um ímã. O bismuto é o mais diamagnético entre todos os metais e também o metal que menos conduz corrente elétrica.

[409] [Far46b] e [Far46c] com tradução para o alemão em [Far46d] e [Far47].

[410] Ver a Nota de rodapé 78 na página 39.

[411] [Nota de Taylor:] *Philosophical Magazine*, fevereiro de 1849, pág. 127.

[412] [Rei48a] e [Rei48b], com tradução para o inglês em [Rei49].

[413] Tal que se essas duas forças tiverem a mesma intensidade, elas vão se cancelar ao atuarem em conjunto sobre o bismuto.

ação recíproca entre dois corpos imponderáveis, em vez de ser colocada na ação recíproca à distância entre corpos ponderáveis e imponderáveis; e a mesma ação sobre polos opostos é então explicada pela distribuição diferente do constituinte imponderável no bismuto, que é produzida pela oposição dos polos.[414] A aproximação simultânea de dois polos opostos do mesmo lado [do bismuto] deve, no entanto, ter o efeito de que a componente imponderável no bismuto não pode assumir nem uma nem outra distribuição à qual o surgimento da força diamagnética está vinculado, o que faz com que o desaparecimento da força diamagnética nesse caso seja evidente.

Mas se agora for perguntado, qual é a natureza do constituinte imponderável que é distribuído de tal forma no bismuto na aproximação de um polo Norte ou Sul, e então, com essa distribuição, reage com uma força repulsiva sobre o polo que se aproximou, se apresentam apenas os dois fluidos magnéticos, ou os dois fluidos elétricos na forma de correntes moleculares. De qualquer forma, antes que qualquer outra suposição possa parecer admissível, tem de ser mostrada a impossibilidade de explicar os fenômenos em questão pelas relações conhecidas dos imponderáveis já citados.

A partir disso será visto que a experiência de Reich pode ser empregada para estabelcer de maneira mais firme um ponto de vista já apresentado por Faraday (*Annallen* de Poggendorff, Vol. 70, pág. 48, Artigos 2429 e 2430).[415] Faraday afirma nessa obra que[416]

> 2429. Teoricamente, uma explicação dos movimentos dos corpos diamagnéticos, e todos os fenômenos dinâmicos resultantes das ações dos ímãs sobre eles, poderia vir da suposição de que a indução magnética causou neles um estado contrário àquele que ela produz na matéria magnética; isto é, que se uma partícula de cada tipo de matéria fosse colocada no campo magnético as duas se tornariam magnéticas, e cada uma delas teria seu eixo paralelo à resultante da força magnética passando através dela; mas a partícula de matéria magnética teria seus polos Norte e Sul opostos, ou voltados em direção aos polos contrários do ímã indutor, enquanto que com as partículas diamagnéticas aconteceria o contrário; e, portanto, resultaria aproximação em uma substância, e recessão na outra [substância].
>
> 2430. De acordo com a teoria de Ampère,[417] esse ponto de vista seria equivalente à suposição, de que na medida em que são induzidas no ferro e em corpos magnéticos semelhantes correntes paralelas àquelas que existem no ímã indutor ou na bateria com fio indutor; no bismuto, vidro pesado[418] e em corpos diamagnéticos, as correntes induzidas são em direção contrária [à corrente indutora]. Isso faria com que as correntes nos corpos diamagnéticos tivessem a mesma direção que aquelas correntes que são induzidas em condutores diamagnéticos no *início* da corrente indutora; e aquelas [correntes] nos corpos magnéticos seriam as mesmas que aquelas produzidas na *interrupção* da mesma corrente indutora. Não haveria dificuldade no que diz respeito a substâncias magnéticas e diamagnéticas não-condutoras, já que as correntes hipotéticas devem existir não na massa, mas ao redor das partículas de matéria.

Vou agora submeter essa suposição perspicaz, proposta pela primeira vez por Faraday,

[414] Em alemão: *durch den Gegensatz der Pole*. Essa expressão pode ser traduzida como "pela oposição dos polos", ou "pela antítese dos polos".

[415] [Nota de Taylor:] Experimental Researches, Artigos 2429 e 2430.

[416] [Far46c, Artigos 2429 e 2430] com tradução para o alemão em [Far47, Artigos 2429 e 2430].

[417] Ver a Nota de rodapé 10 na página 19.

[418] O chamado vidro pesado é feito de borossilicato de chumbo, [Tho01, pág. 100] e [ML22].

e que recebeu maior probabilidade a partir do experimento de Reich, a uma prova ainda mais direta por meio das experiências a seguir que, na minha opinião, não deixam qualquer dúvida sobre sua correção.

Todas as forças diamagnéticas observadas até aqui exibiram uma ação repulsiva, nunca uma ação atrativa; mas a partir da suposição de Faraday, segue que forças diamagnéticas têm de ocorrer da mesma maneira atuando *atrativamente* sobre o polo de um ímã, e tais casos pode ser facilmente determinados mais precisamente e testados experimentalmente.

Contudo, com essa finalidade não devemos observar a força que o bismuto diamagnético exerce sobre aquele polo por meio do qual ele tornou-se diamagnético, mas sim observar aquelas forças que esse bismuto exerce à distância sobre outros polos magnéticos, e que não têm influência sobre sua condição diamagnética.

Agora se um pedaço de bismuto for colocado no plano que é dividido ao meio em ângulos retos por uma pequena agulha magnética suspensa por uma linha de seda e magnetizada simetricamente, é evidente que os polos da pequena agulha não podem ter influência, ou pelo menos não uma influência perceptível, sobre o estado diamagnético do pedaço distante de bismuto, de acordo com a experiência de Reich. De fato, é visto facilmente que a agulha não sofre a menor deflexão pelo bismuto.

Porém, se arranjarmos um ímã de ferro no formato de uma ferradura, de tal forma que o local ocupado previamente pelo bismuto esteja situado no espaço vazio entre seus dois polos, e o ímã for ao mesmo tempo colocado em tal posição que seu eixo magnético prolongado divida ao meio a agulha, esse ímã potente vai exercer um torque muito grande sobre a agulha. Mas se esse torque exercido pelo ímã de ferradura for compensado por um outro torque igualmente poderoso, mas oposto, exercido por uma barra imantada atuando sobre a agulha do lado oposto, podemos fazer com que a agulha reassuma sua posição original e seu período de oscilação (sensibilidade) original, de tal forma que, com relação à agulha, é exatamente o mesmo como se nenhum ímã atuasse sobre ela.

Agora se, após esses arranjos preliminares, o mesmo pedaço de bismuto que anteriormente não atuava sobre a agulha for colocado na mesma posição de antes, isto é, entre os dois polos do ímã de ferradura, será exibido um efeito bem perceptível e mensurável, a saber, uma deflexão da agulha, devido ao fato que um polo [da agulha] será repelido e o outro polo será atraído.

Se os polos dos ímãs, cujos efeitos sobre a agulha são compensados, forem invertidos, e se a experiência for repetida, vai se encontrar que o mesmo pedaço de bismuto trazido ao mesmo local e na mesma orientação, produzirá agora exatamente a deflexão oposta [na agulha].

Por último, se um pedaço de ferro for substituído no lugar do bismuto, será encontrado que a deflexão produzida pelo bismuto [sobre a agulha] será oposta àquela produzida pelo ferro [sobre a mesma agulha].

Essas experiências podem ser modificadas de várias formas, mas em todo caso a força do bismuto tem de ser observada sobre outros polos magnéticos diferentes daquele que determina a condição diamagnética do bismuto; todos eles confirmam a afirmação de que o bismuto atua constantemente sobre outros polos de uma maneira oposta ao ferro colocado em seu lugar e que, consequentemente, repele quando o ferro atrai, e atrai quando o ferro repele; em resumo, que em outros polos magnéticos diferentes daquele que diamagnetiza o bismuto, observamos com a mesma frequência forças atrativas e repulsivas do bismuto.[419,420] Por exemplo, se uma extremidade da barra de bismuto for aproximada da extremidade Norte de um ímã potente, enquanto que sua outra extremidade é aproximada da extremidade Norte da agulha magnética, essa última é atraída; porém, caso a mesma extremidade da barra de bismuto seja aproximada da extremidade Sul do ímã potente, a extremidade Norte da agulha magnetizada será repelida pela outra extremidade da barra de bismuto aproximada dela.

Portanto, podemos considerar como provada a suposição de Faraday, pelo menos no aspecto em que ela coloca a origem da força diamagnética não nas partículas metálicas invariáveis do próprio bismuto, mas sim em uma distribuição variável que ocorre no bismuto, e que atua sobre outros ímãs da mesma maneira que uma distribuição definida de fluidos magnéticos.

Por último, para remover qualquer dúvida de que realmente são apenas os fluidos magnéticos, ou seus equivalentes, as correntes de Ampère, que estão sujeitos a essa distribuição variável no bismuto, pode-se ainda exigir que os experimentos não apenas encontrem as mesmas ações relacionadas com a *existência* do estado diamagnético e de um certo estado magnético, mas também que as ações relacionadas com a *origem* de ambos os estados sejam as mesmas.

É bem conhecido que, de acordo com as leis de indução descobertas por Faraday, o movimento dos fluidos magnéticos em um corpo, ou a rotação das correntes moleculares de Ampère, está conectado com a ação elétrica à distância sobre os condutores próximos, devido à qual uma corrente elétrica é excitada ou induzida nesses condutores.

Consequentemente, se dois fluidos magnéticos, ou seus equivalentes, as correntes de Ampère, estão realmente presentes em corpos diamagnéticos, eles têm de induzir uma corrente elétrica em um condutor próximo no instante em que ocorre essa mudança.

Agora, para observar essa própria corrente induzida, é necessário que nenhuma outra corrente seja induzida no mesmo condutor, por exemplo, pelo ímã potente ao qual é aproximada a barra de bismuto. Portanto, para esse fim a força desse ímã tem de manter-se inalterada durante a experiência, o que pressupõe uma corrente galvânica constante em um eletroímã. Por outro lado, o condutor sobre o qual o bismuto deve atuar tem de possuir uma posição fixa imutável em relação a esse ímã, de tal forma que ele envolva o espaço na forma de um anel, no qual a barra de bismuto tem de ser trazida para produzir nele a distribuição diamagnética pela influência do ímã. Por último, não é necessária uma explicação adicional que a corrente induzida pelo bismuto pode ser observada ao continuar as duas extremidades do condutor em formato de anel anterior, e ao conectá-las com as extremidades do multiplicador de um galvanômetro sensível.

Contudo, com relação à intensidade dessa corrente induzida pela barra de bismuto, pode ser prontamente estimado *a priori* quão pequena ela será se considerarmos quão pequenas são as forças diamagnéticas em comparação com as forças magnéticas quando o ferro é colocado no lugar do bismuto. Ao examinar mais atentamente, resulta que a corrente induzida tem de ser tão fraca que ela não mais será observada se todas as condições não atuarem juntas da maneira mais favorável para essa finalidade.

[419][Nota de Heinrich Weber:] No artigo publicado nos *Annalen der Physik und Chemie*, editado por J. C. Poggendorff, Vol. 73, Leipzig, págs. 241-256, você encontrará o seguinte complemento: ...].

[420]Esse complemento aparece na continuação desse parágrafo. A tradução para o inglês feita por Francis foi feita a partir do artigo publicado nos *Annalen der Physik und Chemie*, [Web48c], [Web52b], [Web66c] e [Web21j]. Nessa tradução em português também estou seguindo a versão final desse artigo publicada nos *Annalen der Physik und Chemie*.

Os próximos arranjos foram feitos para atingir esse objetivo, a saber, *induzir correntes galvânicas em um condutor próximo através da diamagnetização do bismuto e assim observar de fato as correntes induzidas.*

Um núcleo de ferro com 600 milímetros de comprimento, enrolado várias vezes com fio de cobre espesso, foi usado como um eletroímã. O condutor em forma de anel, que consistia em um fio de cobre trançado[421] de 300 metros de comprimento e 2/3 milímetro de espessura, enrolado em uma bobina de madeira, foi preso à superfície circular final desse núcleo de ferro com um diâmetro de 50 milímetros. O espaço incluído nesse condutor em formato de anel, no qual era para ser colocado a barra de bismuto, tinha 140 milímetros de comprimento e 15 milímetros de largura; a barra de bismuto puro precipitado era um pouco mais fina. As extremidades do condutor em forma de anel foram conectadas com um comutador, assim como foram conectadas as extremidades do multiplicador de um galvanômetro muito sensível, a agulha magnética dele vinha com um espelho no qual a imagem de uma escala distante era observada por um telescópio voltado para ele. Além disso, o galvanômetro vinha com um amortecedor tão efetivo que dificilmente era possível observar qualquer vibração da agulha.

Agora enquanto uma corrente galvânica constante e bem poderosa atravessava o fio espesso do eletroímã, a barra de bismuto era removida do condutor em forma de anel no qual estava colocada, o comutador foi alterado, e a barra de bismuto novamente inserida, o comutador novamente alterado, a barra de bismuto removida, etc. Durante a experiência, continuada por aproximadamente 1 minuto, o estado do galvanômetro era lido a intervalos de aproximadamente 10 segundos.

Uma segunda série de experiências foi então feita, mas com essa diferença, que o comutador assumia aquela posição na retirada da barra de bismuto que ele havia ocupado na primeira série ao inserir o bismuto, e *vice-versa*.

A terceira série foi uma repetição acurada da primeira, e assim por diante.

Antes de começar cada série era observado o estado do galvanômetro, sem contudo esperar até que a agulha tivesse alcançado um estado de repouso perfeito. Cada série foi começada ao retirar o bismuto.

Na seguinte Tabela todas as leituras feitas no galvanômetro estão arranjadas juntas. As diferentes séries são distinguidas por números romanos; os dois estados do comutador que ocorreram nas séries diferentes na remoção da barra de bismuto estão distinguidos nos cabeçalhos por A e B. O estado do galvanômetro antes de começar cada série também está indicado no cabeçalho.

I. A.	II. B.	III. A.	IV. B.	V. A.	VI. B.	VII. A.
512,3	517,4	515,9	517,2	517,0	523,0	524,7
513,3	513,0	519,5	517,1	518,2	522,0	526,0
514,1	512,9	520,7	517,5	518,7	519,0	528,0
514,5	512,8	519,1	516,2	525,0	518,5	530,0
515,3	514,2	519,2	516,7	525,1	519,0	530,7
515,6	515,2	518,3	517,7	523,0	521,0	530,0
516,7	516,0	515,5	—	—	—	528,5
514,92	514,02	518,72	517,04	522,00	519,90	528,87

Agora, se compararmos os estados do galvanômetro nas séries ímpares alternadas, nas quais o comutador ocupava a posição A na remoção do bismuto do condutor em formato de

[421] Em alemão: *umsponnenen Kupferdrahte*. Isto é, um fio de cobre enrolado com seda para isolamento elétrico.

anel, com o valor médio da linha inferior, será visto que o valor médio é sempre um pouco *maior*. Por exemplo, os valores médios são:

$$
\begin{aligned}
1^a \text{ série } 514{,}92 &= 512{,}3 + 2{,}62\ ,\\
3^a \text{ série } 518{,}72 &= 515{,}9 + 2{,}82\ ,\\
5^a \text{ série } 522{,}00 &= 517{,}0 + 5{,}00\ ,\\
7^a \text{ série } 528{,}87 &= 524{,}7 + 4{,}17\ .
\end{aligned}
$$

A mesma comparação fornece para as séries pares, nas quais o comutador ocupava a posição B na remoção do bismuto do condutor em forma de anel, sempre um valor médio um pouco *menor*.

$$
\begin{aligned}
2^a \text{ série } 514{,}02 &= 517{,}4 - 3{,}38\ ,\\
4^a \text{ série } 517{,}04 &= 517{,}2 - 0{,}16\ ,\\
6^a \text{ série } 519{,}90 &= 523{,}0 - 3{,}10\ .
\end{aligned}
$$

Deve-se ter em mente que o estado do galvanômetro observado antes do início de cada série não era exatamente aquele do repouso. Para evitar a incerteza que surge disso, a leitura feita antes de cada série pode ser totalmente excluída do cálculo, e a comparação restrita aos valores médios das várias séries. A comparação do valor médio da segunda para a sexta série, com a média das séries imediatamente anteriores e posteriores, fornece então os seguintes resultados:

$$
\begin{aligned}
2^a \text{ série } 514{,}02 &= 516{,}82 - 2{,}80\ ,\\
3^a \text{ série } 518{,}72 &= 515{,}53 + 3{,}19\ ,\\
4^a \text{ série } 517{,}04 &= 520{,}36 - 3{,}32\ ,\\
5^a \text{ série } 522{,}00 &= 518{,}47 + 3{,}53\ ,\\
6^a \text{ série } 519{,}90 &= 525{,}43 - 5{,}53\ .
\end{aligned}
$$

Vemos então disso também que nas séries ímpares nas quais o comutador ocupava a posição A enquanto o bismuto era removido do condutor em forma de anel, o estado do galvanômetro era constantemente um pouco maior, e que o inverso ocorria nas séries pares nas quais o comutador tinha a posição B na remoção da barra de bismuto. As diferenças são um pouco maiores para as últimas séries do que para as primeiras, o que é facilmente explicado pelo fato de que as mudanças de indução foram gradualmente aceleradas.

Foram feitas experiências correspondentes com o objetivo de comparação direta, a barra de bismuto sendo substituída por uma barra de ferro mais delgada. A corrente induzida era então tão poderosa que nenhuma repetição podia ser feita como no caso do bismuto, e tal que apenas a extremidade final da barra de ferro podia ser inserida no condutor em formato de anel. E mesmo assim a corrente induzida era tão potente que o desvio da agulha não podia ser observado no galvanômetro, mas apenas a direção, a saber, se a posição do galvanômetro crescia, isto é, ia das menores divisões da escala para as maiores, ou o inverso.

Primeira Experiência.

Posição do comutador A:

Números crescentes ao inserir a barra de ferro no condutor em forma de anel.

Números decrescentes ao remover a barra de ferro do condutor em forma de anel.

Segunda Experiência.

Posição do comutador B:

Números decrescentes ao inserir a barra de ferro no condutor em forma de anel.

Números crescentes ao remover a barra de ferro do condutor em forma de anel.

A posição do comutador A, e o caso no qual a barra de ferro era removida do condutor em forma de anel, para o qual consequentemente foi observada uma *diminuição* na deflexão do galvanômetro, servirá para comparar essa experiência feita com ferro com a experiência anterior relativa ao bismuto. Nas experiências anteriores com bismuto, esse caso corresponde às séries ímpares, para as quais resultou um estado *maior* do galvanômetro com a indução continuada na mesma direção. Consequentemente, resulta que o bismuto induziu uma corrente positiva nas mesmas condições em que o ferro induziu uma corrente negativa, e *vice-versa*.

Portanto está provada a indução de correntes elétricas pela diamagnetização do bismuto; e ao mesmo tempo é evidente que a direção dessas correntes é sempre oposta àquelas induzidas pelo ferro nas mesmas circunstâncias, precisamente como deveria ocorrer se o bismuto contivesse fluidos magnéticos ou seus equivalentes, as correntes de Ampère, que são colocados em movimento ou giradas pela influência de ímãs potentes em uma direção exatamente oposta ao que ocorre no ferro. Portanto, parece ter sido colocado fora de toda dúvida o ponto de vista apresentado por Faraday.

Agora embora tenha sido encontrada uma regra de acordo com a qual as condições diamagnéticas variáveis dos corpos sejam determinadas para todos os casos de tal maneira que as ações coletivas apareçam como uma consequência necessária de acordo com as leis magnéticas e eletrodinâmicas, a *causa* dessa regra ainda permanece desconhecida e inexplicada de acordo com as leis magnéticas e eletrodinâmicas. Pois se fluidos magnéticos estão de fato contidos em corpos diamagnéticos, na aproximação de um polo magnético um fluido tem de ser atraído e o outro repelido; e a direção da separação dos dois fluidos é, de acordo com isso, determinada necessariamente pelas leis magnéticas. Mas essa direção é exatamente oposta à direção apresentada na regra anterior. Contudo, exatamente o mesmo ocorre na outra suposição que pressupõe a existência das correntes moleculares de Ampère nos corpos diamagnéticos, no lugar dos fluidos magnéticos, as quais na aproximação de um polo de um ímã deveriam girar em uma direção determinada pelas leis eletrodinâmicas. Porém essa rotação é exatamente oposta à direção indicada pela regra acima.

Consequentemente, há uma contradição entre a regra anterior de *excitação* [do estado diamagnético] e as leis da *eficácia* do estado diamagnético. Até que seja removida essa contradição, todas as condições diamagnéticas dos corpos continuarão a formar um grupo de fatos isolados sem qualquer conexão com os outros fenômenos, assim como os fenômenos da rotação magnética formaram um grupo similar até que Faraday forneceu a chave para sua solução por meio de sua descoberta da indução.[422]

Nas observações anteriores referentes às *ações*, era indiferente se fluidos magnéticos separados ou correntes moleculares de Ampère de mesma direção constituíam o estado dia-

[422]Por fenômenos de rotação magnética Weber está se referindo aqui às rotações de um disco de cobre produzidas pelo movimento de um ímã próximo ao disco, efeito descoberto por François Arago (1786-1853). Esses fenômenos só foram explicados satisfatoriamente por Faraday. Para isso ele utilizou sua lei da indução de correntes. Ver: [Ara24], [Ara25], [Ara26], [Ara54a] e [Ara54b]. Ver ainda [Cha09, Seção 28.5] e [AC11, Seção 29.5].

magnético excitado dos corpos.[423,424] Esse não é mais o caso nas próximas considerações que se relacionam com as *causas*, isto é, com as forças excitando o estado diamagnético dos corpos. Pois se a condição diamagnética dos corpos fosse constituída por uma certa distribuição de fluidos magnéticos então, como mostrado anteriormente, nenhuma explicação poderia ser dada para as forças que a produzem, ou pelo menos essa distribuição não poderia ser explicada pelas *forças magnéticas* conhecidas que atuam sobre esses fluidos.

Porém o caso é diferente se a condição diamagnética dos corpos for constituída por correntes moleculares igualmente direcionadas; já que um sistema de correntes moleculares igualmente direcionadas pode ser obtido de *duas maneiras*. *Em primeiro lugar*, é possível que as correntes moleculares já existissem nos corpos, e que sobre essas correntes já existentes atuou apenas uma força que comunicou a *mesma direção* a elas; *em segundo lugar*, também é possível que as correntes igualmente direcionadas, que formam a condição diamagnética dos corpos, não existissem anteriormente, sendo então *originadas* ou *induzidas* ao diamagnetizar o corpo. Se a primeira destas duas possibilidades, como mostrado anteriormente, for excluída pelas mesmas razões que [foi excluída] a distribuição considerada anteriormente de fluidos magnéticos, ainda resta para as correntes moleculares a outra possibilidade, de acordo com as quais elas teriam sido *produzidas por indução*.

Até agora não se falou de *correntes moleculares induzidas*, mas apenas de correntes moleculares fixas e invariáveis. Mas é evidente que se for admitida a existência de correntes moleculares, temos de permitir além disso que suas intensidades possam ser aumentadas ou diminuídas, e que até mesmo novas correntes desse tipo possam ser produzidas pelas mesmas forças que produzem as correntes em circuitos maiores.

Se utilizarmos a *indução* para explicar o diamagnetismo, poderia no início ser duvidado se é realmente necessário supor correntes moleculares induzidas para esse propósito, ou se já não são suficientes por si próprias as correntes induzidas em circuitos maiores. É verdade que essas correntes [que fluem em circuitos macroscópicos] seriam capazes de produzir todos os fenômenos diamagnéticos se elas fossem *permanentes*; porém como essas correntes, que estão sujeitas às leis de Ohm,[425] não são permanentes, mas desaparecem instantaneamente com o desaparecimento da força indutora, e só podem ser mantidas por indução contínua, por esse motivo elas não servem para explicar o diamagnetismo.

Porém, se o rápido desaparecimento dessas correntes é o único motivo de ser impossível deduzir delas a condição diamagnética dos corpos, parece não haver motivo pelo qual o estado diamagnético persistente dos corpos não possa ser atribuído a *correntes moleculares induzidas*, já que essas correntes têm de se comportar em todos os aspectos como aquelas correntes [em circuitos maiores], diferindo apenas por possuírem aquela *permanência* que está faltando nas outras correntes. Pois a diferença entre aquelas correntes que fluem através de condutores em circuitos maiores e essas correntes moleculares, consiste apenas na circunstância que a circulação da eletricidade nas primeiras correntes perde tão rapidamente sua energia cinética[426] ao passar pelas moléculas do condutor, que ela chegaria ao repouso

[423][Nota de Heinrich Weber:] O texto a seguir é substituído no artigo publicado nos *Annalen der Phykik und Chemie*, editados por J. C. Poggendorff, Vol. 73, págs. 241-256, pelo adendo impresso no final deste trabalho.

[424]A sequência desse trabalho em português segue a versão final do artigo publicada por Weber nos *Annalen der Physik und Chemie*, [Web48c], com tradução para o inglês em [Web52b], [Web66c] e [Web21j].

[425]Ver a Nota de rodapé 116 na página 61.

[426]Em alemão: *lebendige Kraft*. A expressão em latim *vis viva* (plural *vires vivae*) é traduzida em português, inglês e alemão por, respectivamente, *força viva*, *living force* e *lebendige Kraft*. Ela foi cunhada por G. W. Leibniz (1646-1716). Originalmente a *vis viva* de um corpo de massa m deslocando-se com velocidade v em

em um tempo incomensuravelmente pequeno, se a perda que ela sofreu não fosse substituída constantemente por forças eletromotrizes contínuas, portanto resulta que correntes desse tipo, de acordo com as leis de Ohm, são constantemente proporcionais à força eletromotriz existente, desaparecendo instantaneamente com o desaparecimento da força eletromotriz. O inverso se aplica às correntes moleculares que não passam de uma molécula para outra em um condutor, mas circulam ao redor de uma única molécula, de tal forma que, consequentemente, o motivo anterior de perda de sua energia cinética não se aplica aqui. Portanto, essas correntes persistem com a mesma intensidade mesmo sem qualquer força eletromotriz.

Admitindo agora uma *força indutora* que atua sobre a eletricidade de um condutor, essa eletricidade é colocada em movimento de corrente, e esse movimento de corrente se distribui proporcionalmente à condutividade em todos os caminhos apresentados pelo condutor; consequentemente, da mesma maneira uma proporção do movimento tem de seguir sua trajetória ao redor de moléculas individuais do condutor, formando *correntes moleculares induzidas*, que, como elas não encontram resistência em suas trajetórias ao redor das moléculas pela qual elas poderiam ser retardadas, têm de continuar com toda sua intensidade até que, devido a uma nova indução oposta, sejam adicionadas outras correntes moleculares induzidas que neutralizam as correntes anteriores.

Portanto, se supusermos, de acordo com Ampère, *correntes moleculares* na doutrina do eletromagnetismo, temos agora como uma consequência necessária após a descoberta da indução, de adotar *correntes moleculares induzidas* na doutrina do eletromagnetismo, e temos de atribuir permanência a todas elas, quer elas tenham sempre existido ou tenham sido primeiro produzidas pela indução. Assumindo isso, resulta que todos os corpos nos quais tenham sido observadas ações diamagnéticas, têm de ter sofrido ações de forças que induziram correntes moleculares induzidas e de fato tais correntes como as que produzem as ações designadas pelo nome de ações diamagnéticas.

Isso decorre do fato de que uma força magnética procura direcionar uma *corrente existente* de tal forma que seu caminho seja exatamente oposto à trajetória de uma *corrente induzida pelo aumento dessa força magnética*. Consequentemente, se essa corrente induzida for uma corrente molecular que persiste, ela terá da mesma maneira permanentemente as ações opostas às ações de uma outra corrente molecular que já existia independentemente

relação a um sistema de referência inercial era definida por mv^2, isto é, o dobro da energia cinética como definida hoje em dia. Contudo, durante o século XIX muitos autores como Wilhelm Weber e Hermann von Helmholtz (1821-1894) definiram a *vis viva* como $mv^2/2$, isto é, com o mesmo valor da energia cinética atual. Em 1847 Helmholtz expressou-se como segue, [Hel47, pág. 9] com tradução para o inglês em [Hel53, pág. 119]:

> Para haver uma melhor concordância com a maneira usual de medir a intensidade das forças, proponho denominar a grandeza $\frac{1}{2}mv^2$ como sendo a quantidade de *força viva*, por meio da qual ela fica idêntica à quantidade de trabalho.

Em 1872 ele fez uma definição análoga, [Hel72a, pág. 640 das *Obras* de Helmholtz] com tradução para o inglês em [Hel72b, pág. 533]:

> Se denominarmos, como sempre foi feito até agora, a *força viva* ou a *energia atual* como sendo a soma das massas inerciais móveis multiplicadas cada uma pela metade do quadrado de sua velocidade, então, [...]

Weber também utilizou a expressão *força viva* como sendo dada por $mv^2/2$. Isso pode ser visto, por exemplo, em seu trabalho de 1871, [Web71, Nota de rodapé número 1, págs. 256-257 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web72, Nota de rodapé nas págs. 9-10] e [Web21d, Nota de rodapé 140, págs. 74-75].

do aumento dessa força magnética (por exemplo, no ferro), mas que adquiriu sua direção atual por meio dessa força. O comportamento oposto do bismuto diamagnético e do ferro magnetizado seguem de acordo com isso de leis conhecidas. A diferença essencial entre o bismuto e o ferro seria apenas o fato de que no ferro, independentemente da excitação externa, as correntes moleculares estão presentes, mas sua direção não é invariável, estando sujeita à influência de forças externas, o que não seria o caso do bismuto. A propósito, o bismuto e o ferro podem ser equiparados na medida em que uma força magnética crescente ou decrescente induz novas correntes moleculares persistentes em ambos, mas essas correntes devem ser muito mais fracas no ferro do que aquelas presentes nele independentemente dessa indução.

Capítulo 10

[Weber, 1849] Observações sobre a Teoria das Correntes Induzidas de Neumann

Wilhelm Weber[427],[428]

Reunião em 17 de Março

O Sr. Wilhelm Weber apresenta um tratado sobre *elektrodynamische Maassbestimmungen* (Medições Eletrodinâmicas)[429] como uma continuação de seus estudos publicados sob o mesmo título na época da fundação da K. S. Gesellschaft der Wissenschaften (Sociedade Real Saxônica de Ciências) pela Fürstl. Jablonowski's Gesellschaft (Sociedade Principesca Jablonowski). O primeiro tratado lida com a medição das forças eletrodinâmicas,[430] enquanto o segundo trata da medição das resistências eletrodinâmicas.[431] O [segundo] tratado é dividido em três partes:

1. Medição de resistência de acordo com uma dada unidade de medida;
2. Redução das medições de resistência à unidade absoluta;
3. Conexão das medições de resistência com as outras medições eletrodinâmicas.

Como o conteúdo do tratado não é adequado para um breve relatório, e o próprio tratado logo será publicado,[432] a presente comunicação se limitará a um comentário sobre uma observação de Neumann anexada ao final do tratado: "Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme — Sobre um princípio geral da teoria matemática das correntes elétricas induzidas", impresso especialmente a partir das publicações de 1847 da Berliner Akademie der Wissenschaft (Academia de Ciências de Berlim), Reimer, 1848.[433] Nesse tratado, Neumann estabeleceu o seguinte teorema:

[427][Web49] com tradução para o inglês em [Web20].

[428]As Notas de Heinrich Weber, o editor do Volume 3 das *Obras* de Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

[429]Esse é o título geral dos 8 tratados principais escritos por Weber.

[430][Web46] com tradução para o português no Capítulo 6.

[431][Web52a] com tradução para o português no Capítulo 15.

[432]Ele foi publicado em 1852, [Web52a], com tradução para o português no Capítulo 15.

[433][Neu48b] e [Neu49]. Ver ainda a Nota de rodapé 68.

> Se um sistema fechado e não ramificado de arcos condutores $A_|$ for convertido em outro [sistema] $A_{||}$ de uma nova forma e posição por qualquer deslocamento de seus elementos, mas sem romper a conexão condutiva do mesmo, e se essa mudança de $A_|$ para $A_{||}$ ocorrer sob a influência de um sistema de correntes elétricas $B_|$ que sofre simultaneamente uma mudança de posição, forma e intensidade de $B_|$ para $B_{||}$ através de um deslocamento arbitrário de seus elementos, então a soma das forças eletromotrizes que são induzidas por essa mudança no sistema de arcos condutores será igual à constante de indução ε multiplicada pela diferença nos valores do potencial da corrente $B_{||}$ em relação a $A_{||}$ e da corrente $B_|$ em relação a $A_|$, quando se considera que a unidade de corrente está fluindo através de $A_{||}$ e $A_|$.

Depois que Neumann desenvolveu este teorema e suas consequências nos primeiros quatro parágrafos de seu tratado, ele continua no parágrafo 5:

> Em seu tratado *Elektrodynamische Maassbestimmungen etc.*,[434] W. Weber abriu o caminho para preencher a lacuna em nosso conhecimento das ações eletrostáticas e eletrodinâmicas da eletricidade. Ele mostra como as leis de Ampère para a ação entre dois elementos de corrente podem ser deduzidas da ação da eletricidade positiva e negativa de um elemento sobre as duas eletricidades do outro elemento.[435] Essa análise das leis de Ampère levou à lei fundamental para a ação entre duas massas elétricas, de acordo com a qual essa ação depende não apenas da distância relativa entre elas, mas também de sua velocidade relativa e de sua variação.[436] Como Weber demonstrou, essa lei fundamental também explica os fenômenos de indução e fornece suas leis. O objetivo deste parágrafo é mostrar até que ponto os resultados contidos nos itens anteriores concordam com as leis de indução deduzidas da lei fundamental de Weber para a ação elétrica.

Neumann desenvolve então a expressão geral da indução a partir da lei fundamental das "elektrodynamischen Maassbestimmungen — Medições Eletrodinâmicas" [de Weber] e, em seguida, aplica-a aos diferentes tipos de indução:

1. Ao caso em que nem a corrente nem os elementos condutores sofrem uma mudança de posição, e chega a uma lei idêntica à sua;

2. Ao caso em que a indução é excitada somente por uma mudança de posição dos elementos condutores, que ocorre sob a influência de uma corrente estacionária ou constante;

3. Ao caso em que o condutor induzido está em repouso e a indução é excitada pelo deslocamento de todo o condutor no qual flui uma corrente constante.

Em todos esses casos, as leis [deduzidas a partir da força de Weber] estão em perfeita concordância com as leis de Neumann. Ele então continua:

---

[434] [Web46] com tradução para o português no Capítulo 6.

[435] Ver a Nota de rodapé 10 na página 19.

[436] Isto é, a força de Weber depende não apenas da distância r entre as partículas eletrizadas que estão interagindo, mas também da velocidade relativa entre elas, dr/dt, assim como da aceleração relativa entre elas, d^2r/dt^2.

> A situação é diferente com a equação que expressa a força eletromotriz induzida por um simples circuito de corrente[437] sob a suposição de que este último consiste em um condutor móvel e um condutor estacionário [...] A soma da força eletromotriz que é excitada durante a circulação dos elementos do indutor é a mesma de acordo com ambas as fórmulas, mas a direção da corrente induzida é oposta.[438]

A observação [experimental] decide a favor da fórmula de Neumann. [Neumann então continua:]

> Portanto, é preciso analisar onde a dedução da fórmula a partir da lei fundamental de Weber ficou aquém do esperado. O fato de que a contradição em questão só ocorre no caso de indutores com contatos deslizantes nos leva imediatamente a eles. Aqui, novos elementos entram ou saem do caminho da corrente, nos quais a intensidade da corrente muda em um tempo muito curto de 0 para i ou de i para 0, e que exercem um efeito indutor por meio dessa mudança de intensidade [da corrente], que já está contido em minhas fórmulas, mas que ainda deve ser levado em consideração ao aplicar a lei fundamental de Weber.

Neumann realmente encontra o erro de dedução na negligência de uma parte essencial da indução; mas a diferença nos resultados é compensada apenas pela metade ao se levar em consideração esse erro.[439]

Embora os experimentos feitos pelo Sr. Neumann, que foram repetidos pelo autor,[440] não deixem dúvidas sobre qual resultado é o correto, o Sr. Neumann continua:

> A lei fundamental da ação elétrica de Weber foi comprovada em tantos e tão variados casos que não pode ser posta em dúvida pelas observações anteriores; pelo contrário, a maneira como ela é aplicada ao presente caso deve ser posta em dúvida.

Isso é seguido agora pelo acréscimo ao cálculo de Neumann apresentado pelo autor no final de seu tratado.[441] O Sr. Neumann, como já foi dito, desenvolveu a partir da lei fundamental das "elektrodynamischen Maassbestimmungen — Medições Eletrodinâmicas" [de Weber] as fórmulas para duas partes da força eletromotriz exercida em um condutor estacionário por um simples circuito de corrente, no caso em que o circuito da corrente indutora consiste em um condutor móvel e um condutor estacionário. Essas duas fórmulas

[437] Em alemão: *einfachen Stromumgang*, que está sendo traduzido aqui como um simples circuito de corrente. Em seu trabalho Neumann considera um circuito indutor que possui um contato deslizante, de tal forma que o circuito possui uma componente circular aberta parada em relação ao laboratório e uma outra componente que gira em relação ao laboratório.

[438] Ou seja, de acordo com Neumann sua teoria prevê nesse caso a direção da corrente induzida em um sentido, enquanto que a teoria de Weber preveria a corrente induzida no sentido oposto.

[439] Ou seja, mesmo quando Neumann levou em consideração essa parte da teoria de Weber que havia sido negligenciada, o resultado obtido pela teoria de Neumann ainda é diferente daquele que seria obtido pela teoria de Weber, de acordo com as contas de Neumann.

[440] A repetição feita por Weber dos experimentos de Neumann vai aparecer na Seção 38 de seu segundo tratado sobre Medições Eletrodinâmicas de 1852, [Web52a, Seção 38, págs. 409-417 das *Obras* de Weber]. Tradução em português na Seção 15.38.

[441] Weber está se referindo aqui ao cálculo que ele vai apresentar na Seção 39 de seu tratado de 1852, [Web52a, Seção 39, págs. 417-427 das *Obras* de Weber]. Tradução em português na Seção 15.39. Weber reproduz agora nesse artigo publicado em 1849 as contas que só serão publicadas de forma completa em 1852, juntamente com sua reprodução das experiências de Neumann.

são, de fato, bastante corretas e estão em total concordância com as fórmulas desenvolvidas para as mesmas duas partes nas "Medições Eletrodinâmicas". Depois de demonstrar isso, o autor[442] mostra que a questão essencial é se as duas partes da força eletromotriz às quais essas fórmulas se aplicam se complementam de tal forma que, juntas, elas realmente representam toda a força eletromotriz no caso em consideração ou se, nesse caso, ainda há uma terceira parte para a qual Neumann ainda não desenvolveu a fórmula a partir da lei fundamental das "Medições Eletrodinâmicas". O autor de fato prova que existe essa terceira parte, depois também desenvolve a fórmula para essa parte a partir da lei fundamental das "Medições Eletrodinâmicas" e mostra como a soma total, que as fórmulas de todas as três partes produzem, está em total concordância com a lei de Neumann e, portanto, também com a experiência.

No caso em consideração, o circuito pelo qual flui a corrente indutora se divide em duas partes essencialmente distintas, a saber, o condutor móvel e o condutor estacionário. A primeira fórmula, que Neumann desenvolveu a partir da lei fundamental das "Medições Eletrodinâmicas", representa a parte da força eletromotriz que a eletricidade exerce ao fluir pelo condutor móvel. A segunda fórmula representa a parte da força eletromotriz que a eletricidade exerce ao fluir pelos elementos do condutor estacionário pelos quais a corrente não havia fluído anteriormente (ou ao deixar de fluir pelos elementos do condutor estacionário pelos quais a corrente havia fluído anteriormente).

Porém, assim como não é suficiente, quando a intensidade de uma corrente indutora muda repentinamente, levar em consideração o movimento dos fluidos elétricos antes e depois dessa mudança, mas a transição de um movimento para o outro deve necessariamente ser considerada, também não é suficiente que, no caso que está sendo analisado, os movimentos dos fluidos elétricos tenham sido levados em consideração tanto durante o tempo em que estão na peça condutora em movimento quanto durante o tempo em que estão na peça [condutora] estacionária, mas também deve ser levada em consideração finalmente a mudança em seu movimento durante a transição, e isso fornece a terceira parte da força eletromotriz no caso que está sendo analisado, para o qual ainda não foi desenvolvida por Neumann a fórmula a partir da lei fundamental das "Medições Eletrodinâmicas".[443]

Se α for o elemento de corrente no ponto de transição e u denotar a velocidade com que a extremidade da parte móvel do condutor avança, é óbvio que, por exemplo, a eletricidade positiva que passa do condutor em movimento para o estacionário perde a velocidade u no elemento de tempo dt em que flui através de α, que é tanto quanto se recebesse a velocidade $-u$; e que a eletricidade negativa, que passa do condutor estacionário para o condutor em movimento, adquire a velocidade $+u$ no mesmo elemento de tempo.

Se, de acordo com isso, a parte do movimento que os fluidos elétricos em um elemento de corrente compartilham com seu portador é geralmente designada por v, então, se a velocidade desse portador não mudar, a parte do movimento dos fluidos elétricos designada por v, via de regra, também não sofrerá alteração; essa regra, no entanto, sofre uma exceção no caso em consideração no elemento de transição α; pois, do que foi dito, segue-se que, embora nada mude no movimento da peça condutora em movimento, a parte do movimento da eletricidade positiva contida em α denotada por v sofre uma diminuição $-u$ no elemento de tempo dt em que flui através de α, e a parte do movimento da eletricidade negativa contida em α, também denotada por v, sofre um aumento $+u$ no mesmo elemento de tempo.

A rigor, o elemento de transição α não pode ser considerado um elemento de corrente

[442] Isto é, Weber em seu artigo que será publicado em 1852.

[443] Weber vai então apresentar agora a fórmula para esse caso deduzida a partir de sua lei fundamental.

porque os movimentos dos fluidos elétricos nesse elemento não atendem às condições contidas na definição de correntes galvânicas.

A lei fundamental estabelecida para as ações elétricas nas "Medições Eletrodinâmicas" aplica-se em geral, independentemente dos movimentos que os fluidos elétricos possam ter; no entanto, as aplicações que foram feitas dessa lei fundamental referem-se, como foi expressamente observado, apenas aos fluidos elétricos que estão em real movimento de corrente. A lei geral da indução voltaica[444] desenvolvida lá, portanto, também fornece apenas a expressão da força eletromotriz exercida por um elemento de corrente real e, portanto, não tem aplicação direta ao elemento de transição α no caso considerado aqui.

Mas como não havia outra razão para essa limitação da aplicação da lei fundamental geral a não ser o fato de que a maioria dos outros movimentos dos fluidos elétricos, exceto nos elementos de corrente, ainda não estavam determinados com precisão suficiente para tal aplicação, é óbvio que, assim que essa determinação for dada para qualquer outro caso que não ocorra em elementos de corrente, como acabou de acontecer no elemento de transição do caso em consideração, não há nada que impeça a aplicação da lei fundamental geral a esse caso também.

O autor[445] agora realmente desenvolve a expressão completa da força eletromotriz exercida pelo elemento de transição a partir da lei fundamental declarada, e isso resulta em uma expressão composta de três partes, das quais as duas primeiras partes são idênticas à expressão dada nas "Medições Eletrodinâmicas" para um elemento de corrente. No caso considerado por Neumann, a terceira parte adicionada é igual à segunda dessas duas partes, cujo valor é, portanto, duplicado, e é essa duplicação que Neumann também reconheceu como necessária.

A seguinte expressão geral da força eletromotriz exercida por um elemento indutor α em um elemento induzido α' é fornecida nas "Medições Eletrodinâmicas":[446,447]

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos\varpi-\frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta\right)av\cos\vartheta'-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}a\cos\vartheta\cos\vartheta'\cdot\frac{di}{dt}\ .$$

Essa expressão se aplica somente a elementos reais de corrente indutora. Se os elementos de transição mencionados anteriormente também forem incluídos em α, então a seguinte expressão é obtida aplicando-se os mesmos termos explicados no local mencionado na Seção 30:[448]

$$\begin{aligned}-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos\varpi-\frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta\right)av\cos\vartheta'-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}a\cos\vartheta\cos\vartheta'\cdot\frac{di}{dt}\\+\frac{1}{4}\frac{\alpha\alpha'}{r}a^2e\cdot\cos\vartheta\cos\vartheta'\left(\frac{dv}{dt}-\frac{dw}{dt}\right)\ ,\end{aligned}$$

onde dv/dt e dw/dt denotam a mudança, a ser distinguida para a eletricidade positiva e negativa, daquela parte de sua velocidade que é comum a elas com seu portador. Para qualquer elemento de corrente real α temos

---

[444] Ver a Nota de rodapé 173 na página 105.

[445] Isto é, Weber.

[446] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 202.

[447] [Web46, pág. 202 das *Obras* de Weber] e [Web07, pág. 132]. Ver a página 209 dessa tradução em português. Ver também a Nota de rodapé 329 na página 203.

[448] Weber está se referindo aqui à Seção 30 de seu tratado de 1846, [Web46, Seção 30, págs. 196-207 das *Obras* de Weber] e [Web07, págs. 128-136]. Ver a Seção 6.30 dessa tradução em português.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dw}{dt} \ ,$$

o que torna essa expressão igual à anterior. Para o elemento de transição considerado anteriormente, no entanto,

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{dw}{dt} \ ,$$

ou seja, para a duração de dt em que a eletricidade flui pelo comprimento do elemento de corrente α, isto é, para $dt = \alpha/u$, temos

$$dv = -dw = v \ ,$$

o que faz com que seja obtida a expressão a seguir, composta por três membros:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i \left(\operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \eta \cos \varpi - \frac{1}{2} \cos \vartheta \cos \eta \right) av \cos \vartheta' - \frac{1}{2} \frac{\alpha\alpha'}{r} a \cos \vartheta \cos \vartheta' \cdot \frac{di}{dt} \\ + \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{r} a^2 e \cdot \cos \vartheta \cos \vartheta' \cdot uv \ .$$

Para todos esses elementos α, dos quais se origina a primeira parte da indução calculada por Neumann, além do terceiro membro, também é omitido o segundo membro, porque para ele $di/dt = 0$, e apenas o primeiro membro permanece:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2} i \left(\operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \eta \cos \varpi - \frac{1}{2} \cos \vartheta \cos \eta \right) av \cos \vartheta' \ .$$

Para todos os elementos α, dos quais se origina a segunda parte da indução calculada por Neumann, o primeiro membro é omitido, além do terceiro membro, porque para eles $v = 0$, e apenas o segundo membro permanece:

$$-\frac{1}{2} \frac{\alpha\alpha'}{r} a \cos \vartheta \cos \vartheta' \cdot \frac{di}{dt} \ ,$$

ou seja, para a duração de dt em que a corrente i é gerada no elemento α, ou seja, para $dt = -\alpha/v$,

$$di = aeu \ ,$$

a força eletromotriz [torna-se] então:

$$-\frac{1}{2} \frac{\alpha\alpha'}{r} \cdot a^2 e \cdot \cos \vartheta \cos \vartheta' \cdot u \ ,$$

ou, como $\alpha = -vdt$,

$$+\frac{1}{2} \frac{\alpha'}{r} \cdot a^2 e \cdot \cos \vartheta \cos \vartheta' \cdot uvdt \ .$$

Por fim, para os elementos de transição α, para os quais Neumann não calculou a indução, obtemos pela redução de seu comprimento, de modo que os dois primeiros membros desaparecem, o [seguinte] valor limite:

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha'}{r}\cdot a^2e\cdot\cos\vartheta\cos\vartheta'\cdot uv\ ,$$

ou o valor de força eletromotriz durante o elemento de tempo dt:

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha'}{r}\cdot a^2e\cdot\cos\vartheta\cos\vartheta'\cdot uvdt\ ,$$

de acordo com o qual essa terceira parte adicionada é igual à segunda parte calculada por Neumann, que era o que precisava ser comprovado.

Capítulo 11

Introdução ao Artigo de 1849 de Kirchhoff sobre a Dedução das Leis de Ohm

A. K. T. Assis[449]

Apresento aqui a tradução do artigo de 1849 de Gustav Kirchhoff sobre uma dedução das leis de Ohm satisfazendo à teoria da eletrostática.[450] Ohm havia identificado a força eletroscópica com a densidade volumétrica de carga. Além disso, ele havia assumido que a carga livre em um condutor era distribuída uniformemente por todo o volume do condutor não apenas quando as cargas estavam em repouso nele, mas também quando se deslocavam com velocidade constante no caso de correntes uniformes. Esse artigo de Kirchhoff tem dois aspectos relevantes principais. (I) Ele foi capaz de deduzir as leis de Ohm a partir de princípios que estavam de acordo com a teoria da eletrostática. Ele mostrou, em particular, que a eletricidade livre só pode existir na superfície do condutor não apenas quando a eletricidade está em repouso nele, mas também quando está fluindo uniformemente em circuitos fechados. (II) Além disso, Kirchhoff identificou a força eletroscópica de Ohm com o potencial eletrostático.[451]

[449]Homepage: `www.ifi.unicamp.br/~assis`

[450][Kir49b] com traduções para o inglês em [Kir50] e [Kir21a], e tradução para o francês em [Kir54]. A tradução para o português aparece no Capítulo 12.

[451][Whi73, págs. 90-93 e 224-226].

Capítulo 12

[Kirchhoff, 1849] Dedução das Leis de Ohm, Satisfazendo à Teoria da Eletrostática

Gustav Kirchhoff[452,453]

Na dedução de suas leis das correntes galvânicas, Ohm partiu de suposições sobre a eletricidade que não estão de acordo com as suposições que foram necessárias para explicar os fenômenos eletrostáticos;[454] ele assumiu, em contradição com essas suposições, que a eletricidade em um condutor está em repouso quando ela está distribuída por todo o volume do condutor em um estado de densidade [volumétrica] uniforme. Agora, embora sempre seja desejável determinar as leis às quais as correntes elétricas estejam sujeitas baseado em considerações ligadas à teoria da eletrostática, isso torna-se absolutamente necessário para nos permitir produzir uma teoria satisfatória das experiências na qual lidamos com a eletricidade em repouso e em movimento, — experiências similares àquelas feitas pelo Sr. Kohlrausch sobre o circuito fechado com condensador e eletrômetro.[455,456] Meu objetivo atual é mostrar como as fórmulas de Ohm podem ser deduzidas a partir das leis eletrostáticas da repulsão mútua entre as partículas de eletricidade, recorrendo a certas suposições ligadas a questões que permaneceram bem abertas na teoria da eletrostática.

Quando eletricidade é comunicada a um condutor, ela vai assumir um estado de equilíbrio quando as forças exercidas pela eletricidade livre sobre uma partícula de eletricidade existindo em qualquer parte do interior do condutor se neutralizam mutuamente. Isso ocorre quando permanece constante o potencial em relação a um ponto dentro do condutor devido a toda eletricidade livre. A teoria nos mostra que isso só pode ocorrer quando a eletricidade livre ficou distribuída de uma maneira particular sobre a superfície do condutor.

Quando dois condutores de tipos diferentes, como um pedaço de cobre e um pedaço de zinco, que separadamente não contêm eletricidade livre, são colocados em contato entre si, um condutor torna-se eletricamente positivo enquanto que o outro torna-se negativo. A

[452][Kir49b] com tradução para o inglês em [Kir50] e [Kir21a], e tradução para o francês em [Kir54].

[453]As Notas de Gustav Kirchhoff são representadas por [Nota de Kirchhoff:], todas as outras Notas são de minha autoria.

[454]Ver a Nota de rodapé 116 na página 61.

[455][Nota de Kirchhoff:] *Annalen* de Poggendorff, Vol. lxxviii, pág. 1.

[456]Rudolf Hermann Arndt Kohlrausch (1809-1858). Ver [Koh49].

eletricidade excitada no ponto de contato logo assume um estado de equilíbrio; nesse estado de equilíbrio o potencial da quantidade total de eletricidade livre tem de necessariamente permanecer constante com relação a todos os pontos dos dois condutores; portanto, segue que a eletricidade livre não pode existir dentro do condutor, e que ela tem de estar situada apenas sobre sua superfície; uma porção da eletricidade vai permanecer na superfície de contato entre os dois condutores, enquanto que outra porção vai cobrir sua superfície livre.

O potencial de toda a eletricidade livre é constante com relação a todas as partes de cada um dos condutores: contudo, seu valor será diferente no primeiro condutor em relação a seu valor no segundo condutor; pois a teoria nos ensina que caso seu valor fosse o mesmo nos dois condutores, hão haveria eletricidade livre presente, na medida em que a soma de toda a eletricidade livre é = 0. Agora, no que diz respeito à diferença entre os dois valores do potencial nos dois condutores, essa diferença pode depender da natureza dos materiais de que são compostos os dois condutores e de suas formas. Vou assumir que essa diferença é independente de suas formas e que é aquela magnitude que é conhecida pela tensão entre os dois corpos.[457] Seja u_1 o potencial devido a toda quantidade de eletricidade livre em relação a um ponto do primeiro condutor, e u_2 o potencial em relação a um ponto do segundo condutor; tanto u_1 quanto u_2 têm de ser constantes;[458] além disso, se $U_{1,2}$ denotar a tensão entre os dois corpos, temos de ter

$$u_1 - u_2 = U_{1,2} \ .$$

Se imaginarmos vários condutores, digamos três, colocados em contato de tal maneira que o primeiro condutor toque o segundo, e esse toque o terceiro condutor, a eletricidade neles sempre tem de assumir um estado de equilíbrio. Se denotarmos novamente o potencial da quantidade total de eletricidade livre em qualquer ponto do primeiro condutor por u_1, para um ponto do segundo condutor por u_2, e para um ponto do terceiro condutor por u_3, e se além disso denotarmos a tensão entre [os condutores] um e dois por $U_{1,2}$, e aquela entre dois e três por $U_{2,3}$, então é essencial para a existência do estado de equilíbrio que cada uma das três grandezas u_1, u_2, e u_3 seja constante, e que sejam satisfeitas as seguintes equações:

$$u_1 - u_2 = U_{1,2} \ ,$$

e

$$u_2 - u_3 = U_{2,3} \ .$$

Mas se assumirmos que os condutores 1, 2 e 3 tenham sido colocados em contato de tal forma que cada um deles esteja em contato com os outros dois, nem sempre será possível um equilíbrio elétrico entre eles. Para que o equilíbrio exista, cada uma das grandezas u_1, u_2 e u_3 tem de ser constante, e as seguintes equações terão de ser satisfeitas:

$$u_1 - u_2 = U_{1,2} \ ,$$

$$u_2 - u_3 = U_{2,3} \ ,$$

[457]Em alemão: *die Spannung der beiden Körper*. Kirchhoff está identificando aqui a diferença entre os valores do potencial eletrostático nos dois condutores com a tensão elétrica entre eles.

[458]Isto é, no equilíbrio u_1 e u_2 têm de ser constantes ao longo do tempo. Além disso, u_1 tem de ter o mesmo valor em todos os pontos do condutor 1, enquanto que u_2 tem de ter o mesmo valor em todos os pontos do condutor 2.

e

$$u_3 - u_1 = U_{3,1} \ .$$

Ao adicionar essas equações obtemos

$$0 = U_{1,2} + U_{2,3} + U_{3,1} \ ;$$

portanto, as tensões dos três condutores têm de satisfazer essa condição para permitir a possibilidade de equilíbrio elétrico; a condição é satisfeita quando os três condutores pertencem à assim denominada série de tensão.[459]

Em seguida temos de examinar o que acontece quando essa condição não é satisfeita. Em um momento particular haverá uma certa distribuição de eletricidade livre; deixo indeterminado se essa eletricidade livre existe apenas na superfície do condutor, ou se ela penetrou em seu interior. Seja u seu potencial em relação a qualquer ponto de um dos condutores; essa grandeza u não é constante, mas uma função das coordenadas do ponto a que se refere; portanto, as forças que são exercidas pela eletricidade livre sobre uma partícula de eletricidade existindo em qualquer lugar dentro do condutor não manterão um estado de equilíbrio, mas produzirão uma resultante definida. Vamos imaginar a existência de um elemento de volume,[460] v, dentro do condutor, e vamos denotar essa resultante para qualquer ponto em v por R. Se v não contiver qualquer eletricidade livre, o fluido elétrico contido aí vai ficar decomposto; a eletricidade positiva será deslocada na direção de R e a negativa na direção oposta; portanto, as quantidades de eletricidade positiva e negativa excitadas no elemento v, e também suas velocidades, têm de ser as mesmas.[461] Vou assumir que a quantidade de cada um dos fluidos que é deslocada em uma unidade de tempo através de uma seção [reta] de v, perpendicular à direção de R, cuja magnitude seja denominada por dw,[462] é

$$= dwkR \ ,$$

na qual k denota a condutividade da substância.

Para determinar o que acontece quando v contém eletricidade livre, vou assumir que nenhum movimento dos fluidos elétricos pode ocorrer no condutor, exceto quando quantidades iguais das duas eletricidades fluem simultaneamente em direções opostas através de cada elemento de superfície dele.[463] Portanto, segue que mesmo quando v contém eletricidade livre, a quantidade de eletricidade positiva fluindo em uma unidade de tempo através de dw na direção de R tem o mesmo valor que a quantidade de eletricidade negativa fluindo na direção oposta. No que diz respeito à quantidade de eletricidade fluindo através de dw, assumo novamente que ela é

[459] Em alemão: *Spannungsreihe*. Essa expressão pode ser traduzida como série de tensão ou série galvânica.

[460] Em alemão: *Raumelement*. Essa expressão pode ser traduzida como um elemento de volume ou elemento de espaço.

[461] Kirchhoff está assumindo aqui implicitamente que as partículas positiva e negativa são móveis em relação à parte material do condutor. As velocidades aqui são então as velocidades de arraste ou de deriva das partículas em relação ao condutor. Além disso, está assumindo que as partículas possuem a mesma massa. Se elas tiverem massas diferentes, as velocidades adquiridas após a passagem de um certo tempo t teriam grandezas diferentes devido a uma aplicação de forças de mesma intensidade, mas de direções opostas, atuando sobre elas.

[462] Ou seja, dw é o tamanho do elemento de área normal à direção da força R e que está sendo atravessado em direções opostas pelos fluxos de eletricidade positiva e negativa.

[463] O elemento de superfície que está sendo considerado aqui é um elemento da seção reta do condutor, normal à direção da corrente.

$$= dwkR \ .$$

Se além dessas suposições, sendo que a maioria delas já foi apresentada por Weber em suas *elektrodynamischen Maassbestimmungen — medições eletrodinâmicas*,[464] assumirmos que a diferença nos valores do potencial devido a toda a eletricidade livre para dois pontos próximos um do outro em ambos os lados da interface entre dois condutores permanece a mesma, quer a corrente atravesse o condutor, quer a eletricidade esteja em repouso neles; chegaremos, supondo que a condição elétrica do sistema tenha se tornado estacionária, às mesmas equações para o potencial da eletricidade livre que aquelas equações que resultam da concepção de Ohm para a força eletroscópica, isto é, para a densidade [volumétrica] de eletricidade.[465]

De fato, se denotarmos por N à normal ao elemento dw, que tem a direção de R, então

$$R = -\frac{du}{dN} \ ,$$

portanto, a quantidade de eletricidade positiva ou negativa atravessando dw em uma unidade de tempo é

$$= -kdw\frac{du}{dN} \ .$$

A mesma expressão é obtida para essa quantidade a partir da concepção de Ohm, se u for usado para denotar a força eletroscópica.[466,467] Porém, mesmo sem entrar no significado da grandeza u, a partir dessa expressão podemos concluir que quando a condição do sistema fica estacionária, u tem de satisfazer à equação diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0 \ ;$$

e para cada ponto da superfície livre do condutor tem de ser satisfeita a condição de fronteira

$$\frac{du}{dN} = 0 \ ;$$

e, além disso, tem de valer a seguinte equação para todo ponto da interface entre os dois corpos:

$$k\frac{du}{dN} + k_1\frac{du_1}{dN} = 0 \ .$$

Tem de ser adicionado a essas condições, tanto no que diz respeito à concepção de Ohm quanto às concepções apresentadas aqui, que tem de valer para todo ponto da interface de contato, $u - u_1 =$ à tensão entre os dois corpos. Assim são obtidas as mesmas equações para a grandeza u nas duas concepções. No que diz respeito às correntes que são determinadas

[464] Kirchhoff está se referindo a Wilhelm E. Weber (1804-1891) e à sua Primeira Memória principal sobre Medições Eletrodinâmicas, traduzida no Capítulo 6.

[465] Em alemão: *die aus der Ohm'schen Vorstellung für die elektroskopisch Kraft, d. i. die Dichtigkeit der Elektricität.*

[466] [Nota de Kirchhoff:] *Annalen* de Poggendorff, Vol. lxxv, pág. 191. O que Ohm chama de força eletroscópica é denominado aqui de tensão.

[467] Ver [Kir48, pág. 191]. Kirchhoff está identificando aqui a força eletroscópica de Ohm com o potencial eletrostático u. Ver ainda a Nota de rodapé 457 e [Whi73, págs. 90-93 e 224-226].

pelas derivadas dessas grandezas, obtemos consequentemente os mesmos resultados, quer comecemos de uma concepção ou de outra. Contudo, resultados diferentes são obtidos no que diz respeito à distribuição da eletricidade livre no circuito. De acordo com Ohm, o valor de u em cada parte do sistema fornece diretamente a densidade [volumétrica] de eletricidade, o que já não ocorre do ponto de vista que desenvolvemos a partir do qual, ao contrário, segue-se que mesmo em um circuito fechado a eletricidade livre só pode existir na superfície do condutor. Assim, como u dentro de um dos condutores satisfaz à equação

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0 \ ,$$

então u tem de ser um potencial das massas que estão situadas externamente a esse condutor. Mas u é um potencial devido a toda a eletricidade livre; portanto, nenhuma parte [dessa eletricidade livre] pode estar situada no interior de qualquer condutor.

As considerações que apresentamos valem qualquer que seja o número, a forma e o arranjo dos condutores que estão em contato; elas também valem naquele caso em que uma placa do condensador é colocada em contato com um ponto de um circuito fechado e, portanto, fornecem a teoria de experimentos similares àqueles do Sr. Kohlrausch.[468] Os resultados fornecidos por essas considerações concordam perfeitamente com os resultados dessa experiência.

As considerações que apresentamos estão baseadas na lei eletrostática para a ação de partículas elétricas. Nem os fenômenos eletrodinâmicos de Ampère,[469] nem os fenômenos de indução [de Faraday],[470] podem ser explicados por essa lei. Weber descobriu uma lei mais geral pela qual foi bem sucedido ao explicar esses fenômenos;[471] uma lei na qual é introduzida a velocidade relativa entre as partículas cuja ação mútua estava sendo considerada, e que volta à lei da eletrostática quando essa velocidade desaparece. Portanto, ao trazer os vários domínios da teoria da eletricidade sob um único ponto de vista, temos de deduzir as leis das correntes em circuitos fechados a partir da lei de Weber. Essa dedução parece difícil; contudo é fácil provar, *a posteriori*, que a concepção das correntes, à qual levou a suposição da lei eletrostática, também está de acordo com a lei de Weber, quando um certa hipótese vem em seu auxílio, a saber, aquela hipótese de acordo com a qual, ao calcular a força que produz uma separação das duas eletricidades no espaço v de um dos condutores, as eletricidades em v têm de ser consideradas em repouso. Não há nada oposto a esse ponto de vista quando levamos em consideração que o movimento da eletricidade em um condutor só ocorre de molécula para molécula; de tal forma que toda partícula de eletricidade encontra um ponto de repouso na molécula que ela alcança. Adotando esse ponto de vista, pode ser prontamente concedido que a quantidade de eletricidade que é transferida de uma molécula para uma molécula próxima só é condicionada por forças que são exercidas sobre as partículas de eletricidade, enquanto elas ainda estão em um estado de repouso na partícula anterior, mas não por forças que atuam sobre elas enquanto estão passando para a próxima molécula. No que diz respeito à teoria da indução de Weber, não é relevante se é feita ou não essa hipótese. Se ela for feita, e se as correntes no circuito forem consideradas geralmente como estando de acordo com o ponto de vista da eletrostática, então, no que diz respeito à intensidade e direção da força que tende a separar as eletricidades no elemento v e, portanto, em relação à força

[468] [Koh49].
[469] Ver a Nota de rodapé 10 na página 19.
[470] Ver a Nota de rodapé 26 na página 26.
[471] Ver o Capítulo 6.

eletromotriz, como Weber a denomina, é indiferente se partimos da lei eletrostática ou da lei de Weber. Portanto, a diferença que possivelmente poderia ocorrer, tem de surgir das forças exercidas pelas eletricidades fluindo nas outras partes do sistema; e essas forças, de acordo com o que foi apontado por Weber, não contribuem para essa força eletromotriz, desde que as correntes sejam constantes, e transportem quantidades iguais das duas eletricidades em direções opostas com a mesma velocidade.

Capítulo 13

[Weber, 1851] Medição da Resistência Elétrica de acordo com um Padrão Absoluto

Wilhelm Weber[472,473,474]

13.1 Explicação da Unidade Absoluta de Medida para as Resistências Elétricas

Assim como não há necessidade de estabelecer uma *unidade fundamental* separada para a *velocidade* se forem fornecidas unidades de espaço e tempo,[475] também não há necessidade de estabelecer uma *unidade fundamental separada para a resistência do circuito galvânico* se forem dadas unidades para a força eletromotriz e para a intensidade da corrente. *A unidade de medida pode então ser a resistência de um condutor fechado no qual a unidade de medida da força eletromotriz produz a unidade de medida da intensidade de corrente.* Essa é a base para reduzir as medições de resistência elétrica a um padrão absoluto.

Poderia ser pensado que essa redução seria efetuada mais simplesmente ao reverter às dimensões espaciais do condutor galvânico, a saber, comprimento e área de seção reta, e aderindo àquele metal (*cobre*) que está melhor adaptado e é utilizado mais frequentemente para tais condutores. Nesse caso a unidade absoluta de medida da resistência seria aquela

[472] [Web51] com tradução para o inglês em [Web61] e [Web21k].

[473] As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o editor do Volume 3 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; as Notas dos editores da *Philosophical Magazine* (a saber, Sir David Brewster, Sir Robert Kane, William Francis e John Tyndall) onde foi publicada a tradução em inglês desse trabalho, são representadas por [Nota dos editores da *Philosophical Magazine*:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

[474] [Nota dos editores da *Philosophical Magazine*:] Traduzido dos *Annalen* de Poggendorff, Vol. lxxxii, pág. 337, pelo Dr. E. Atkinson. [Devido à grande importância científica e prática que a determinação da resistência elétrica adquiriu recentemente, pensou-se que seria aconselhável apresentar uma tradução do artigo original de Weber publicado em 1851 contendo o método de referir essas resistências a um padrão absoluto. — Editores]

[475] Em alemão: "Wie für die *Geschwindigkeit* kein eigenes *Grundmaass* aufgestellt zu werden braucht, wenn Raum- und Zeitmaass gegeben sind, ..." A expressão *Grundmaass* pode ser traduzida como medição fundamental, unidade fundamental, unidade de medida fundamental, etc. Ver a Nota de rodapé 95 na página 46.

resistência que um condutor de cobre possui cujo comprimento é igual à unidade de medida do comprimento, e cuja área de seção reta é igual à unidade de medida de superfície e no qual, portanto, além das medições de comprimento e superfície, teria de ser dada para a resistência específica das substâncias condutoras, *a resistência específica do cobre como unidade de medida*. Logo seria necessário a introdução de uma *unidade de medida fundamental para as resistências específicas*, cuja introdução levantaria preocupações. *Em primeiro lugar*, já que não haveria economia no número de unidades de medida fundamentais se, com o objetivo de ficar sem um padrão fundamental para a resistência absoluta, tiver de ser introduzido uma outra unidade de medida fundamental, o que de outra forma seria desnecessário. *Em segundo lugar*, nem o cobre nem qualquer outro metal é uma substância apropriada para estabelecer um padrão fundamental para as resistências. Jacobi[476] diz que há diferenças até mesmo nas resistências dos metais mais puros, sendo que essas diferenças não podem ser explicadas por uma diferença em suas dimensões; e que, de acordo com isso, se um físico referir seu reostato e multiplicador a um fio de cobre com 1 metro de comprimento e 1 milímetro de espessura,[477] outros físicos não terão certeza que esse fio de cobre e o que eles estão usando têm o mesmo *coeficiente de resistência*, isto é, se a resistência *específica* de todos esses fios será a mesma. Portanto, a redução das medições de resistências galvânicas a um padrão de medida absoluto só tem uma importância essencial e encontra uma aplicação prática, se ela ocorre da primeira maneira mencionada anteriormente na qual não são pressupostas outras medições além da *força eletromotriz* e *intensidade da corrente*.

Surge então a questão: quais são os padrões de medida para as *forças eletromotrizes* e as *intensidades de corrente*? Ao medir essas grandezas, não são necessárias *unidades fundamentais* específicas, já que elas podem ser referidas a *unidades absolutas* se forem fornecidas as unidades magnéticas para o *magnetismo em barras* e para o *magnetismo terrestre*, assim como *unidades de espaço e tempo*.[478]

No que diz respeito à unidade absoluta de medida da *força eletromotriz, ela pode ser entendida como a força eletromotriz que a unidade de medida do magnetismo terrestre exerce sobre um condutor fechado, se esse circuito for girado de tal forma que a área de sua projeção sobre um plano normal à direção do magnetismo terrestre aumenta ou diminui em uma unidade de superfície durante a unidade de tempo*. Como uma unidade absoluta da *intensidade de corrente, ela pode ser entendida como a intensidade daquela corrente que, quando ela flui ao redor de um plano com o tamanho da unidade de medida de área, exerce, de acordo com as leis eletromagnéticas, a mesma ação à distância que uma barra imantada que contém uma unidade de magnetismo em barra*.[479] As unidades de medida absoluta do *magnetismo em barra* e do *magnetismo terrestre* são conhecidas a partir do tratado de Gauss, *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*, Göttingae, 1833 (*Annalen* de Poggendorff, Vol. xxviii, págs. 241 e 591).[480,481]

É evidente a partir dessa apresentação que as medições das resistências elétricas podem ser referidas a um padrão absoluto, desde que sejam dadas as unidades fundamentais para

[476] Moritz Hermann von Jacobi (1801-1874). Ver [Jac51].

[477] Ver a Nota de rodapé 96 na página 47.

[478] No que diz respeito à unidade do magnetismo em barra, Weber está se referindo à unidade de momento magnético de uma barra imantada. Já para a unidade de magnetismo terrestre, Weber está se referindo à força magnética por unidade de polo magnético, força essa exercida pela Terra sobre os polos magnéticos de um ímã.

[479] Uma barra magnetizada com uma unidade de magnetismo em barra possui um momento magnético = 1.

[480] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 79.

[481] Ver a Nota de rodapé 114 na página 59.

espaço, *tempo* e *massa*; já que as unidades absolutas do *magnetismo em barra* e do *magnetismo terrestre* dependem apenas dessas três unidades fundamentais. Uma consideração mais detalhada mostra que, dentre essas três unidades fundamentais, a *unidade da massa* não precisa ser levada em consideração, como será mostrado na visão geral a seguir das relações simples que são estabelecidas por essa determinação das unidades absolutas desses vários tipos de grandeza.[482]

Como unidades de medida fundamental devem ser consideradas a *unidade de comprimento* R e a *unidade de tempo* S; como *unidades de medida absolutas*, a unidade de superfície F e as unidades de medida de *magnetismo em barra* M, do *magnetismo terrestre* T, da *força eletromotriz* E, da *intensidade de corrente* J e da *resistência* W.

Portanto, *em primeiro lugar*, se wW é a resistência de qualquer circuito fechado, eE a força eletromotriz atuando sobre esse condutor, e iJ a intensidade de corrente produzida por essa força eletromotriz, temos a seguinte relação entre esses três números w, e, i:

$$w = \frac{e}{i} ,$$

a partir da qual fica claro que se os números e e i são determinados através de uma medição, então o número w também é obtido indiretamente sem que necessite de uma medição especial.

Em segundo lugar, seja eE a força eletromotriz que atua sobre qualquer condutor fechado (plano), fF a área do plano englobada por esse condutor, tT o magnetismo terrestre do qual depende a força eletromotriz; e seja sS o intervalo de tempo no qual o plano desse condutor é deslocado por rotação desde uma posição paralela à direção do magnetismo terrestre até uma posição ortogonal e ela, de tal maneira que a superfície limitada produzida por sua projeção sobre um plano ortogonal a essa direção do magnetismo terrestre aumente proporcionalmente ao tempo em uma unidade de superfície durante a unidade de tempo. Teremos então entre os quatro números e, f, t, s, a seguinte relação:

$$e = \frac{ft}{s} ,$$

e, portanto, é claro que se os três números f, t, s são determinados através de uma medição, o número e também é determinado indiretamente por essa relação sem necessitar de uma medição especial.

Em terceiro lugar, se iJ é a intensidade da corrente em qualquer condutor fechado, fF a área englobada por esse condutor e mM o magnetismo de uma barra[483] que, quando substituída no lugar daquele condutor (com seu eixo magnético ortogonal ao plano do condutor), exerce as mesmas ações à distância, de acordo com as leis eletromagnéticas, que aquele condutor, então obtém-se a seguinte relação entre os três números i, f, m:

$$i = \frac{m}{f} ,$$

da qual segue que se são determinados por medições os números f e m, então o número i pode ser obtido indiretamente sem que seja necessária uma medição especial.

[482]Gauss determinou as unidades do magnetismo terrestre e do magnetismo de uma barra imantada usando apenas as unidades de massa, espaço e tempo, ver a Nota de rodapé 114 na página 59. Em particular utilizava o miligrama, o milímetro e o segundo. Weber vai mostrar agora que para estabelecer as unidades de força eletromotriz, intensidade de corrente e resistência, bastam duas unidades fundamentais, a saber, milímetro e segundo, já que as unidades dessas outras grandezas podem ser determinadas a partir dessas duas unidades fundamentais.

[483]Isto é, mM é o momento magnético dessa barra magnetizada.

Finalmente, dessas três relações obtemos

$$w = \frac{e}{i} = \frac{fft}{sm} \ ,$$

portanto, quando os quatro números f, s, m, t são determinados por medição, o número w também é obtido indiretamente [sem necessitar de uma nova medição]. O número f é obtido ao medir a área do plano englobado pelo condutor; s é encontrado ao medir o tempo; e só sobram os números m e t, que são obtidos ao medir o magnetismo em barra pelo método descrito por Gauss no trabalho já citado.[484] De acordo com isso a imutabilidade da unidade de medida para a resistência elétrica pode ser garantida desde que permaneçam inalteradas as quatro unidades dadas (espaço, tempo, e as unidades de medida para o magnetismo terrestre e para o magnetismo em barra). Mas não segue disso que a manutenção dessas quatro unidades dadas seja uma condição necessária para a imutabilidade da unidade de medida das resistências elétricas; para esse propósito é suficiente a simples manutenção da unidade de medida para as *velocidades*.

Pois se tT denota o magnetismo terrestre do qual depende a força eletromotriz que atua sobre o condutor fechado cuja resistência foi medida; se, além disso, $m'M$ denota o magnetismo de uma barra (cujo eixo magnético é paralelo à direção do magnetismo terrestre, enquanto que a linha reta traçada de seu centro até o centro do plano englobado pelo condutor é normal à direção do magnetismo terrestre) que, de acordo com as leis magnéticas, exerceria a uma grande distância a mesma ação que o magnetismo terrestre denotado por tT; e se, finalmente, rR é o comprimento da linha reta traçada do centro dessa barra até o centro do plano englobado pelo condutor, teremos a seguinte relação de acordo com o [trabalho de Gauss] *"Intensitas"*:

$$t = \frac{m'}{r^3} \ .$$

Ao substituir esse valor de t na equação para w obtemos:

$$w = \frac{ff}{r^3} \cdot \frac{m'}{m} \cdot \frac{1}{s} \ .$$

Finalmente, se $r'R$ denota o comprimento do lado de um quadrado cuja área é igual à área do plano englobado pelo condutor, do qual decorre a relação

$$f = r'^2 \ ,$$

e se também inserirmos esse valor de f na equação anterior, obteremos:

$$w = \frac{r'^3}{r^3} \cdot \frac{m'}{m} \cdot \frac{r'}{s} \ .$$

É evidente que uma mudança das unidades dadas não tem influência sobre o valor do fator

$$\left(\frac{r'^3}{r^3} \cdot \frac{m'}{m} \right) \ ,$$

porém uma mudança nas unidades dadas de tempo e espaço influencia o valor do fator f'/s e, de acordo com isso, [influencia] o valor do número w, caso essas duas medições [de f' e

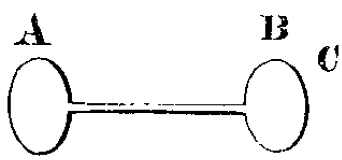
[484] Isto é, ao medir o momento magnético da barra imantada.

s] não sejam simultaneamente aumentadas ou diminuídas na mesma proporção. Portanto, o valor do número w é independente de todas alterações das unidades fornecidas, desde que isso não cause uma alteração na *unidade da velocidade*. Mas se por uma alteração das unidades dadas o padrão de velocidade for diminuído ou aumentado n vezes, será obtido um valor n vezes maior ou menor para o fator r'/s e, portanto, também para o número w, o que significa dizer que a resistência nesse caso é expressa de acordo com um padrão de medida n vezes menor ou maior. De acordo com a explicação dada, a imutabilidade da unidade de medida para a resistência do circuito galvânico depende apenas da imutabilidade da fornecida unidade de medida para a velocidade. Se a unidade de medida da velocidade for aumentada ou diminuída n vezes, a unidade de medida para a resistência do condutor galvânico será simultaneamente aumentada ou diminuída n vezes.

13.2 Método de Medição da Resistência Elétrica de Acordo com um Padrão Absoluto

As medições de comprimento e tempo que, de acordo com o parágrafo anterior, são suficientes para determinar a resistência galvânica de um condutor, pressupõem condições de cujo arranjo adequado dependem a viabilidade prática e a precisão de tal determinação. O próximo arranjo pode servir como um resumo simples das condições essenciais.

São formados dois anéis circulares A e B a partir do condutor cuja resistência é para ser medida e que estão conectados na maneira representada na Figura.



Todo o condutor composto pelos dois círculos A, B e as duas conexões forma uma linha fechada sobre si mesma que pode ser suposta, por simplicidade, estar situada em um plano, e que a linha reta conectando os centros dos dois círculos coincide com a direção do magnetismo terrestre. Seja T a intensidade do magnetismo terrestre como determinada de acordo com um padrão absoluto por medições magnetométricas; seja r o diâmetro dos círculos que, por simplicidade, são supostos iguais. Se agora o círculo A for projetado na direção do magnetismo terrestre AB sobre um plano normal a A, a área do plano projetado será $= 0$. Devido à flexibilidade dos fios conectando os dois círculos, seja suposto que o círculo A seja girado de tal forma a ficar ortogonal a AB, onde então a área do plano delimitado pela mesma projeção torna-se $= \pi r^2$. Vamos supor que essa rotação ocorra em um tempo curto s, de tal maneira que a área do plano de projeção do círculo aumente uniformemente durante esse tempo de 0 para πr^2. A partir das *leis eletromagnéticas*, resulta uma *força eletromotriz* que o magnetismo terrestre T exerce sobre o condutor circular A que girou durante o tempo s e que, de acordo com a unidade de medida explicada no parágrafo anterior, é expressa por eE, na qual o número e é determinado pela equação

$$e = \frac{\pi r^2}{s} \cdot T \ .$$

Por meio dessa força eletromotriz é produzida uma corrente no tempo s fluindo por todo o condutor fechado cuja *intensidade*, de acordo com a unidade de medida explicada no parágrafo anterior, é expressa por iJ. Essa corrente também flui pelo círculo B, e atua daqui sobre uma agulha magnética distante em C, cujo eixo de rotação, ortogonal à direção do magnetismo terrestre AB, está no plano do círculo. Vamos supor que C está ao longo da linha AB prolongada.[485] Segue agora das leis *eletromagnéticas*, que o torque exercido na agulha em C por uma corrente fluindo através do círculo B é igual ao torque exercido por uma barra imantada colocada no centro do círculo de tal maneira que seu eixo magnético seja ortogonal ao plano do círculo, caso seu magnetismo M,[486] expresso de acordo com a unidade absoluta, seja dado por

$$M = \pi r^2 i \ .$$

Se, além disso, o magnetismo da agulha em C expresso na mesma unidade de medida for $= m$,[487] se $BC = R$, e se φ denotar o ângulo que o eixo magnético da agulha em C faz com a direção AB do magnetismo terrestre, o torque exercido pelo magnetismo em barra M sobre o magnetismo em barra m, expresso de acordo com leis *magnéticas* conhecidas, será

$$\frac{Mm}{R^3} \cdot \cos\varphi = \frac{\pi r^2}{R^3} \cdot im \cos\varphi \ .$$

Disso segue que se K for o momento de inércia da agulha, então a *aceleração* dessa rotação será

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{\pi r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \cos\varphi \ ,$$

e, portanto, caso inicialmente a agulha estivesse em repouso e $\varphi = 0$, então a *velocidade angular* ao final do curto tempo s será

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\pi r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot s \ .$$

A partir dessa velocidade, finalmente encontramos a seguinte expressão para a maior elongação α da agulha colocada em oscilação, conhecida por *observação direta*, de acordo com as leis de oscilação conhecidas, multiplicando pelo período de oscilação[488] t e dividindo pelo número π:

$$\alpha = \frac{r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot st \ .$$

Para o período de oscilação temos a equação conhecida[489]

$$mT = \frac{\pi^2 K}{t^2} \ ,$$

[485][Nota de Wilhelm Weber:] Isto, ao longo da linha ligando os centros dos círculos A e B.

[486]Isto é, seu momento magnético M.

[487]Ou seja, m é o momento magnético da agulha.

[488]Em alemão: *Schwingungsdauer*. Ver a Nota de rodapé 113 na página 59.

[489]Weber está utilizando aqui a equação de movimento da agulha dada por $\tau = -mT\varphi = K\ddot{\varphi}$, na qual K é o momento de inércia da agulha, $\tau = -mT\varphi$ é o torque ou momento rotacional atuando sobre ela quando sofre uma pequena deflexão φ em relação a um sistema de referência inercial, m é o momento magnético da agulha e T o valor do magnetismo terrestre.

a partir da qual

$$\frac{mt}{K} = \frac{\pi^2}{tT} \ ,$$

e assim

$$\alpha = \frac{\pi^2 r^2}{R^3} \cdot \frac{is}{tT} \ .$$

Agora α é obtida da observação direta; portanto, para determinar o número i obtemos

$$i = \frac{R^3}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{t}{s} \cdot T\alpha \ .$$

Lembrando que a corrente atravessando o círculo B também atravessa o círculo A, também podemos calcular a ação da corrente circular A sobre a agulha em C; mas, por simplicidade, podemos assumir que a distância AC é tão grande que essa ação desaparece em comparação com a ação da corrente circular B [sobre a agulha em C]; nesse caso a deflexão *realmente observada* da agulha em C fornece diretamente o valor de α.

Consequentemente, a partir da *força eletromotriz* eE, expressa em unidade absoluta, para a qual foi encontrada a expressão

$$e = \frac{\pi r^2}{s} \cdot T \ ,$$

é produzida uma corrente em todo o condutor fechado, cuja área é para ser medida, cuja *intensidade* é expressa em unidade absoluta por iJ, para a qual se encontrou

$$i = \frac{R^3}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{t}{s} \cdot T\alpha \ .$$

Porém, de acordo com a unidade explicada no parágrafo anterior, a *resistência procurada* de todo o condutor fechado é expressa por wW, na qual o número w é determinado pela razão dos números e e i, a saber:

$$w = \frac{e}{i} = \frac{\pi^3 r^4}{R^3 t\alpha} \ .$$

Portanto, a execução da medição de uma resistência elétrica em unidades absolutas depende da medição das grandezas

$$r, \quad R, \quad t, \quad \alpha \ ,$$

em outras palavras, a resistência de todo o condutor fechado pode ser expressa em unidade absoluta se encontrarmos por meio de observações, *em primeiro lugar*, o número α que fornece a deflexão da agulha em partes do diâmetro; *em segundo lugar*, o número r/R, que fornece o diâmetro dos dois círculos em partes da distância BC; *em terceiro lugar*, a velocidade r/t com que o raio desses círculos é percorrido durante uma oscilação da agulha. A partir disso, vemos novamente que a *unidade de velocidade* é a única unidade de medida que tem de ser fornecida para que a resistência de um condutor seja determinada por medição de acordo com uma unidade absoluta.

13.3 Observações

Entre as quatro grandezas que, conforme o parágrafo anterior, precisam ser encontradas por *observação* com o propósito de determinar resistências elétricas de acordo com um padrão absoluto, três podem ser prontamente medidas, a saber, o diâmetro r dos dois círculos, a distância $BC = R$ do círculo B até a agulha em C, e o período de oscilação t da agulha. Sobra então a quarta grandeza, isto é, a deflexão α da agulha expressa em partes do diâmetro, e essa grandeza é usualmente tão pequena que não pode ser observada. Esse é o motivo pelo qual, ao realizar de fato as observações, tem de ser feita uma pequena variação no arranjo descrito no parágrafo anterior. Pois para obter um valor de α grande o suficiente para observação precisa é necessário, *em primeiro lugar*, que a agulha magnética sobre a qual é para atuar a corrente circular B, em vez de estar a uma grande distância $BC = R$, seja suspensa no centro da própria corrente circular, sendo que nesse caso a ação vai ser maior quanto menor for o diâmetro r em comparação com R. Também tem de ser tomado cuidado para que o comprimento da agulha seja muito menor do que o diâmetro do círculo, para que não seja necessário levar em consideração a distribuição peculiar do magnetismo na agulha, já que é difícil a investigação dessa distribuição. *Em segundo lugar*, é necessário que os dois círculos, em vez de serem constituídos de uma espira, sejam constituídos de vários enrolamentos do condutor, sendo que por meio disso eles são transformados em anéis de maior espessura. Contudo, nesse caso tem de ser levada em consideração a influência individual de todas as espiras, já que elas possuem diâmetros diferentes e não estão todas no mesmo plano que a agulha.

Para o condutor cuja resistência era para ser medida, foi escolhido um fio de cobre muito longo e espesso que pesava 169 quilogramas. Disso foram usados 16 quilogramas para o anel A, que consistia em 145 enrolamentos, englobando no total uma superfície de aproximadamente 105 metros quadrados. Este anel foi montado verticalmente e podia ser rapidamente girado em um semicírculo em torno de seu diâmetro vertical por uma manivela, de modo que a perpendicular no plano do anel coincidisse com o meridiano magnético no início e no final da rotação. Os outros 153 quilogramas foram utilizados para o anel B, que consistia em 1854 enrolamentos, fornecendo em conjunto uma seção reta de 202 milímetros de largura e 70,9 milímetros de altura. O diâmetro interno desse anel era de 303,51 milímetros e o externo de 374,41 milímetros. Esse segundo anel estava fixado de maneira firme e seu plano coincidia com aquele do meridiano magnético. Foi suspensa por uma linha de seda no centro desse segundo anel B uma pequena agulha magnética com 60 milímetros de comprimento que vinha com um espelho, como em um pequeno magnetômetro; e as oscilações e deflexões da agulha foram observados com um telescópio, direcionado ao espelho, sobre uma escala[490] colocada a aproximadamente 4 metros do espelho.

As observações foram feitas da seguinte maneira. O anel A foi inicialmente colocado de tal forma que seu plano coincidisse com o meridiano magnético, e a agulha no meio do anel B foi colocada dessa maneira em repouso; então o anel A foi girado repentinamente de 90°. Dessa maneira a agulha no meio do anel B foi colocada em oscilação e por meio do telescópio a posição da agulha foi observada na escala em sua maior deflexão (positiva), que ela alcançou após metade de um período de oscilação. Um período de oscilação mais tarde, isto é, $1\frac{1}{2}$ período de oscilação após o início, a agulha alcançou sua maior deflexão no lado oposto,[491] que também foi observada na escala. No instante em que a agulha passou

[490] Em alemão: *Skale*. Ver a Nota de rodapé 104 na página 53.

[491] Ver a Nota de rodapé 113 na página 59.

por sua posição original de repouso e, portanto, dois períodos de oscilação após o início da experiência, o anel A foi girado de $180°$. A agulha oscilante parou dessa forma no meio de seu movimento, sendo arremessada de volta, sendo então observadas na escala suas maiores deflexões negativa e positiva. Após o término de quatro oscilações desde o início, isto é, no instante em que a agulha retornando de sua última deflexão passava por sua posição original de repouso, o anel foi novamente girado para a frente em $180°$, e então foi observada a mesma oscilação que no primeiro caso, e dessa maneira foi continuada a experiência até que fosse alcançada uma série suficiente de observações. Para cada série, na *primeira* coluna da próxima Tabela são dadas as deflexões observadas na escala e arranjadas uma abaixo da outra na sequência; na *segunda* coluna são adicionadas os valores médios de duas deflexões sucessivas, positivas ou negativas. Na *terceira* coluna estão as diferenças entre os valores médios relativos às deflexões positiva e negativa, isto é, o valor de todo o arco de oscilação.

Primeira série			Segunda série			Terceira série			Quarta série		
467,1			467,1			463,0			462,0		
540,7			540,5			536,7			534,7		
	543,70			543,65			539,65			538,20	
546,7			546,8			542,6			541,7		
		80,10			79,65			80,40			80,00
461,4			461,3			456,6			455,3		
	463,60			464,00			459,25			458,20	
465,8			466,7			461,9			461,1		
		79,75			79,55			80,35			79,75
540,6			540,8			537,6			535,1		
	543,35			543,55			539,60			537,95	
546,1			546,3			541,6			540,8		
		79,25			79,90			79,55			79,50
462,3			461,8			458,3			456,0		
	464,10			463,65			460,05			458,45	
465,9			465,5			461,8			460,9		
		79,45			80,00			79,70			79,50
541,4			542,1			537,7			535,3		
	543,55			543,65			539,75			537,95	
545,7			545,2			541,8			540,6		
		79,75			79,70			79,95			80,05
462,3			462,8			457,9			456,0		
	463,80			463,95			459,80			457,90	
465,3			465,1			461,7			459,8		
		79,70			79,85			79,85			79,85
542,0			542,3			537,6			536,1		
	543,50			543,80			539,65			537,75	
545,0			545,3			541,7			539,4		
		79,45			80,10			79,70			79,55
462,8			462,7			458,2			456,8		
	464,05			463,70			459,95			458,20	
465,3			464,7			461,7			459,6		
		79,45			79,80			80,10			79,65
542,0			542,3			537,6			536,0		
	543,50			543,50			540,05			537,85	
545,0			544,7			542,5			539,7		
		79,65			79,75			80,05			79,70
462,9			462,8			457,3			456,5		
	463,85			463,75			460,00			458,15	
464,8			464,7			462,7			459,8		
		79,85			79,60			79,50			79,60
542,7			541,9			536,6			535,8		
	543,70			543,35			539,50			537,75	
544,7			544,8			542,4			539,7		
		79,45			79,75			79,75			79,55
463,4			462,3			457,2			456,4		
	464,25			463,60			459,75			458,20	
465,1			464,9			462,3			460,0		
		79,70			79,85						79,55
542,6			541,3						535,7		
	543,95			543,45						537,75	
545,3			545,6						539,8		
		79,75									
462,8											
	464,20										
465,6											
Média 79,64			Média 79,79			Média 79,90			Média 79,69		

O valor médio dessas quatro séries é 79,755 partes da escala = $79,4$ milímetros, que tem de ser aumentado em 1/2 milímetro se formos levar em consideração o fato de que a rotação do anel A não pode ser feita em um tempo tão pequeno que possa ser desprezado em comparação com o período de oscilação da agulha. Disso obtemos para α o valor

$$\alpha = \frac{79,9}{8175} \, ,$$

na medida em que o dobro da distância horizontal do espelho à escala era exatamente 8175 milímetros.

O período de oscilação da agulha foi encontrado a partir de 300 oscilações como sendo

$$t = 10,281\,8'' \ ,$$

no qual a parte da força diretriz[492] surgindo da elasticidade do filamento de suspensão era a 1770ª parte da força diretriz magnética e, portanto,

$$\frac{1}{1+\varphi} = \frac{177\,0}{177\,1} \ .$$

Finalmente, devido à grande distância entre os dois anéis em uma sala que não estava livre de ferro, o período de oscilação da mesma agulha foi comparado na localização dos dois anéis, e sua razão foi encontrada como sendo $2,9126 : 2,9095$; a partir da qual segue que se T' denota o magnetismo terrestre para A, T'' para B, temos

$$T' : T'' = 470 : 471 \ .$$

Essas observações são suficientes para determinar o resistência de todo o condutor fechado; e por cálculo preciso encontramos o valor

$$\omega = 2166 \cdot 10^8 \ .$$

13.4 Aplicação do Princípio de Amortecimento

Em vez de usar o *magnetismo terrestre* para obter uma força eletromotriz que pode ser referida a uma unidade absoluta, pode ser utilizado o *magnetismo em barra*; nesse caso é óbvio que a posição mais conveniente da barra imantada cujo magnetismo é para ser utilizado, será o *centro* do anel formado pelo condutor induzido. A barra magnética pode então ser fixada e o anel girado[493] para frente e para trás em torno de seu diâmetro perpendicular ao eixo magnético da barra magnética, ou o anel pode ser fixo e a barra magnética girada para frente e para trás em torno desse diâmetro. No último caso pode ser usada uma forte *agulha magnética oscilante* suspensa no centro do anel.

A própria corrente gerada no condutor fechado pela força eletromotriz que surge do magnetismo em barra de uma agulha magnética oscilando no centro do anel reage de volta sobre a agulha oscilante, de acordo com o princípio de *amortecimento*, e produz uma diminuição da amplitude de suas oscilações que pode ser observada com grande precisão; e a *intensidade* dessa corrente também pode ser determinada com grande precisão a partir dessas observações de acordo com um padrão absoluto. É então evidente que para medir a intensidade da corrente, ela não precisa fluir em um segundo anel servindo como um galvanômetro. Portanto, todo o condutor cuja resistência é para ser medida pode ser usado na forma de um único anel que serve imediatamente como indutor e multiplicador.

De acordo com essa simplificação, é suficiente a *observação dos arcos de oscilação de uma agulha magnética oscilando no centro do anel*: a intensidade da força eletromotriz pode ser

[492]Em alemão: *Direktionskraft*. Ver a Nota de rodapé 129 na página 78.
[493]Em alemão: *Gedreht*.

determinada pelos tamanhos dos arcos, e a intensidade da corrente produzida no condutor fechado pode ser determinada pela sua *diminuição*.[494]

Ao fazer as observações de acordo com o princípio do *amortecimento*, é de importância crucial que o magnetismo da agulha oscilando no centro do anel seja bem potente para produzir um grande amortecimento, e também que o comprimento da agulha seja muito pequeno comparado com o diâmetro do anel para que, ao calcular a resistência, não haja necessidade de um conhecimento preciso da distribuição do magnetismo na agulha, já que seria difícil uma determinação dessa distribuição. No único anel que está sendo usado agora, que é aquele denominado B anteriormente, e que tem um diâmetro interno de 303,51 milímetros, um diâmetro externo de 374,41 milímetros e 202 milímetros de altura, foi suspensa uma agulha magnética com 90 milímetros de comprimento, tão forte quanto possível. A experiência começou com a *separação* das extremidades do fio formando o anel. A agulha foi então colocada em oscilação, e seu período de oscilação e a diminuição de seu arco de oscilação, ou o decremento logarítmico dessa diminuição,[495] foram determinados de acordo com o método dado por Gauss nos "Resultados das Observações da Associação Magnética no Ano 1837."[496],[497],[498],[499] O condutor em forma de anel foi então *fechado* e as mesmas observações repetidas. Os resultados dessas observações são dados na próxima Tabela, na qual o decremento logarítmico da diminuição do arco de oscilação com um condutor *fechado* aparece na *primeira* coluna sob A, o mesmo com um condutor *aberto* aparece sob B, enquanto que a *terceira* coluna aparece sob t o período de oscilação observado. Os valores médios são indicados na parte inferior.

A	B	t
0,028 645	0,000 460	9,112 8
0,027 955	0,000 360	9,114 8
0,028 565	0,000 380	9,110 7
0,028 388	0,000 400	9,112 8

Disso obtemos, de acordo com o sistema de Briggs,[500] para aquela parte do decremento logarítmico que surge do amortecimento,

$$= 0,028\,388 - 0,000\,400 = 0,027\,988\ ,$$

ou de acordo com o sistema natural [de logaritmos],

$$\lambda = 0,064\,445\ .$$

O magnetismo em barra da agulha oscilante M,[501] determinado a partir de medições magnetométricas, de acordo com o padrão absoluto como comparado com a componente horizontal T do magnetismo terrestre, foi encontrado como sendo dado por:

[494] Isto é, pela diminuição dos valores dos arcos de oscilação da agulha oscilante.

[495] Ver a Nota de rodapé 112 na página 59.

[496] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 374.

[497] Ver [Gau38a].

[498] [Nota dos editores da *Philosophical Magazine*:] Ver as *Scientific Memoirs* de Taylor, Parte VI. Vol. II.

[499] Os editores da *Philosophical Magazine* podem estar se referindo a um desses dois trabalhos de Gauss traduzidos para o inglês: [Gau41a] ou [Gau41c].

[500] Henry Briggs (1561-1630) introduziu o logaritmo comum de base 10.

[501] M é o momento magnético da barra imantada.

$$\frac{M}{T} = 20\,733\,000 \ .$$

Aquela parte da força diretriz da agulha surgindo da elasticidade do filamento de suspensão foi encontrado como sendo 68 vezes menor do que aquela força diretriz surgindo do magnetismo, ou

$$\frac{1}{1+\vartheta} = \frac{68}{69} \ .$$

Para o cálculo da resistência a partir dessas observações, feito de acordo com o princípio de amortecimento, temos as seguintes regras.

De acordo com a lei de indução magnética, a *força eletromotriz* de um pequeno ímã oscilando no centro de um condutor circular, cujo eixo magnético faz o ângulo φ com o plano do círculo, é diretamente proporcional a seu magnetismo M, ao cosseno do ângulo φ, e à velocidade angular $d\varphi/dt$, e inversamente proporcional ao diâmetro r do círculo; e se M for expresso de acordo com uma unidade absoluta, será determinada por

$$e = \frac{2\pi M}{r} \cdot \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} \ .$$

De acordo com as leis eletromagnéticas, ao contrário, o *torque* que a corrente induzida no condutor circular exerce sobre o pequeno ímã oscilando no centro [do anel] é diretamente proporcional ao magnetismo M, ao cosseno do ângulo φ, e à intensidade da corrente, e é inversamente proporcional ao diâmetro r; e se i for expressa em unidade absoluta, será determinado por

$$D\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi M}{r} \cdot i\cos\varphi \ .$$

Para pequenas oscilações nas quais φ pouco difere de 0, temos

$$e = \frac{2\pi M}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \ ,$$

e

$$D\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi M}{r} \cdot i \ .$$

Se K é o momento de inércia do ímã oscilante sobre o qual atua a força diretriz MT que surge da componente horizontal do magnetismo terrestre, a equação de seu movimento fica na forma

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{MT}{K}\varphi + \frac{D}{K}\frac{d\varphi}{dt} \ ,$$

e portanto, por integração,

$$\varphi = p + Ae^{-Dt/2K} \operatorname{sen}(t-B)\sqrt{\frac{MT}{K} - \frac{1}{4}\frac{D^2}{K^2}} \ .$$

Aqui $D/2K$ é o decremento logarítmico no sistema natural [de logaritmos] da diminuição da amplitude de oscilação reduzido à unidade de tempo; portanto, se τ é o período de oscilação sob a influência do amortecimento,

$$\lambda = \frac{D\tau}{2K} = \frac{\pi M}{rK} \cdot \frac{dt}{d\varphi} \cdot \tau i \ ,$$

e a *intensidade da corrente* é

$$i = \frac{rK\lambda}{\pi M\tau} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \ .$$

A partir disso obtemos para o cálculo da resistência,

$$\omega' = \frac{e}{i} = \frac{2\pi^2 M^2}{r^2 K\lambda} \cdot \tau \ .$$

A partir da equação anterior para φ obtemos para a determinação do período de oscilação sob a influência do amortecimento,

$$\tau\sqrt{\frac{MT}{K} - \frac{1}{4}\frac{D^2}{K^2}} = \pi = \tau\sqrt{\frac{MT}{K} - \frac{\lambda^2}{\tau^2}} \ ,$$

a partir da qual

$$\frac{M\tau}{K} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\tau T} \ ,$$

portanto

$$\omega' = \frac{2\pi^2}{r^2} \cdot \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\lambda\tau} \cdot \frac{M}{T} \ .$$

A partir disso, levando em consideração a correção que surge do amortecedor como sendo feito de vários enrolamentos, e a correção para a elasticidade do filamento de suspensão, encontramos a partir das observações anteriores que

$$\omega' = 189\,8 \cdot 10^8 \ .$$

13.5 Resistência Determinada de Acordo com a Unidade Absoluta Comparada com o Padrão de Resistência de Jacobi

Para comparar a resistência de dois condutores, existem métodos diferentes que não precisam de explicação. As resistências consideradas nos parágrafos anteriores foram comparadas de acordo com o método examinado nesse trabalho, e encontrou-se que

$$\omega : \omega' = 113\,8 : 1\,000 \ .$$

Se a primeira resistência for reduzida à segunda de acordo com essa proporção, obtemos

$$\omega' = \frac{1\,000}{1\,138}\omega = 1903 \cdot 10^8 \ ,$$

enquanto que a determinação direta no parágrafo anterior forneceu

$$\omega' = 189\,8 \cdot 10^8 \ .$$

A partir desses valores muito próximos, determinados por métodos completamente diferentes, o número

$$19 \cdot 10^{10}$$

será assumido no futuro como sendo o valor médio dessa resistência.

Jacobi discutiu a importância de introduzir um padrão específico para a resistência, a ser aceito por todos os físicos, especialmente nos dias de hoje, quando são feitas tantas investigações galvânicas com os mais variados instrumentos, sendo frequentemente de grande importância a comparação entre elas. Com esse objetivo ele propôs como uma *unidade padrão* um fio de cobre que enviou a vários físicos que estão envolvidos em medições galvânicas e solicitou que comparassem seus padrões com o padrão dele, e que no futuro apresentassem suas medições baseadas nesse padrão.[502]

Esse padrão é um fio de cobre com $7169\frac{3}{4}$ milímetros de comprimento e 2/3 milímetros de espessura, que pesa $22449\frac{3}{10}$ miligramas.

O padrão introduzido por Jacobi que, espera-se, encontrará aceitação geral, não é substituído pela *unidade absoluta* discutida aqui; pois não é possível comparar diretamente toda resistência de acordo com essa unidade absoluta, enquanto que toda resistência pode ser comparada diretamente com o padrão de Jacobi. Contudo, considerando a importância que as determinações absolutas das medições possuem em tantas pesquisas, é desejável ser capaz de reduzir todos os valores obtidos de acordo com o padrão de Jacobi a uma unidade absoluta, o que pode ser facilmente feito ao comparar a resistência determinada como anteriormente de acordo com uma unidade absoluta com a resistência do padrão de Jacobi.

Foi feita essa comparação; e encontrou-se que as duas resistências comportam-se aproximadamente como 32 : 10, ou, mais precisamente, como 19 000 : 5 980. Como a primeira resistência foi encontrada em unidade absoluta como representando 19 000 milhões de unidades, o padrão de Jacobi corresponde a 5 980 milhões de unidades; ou as resistências determinadas de acordo com o padrão de Jacobi podem ser reduzidas a uma unidade absoluta multiplicando-as por 6 bilhões. Por meio dessa determinação seria possível reproduzir aproximadamente o padrão de Jacobi mesmo que ele fosse perdido.

13.6 Sobre o Valor da Constante Encontrada por Kirchhoff, da Qual Depende a Intensidade das Correntes Elétricas Induzidas

A *constante de indução* que Neumann[503] denomina por ε em seu desenvolvimento das leis matemáticas das correntes elétricas induzidas tem o seguinte significado. Se W for a unidade absoluta de medida proposta como anteriormente para as resistências elétricas, e W' aquela unidade da resistência que é utilizada de fato; se, além disso, C é a unidade da velocidade que forma a base para o estabelecimento da unidade absoluta anterior (1 milímetro por segundo); se, ao contrário, C' é a unidade da velocidade utilizada de fato ao medir os movimentos indutores e as ações das correntes induzidas (1 polegada prussiana $= 26,154$ milímetros por segundo, no caso de Kirchhoff),[504] temos

[502] [Jac51].

[503] Ver a Nota de rodapé 68 na página 36.

[504] A polegada prussiana está para a polegada inglesa assim como 1,03 está para 1.

$$\varepsilon = 2\frac{C'W}{CW'} \ .$$

Segue disso que uma vez determinado o valor dessa constante de indução, qualquer resistência dada de acordo com o padrão escolhido pode ser referida a uma unidade absoluta.

Na determinação da constante de indução ε dada por Kirchhoff no Volume setenta e seis dos *Annalen* de Poggendorff,[505] foi escolhida como um padrão a resistência de um *fio de cobre* cujo comprimento era de 1 polegada prussiana = $26,154$ milímetros, e a seção reta 1 polegada quadrada prussiana = 684 milímetros quadrados. Infelizmente não há aqui uma unidade determinada de resistência; pois pedaços diferentes de cobre das mesmas dimensões possuem resistências diferentes; portanto, segue que o valor da constante de indução ε fica indeterminado dentro dos limites da variabilidade da resistência do cobre. O próprio Kirchhoff disse que

> Como a condutividade do cobre varia entre certos limites, apenas uma precisão limitada é de interesse ao especificar o valor numérico de ε.

Kirchhoff desejou fornecer apenas um valor aproximado para ε, o que seria suficiente para seus propósitos; e ele se satisfez com isso pois os métodos e instrumentos que utilizou dificilmente teriam permitido uma determinação melhor de ε caso ele propusesse um padrão perfeitamente definido de resistência.

O interesse que possui uma determinação precisa do valor de ε é perdido em consequência daquela incerteza na escolha do padrão de resistência; e é importante restaurar esse interesse pela remoção daquela incerteza. Isso pode ser obtido se nos atermos não ao *cobre em geral*, mas ao pedaço de cobre utilizado de fato por Kirchhoff em suas pesquisas, e ao escolher a resistência de um fio desse cobre com 26,154 milímetros de comprimento e com uma seção reta de 684 milímetros quadrados como um padrão da resistência. Nesse caso só é necessário reduzir o resultado encontrado por Kirchhoff, assim como as medições feitas com ele ou referidas a ele, à unidade precisa determinada assim dessa maneira. Kirchhoff considerou 1 polegada prussiana em 1 segundo como um padrão de velocidade, e encontrou dessa forma

$$\varepsilon = \frac{1}{192} \ ,$$

de onde segue (já que $C' = 26,154C$) que aquela resistência que chega a 52,308 unidades do padrão absoluto anterior equivale a 1/192 partes da resistência de um fio do cobre de Kirchhoff cujo comprimento é de 26,154 milímetros e seção reta de 584 milímetros quadrados; em outras palavras, que o padrão de resistência escolhido por Kirchhoff é 10043 vezes maior do que o padrão absoluto anterior.

Embora esse valor de ε possa ser considerado apenas como aproximado, é interessante compará-lo com outros valores que foram encontrados por métodos totalmente diferentes e com instrumentos diferentes, porque, dessa forma, é possível testar as várias leis naturais usadas para esse fim, comparando-as entre si. As medições de Kirchhoff se referem às correntes produzidas por *indução eletrovoltaica* e, portanto, no seu caso é a lei de indução eletrovoltaica que foi utilizada ao determinar o valor de ε. Minhas medições, ao contrário, referem-se às correntes produzidas por *indução magnética* e, portanto, nesse caso é a lei de indução magnética que leva ao valor de ε.

[505] [Kir49a].

Em primeiro lugar, será dado o valor de ε que é obtido de minhas medições. É claro que o valor de ε pode ser determinado a partir dessas medições desde que a resistência do fio de Kirchhoff seja comparada com a resistência do padrão de Jacobi. Fiz essa comparação por meio do fio que Kirchhoff gentilmente enviou-me e posso aqui apresentar o resultado da comparação que é como segue.

Um pedaço do fio de Kirchhoff que possuía 13,573 polegadas prussianas de comprimento e 0,4061 linhas quadradas de seção reta, tinha uma resistência que estava para a resistência do padrão de Jacobi como

$$1 : 106 \, .$$

A partir disso obtemos a razão da resistência do padrão escolhido por Kirchhoff (definido em mais detalhes anteriormente) para a resistência do padrão de Jacobi, como segue:

$$1 : 106 \cdot 13,573 \cdot \frac{144}{0,406\,1} \, .$$

Se J denota a resistência do padrão de Jacobi e W' o padrão de Kirchhoff, temos

$$\frac{J}{W'} = 510\,180 \, .$$

Agora a resistência do padrão de Jacobi é igual a 5980 milhões de unidades do padrão absoluto encontrado anteriormente; portanto, se W denota o resistência absoluta,

$$\frac{J}{W} = 5\,980\,000\,000 \, ,$$

portanto

$$\frac{W'}{W} = 11\,720 \, .$$

Porém

$$\frac{C'}{C} = 26,154 \, ,$$

portanto

$$\varepsilon = 2\frac{C'W}{CW'} = \frac{1}{224} \, ,$$

ou seja, um sétimo menor do que o valor encontrado por Kirchhoff. Não era para ser esperada uma concordância melhor, já que Kirchhoff apresentou apenas um valor aproximado.

Posso apresentar aqui uma determinação da *resistência específica dos diferentes tipos de cobre* que foram utilizados no padrão de Jacobi, para o fio de Kirchhoff, e para o amortecedor que utilizei.

A *resistência específica* de um corpo é usualmente dada de acordo com uma unidade absoluta ao considerar para essa unidade a resistência específica de um corpo cuja resistência absoluta com um comprimento $= 1$ e uma seção reta $= 1$ é igual ao padrão fixado de resistência. Porém a determinação da resistência específica de acordo com essa unidade encontra uma dificuldade prática na medição precisa da seção reta, especialmente em fios finos e, portanto, para superar essa dificuldade, Kirchhoff encontrou indiretamente a seção reta do fio ao determinar seu peso absoluto e específico.

Agora a determinação da resistência específica de acordo com essa unidade pressupõe que a resistência de um fio cujo comprimento permanece inalterado, mas cuja espessura é aumentada ou diminuída, varia inversamente como a seção reta. Contudo, isso não foi provado e dificilmente pode ser provado com as pequenas alterações de seção reta que são produzidas pela pressão. Portanto, há tantas razões para supor que, desde que apenas a massa e o comprimento do fio permaneçam inalterados, a resistência do fio não varia mesmo com seções transversais variáveis. Com essa suposição, no entanto, a unidade absoluta teve de ser determinada de maneira diferente, a saber, como sendo a resistência específica de um corpo cuja resistência absoluta para o comprimento = 1 e para uma massa = 1 é igual à unidade estabelecida de resistência. De acordo com isso, a resistência específica de um corpo seria determinada ao multiplicar sua massa pela resistência de um fio feito daquela substância expressa de acordo com o padrão estabelecido de resistência, e dividindo pelo quadrado de seu comprimento.

As resistências específicas dos fios usados por Jacobi, Kirchhoff e por mim serão determinadas de acordo com a unidade assim fixada; pois, mesmo além das preocupações anteriores, essa determinação é em qualquer caso a que é mais aplicável e capaz de ser executada.

A próxima Tabela exibe os resultados dessas determinações:

Tipo de cobre no	Comprimento em milímetros	Massa em miligramas	Resistência em unidade absoluta	Resistência específica	ε
fio de Jacobi	7 620	22 435	5 980 000 000	2 310 000	1/270
fio de Kirchhoff	355	4 278	58 500 000	1 916 000	1/224
fio de Weber	3 946 000	152 890 000	190 000 000 000	1 865 600	1/218

Observa-se que há apenas uma pequena diferença entre meu cobre e aquele de Kirchhoff; enquanto que a diferença no caso de Jacobi é bem maior, já que esse último possui uma condutividade bem menor. Supondo que Jacobi possa ter utilizado cobre galvanoplástico para seu padrão, examinei um fio desse material que obtive através da gentileza do Prof. Schellbach em Berlim,[506] e encontrei o resultado a seguir que prova, contrariamente à suposição anterior, que o cobre galvanoplástico é um condutor um pouco melhor.

Fio de cobre galvanoplástico	Comprimento em milímetros	Massa em miligramas	Resistência em unidade absoluta	Resistência específica	ε
	12 780	221 295	1 243 000 000	1 684 000	1/196

São dados na última coluna aqui e na Tabela anterior os diferentes valores de ε que foram obtidos para a constante de indução de Neumann ao aderir ao padrão escolhido por Kirchhoff, mas usando os diferentes tipos de cobre que foram mencionados. Contudo, aderindo à unidade absoluta fixada como anteriormente, então $C' = C$, $W' = W$, e ε sempre tem o valor 2.

13.7 Sobre as Constantes das Leis Elétricas que Dependem da Escolha das Unidades de Medida

A lei de Neumann das correntes elétricas induzidas representa a intensidade dessas correntes como dependente de uma constante, cujo valor numérico deve ser determinado a partir

[506] Weber pode estar se referindo a Karl Heinrich Schellbach (1805-1892).

dos padrões pelos quais as grandezas consideradas são medidas. Neumann a denominou de *constante de indução*. Uma tal constante ocorre na expressão geral de qualquer lei natural que apresenta como uma grandeza é determinada por outra grandeza. Vou apresentar aqui um resumo dessas constantes para todas as leis fundamentais que se referem à *força eletromotriz*, *intensidade de corrente*, e *resistência elétrica*. Cada uma dessas leis representa a grandeza procurada como uma expressão das outras grandezas mensuráveis, sendo que essas leis possuem uma constante cujo valor é para ser determinado a partir das unidades escolhidas.

1. A lei fundamental do circuito voltaico representa a intensidade da corrente i como uma expressão da força eletromotriz e e da resistência w; pois se for denominada de α a constante cujo valor é para ser determinado, então

$$i = \alpha \cdot \frac{e}{w} \ .$$

Essa constante α tem o seguinte significado. Se J, E, W são as unidades absolutas como fixadas anteriormente para as intensidades de corrente, forças eletromotrizes e resistências; e se J', E', W' são as unidades que de fato foram utilizadas, temos

$$\alpha = \frac{JE'W}{J'EW'} \ .$$

Portanto, usando a própria unidade absoluta,

$$\alpha = 1 \ .$$

2. A lei fundamental do eletromagnetismo representa a força eletromotriz F como uma expressão da quantidade de fluido magnético μ, do comprimento ds, e da intensidade i do elemento de corrente, da distância r entre eles, e de um número que é dado pelo ângulo φ que r faz com ds; isto é, se a constante cujo valor é para ser determinado a partir das unidades escolhidas é β, então[507]

$$F = \beta \cdot \frac{\mu i ds}{r^2} \operatorname{sen} \varphi \ .$$

A constante β tem o seguinte significado. Se P é a unidade absoluta de medida do torque (o produto de um milímetro por aquela força que em um segundo fornece à massa de um miligrama a unidade absoluta de medida de velocidade), se M é a unidade absoluta de medida do fluido magnético, se J é a unidade absoluta para as intensidades de corrente; e se, além disso, P', M', e J' são as unidades de medidas que foram utilizadas de fato, então

$$\beta = \frac{PM'J'}{P'MJ} \ ,$$

consequentemente, usando a unidade absoluta,

$$\beta = 1 \ .$$

3. A lei fundamental da eletrodinâmica de Ampère[508] representa a força eletrodinâmica de atração F como uma expressão das intensidades de corrente i e i' dos dois elementos, e de um número que é fixado pelas razões dos comprimentos dos dois elementos para a distância

[507] Ver a Nota de rodapé 155 na página 95.
[508] Ver a Nota de rodapé 10 na página 19.

entre eles, ds/r e ds'/r; e pelos três ângulos ε, φ e φ', que ds e ds' formam entre si e com r; isto é, se a constante cujo valor é para ser determinado a partir das unidades dadas é designada por γ, então

$$F = \gamma \cdot ii' \cdot \frac{dsds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) .$$

A constante γ tem o seguinte significado. Se F é a unidade absoluta de força (aquela força que em um segundo fornece à massa de um miligrama uma velocidade de um milímetro em um segundo), se J é a unidade absoluta para as intensidades de corrente, e F', J' as unidades de medida utilizadas de fato, temos

$$\gamma = \frac{FJ'J'}{F'JJ} ,$$

portanto, usando unidade absoluta,

$$\gamma = 2 .$$

4. A lei fundamental da indução magnética representa a força eletromotriz e como uma expressão da massa do fluido magnético μ, da velocidade c do movimento indutor, do comprimento ds do elemento induzido, de sua distância r até μ, e de um número dado pelos dois ângulos φ e ψ que ds faz com r e c faz com a normal ao plano rds; isto é, se a constante cujo valor é para ser determinado pelas unidades escolhidas é denominada δ, então

$$e = \delta \cdot \frac{\mu c ds}{r^2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi .$$

A constante δ tem o seguinte significado. Se E é a unidade absoluta de medida da força eletromotriz, M a unidade absoluta de medida do fluido magnético, S os segundos de tempo, sendo ainda E', M', S' as unidades que de fato foram utilizadas, temos

$$\delta = \frac{EM'S}{E'MS'} ,$$

portanto, usando unidades absolutas,

$$\delta = 1 .$$

5. A lei fundamental da indução eletrovoltaica representa a força eletromotriz e como uma expressão da intensidade de corrente i e de sua variação di/dt, da velocidade c do movimento indutor, e da distância r entre os elementos indutor e induzido, e de vários números que são dados pelas razões dos comprimentos dos dois elementos para a distância entre eles, ds/r e ds'/r, e pelos quatro ângulos ε, ϑ, ϑ' e φ que ds e c formam entre si e com r, e que ds' forma com r; ou seja, se a constante cujo valor é para ser determinado a partir das unidades escolhidas é denominada ζ,

$$e = \zeta \cdot \left[ci \cdot \frac{dsds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)\cos\varphi + \frac{1}{2}\frac{di}{dt}\frac{dsds'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right] .$$

A constante ζ tem o seguinte significado. Se E e J são as unidades absolutas para as forças eletromotrizes e para as intensidades de corrente, se C é a unidade absoluta de velocidade (um milímetro em um segundo), e se E', J' e C' são as unidades que de fato foram empregadas, temos

$$\zeta = 2 \cdot \frac{EJ'C'}{E'JC} \ ,$$

portanto, usando a própria unidade absoluta,

$$\zeta = 2 \ .$$

6. A lei fundamental geral da ação elétrica representa a força elétrica F como uma expressão das massas elétricas v e v', da distância r entre elas, da velocidade relativa entre elas dr/dt, e de sua variação ddr/dt^2, isto é, se a constante cujo valor é para ser determinado a partir das unidades dadas é denominada η, temos[509]

$$F = \eta \cdot \frac{vv'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{aa}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right] \ .$$

(a denota o número indicando a razão entre a velocidade com a qual duas massas elétricas devem ser movidas uma contra a outra para que não exerçam nenhuma força entre si, e a velocidade de um milímetro em um segundo.)

A constante η tem o seguinte significado. Se F é a unidade absoluta de força, N a unidade absoluta de fluido elétrico (aquela massa de fluido elétrico que exerce sobre uma massa similar a unidade absoluta de força quando estão separadas pela distância de um milímetro), se R é um milímetro, e se F', N' e R' são as unidades de fato utilizadas, temos

$$\eta = \frac{FN'^2R^2}{F'N^2R'^2} \ ,$$

portanto, usando a própria unidade absoluta,

$$\eta = 1 \ .$$

Contudo, cada força elétrica pode atuar como uma força eletromotriz; e essa força eletromotriz e é representada, de acordo com a lei fundamental geral da ação elétrica, como uma expressão da massa elétrica v, do comprimento do elemento ds no qual está contida a massa de eletricidade sobre a qual se atua; dependendo, além disso, da distância r entre elas, da velocidade relativa entre elas dr/dt, de sua variação ddr/dt^2, e do ângulo φ que ds faz com r; isto é, se a constante cujo valor é para ser determinado a partir das unidades escolhidas é denominada k, temos

$$e = k \cdot \frac{vds}{r^2}\left[a - \frac{1}{a}\left(\frac{dr^2}{dt^2} - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right)\right]\cos\varphi \ .$$

A constante k tem o seguinte significado. Se E é a unidade absoluta das forças eletromotrizes, N a unidade absoluta de medida do fluido elétrico, C a unidade absoluta de velocidade (um milímetro em um segundo), R é um milímetro, e se E', N', C' e R' são as unidades de fato empregadas, temos

[509] Essa equação deve ser entendida como:

$$F = \eta \cdot \frac{vv'}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right\} \ .$$

$$k = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{EN'C'R}{E'NCR'} \ ,$$

portanto, usando a unidade absoluta,

$$k = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ .$$

Capítulo 14

Introdução à Segunda Memória de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas

A. K. T. Assis[510]

Apresento aqui alguns pontos importantes relacionados com a Segunda Memória principal de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas.[511]

Um dos fenômenos mais simples e básicos do eletromagnetismo é a situação de um circuito resistivo conectado a uma bateria e conduzindo uma corrente elétrica constante. Os principais cientistas e livros didáticos que lidaram com essa situação nos últimos 150 anos assumiram implicitamente ou explicitamente o seguinte:

- O fio resistivo é neutro não apenas em seu interior, mas também ao longo de sua superfície.

- Portanto, uma carga teste externa que esteja em repouso em relação ao fio não sofre uma força exercida pelo circuito resistivo estacionário. Ou seja, não haveria nenhuma força nessa carga externa que dependesse da voltagem da bateria ligada ao fio com corrente. Não estamos considerando aqui a força sobre a carga externa exercida pelas cargas induzidas no próprio condutor pela carga teste externa.

- Na linguagem da teoria de campos, esses cientistas assumiram que um fio conduzindo uma corrente constante gerava apenas um campo magnético, mas não um campo elétrico.

Essas suposições estão erradas, embora tenham sido repetidas na maior parte dos livros de eletromagnetismo por mais de 150 anos.

Wilhelm Eduard Weber (1804-1891) estudou essa configuração em sua Segunda Memória sobre Medições Eletrodinâmicas publicada em 1852. Inicialmente ele analisou um condutor longo e fino de seção reta circular, Figura 14.1 (a). Esse fio pode ser considerado como a porção superior BC do circuito retangular fechado mostrado na Figura 14.1 (b).

[510] Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

[511] [Web52a] com tradução para o inglês em [Web21c].

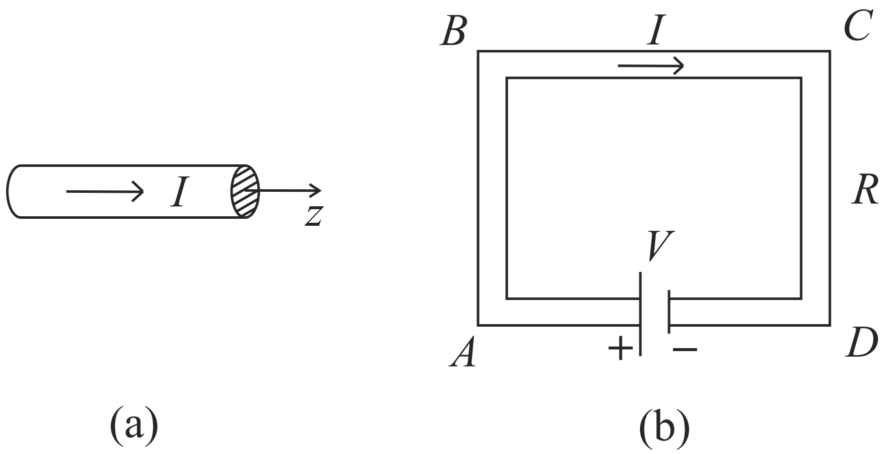


Figura 14.1: (a) Fio resistivo cilíndrico conduzindo uma corrente constante I. (b) Circuito retangular com fios de seção reta circular. Há uma bateria gerando uma voltagem V e produzindo uma corrente constante I no circuito fechado que tem uma resistência R.

Para ter uma corrente constante fluindo através desse fio resistivo, Weber mostrou que era necessário haver uma distribuição de partículas eletrizadas distribuídas ao longo da superfície do condutor. Essa distribuição de cargas superficiais vai gerar uma força elétrica constante atuando em qualquer carga do condutor, tal como um íon parado em relação à rede cristalina do fio ou uma partícula móvel do fio (como, por exemplo, um elétron livre que participa da corrente elétrica). Essa distribuição de cargas superficiais é mantida pela bateria ligada ao circuito. Essa distribuição é constante no tempo no caso de correntes constantes, mas sua intensidade varia ao longo do comprimento do fio. No caso de um fio reto e longo, Weber mostrou que a densidade superficial de carga σ variava linearmente como uma função da coordenada longitudinal z, Figura 14.2 (a) e (b). Vamos supor que a densidade superficial de carga seja nula no centro do fio localizado em $z = 0$. Weber mostrou que a densidade positiva vai aumentando linearmente em direção ao terminal positivo da bateria, enquanto que a densidade negativa da densidade superficial vai aumentando em direção ao terminal negativo da bateria.

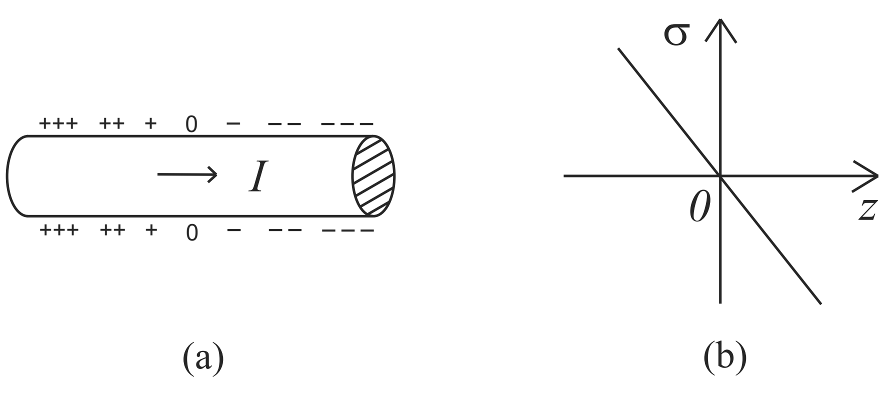


Figura 14.2: (a) Distribuição de cargas ao longo da superfície de um fio cilíndrico. (b) Densidade superficial de carga, σ, como uma função da coordenada z longitudinal.

Weber calculou a força por unidade de carga, $\vec{F}/q$, atuando em uma partícula teste e mostrou que essa força era constante em qualquer lugar no interior do fio retilíneo, tendo o mesmo valor e apontando na mesma direção paralela ao fio em todos os lugares de seu interior. Essa força por unidade de carga é equivalente às linhas de campo elétrico $\vec{E}$ da teoria de campos. Ou seja, o campo elétrico tem o mesmo valor e aponta na direção do fio em todos os pontos da seção reta do fio. No caso de uma corrente constante, essa força atuando sobre os elétrons de condução seria equilibrada pela força resistiva exercida pela rede cristalina do fio, produzindo a lei de Ohm.

Ao estender a análise de Weber e calcular a força exercida por essas cargas superficiais sobre uma partícula teste localizada fora do fio, obtemos a força por unidade de carga (ou campo elétrico $\vec{E}$) mostrada na Figura 14.3.

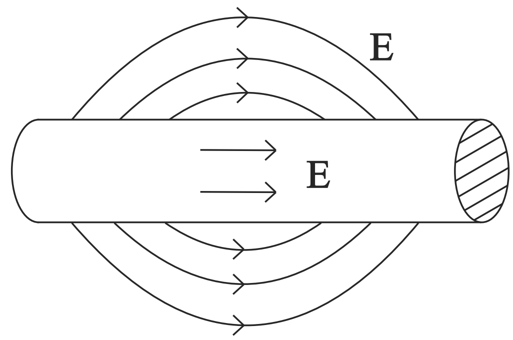


Figura 14.3: Força por unidade de carga, $\vec{F}/q = \vec{E}$, atuando sobre uma carga teste interna ou externa ao fio e que está em repouso em relação ao condutor cilíndrico resistivo conduzindo uma corrente constante. Essa força é exercida pelas cargas espalhadas sobre a superfície do fio.

A Figura 14.3 mostra que uma partícula teste localizada fora do fio, em repouso em relação ao condutor, vai sofrer uma força exercida pelo fio resistivo conduzindo uma corrente constante.

Weber considerou então um condutor toroidal na forma de um anel resistivo conectado a uma bateria e conduzindo uma corrente elétrica constante I ao longo da direção azimutal, Figura 14.4 (a).

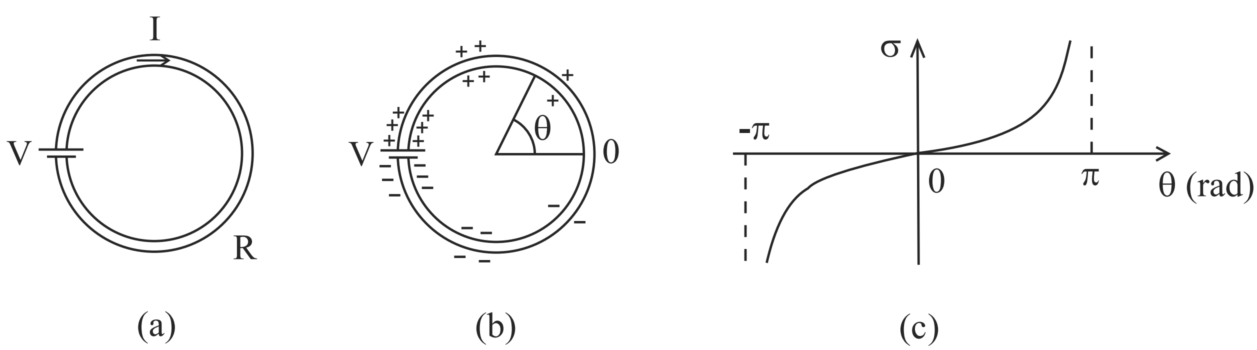


Figura 14.4: (a) Anel resistivo conduzindo uma corrente constante I. (b) Cargas distribuídas ao longo da superfície do anel. (c) Densidade superficial de carga, σ, como uma função do ângulo θ azimutal.

Nesse caso ele realizou um cálculo aproximado brilhante da densidade de cargas superficiais. Mais uma vez ele mostrou que para ter uma força eletromotriz constante em qualquer lugar no interior da parte metálica do fio apontando ao longo da direção azimutal θ, era necessário ter uma distribuição de cargas ao longo da superfície do fio. No caso de uma corrente constante, essa distribuição é constante no tempo, mas sua intensidade varia ao longo da direção azimutal. Ela torna-se cada vez mais positiva em direção ao terminal positivo da bateria e cada vez mais negativa em direção ao terminal negativo da bateria, Figura 14.4 (b).

Contudo, nesse caso ele foi capaz de mostrar que a densidade superficial de carga σ variava linearmente com o ângulo azimutal θ apenas longe da bateria, isto é, próximo do ângulo $\theta = 0$ rad, como mostrado na Figura 14.4 (c). Ele também mostrou que quando estamos mais próximos dos dois terminais da bateria, isto é, próximos do ângulo $\theta = \pm\pi$ rad, o aumento na intensidade de σ como uma função do ângulo θ era mais rápido do que uma variação linear, como mostrado qualitativamente na Figura 14.4 (c).

Weber calculou a força por unidade de carga atuando sobre uma partícula teste mostrando que ela tinha um valor constante em qualquer lugar no interior da parte metálica do anel, apontando ao longo da direção azimutal.

Ao estender a análise de Weber para uma partícula teste localizada fora do anel, obtemos as linhas de campo elétrico mostradas na Figura 14.5.

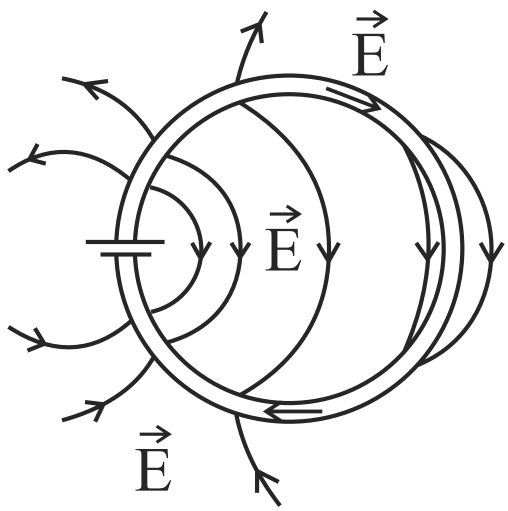


Figura 14.5: Força por unidade de carga, $\vec{F}/q = \vec{E}$, atuando sobre uma carga teste interna ou externa ao anel. Essa carga teste está em repouso em relação ao anel resistivo conduzindo uma corrente constante. Essa força é exercida pelas cargas espalhadas sobre a superfície do anel.

Em 2007 publiquei com J. A. Hernandes o livro "*A Força Elétrica de uma Corrente: Weber e as Cargas Superficiais de Condutores Resistivos com Correntes Constantes*." Ele está disponível em português, inglês e alemão.[512] Discutimos nesse livro o trabalho de 1852 de Weber e apresentamos as expressões analíticas para as distribuições de cargas superficiais, para as linhas equipotenciais e também para as linhas de campo elétrico. Esses cálculos são feitos não apenas para as configurações das Figuras 14.1 até 14.5, mas também em circuitos elétricos de vários formatos (cabos coaxiais, solenoides, linhas de transmissão etc.) Calculamos a força por unidade de carga atuando em partículas teste internas e externas ao fio com corrente, com essas cargas teste estando em repouso em relação aos circuitos resistivos que estão conduzindo correntes constantes. Também apresentamos muitas referências e citações de diferentes cientistas e autores de livros didáticos que apresentaram as suposições erradas discutidas no início dessa Introdução, incluindo James Clerk Maxwell (1831-1879), Rudolf Clausius (1822-1888), Edward Mills Purcell (1912-1997), Richard Feynman (1918-1988) etc.

[512] [AH07], [AH09] e [AH13].

Além disso, apresentamos muitos experimentos realizados por vários cientistas relacionados com esse assunto:

- Foram utilizados coletores de carga para estudar o sinal e a intensidade da densidade de carga ao longo da superfície de condutores resistivos conduzindo correntes constantes.

- Foram espalhadas sementes de grama, semolina e farinha ao redor desses condutores com o objetivo de mapear as linhas de campo elétrico externas aos condutores. Essas sementes ou partículas não são afetadas por um campo magnético. Contudo, na presença de um campo elétrico, elas ficam polarizadas eletricamente e se alinham ao longo das linhas do campo elétrico. Essas experiências utilizando farinha ou sementes de grama para mapear as linhas de campo elétrico são análogas às experiências usuais nas quais se utilizam limalhas de ferro para mapear as linhas de campo magnético.

- Foram utilizados eletrômetros eletrônicos conectados a fontes alfa radioativas para medir o potencial elétrico em diferentes pontos dentro e fora de condutores ocos conduzindo correntes elétricas constantes. As linhas equipotenciais medidas eram ortogonais às linhas de campo elétrico mapeadas com sementes de grama ou farinha.

- Foi utilizada uma balança de torção para medir diretamente a força entre uma carga teste e um condutor resistivo fechado conduzindo uma corrente constante. Nesse caso a partícula teste localizada fora do circuito, assim como o condutor com corrente, estavam em repouso entre si e em relação ao laboratório.

Essas experiências fornecem um forte apoio aos cálculos pioneiros de Weber. Esse seu trabalho fundamental de 1852 foi essencialmente esquecido durante o século XX e início do século XXI. Espero que essa tradução ajude a chamar a atenção de uma audiência maior para suas medições, cálculos e ideias brilhantes. Com isso seu trabalho experimental e teórico poderá ser ampliado e aprofundado no futuro.

Capítulo 15

[Weber, 1852a, ME2] Medições Eletrodinâmicas, Segunda Memória, Relacionada Especialmente a Medidas de Resistência

Wilhelm Weber[513,514]

I - Medições de Resistência de Acordo com um Determinado Padrão Fundamental

15.1 Ferramentas

Para medir a resistência, assim como para fazer qualquer outra medição, são necessárias três coisas. *Em primeiro lugar*, uma definição do tipo de grandeza a ser medida, *em segundo lugar*, uma certa unidade,[515] e *em terceiro lugar*, um método para comparar entre si as grandezas desse tipo.

Em primeiro lugar, a *definição* de resistência que será tratada aqui pode ser expressa da seguinte maneira. A partir das leis que Ohm apresentou,[516] o quociente entre a *força eletromotriz* medida e a *intensidade de corrente* medida sempre possui o mesmo valor para um circuito galvânico com *condutores fechados inalterados*, e esse valor só depende do tamanho e natureza do condutor. Assumindo isso, a propriedade que depende do tamanho e da natureza do condutor e da qual depende o valor desse quociente constante será designada pelo nome de *resistência* do condutor e considerada como uma *quantidade proporcional a esse quociente*. Dessa forma, existe a possibilidade de medir a resistência ao determinar esse quociente.

No que diz respeito ao *segundo* item, a saber, a *unidade* de resistência, será adotado

513[Web52a] com tradução para o inglês em [Web21c].

514As Notas de Wilhelm Weber são representadas por [Nota de Wilhelm Weber:]; as Notas de Heinrich Weber, o Editor do Volume 3 das *Obras* de Wilhelm Weber, são representadas por [Nota de Heinrich Weber:]; todas as outras Notas são de minha autoria.

515Em alemão: *Maass*. Ver a Nota de rodapé 95 na página 46.

516Ver a Nota de rodapé 116 na página 61.

aqui o *padrão fundamental*[517] estabelecido por Jacobi em São Petersburgo e enviado ao Prof. Poggendorff em Berlim em 30 de agosto de 1846, com as seguintes observações.[518] O Sr. Jacobi escreveu:

> Em uma ocasião anterior comentei quão interessante e importante seria se os físicos apresentassem, em suas pesquisas galvânicas, suas medições de corrente em unidades eletrolíticas e, portanto, em unidades absolutas. Para fazer isso, seria necessário referir os galvanômetros com os quais trabalham às ações eletrolíticas para dar à publicação da experiência realizada o grau de precisão proporcionado pelo instrumento ou método escolhido. No entanto, reservo-me o direito de discutir isso com mais detalhes em outra ocasião. Não menos importante do que o caráter absoluto das medições de corrente, é a capacidade dos físicos de expressar o valor das resistências dos condutores que eles medem com uma unidade comum. Contudo, não pode existir determinação absoluta aqui, já que parecem existir diferenças entre as resistências que não podem ser explicadas apenas por uma diferença de tamanho, mesmo para os metais quimicamente mais puros. Portanto, se você tiver baseado seus medidores de resistência e multiplicadores a um fio de cobre com um metro de comprimento e um milímetro de espessura,[519] ainda assim não estaremos convencidos de que o seu fio de cobre e o nosso possuem o mesmo coeficiente de resistência.[520] Agora, todas essas complicações serão eliminadas se deixarmos um fio de cobre (ou de outro material) escolhido arbitrariamente circular entre os físicos, e implorar doravante que eles refiram seu instrumento de medida de resistência a esse fio e forneçam suas medições em termos dessa unidade. O Prof. Magnus[521] lhe entregará uma pequena caixa preta vindo com dois parafusos, na qual um fio de cobre que foi enrolado ao redor de uma tábua é cimentado em um mástique[522] feito de cera e resina de tal forma que ele é protegido da molhabilidade e umidade. Solicito-lhe que compare seus medidores de resistência com esse padrão de resistência, mas também em relação ao padrão do Prof. Weber e de outros físicos que lidam com medições galvanométricas ... O fio de cobre que se encontra na caixa tem precisamente $25'$ russas-inglesas entre os parafusos, pesa 22,5495 g, e sua espessura, que foi medida por um bom microscópio de Munique equipado com um micrômetro, chegou a $0,0265''$ inglesas em uma extremidade e $0,0260''$ na outra extremidade e, portanto, tinha uma espessura média de $0,02625''$ inglesas. Essas próprias medições são a média de três observações muito próximas. Além disso, gostaria de observar que o comprimento do fio pesado chegava a $25\frac{1}{8}'$ (de tal forma que $25\frac{1}{8}' = 22,5495\ g$) e que $\frac{3}{4}''$ dele de cada lado são soldados aos parafusos. Expresso em unidades francesas, o comprimento do fio era de $25' = 7,619\,75\ m$, e sua espessura era de $0,02625'' = 0,000\,667\ m$.

Finalmente, no que diz respeito ao *terceiro* item, a saber, comparar as resistências de dois condutores, ou determinar sua razão de resistência[523] (por exemplo, comparar uma cópia com

---

[517] Em alemão: *Grundmaass*. Ver a Nota de rodapé 135 na página 79.

[518] M. H. v. Jacobi (1801-1874) e J. C. Poggendorff (1796-1877). Essa carta em francês pode ser encontrada em [Jac51, pág. 281].

[519] Ver a Nota de rodapé 96 na página 47.

[520] Isto é, ainda assim não poderemos ter certeza que esses dois fios possuem a mesma resistividade.

[521] Heinrich Gustav Magnus (1802-1870).

[522] Massa ou resina própria para cimentar ou vedar.

[523] Em alemão: *Widerstandsverhältnisses*. Essa expressão pode ser traduzida como razão, taxa, índice, ou relação de resistência.

um determinado padrão fundamental), são necessários dois instrumentos para isso, além de vários condutores:

1. Uma *bateria elétrica*[524] com a qual são produzidas correntes galvânicas.
2. Um *galvanômetro* com o qual são medidas as intensidades das correntes produzidas.

No primeiro instrumento os condutores nos quais as correntes são produzidas definem as componentes essenciais, enquanto que no segundo instrumento, são os condutores através dos quais tem de fluir a corrente a ser medida é que definem as componentes essenciais. Se adicionarmos os condutores cujas taxas de resistência devem ser determinadas àqueles dois condutores que já estão incluídos nos dois instrumentos, teremos então uma visão completa de todas as ferramentas que são necessárias para fazer uma comparação de resistências. De acordo com essa visão geral, recebem consideração especial nos seguintes experimentos, (1) a *bateria*, (2) o *galvanômetro*, e (3) os *condutores e suas* combinações.

15.2 A Bateria Elétrica

A escolha da bateria elétrica concentrou-se principalmente na decisão se trabalharíamos com correntes *contínuas* ou *momentâneas*. No *primeiro* caso, vemos vantagens nas assim chamadas células *constantes*, assim como Daniell, Grove e Bunsen utilizaram com o propósito de tais medidas.[525] Por outro lado, no *segundo* caso, há uma vantagem maior em trabalhar com *ímãs permanentes de indução*, já que quando utilizamos correntes momentâneas, não lidamos nem com a intensidade dessas correntes nem com suas durações, mas sim com o valor do produto dessas duas grandezas, que denominamos o *valor integral da intensidade de corrente*. Contudo, apenas pelo método de indução [produzida] por ímãs permanentes esse valor integral pode ser representado por quantidades que são sempre iguais.

Nas próximas experiências é dada preferência às correntes momentâneas e, como resultado disso, à indução magnética, devido a dois motivos. *Em primeiro lugar*, para medições precisas, a utilização de condutores metálicos (por exemplo, a utilização apenas de um fio de cobre, sem precisar incluir no circuito um condutor úmido, tal como água, ácidos, ou uma solução salina) permite uma precisão maior. É conhecido que fenômenos de polarização podem perturbar as medições na superfície de um metal que é submerso em um condutor úmido. Podemos evitar tais perturbações ao utilizar circuitos fechados de fio, nos quais as correntes são induzidas ao movê-los em relação a ímãs permanentes. Cada repetição de tal movimento produz uma corrente com o mesmo valor integral, não interessando quão curta possa ser sua duração. *Em segundo lugar*, com a utilização de correntes contínuas, que poderiam ser obtidas com células constantes, vai aumentar a temperatura do condutor cujas taxas de resistência devem ser determinadas, e esse aumento será diferente nos vários condutores. Contudo, a resistência do condutor crescerá com a temperatura, e essa variabilidade da resistência tornaria incerta a determinação das taxas de resistência, o que poderia ser evitado ao utilizar correntes momentâneas que possuem uma duração tão curta que não ocorrem mudanças perceptíveis de temperatura.

Já foi discutido em outra ocasião o equipamento apropriado e o uso dos *indutores magnéticos* para as medições em geral. Ver para isso os "*Resultate aus den Beobachtun-*

[524] Em alemão: *Elektromotor*. Essa expressão pode ser traduzida como uma bateria elétrica ou um motor elétrico.

[525] Ver as Notas de rodapé 115, 128 e 228 nas páginas 61, 70 e 134.

gen des magnetischen Vereins im Jahre 1838," pág. 86.[526,527] O arranjo especial que foi dada ao indutor usado nos experimentos a seguir é descrito com mais detalhes no final desse Tratado, no Anexo A [Anexo 15.39] e é ilustrado na Figura 1.[528]

15.3 O Galvanômetro

Para medir a intensidade de uma corrente *contínua*, podemos trabalhar com o assim chamado galvanômetro senoidal, assim como com o galvanômetro tangencial.[529] Contudo, para medir a intensidade de uma corrente *momentânea* induzida (isto é, o valor de um assim chamado pulso de indução),[530] só podemos usar o galvanômetro tangencial, já que a utilização do galvanômetro senoidal assume a persistência da agulha em sua posição defletida, o que não é o caso para um pulso de indução, já que a agulha será apenas colocada em oscilação por um pulso de indução que ela sofre em sua posição de repouso e não vai assumir uma deflexão permanente dessa maneira. É mais preciso e conveniente observar as elongações das oscilações da agulha que são causadas pelo pulso de indução com um *magnetômetro* equipado com um multiplicador, assim como Gauss nos instruiu a fazer em seu trabalho "*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837.*"[531] Devemos apenas observar que um grande multiplicador com uma *grande resistência de condução*, que normalmente vem junto com os grandes magnetômetros, seria desvantajoso para as medições descritas aqui. Portanto, foi utilizado um magnetômetro de dimensões muito pequenas nas próximas experiências, cuja agulha tinha apenas 100 milímetros de comprimento, e que vinha com um pequeno multiplicador de resistência moderada.

A realização das observações, especialmente pelo fato de que elas devem ser frequentemente repetidas em rápida sucessão, foi consideravelmente facilitada ao equipar o magnetômetro com um amortecedor forte em adição ao multiplicador, e esse amortecedor retornava a agulha ao repouso após um pequeno número de oscilações depois que ela foi excitada. Como a eficácia do amortecedor era baseada principalmente na intensidade magnética da agulha oscilante, precisamos de um magnetômetro equipado com uma agulha fortemente magnetizada para fazer isso. Ao mesmo tempo, porém, é necessário que o período de oscilação da agulha não seja inferior a 10 ou 12 segundos, para que as observações sejam feitas com precisão. Esse objetivo também pode ser alcançado com uma forte magnetização da agulha, de tal forma que fornecemos à agulha uma grande espessura em relação a seu curto comprimento, por exemplo, 15 milímetros [de espessura] para um comprimento de 100 milímetros. Encontramos uma descrição mais precisa do galvanômetro que foi utilizado aqui no final do Tratado no *Anexo B* [Anexo 15.39], e uma ilustração também é fornecida nas Figuras 2, 3, 4.[532]

---

[526] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. II, pág. 105.

[527] [Web39b].

[528] Weber está se referindo aqui à primeira Figura do Anexo 15.39, ver a página 437. Quando o artigo de Weber foi reimpresso em suas obras completas, essa Figura foi renumerada como Figura 10.

[529] Ver a Nota de rodapé 109 na página 55.

[530] Em alemão: *Induktionsstoss*. Essa expressão pode ser traduzida como impulso indutivo, impulso de indução, choque indutivo, choque de indução, pulso indutivo ou pulso de indução.

[531] C. F. Gauss (1777-1855). Ver [Gau38b] com traduções para o inglês em [Gau41c] e [Gau21c]. Ver também [Web38a] e [Web39a] com traduções para o inglês em [Web41c], [Web66a], [Web21g]; e [Web41d], [Web66b] e [Web21h], respectivamente.

[532] Weber está se referindo aqui às Figuras 2, 3 e 4 do Anexo B [Anexo 15.39]. Quando o artigo de Weber foi reimpresso em suas obras completas, essas Figuras foram renumeradas como Figuras 11, 13 e 12,

15.4 Combinações dos Quatro Condutores

Os quatro condutores são o *fio indutor*, o *fio do multiplicador*, o fio do *padrão de resistência original*,[533] e o fio da *cópia*. Dentre esses quatro condutores, os dois primeiros são necessários para todas as experiências e definem o circuito, seja sozinho ou junto com um ou dois dos outros fios, os quais podem ser encontrados nas seguintes *combinações*:

(1) As extremidades dos fios do indutor e do multiplicador são conectadas diretamente entre si, e apenas esses dois fios definem o circuito.

(2) O circuito anterior é rompido em um lugar e o fio do padrão de resistência original é inserido nesse ponto.

(3) É inserido o fio da cópia no lugar do fio do padrão de resistência original.

(4) Os fios do padrão de resistência original e da cópia são colocados *juntos* e inseridos no circuito um após o outro.[534]

(5) O fio do padrão de resistência original e a cópia são colocados *um ao lado do outro* e inseridos no circuito enquanto estão conectados entre si em seus pontos iniciais e finais.[535]

(6) As extremidades dos fios do indutor e do multiplicador são conectadas diretamente entre si, porém eles próprios não definem o circuito como no caso (1), mas o fio do padrão de resistência original é inserido entre seus pontos de conexão, de tal forma que a corrente que é fornecida pelo fio indutor é dividida entre esse último fio e o fio do multiplicador.

(7) O fio da cópia é inserido entre os dois pontos de conexão do indutor e do multiplicador, no lugar do fio do padrão de resistência original.

(8) Os fios do padrão de resistência original e da cópia são conectados *em série* e inseridos entre os dois pontos de conexão do indutor e do multiplicador.

(9) Os fios do padrão de resistência original e da cópia são colocados *um ao lado do outro*, conectados entre si em seus pontos iniciais e finais,[536] e inseridos entre os dois pontos de conexão do indutor e do multiplicador.

Apenas as quatro últimas dentre essas nove combinações diferentes foram utilizadas nas experiências seguintes, já que com as cinco primeiras [combinações], a ação era muito forte para que pudéssemos medir a elongação da agulha com a mesma escala. Contudo, os cálculos com as observações vão mostrar depois que três dessas combinações já são suficientes para determinar a razão de resistência do [fio] original em relação à cópia, e a quarta combinação serve apenas como um controle sobre a precisão da medição.

15.5 Métodos de Observação

Os instrumentos descritos podem ser aplicados à tarefa de observação por vários métodos que diferem entre si por sua precisão em alguns casos, sua conveniência em outros, e pelas regras pelas quais as observações são calculadas. Em vez de observar simplesmente a elongação da agulha uma vez que tenha sido colocada em movimento a partir do repouso por um pulso de indução, há uma vantagem maior em realizar um sistema de observações de elongação enquanto são fornecidos à agulha pulsos de indução repetidos em momentos

respectivamente.

[533]Em alemão: *des Original-Widerstandsmaasses*. Essa expressão pode ser traduzida como unidade de resistência original ou padrão de resistência original. Ver a Nota de rodapé 95 na página 46.

[534]Isto é, eles são conectados em série.

[535]Isto é, eles são conectados em paralelo.

[536]Isto é, eles são conectados em paralelo.

prescritos. Para essas repetições, pode-se estabelecer a regra geral de que todos os pulsos de indução ocorrerão apenas naqueles instantes em que a agulha oscilante passa pela posição na qual ela permaneceria em repouso. Esta é a condição necessária para que o cálculo das observações seja reduzido a regras simples.

Para o propósito de todas as medições mais precisas, é importante ganhar uma visão clara dos diferentes métodos de organização das observações e experiências, assim como seus cálculos e, em particular, quando o galvanômetro vem com um amortecedor, como em nosso caso, para entender as regras pelas quais as observações precisam ser calculadas quando consideramos a influência do amortecimento. Contudo, para não me demorar aqui em uma compilação dos vários métodos de observação e seus tipos correspondentes de cálculo, ela será fornecida no final do Tratado no *Anexo C* [Anexo 15.39], onde será discutido com mais detalhes a diferença entre o *método de multiplicação* e o *método de retorno*,[537] já que ambos são permitidos quando são utilizadas correntes momentâneas. A primeira série de observações que são citadas aqui foi feita utilizando o método de multiplicação.

15.6 Observações

Foi observada na escala a posição da agulha do galvanômetro quando inicialmente em repouso.[538] O *primeiro* pulso de indução positivo forneceu uma velocidade positiva à agulha, e foi observada a maior elongação ou o maior nível da escala que a agulha alcançou. O *segundo* pulso de indução negativo foi produzido no momento em que a agulha passava por sua posição de repouso durante sua oscilação de retorno, e foi observada a menor posição que a agulha alcançou na escala. O *terceiro* pulso de indução, novamente positivo, foi produzido no instante em que a agulha, que mais uma vez oscilava para a frente, passava por sua posição de repouso, sendo observada novamente a maior posição na escala. As observações foram continuadas dessa forma até doze pulsos de indução, como uma regra e, finalmente, quando a agulha mais uma vez chegou ao repouso, foi observada mais uma vez sua posição sobre a escala. Séries similares de observações foram feitas várias vezes sucessivamente com combinações diferentes de fios. As várias séries serão denotadas por A, B, C, D, de tal forma que A refere-se ao item (6), B ao item (7), C ao item (9), e D ao item (8) nas combinações dos fios citadas anteriormente.[539] A próxima Tabela apresenta uma visão geral das observações associadas com essas séries.

[537] Em alemão: *Zurückwerfungsmethode*. Essa expressão pode ser traduzida como método de retorno, de retrocesso, de retrospectiva, de recuo ou retroativo. Ver [Gau38a], [Web39b], [Max54a, Vol. 2, Artigo 750, págs. 388-390] e [WK68, pág. 108, Nota 13].

[538] Ver a Nota de rodapé 104 na página 53.

[539] Ver a página 329.

	D	C	B	A	B	A	B	C	D
Posição	494,8	492,9	493,2	493,7	493,7	493,0	494,3	494,1	494,3
1.	821,8	587,8	672,7	676,3	673,2	675,3	673,1	588,8	821,2
2.	88,3	376,1	271,8	268,8	272,2	268,1	273,1	377,8	88,1
3.	918,0	614,6	723,3	726,7	724,1	726,6	724,4	614,7	916,2
4.	64,5	370,5	260,4	257,0	260,9	257,5	261,9	372,7	64,5
5.	922,9	616,3	725,7	731,1	726,7	729,5	726,7	616,9	923,2
6.	64,0	369,8	259,5	256,1	259,9	257,5	261,7	371,9	62,9
7.	923,3	616,4	726,0	730,7	726,3	730,2	727,2	617,2	922,7
8.	63,4	369,8	259,6	256,2	259,9	257,3	261,6	371,6	62,6
9.	922,5	616,6	726,2	730,8	726,5	730,5	727,2	617,8	923,7
10.	62,9	370,2	259,2	255,7	260,0	257,5	261,9	371,5	61,7
11.	922,9	616,5	724,2	731,1	725,9	730,9	726,9	617,7	923,3
12.	61,9	370,2	262,7	255,7	260,3	257,2	261,7	371,6	62,9
Posição	492,7	493,2	493,6	493,7	492,9	494,2	494,1	494,3	493,7

As observações foram arranjadas nessa Tabela na sequência em que foram feitas em sucessão imediata durante um intervalo de tempo que não chegou a uma hora inteira. As repetições dessas séries de observações estão espaçadas simetricamente de tal forma que as pequenas influências dependentes do tempo (por exemplo, a influência da variação da força diretriz do magnetismo terrestre)[540] podem ser quase que completamente eliminadas por suas combinações.

Uma inspeção direta dessa Tabela fornece a seguinte Tabela quando:

1. Subtraímos o valor médio da posição de repouso observada no início e no final da série de cada número que é lido na escala;

2. encontramos o valor médio de todas as observações correspondentes na série que é denotada por A, B, C, ou D, e

3. reduzimos as deflexões que foram observadas na escala, que são proporcionais à tangente do dobro do ângulo de deflexão de acordo com a teoria do magnetômetro, para que tornem-se proporcionais aos próprios ângulos de deflexão.

Deve ser observado que a distância horizontal do espelho até a escala chegou a 2150 divisões da escala, de tal forma que se x denota o valor observado, então o valor reduzido será obtido reduzindo o valor observado em $x^3/(13\,867\,500)$.

[540]Ver a Nota de rodapé 129 na página 78. Weber está referindo-se aqui à variação que ocorre durante a experiência no torque magnético exercido pela Terra sobre a agulha imantada.

Número	D	C	B	A
1.	$+325,05$	$+94,64$	$+178,96$	$+181,72$
2.	$-400,87$	$-116,53$	$-220,49$	$-224,38$
3.	$+417,74$	$+120,92$	$+229,42$	$+232,09$
4.	$-423,70$	$-121,87$	$-231,67$	$-235,45$
5.	$+423,45$	$+122,87$	$+231,82$	$+235,69$
6.	$-424,22$	$-122,62$	$-232,36$	$-235,89$
7.	$+423,40$	$+123,07$	$+231,96$	$+235,84$
8.	$-425,13$	$-122,77$	$-232,36$	$-235,94$
9.	$+423,50$	$+122,47$	$+232,09$	$+236,04$
10.	$-425,81$	$-122,62$	$-232,36$	$-236,09$
11.	$+423,50$	$+123,37$	$+231,13$	$+236,39$
12.	$-425,72$	$-122,57$	$-231,17$	$-236,24$

Vemos dessa Tabela que as elongações observadas da agulha magnética no galvanômetro aumentavam rapidamente no início, mas logo alcançavam um valor limite devido à influência crescente do *amortecedor* com o qual o galvanômetro foi equipado, [influência essa] que aumentava com a amplitude da oscilação da agulha. Para reduzir todas as medições individuais a esse valor limite, foi determinado o decremento logarítmico[541] da diminuição do arco de oscilação, sendo que para isso foram realizadas experiências especiais imediatamente antes e após as séries de observações anteriores. O decremento logarítmico resultante dessas experiências resultou na média

$$= 0,633\,95 \ ,$$

ou a razão entre duas elongações sucessivas da agulha era:

$$1 : 0,2323 \ .$$

Como os desvios entre esses valores médios não foram grandes para as séries individuais, é suficiente usar esses valores médios nos cálculos, no lugar dos valores verdadeiros. Assim, a primeira observação foi reduzida ao valor limite aumentando-a pela razão de:

$$0,7677 : 1 \ ,$$

e a n-ésima observação foi aumentada pela razão de:

$$(1 - 0,2323^n) : 1 \ .$$

A próxima Tabela apresenta uma visão geral desses valores reduzidos e as médias que foram obtidas para A, B, C, D.

[541]Ver a Nota de rodapé 112 na página 59.

	D	C	B	A
1.	$+423,41$	$+123,28$	$+233,11$	$+236,71$
2.	$-423,73$	$-123,18$	$-233,07$	$-237,18$
3.	$+423,05$	$+122,46$	$+232,33$	$+235,04$
4.	$-424,93$	$-122,22$	$-232,34$	$-236,13$
5.	$+423,73$	$+122,95$	$+231,98$	$+235,85$
6.	$-424,29$	$-122,64$	$-232,40$	$-235,93$
7.	$+423,42$	$+123,07$	$+231,97$	$+235,85$
8.	$-425,13$	$-122,77$	$-232,36$	$-235,94$
9.	$+423,50$	$+122,47$	$+232,09$	$+236,04$
10.	$-425,81$	$-122,62$	$-232,36$	$-236,09$
11.	$+424,50$	$+123,37$	$+231,13$	$+236,39$
12.	$-425,72$	$-122,57$	$-231,17$	$-236,24$
Média	$\pm 424,19$	$\pm 122,80$	$\pm 232,19$	$\pm 236,13$

A mesma série de experiências foi realizada da mesma maneira três vezes em três dias sucessivos, e a próxima Tabela apresenta uma visão geral dos valores de A, B, C, D para todas as três séries de experiências

	D	C	B	A
I.	424,19	122,80	232,19	236,13
II.	424,80	123,27	232,25	235,93
III.	423,00	122,59	231,38	235,53
Média	424,00	122,89	321,94	235,86

15.7 Cálculo das Observações

Os quatro valores que foram denotados por A, B, C, D foram determinados precisamente pelas observações descritas anteriormente e que, além disso, levantaram a questão de como a razão de resistência procurada do padrão de resistência original a em relação à cópia b podia ser deduzida desses quatro valores. Para simplificar, será assumido que a parte do amortecimento que se origina no próprio circuito é tão pequena em comparação com aquela parte que é independente do circuito que ela pode ser desprezada e, como resultado disso, o *amortecimento pode ser assumido como sendo igual para as quatro observações* A, B, C, D. Nesse caso, nos convencemos facilmente que a observação da elongação reduzida é proporcional à *velocidade* que possui a agulha do galvanômetro no instante em que ela passa pela posição de repouso como resultado de uma corrente de um pulso de indução que flui através do multiplicador no galvanômetro, e que a própria velocidade é proporcional ao *valor integral* dessa corrente. Assim, as elongações observadas podem ser usadas como uma medida[542] dessa corrente.

Contudo, a corrente que flui através do *multiplicador* do galvanômetro e é *medida* por ele não era a corrente total que foi produzida por um pulso de indução no *indutor* nas experiências anteriores, mas é apenas uma fração dela, e *a partir da lei de distribuição de corrente*, ela será expressa pela razão da resistência do fio inserido para a soma das resistências do fio inserido e do fio do multiplicador. Se m denotar a resistência do *fio do*

[542]Em alemão: *Maasse*. Ver a Nota de rodapé 95 na página 46.

multiplicador, se a denotar a resistência do *padrão fundamental* e b a resistência da *cópia*, então a resistência dos fios inseridos será igual a:

$$\begin{gathered} a \text{ para a observação } A, \\ b \text{ para a observação } B, \\ ab/(a+b) \text{ para a observação } C, \\ a+b \text{ para a observação } D, \end{gathered}$$

e, consequentemente, as razões correspondentes serão:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+m} &\quad \text{para} \quad A \ , \\ \frac{b}{b+m} &\quad \text{para} \quad B \ , \\ \frac{ab}{ab+am+bm} &\quad \text{para} \quad C \ , \\ \frac{a+b}{a+b+m} &\quad \text{para} \quad D \ . \end{aligned}$$

Contudo, a partir da lei de Ohm, a corrente *total* será representada por uma fração cujo numerador K é o mesmo para todas as experiências e depende da força eletromotriz que corresponde a um pulso de indução, enquanto que o denominador será dado pela resistência do circuito através do qual flui a corrente. Se denotarmos a resistência do *fio indutor* por r, então a resistência de todo o circuito será igual a:

$$\begin{aligned} r + \frac{am}{a+m} &\quad \text{para a observação} \quad A \ , \\ r + \frac{bm}{b+m} &\quad \text{para a observação} \quad B \ , \\ r + \frac{abm}{ab+am+bm} &\quad \text{para a observação} \quad C \ , \\ r + \frac{(a+b)m}{a+b+m} &\quad \text{para a observação} \quad D \ . \end{aligned}$$

Obtemos então as seguintes equações para as intensidades de corrente que são observadas com os galvanômetros, que serão denotadas por A, B, C, D:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{a+m} \cdot \frac{K}{r+\frac{am}{a+m}} = \frac{aK}{am+ar+mr} \ , \\ B &= \frac{b}{b+m} \cdot \frac{K}{r+\frac{bm}{b+m}} = \frac{bK}{bm+br+mr} \ , \\ C &= \frac{ab}{ab+am+bm} \cdot \frac{K}{r+\frac{abm}{ab+am+bm}} = \frac{abK}{ab(m+r)+(a+b)mr} \ , \\ D &= \frac{a+b}{a+b+m} \cdot \frac{K}{r+\frac{(a+b)m}{a+b+m}} = \frac{(a+b)K}{(a+b)(m+r)+mr} \ . \end{aligned}$$

Colocando aqui por brevidade:

$$\frac{1}{mr} \cdot K = \alpha \ , \qquad\qquad \frac{1}{m} + \frac{1}{r} = \beta \ ,$$

obtém-se então:

$$A\left(\beta + \frac{1}{a}\right) = B\left(\beta + \frac{1}{b}\right) = C\left(\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = D\left(\beta + \frac{1}{a+b}\right) = \alpha \ ,$$

e, portanto:

$$\frac{\frac{1}{b}B - \frac{1}{a}A}{A-B} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)C - \frac{1}{a}A}{A-C} = \frac{\frac{1}{a+b}D - \frac{1}{a}A}{A-D} = \beta \ ,$$

sendo que a partir disso obteremos as duas equações seguintes para determinar a procurada razão da resistência da cópia para a [resistência do] padrão fundamental, $b : a$, a saber:

$$\begin{aligned} (a-b)AB - aAC + bBC &= 0 \ , \\ (a^2 - b^2)AB + b^2AD - a^2BD &= 0 \ , \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{AB - AC}{AB - BC} \ , \\ \frac{b^2}{a^2} &= \frac{AB - BD}{AB - AD} \ . \end{aligned}$$

De acordo com a lei de Ohm, existirá a seguinte relação entre as quatro observações A, B, C, D:

$$\frac{A^3}{B^3} = \left(\frac{A-C}{B-C}\right)^2 \cdot \frac{A-D}{B-D} \ ,$$

que é obtida ao eliminar a e b das equações anteriores.

Com esse desenvolvimento, as fórmulas que foram apresentadas aqui são válidas inicialmente apenas para os casos nos quais as observações A, B, C, D fornecem as correntes induzidas e as correntes que fluem através do multiplicador em termos da mesma unidade, isto é, onde o amortecimento da agulha do galvanômetro não é perceptivelmente diferente para as várias observações. Contudo, essas fórmulas necessitam de um teste especial para também podermos aplicá-las aos casos remanescentes nos quais *o amortecimento varia*, já que, como vemos facilmente, as elongações observadas A, B, C, D, também são proporcionais à intensidade da corrente, mas também são inversamente proporcionais à intensidade da amortecimento.

Agora, o amortecimento consiste de uma parte que é *constante* para todas as observações que se origina no amortecedor fixo em forma de anel com o qual o galvanômetro é fornecido, e pode ser colocado igual a 1, e uma parte *variável* que depende da maneira como o multiplicador é fechado, que é inversamente proporcional à resistência do circuito que começa no multiplicador e termina nele. Contudo, a resistência desse circuito é igual a:

$$
\begin{aligned}
m + \frac{ar}{a+r} & \qquad \text{para} \qquad A\ , \\
m + \frac{br}{b+r} & \qquad \text{para} \qquad B\ , \\
m + \frac{abr}{ab+ar+br} & \qquad \text{para} \qquad C\ , \\
m + \frac{(a+b)r}{a+b+r} & \qquad \text{para} \qquad D\ .
\end{aligned}
$$

Consequentemente, se fizermos $1/m + 1/r = \beta$ e se γ denotar um fator constante, então a parte variável do amortecimento poderá ser representada por

$$
\begin{aligned}
\gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}}{\beta+\frac{1}{a}} & \qquad \text{para} \qquad A\ , \\
\gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{b}} & \qquad \text{para} \qquad B\ , \\
\gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} & \qquad \text{para} \qquad C\ , \\
\gamma \cdot \frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}}{\beta+\frac{1}{a+b}} & \qquad \text{para} \qquad D\ .
\end{aligned}
$$

Agora, para os casos nos quais a parte variável do amortecimento não pode ser desprezada em comparação com a [parte] constante igual a 1, então A, B, C, D precisam ser substituídas por seus produtos com o valor associado do amortecimento nas fórmulas desenvolvidas anteriormente, isto é:

$$
\begin{aligned}
A & \quad \text{deve ser substituído por} \quad A\left(1+\gamma\cdot\frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}}{\beta+\frac{1}{a}}\right)\ , \\
B & \quad \text{deve ser substituído por} \quad B\left(1+\gamma\cdot\frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{b}}\right)\ , \\
C & \quad \text{deve ser substituído por} \quad C\left(1+\gamma\cdot\frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)\ , \\
D & \quad \text{deve ser substituído por} \quad D\left(1+\gamma\cdot\frac{\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}}{\beta+\frac{1}{a+b}}\right)\ .
\end{aligned}
$$

Contudo, com essas substituições obtemos:

$$
\begin{aligned}
A\left[\beta+\frac{1}{a}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\right] &= B\left[\beta+\frac{1}{b}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}\right)\right] \\
= C\left[\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right] &= D\left[\beta+\frac{1}{a+b}+\gamma\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}\right)\right] = \alpha\ ,
\end{aligned}
$$

e disso:

$$\frac{A\left(\beta+\frac{1}{a}\right)-B\left(\beta+\frac{1}{b}\right)}{B\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{b}\right)-A\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)}=\frac{A\left(\beta+\frac{1}{a}\right)-C\left(\beta+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{C\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-A\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)}$$
$$=\frac{A\left(\beta+\frac{1}{a}\right)-D\left(\beta+\frac{1}{a+b}\right)}{D\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a+b}\right)-A\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)}=\gamma\ ,$$

de onde segue que:

$$AB\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+AC\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{b}-BC\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{a}=0\ ,$$
$$AB\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+AD\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a}\right)$$
$$-\ BD\left(\beta-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b}\right)=0\ ,$$

ou, eliminando o fator comum $(\beta-1/r)$, obteremos as mesmas equações de antes, a saber:

$$\frac{b}{a}=\frac{AB-AC}{AB-BC}\ ,$$
$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{AB-BD}{AB-AD}\ .$$

Finalmente, quando aplicamos as regras que foram encontradas para os valores de A, B, C, D que resultaram das experiências anteriores, a saber:

$$A=235,86\ ,$$
$$B=231,94\ ,$$
$$C=122,89\ ,$$
$$D=424,00\ ,$$

isso vai fornecer, em primeiro lugar:

$$\frac{A^3}{B^3}=1,051\,56\ ,$$
$$\left(\frac{A-C}{B-C}\right)^2\cdot\frac{A-D}{B-D}=1,051\,28\ .$$

A boa concordância entre esses dois valores, que deveriam ser iguais de acordo com as regras anteriores, pode servir como uma confirmação da lei de Ohm, de onde foram deduzidas essas regras.

Também decorre disso a razão da resistência b da cópia para a [resistência] a do padrão fundamental e, de fato, a partir dos valores observados de A, B, C:

$$\frac{b}{a} = \frac{AB - AC}{AB - BC} = 0,981\,616 \ ,$$

e a partir dos valores observados de A, B, D:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{AB - BD}{AB - AD}} = 0,981\,485 \ ;$$

assim a média desses números é a resistência da cópia, expressa em unidades da resistência do padrão fundamental fornecido, sendo igual a:

$$0,981\,55 \ .$$

Também podemos encontrar a razão da resistência de outros condutores em relação ao padrão fundamental da mesma maneira que foi determinada a razão da resistência da cópia para a resistência do padrão fundamental, e dessa forma podem ser medidas as resistências de todos esses condutores em termos do padrão fundamental fornecido.

O arranjo das observações no exemplo dado foi consistente com o método de multiplicação. Contudo, foi mencionado anteriormente que esse arranjo também poderia ser feito de outra maneira, a saber, com o método de retorno, e que esse último arranjo tem algumas vantagens sobre o primeiro. Portanto, o segundo método merece ser discutido mais detalhadamente, o que será feito no *Anexo C* [Anexo 15.39] ao final desse Tratado, onde será adicionado um exemplo de medição usando esse método.

II - Convertendo as Medidas de Resistência para Unidades Absolutas

15.8 Sobre o Significado de uma Unidade Absoluta de Resistência

A partir do que foi mostrado na primeira Parte, a saber, como a resistência de um condutor pode ser determinada com a precisão necessária a partir de um *padrão fundamental*, nessa segunda Parte essas medições serão convertidas em uma *unidade absoluta*.

Poderíamos achar que tal conversão seria implementada da maneira mais simples ao reverter às dimensões espaciais do condutor (comprimento e [área] de seção reta), e empregando dessa maneira o metal que é mais adequado para os condutores e que é usado mais frequentemente, a saber, o cobre. De fato, dessa forma seríamos bem sucedidos ao determinar a resistência dos condutores que poderiam ser denominadas com o nome de absolutas. Contudo, isso não iria corresponder ao objetivo verdadeiro, a saber, reduzir o número das unidades fundamentais assumidas arbitrariamente. Nesse caso teríamos apenas a substituição de uma unidade fundamental de resistência por uma resistência específica (a saber, aquela do cobre). Contudo, para o objetivo apresentado, é irrelevante se usamos um padrão fundamental de resistência como base e deduzimos a unidade de resistência específica a partir dele ou, ao contrário, se usamos como base uma unidade de resistência específica e deduzimos a partir dela o padrão de resistência absoluta. Portanto, as medições absolutas de resistência só são de importância essencial se forem realizadas de forma que não se baseiem em novas unidades, mas apenas nas existentes que já foram usadas para outros fins e são indispensáveis, como, por exemplo, as unidades de espaço e tempo.

Assim, podemos facilmente julgar o que Jacobi disse na página 326 e seguintes[543] na referência citada anteriormente quando foi discutida sua proposta relacionada a uma unidade fixa de resistência, a saber, para expressar a resistência à condução que os físicos medem em uma unidade comum, não pode existir método absoluto de determinação, já que parece que existem diferenças até mesmo nas resistências dos metais mais puros, diferenças essas que não podem ser explicadas apenas por uma diferença de tamanho e, portanto, quando um físico relaciona seu medidor de resistência e seu multiplicador a um fio de cobre com 1 metro de comprimento e 1 milímetro de espessura, ainda assim um outro físico não estará convencido de que seu fio de cobre e o outro possuem o mesmo coeficiente de resistência (isto é, se o cobre dos dois fios possui a mesma resistência específica). Vemos que aqui Jacobi tinha em mente apenas uma determinação para a qual a unidade de resistência absoluta pudesse ser deduzida de uma unidade fundamental que é assumida para a resistência específica, a qual ele tinha todo o direito de rejeitar. Contudo, Jacobi nem mesmo tocou na questão de saber se uma nova unidade fundamental era necessária ou se as determinações de resistência seriam possíveis sem assumir qualquer uma dessas duas unidades fundamentais. Apesar disso, essa é precisamente a questão cuja resolução gostaríamos de determinar. Além disso, enquanto que essa resposta implica que nenhuma unidade fundamental nova é de fato necessária para o propósito de medições de resistência, não segue de forma alguma que seja totalmente supérfluo o estabelecimento de tal padrão fundamental do tipo proposto por Jacobi e utilizado na primeira Parte desse Tratado. Em vez disso, será mostrado que

[543]Página 199 do artigo original de Weber, que corresponde à página 303 do Volume 3 das *Obras* de Weber e à página 326 dessa tradução em português.

assumir a proposta de Jacobi ainda vai permanecer muito desejável por motivos práticos, já que uma determinação absoluta direta da resistência só pode ser realizada precisamente em casos isolados e sob condições especialmente favoráveis, porém ao aceitar a proposta de Jacobi é criada uma ponte pela qual conseguimos converter todas as outras medições de resistência a uma unidade absoluta com a ajuda de uma única determinação absoluta de resistência que de fato podemos realizar. Agora, o fato de que uma determinação absoluta de resistência é possível de uma maneira que é completamente diferente da proposta de Jacobi e que é completamente independente da resistência específica ou do coeficiente de resistência de qualquer substância, tal como o cobre, a saber, por uma combinação particular de observações magnetoelétricas e eletromagnéticas, já foi expresso por Gauss logo após ter sido conhecida a descoberta de Faraday da magnetoeletricidade.[544]

A essência desse método pode ser expressa brevemente em palavras da seguinte maneira. Considerando a intensidade de qualquer corrente galvânica, é evidente que em geral ela pode ser determinada de duas maneiras essencialmente diferentes: *em primeiro lugar*, a partir das causas das quais ela depende; *em segundo lugar*, pelas ações que ela produz. Contudo, como podemos mostrar facilmente, a intensidade de corrente que é definida por suas ações pode agora ser convertida em *unidades absolutas*, e como é óbvio que o valor da intensidade de corrente em unidades absolutas tem de ser o mesmo, ela poderia ser definida ou por suas ações ou por suas causas, assim o resultado que será obtido pela última maneira já será conhecido de antemão pela maneira que ela era conhecida da primeira maneira. Contudo, sabemos que a intensidade de corrente depende de apenas duas causas, a saber, a força eletromotriz e a resistência do circuito, e entre essas duas grandezas, a força eletromotriz pode ser convertida em uma unidade absoluta. Agora, assim como o valor absoluto da intensidade de corrente será dado imediatamente quando é fornecida a resistência em unidades absolutas, juntamente com a força eletromotriz, o inverso também é verdadeiro, já que quando é fornecida em unidades absolutas a força eletromotriz, juntamente com a intensidade de corrente, também será dado o valor da resistência em unidades absolutas, e vemos então que a medição de resistência pode ser efetuada sem termos de recorrer a uma nova unidade fundamental arbitrária para ela, o que era para ser provado.

Em geral, isso também explica a possibilidade de que pode haver uma unidade absoluta de resistência no sentido mais restrito da palavra, mas ainda assim será necessário dar uma definição precisa dessa unidade se uma medição real for realizada com essa unidade. Contudo, encontramos uma complicação em tal definição no fato de que ela assume que as outras unidades absolutas sejam conhecidas, a saber, a unidade absoluta para força eletromotriz e a unidade absoluta para a intensidade de corrente (como determinada a partir de suas ações). Estaríamos então lidando com os fundamentos de uma unidade absoluta de resistência com base no estabelecimento de um sistema completo de unidades absolutas para toda a eletrodinâmica. Se voltarmos ainda mais, encontraremos então que essas últimas medidas assumem ainda outras unidades que estão além do escopo da eletrodinâmica, e que a desejada fundação da unidade de resistência necessitaria de uma discussão mais detalhada das medidas absolutas de vários tipos diferentes de grandezas, que devem preceder a realização de nossa medição.

[544]Ver a Nota de rodapé 26 na página 26.

15.9 Sobre as Unidades Absolutas de Vários Tipos Diferentes de Grandezas

É conhecido que a pesquisa física pode ser muito simplificada quando introduzimos apenas as unidades fundamentais[545] especializadas independentes para os diferentes tipos de grandezas que são absolutamente necessárias, e quando deduzimos todas as outras unidades desse conjunto mínimo de unidades fundamentais. Com base nisso, na mecânica apenas são presentes as unidades fundamentais de *distância*, *intervalos de tempo*, e *massas*, e as unidades de todos os outros tipos de grandeza que são considerados na mecânica são deduzidas desse conjunto mínimo de unidades fundamentais, que são então chamadas de *unidades absolutas*. Por exemplo, não são estabelecidas unidades fundamentais de velocidade e densidade, mas as unidades absolutas que são usadas para essas grandezas podem ser reduzidas àquelas três unidades fundamentais. Similarmente, as unidades para forças móveis e absolutas, torque, momento de inércia, eficiência e assim por diante podem ser reduzidas a essas três unidades fundamentais utilizando leis conhecidas. Pela mesma razão, também não é introduzida uma unidade fundamental especializada independente para o magnetismo, em vez disso nos referimos à unidade absoluta que Gauss deduziu para o magnetismo em termos das três unidades fundamentais da mecânica em seu Tratado: *Intensitas vis magneticae terresris ad mensuram absolutam revocata. Gottingae 1833.*[546,547]

A unidade para o magnetismo em barra[548] é então, de fato, o magnetismo de uma barra que exerce um torque que tem uma razão de $1 : R^3$ com a unidade absoluta de torque (quando ela atua a uma grande distância R sobre uma outra barra imantada de mesma intensidade cujo eixo magnético é paralelo à linha que conecta os pontos centrais dos dois ímãs, enquanto que seu próprio eixo magnético, ao contrário, é perpendicular a essa linha).[549]

A unidade para a intensidade do magnetismo terrestre (a saber, a intensidade da força magnética terrestre) em qualquer local é, de acordo com isso, apenas o torque, expresso em unidades absolutas, que o magnetismo terrestre exerce sobre uma barra imantada que se encontra naquele local quando essa barra contém uma unidade absoluta de magnetismo e seu eixo magnético é ortogonal à direção do magnetismo terrestre naquele local.

---

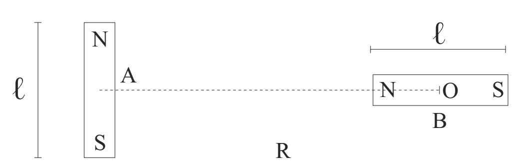
[545] Em alemão: *Grundmaasse*. Ver a Nota de rodapé 135 na página 79.

[546] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Carl Friedrich Gauss, Vol. V, pág. 79.

[547] Ver a Nota de rodapé 114 na página 59.

[548] Isto é, uma barra imantada com um momento magnético = 1.

[549] Sejam A e B duas barras igualmente imantadas, de comprimento ℓ, com seus centros separados pela distância R, orientadas como na Figura dessa Nota de rodapé. O torque τ que A exerce sobre B, em relação ao centro O de B, quando $R \gg \ell$, nas unidades absolutas de Gauss e Weber, é dado por $\tau = (M_a M_b)/R^3$, onde M_A é o momento magnético de A e $M_B = M_A$ é o momento magnético de B, ver a Figura a seguir:



15.10 Definição das Unidades Absolutas na Eletrodinâmica

As unidades absolutas para os tipos de grandezas que são consideradas na eletrodinâmica podem agora ser definidas completamente e concisamente da seguinte maneira ao reduzi-las à unidade magnética.

15.10.1 A Unidade de Medida das Intensidades de Corrente

A unidade de intensidade de corrente é a intensidade da corrente que exerce a mesma ação à distância que uma barra imantada que contém a unidade de magnetismo definida anteriormente, quando a corrente flui em um plano ao redor de uma área unitária.[550]

Essa definição da unidade de intensidade de corrente é a mesma definição que foi dada nos "*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*," pág. 86.[551,552]

15.10.2 A Unidade de Medida das Forças Eletromotrizes

A unidade de força eletromotriz é a força eletromotriz que a unidade de magnetismo terrestre definida anteriormente exerceria em um circuito fechado quando esse circuito é girado de tal maneira que a área que é englobada por sua projeção no plano que é perpendicular à direção do magnetismo terrestre aumenta ou diminui por uma unidade de área em uma unidade de tempo.

15.10.3 A Unidade de Medida das Resistências

A unidade de resistência é a resistência de um circuito fechado no qual a unidade previamente definida de força eletromotriz produz a unidade de intensidade de corrente definida anteriormente.

Se denotarmos a unidade de intensidade de corrente que foi definida anteriormente por I e qualquer intensidade de corrente medida daqui em diante por iI, na qual i denota um número puro, e se denotarmos além disso a unidade de força eletromotriz que foi definida anteriormente por E, e qualquer força eletromotriz medida daqui em diante por eE, na qual e denota um número puro; então wW será a resistência do circuito sobre o qual atua a força eletromotriz eE e no qual é produzida uma corrente de intensidade iI, se W denotar a unidade de resistência que foi definida anteriormente e $w = e/i$ for um número puro. A resistência desse circuito será então igual à unidade de resistência quando encontrarmos que $e = i$. Vemos disso que pode ser de fato realizado um condutor que possui a unidade de resistência definida anteriormente.

[550] Temos então a intensidade de corrente $= 1$ quando ela exerce sobre um segundo ímã o mesmo torque que aquele exercido por um primeiro ímã com momento magnético $= 1$ colocado no lugar da corrente fechada. Nessa definição deve-se considerar ainda que o eixo magnético do primeiro ímã que está exercendo um torque sobre o segundo ímã é ortogonal ao plano da corrente, sendo a área da corrente fechada $= 1$ em unidades absolutas (ou seja, área $= 1\ mm^2$).

[551] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 9.

[552] [Web41b, pág. 86 dos *Resultaten* e pág. 9 das *Obras* de Weber] com tradução para o inglês em [Web21f].

15.11 Esquema para Determinar a Resistência Absoluta de um Condutor

O próximo exemplo servirá para explicar como a unidade eletrodinâmica definida anteriormente pode ser aplicada à determinação da resistência absoluta de um condutor:

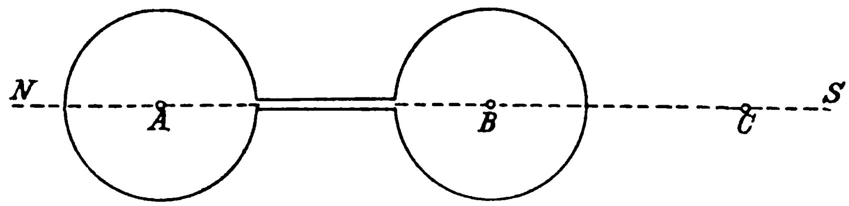


Fig. 1.

A linha NS [na Figura 1] denota a direção do magnetismo terrestre, cuja intensidade nos dois locais A e B será igual a T com a unidade definida anteriormente. O valor de T é conhecido das observações magnetométricas de acordo com as instruções fornecidas por Gauss nos *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*.[553] Agora, um circuito fechado consiste em dois círculos cujos centros são A e B. A linha NS está no plano desses círculos. Contudo, dois outros fios pertencem a esse circuito que estão próximos e isolados entre si e apresentam uma conexão dupla entre os dois círculos. Finalmente, seja cada círculo cortado entre os dois pontos onde os dois círculos se conectam com os dois fios de tal maneira que todas as partes juntas definam uma curva fechada, como mostra a Figura. Seja r o raio dos dois círculos, que assumiremos como sendo iguais por simplicidade. Se projetarmos o círculo A na direção NS em um plano que é perpendicular a NS, então a área que é limitada por essa projeção será igual a zero. Contudo, a flexibilidade dos fios que conectam os dois círculos poderia permitir a rotação do círculo A, tal que ele ficasse perpendicular a NS, sendo que nesse instante a área da superfície que é limitada pela mesma projeção será igual a πr^2. Essa rotação acontece em um pequeno intervalo de tempo τ de tal forma que a área que é limitada pela projeção do círculo crescerá uniformemente de 0 até πr^2 durante esse tempo. A partir das leis *magnetoelétricas*, isso produzirá a força eletromotriz eE que o magnetismo terrestre T exerce sobre o condutor circular A durante o intervalo de tempo τ, que é determinada em termos da unidade E definida anteriormente pelo número:

$$e = \frac{\pi r^2}{\tau} \cdot T \ .$$

A corrente que flui através de todo o circuito fechado será produzida pela força eletromotriz durante o intervalo de tempo τ cuja intensidade será denotada por iI. Essa corrente também flui através do círculo B e atua desse círculo sobre uma agulha magnética distante localizada em C cujo eixo rotacional é perpendicular a NS e está no plano do círculo B. Agora, se I é a unidade da intensidade de corrente definida anteriormente então, pelas leis do *eletromagnetismo*, isso vai implicar que o torque que a corrente fluindo no círculo B exerce sobre a agulha será igual ao torque exercido por uma barra imantada que esteja colocada no centro do círculo B de tal forma que seu eixo magnético seja perpendicular ao plano do círculo, quando o magnetismo M medido da barra de acordo com a unidade definida anteriormente for:

[553] Ver a Nota de rodapé 114 na página 59.

$$M = \pi r^2 i \;.$$[554]

Agora, quando o magnetismo da agulha C, como medido na mesma unidade, é além disso igual a m, e vale $BC = R$, e quando φ denota o ângulo que o eixo magnético da agulha C faz com a direção NS do magnetismo terrestre, então a partir das leis conhecidas do magnetismo, o torque que a barra imantada M exerce sobre a agulha m será expresso por:

$$\frac{Mm}{R^3} \cos\varphi = \frac{\pi r^2}{R^3} \cdot im \cdot \cos\varphi \;.$$

Isso significa que se K denotar o momento de inércia da agulha, então a aceleração da rotação será igual a:

$$\frac{\pi r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \cos\varphi \;,$$

e, consequentemente, se a agulha estivesse inicialmente em repouso quando $\varphi = 0$, então a velocidade angular $d\varphi/dt$ ao final do curto intervalo de tempo τ seria:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau \;.$$

Finalmente, encontramos a maior elongação α da agulha que é colocada em oscilação dessa forma a partir dessa velocidade usando as leis conhecidas de oscilação ao multiplicar [essa velocidade angular] pelo período de oscilação t[555] e ao dividir pelo número π, a saber:

$$\alpha = \frac{r^2}{R^3} \cdot \frac{im}{K} \cdot \tau t \;.$$

Como é conhecido, temos a seguinte equação para o período de oscilação t:

$$mT = \frac{\pi^2 K}{t^2} \;,$$

a partir da qual:

$$\frac{mt}{K} = \frac{\pi^2}{tT} \;,$$

e, consequentemente,

$$\alpha = \frac{\pi^2 r^2}{R^3} \cdot \frac{i\tau}{tT} \;,$$

ou

$$i = \frac{\alpha R^3}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T \;.$$

Agora, podemos calcular além disso a ação da corrente circular A sobre a agulha quando observamos que a mesma corrente que flui pelo círculo B também atravessa o círculo A. No entanto, para simplificar, pode ser assumido aqui que a distância AC é grande o suficiente

[554] O magnetismo M da barra imantada é então o valor do seu momento magnético.

[555] Em alemão: *Schwingungsdauer*. Ver a Nota de rodapé 113 na página 59.

para que sua ação desapareça em comparação com a ação da corrente circular B. Logo a observação da amplitude de elongação real vai então fornecer diretamente o valor de α.

Isso vai então implicar que a força eletromotriz eE dada previamente e determinada na unidade definida anteriormente, para a qual foi encontrado que:

$$e = \frac{\pi r^2}{\tau} \cdot T \ ,$$

produzirá uma corrente em todo o circuito cuja intensidade na unidade definida anteriormente será determinada por iI, quando:

$$i = \frac{\alpha R^3}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot T \ .$$

Finalmente, a resistência do circuito total na unidade definida anteriormente será determinada por wW quando:

$$w = \frac{e}{i} = \frac{\pi^3 r^4}{\alpha R^3 t} \ .$$

Portanto, a medição absoluta da resistência do circuito total é reduzida à medição das grandezas:

$$r, \qquad R, \qquad \alpha, \qquad t \ ,$$

ou, em outras palavras, a resistência do circuito total pode ser expressa na unidade definida anteriormente quando tivermos encontrado a partir das observações, *em primeiro lugar*, o número α, que fornece a amplitude da elongação da agulha em partes do raio, *em segundo lugar*, o número r/R, que fornece o raio dos dois círculos em partes da distância BC, e, *em terceiro lugar*, a velocidade r/t com a qual o raio do círculo se desloca durante uma oscilação da agulha. Segue-se então disso que uma *unidade de velocidade* é a única unidade dimensional na qual se baseia a medição absoluta de resistência.

Após essa visão geral de todas as observações que são necessárias para a determinação da resistência absoluta, vamos discutir agora como realizamos essas observações.

15.12 Sobre a Execução das Observações

A maioria das observações que precisam ser feitas para determinar a resistência absoluta do circuito total de acordo com a apresentação anterior podem agora ser realizadas de fato sem dificuldade e com grande precisão, já que as observações que são necessárias para determinar o período de oscilação da agulha permitem uma precisão que, como é bem conhecido, não deixam nada a desejar. A mesma coisa vale para a medição do raio do círculo e da distância $BC = R$. Tudo o que falta então é observar a amplitude da elongação α da agulha oscilante. Como é conhecido, isso também pode ser determinado com uma precisão de alguns segundos de arco com o equipamento que pertence ao magnetômetro e então, da mesma forma, não vai deixar nada a ser desejado se, por exemplo, os valores de α não forem inferiores a 1°. Contudo, quando esse esquema é seguido exatamente, esses valores serão geralmente muito menores e não serão percebidos mesmo com os melhores meios de observação. O principal problema para a medição prática da resistência de um circuito em unidades *absolutas* consiste então em modificar o equipamento que foi descrito de tal maneira que a elongação observada α torne-se tão grande quanto possível.

Tal modificação consiste, *em primeiro lugar*, em deslocar a agulha magnética C de uma grande distância para o centro do círculo B, onde a elongação será aumentada em uma razão bem definida de acordo com as leis do eletromagnetismo. Ao fazer isso, temos apenas de ser cuidadosos para que o comprimento da agulha seja muito menor do que o raio do círculo para que não seja necessário incluir no cálculo a distribuição particular do magnetismo na agulha, já que um estudo mais detalhado dessa distribuição traria consigo algumas complicações.

Uma *segunda* modificação com a qual pode ser alcançado um aumento na elongação α, consiste em multiplicar o número de enrolamentos dos dois círculos, o que vai convertê-los em anéis que possuem uma [área de] seção reta significativa. Contudo, a influência de cada enrolamento individual precisa então ser incluída no cálculo já que esses enrolamentos possuem raios diferentes e nem todos eles estão no plano da agulha.

Com essas duas modificações essenciais, chegaremos a um aumento da elongação que também vai tornar possível essa observação com precisão, como os experimentos a serem descritos comprovarão.

Antes de descrevermos a própria experiência, precisa ser feita uma observação com relação a uma outra modificação do equipamento a que se chega quando aplicamos a mudança de uma ação à distância por uma ação no centro, o que já foi feito para o círculo B, também para o círculo A. Dessa maneira, a força eletromotriz que o magnetismo terrestre exerce sobre o círculo A à distância será substituída pela força eletromotriz exercida por um ímã que é colocado no centro do círculo A. De acordo com as leis da magnetoeletricidade, a ação é idêntica quando o ímã está em repouso e o círculo é girado para frente, ou quando o círculo está em repouso e o ímã é girado para trás. Podemos então suspender uma agulha magnética no centro do círculo em repouso e deixá-la oscilar, sendo que essa agulha oscilante exercerá então uma força eletromotriz sobre o círculo e, dessa forma, o círculo e a agulha magnética podem manter a mesma localização em relação a A que o círculo e a agulha magnética possuem em relação a B.

Finalmente, quando os dois círculos e suas agulhas assumem a mesma forma e o mesmo arranjo, nada impede de combiná-los já que, de fato, *a partir do princípio de amortecimento*, a ação magnetoelétrica da agulha sobre o círculo e a ação eletromagnética do círculo sobre a agulha podem coexistir sem perturbações mútuas dessas agulhas e círculos. Precisaremos então de uma única agulha que é colocada em oscilação e dessa forma ela vai exercer, de acordo com as leis da *magnetoeletricidade*, uma força eletromotriz sobre um circuito fechado em cujo centro se encontra a agulha, e essa força eletromotriz produzirá, de acordo com as leis *eletromagnéticas*, uma corrente galvânica nesse círculo que atua de volta sobre a agulha que produziu a força eletromotriz, e que vai então produzir um *amortecimento* ou diminuição no arco de oscilação da agulha oscilante. Com essa simplificação, é suficiente observar o *arco de oscilação*, sendo que a partir de seu *tamanho* poderá ser determinado o valor da *força eletromotriz* e a partir de sua *diminuição*[556] poderá ser determinado o valor da *corrente induzida*. A segunda e terceira séries de experiências fornecerão exemplos de como a resistência de um circuito também pode ser medida em unidades *absolutas* com esse método.

Vamos agora descrever as experiências que foram realizadas de acordo com os métodos que foram explicados, sendo que inicialmente resumiremos a experiência que foi feita utilizando o *primeiro* método.

[556] Isto é, a partir da diminuição dos arcos de oscilação.

15.13 Primeiro Método

Os seguintes instrumentos foram projetados para realizar as experiências usando o *primeiro* método:

1. O *indutor terrestre*,[557] ou um anel de fio no qual, por rotação, uma corrente galvânica era gerada pelo magnetismo terrestre.

2. Um *multiplicador*,[558] cujas extremidades de fio foram conectadas às extremidades do indutor terrestre.

3. Um pequeno *magnetômetro*, cuja agulha foi suspensa no centro do multiplicador.

As seguintes observações devem ser feitas sobre esses instrumentos:

15.13.1 O Indutor Terrestre

O fio de cobre que foi utilizado no indutor terrestre, incluindo a lã que foi enrolada ao redor dele,[559] tinha um peso de:

$$16\,533 \text{ gramas,}$$

sendo que 500 gramas desse total veio da lã. Esse fio foi enrolado ao redor de uma armação de madeira que tinha a forma aproximada de um hexágono regular. Todos os enrolamentos do fio definiam coletivamente uma espira com uma seção reta retangular sendo que um lado, que era perpendicular ao plano da espira, tinha 64 milímetros de comprimento, enquanto que o outro lado tinha aproximadamente 16 milímetros de comprimento. O comprimento de uma fita que foi colocada ao redor da armação de madeira antes do fio ser enrolado deu uma circunferência de 3067 milímetros. O comprimento de uma fita que foi colocada ao redor dos enrolamentos do fio deu uma circunferência de 3170 milímetros. O fio consistia em sete camadas, sendo que cada camada tinha de 22 a 23 enrolamentos, embora a sétima ou mais externa camada não fosse completa e tinha apenas 10 enrolamentos, o que forneceu ao todo:

$$145 \text{ enrolamentos.}$$

Os comprimentos das duas extremidades salientes, tomadas em conjunto, chegavam a 550 milímetros. Quando consideramos o pequeno desvio na forma em relação a um hexágono regular, isso tornou a soma das áreas da superfície que englobou as projeções desses 145 enrolamentos no plano da espira igual a:

$$104\,924\,000 \text{ milímetros quadrados.}$$

Depois que o fio foi enrolado, duas fortes garras de madeira, que envolviam o anel de cobre, foram presas à estrutura de madeira em dois cantos opostos do hexágono, cada uma das quais com um pino forte, redondo e voltado para fora, em torno do qual o anel podia ser girado quando era inserido com esses pinos nos rolamentos de uma grande estrutura de madeira feita com vigas muito firmes. O eixo rotacional que foi definido por esses pinos, paralelo ao plano da espira, era vertical. Um dos dois pinos era oco, e as duas extremidades do fio o atravessaram e foram fixadas no final. Essas duas extremidades de fio que foram presas ao pino giratório foram conectadas por duas molas helicoidais de latão que terminavam

[557] Em alemão: *Erdinduktor*.

[558] Ver a Nota de rodapé 96 na página 47.

[559] Com o objetivo de isolar eletricamente os fios que se tocavam.

na estrutura de madeira fixa onde foram presos os fios de conexão que ligavam o indutor ao multiplicador. Dessa forma foi evitada qualquer conexão frouxa que poderia resultar em uma indeterminação na resistência do circuito, e isso ao mesmo tempo permitia uma rotação do indutor em um semi-círculo para frente e para trás enquanto as outras partes do circuito permaneciam imóveis. Uma longa manivela foi ligada ao outro pino, que parava ao final de cada rotação por um dente fixo que foi preso à estrutura de madeira. A colocação desse dente de travamento era regulada de tal forma que a rotação do indutor chegava a exatamente dois ângulos retos e o plano vertical da espira era perpendicular ao meridiano magnético no início e no fim de cada rotação.

15.13.2 O Multiplicador

O fio de cobre que foi utilizado para o multiplicador, incluindo a lã que foi enrolada ao redor dele, tinha um peso de:

$$157\,430 \text{ gramas,}$$

sendo que desse total 4540 gramas vinham da lã. Esse fio foi enrolado ao redor de uma bobina de madeira que era limitada externamente por uma superfície cilíndrica cujo raio chegava a:

$$303,51 \text{ milímetros.}$$

O fio que foi enrolado estava entre duas paredes protetoras de madeira, paralelas, que eram separadas por uma distância de 202,05 milímetros. O raio médio da superfície que limitava a camada mais externa dos enrolamentos do fio era de 374,41 milímetros, de tal forma que a seção reta retangular da espira que era definida por todos os enrolamentos tinha 202,05 milímetros de comprimento e 70,9 milímetros de largura. O fio definia 28 camadas sucessivas, sendo que cada uma delas consistia de 66 a 68 enrolamentos. A 28^a camada, ou a mais externa, não era completa e tinha apenas 44 enrolamentos, o que deu um total de:

$$1854 \text{ enrolamentos.}$$

O último enrolamento tinha 155 milímetros a menos. O comprimento das duas extremidades salientes chegava no total a:

$$1340 \text{ milímetros.}$$

Esse multiplicador foi colocado de tal forma que seu plano coincidia com o meridiano magnético.

15.13.3 O Pequeno Magnetômetro

A agulha do pequeno magnetômetro era um cilindro de aço temperado e magnetizado que tinha 60 milímetros de comprimento e 6,2 milímetros de espessura, equipada em seu centro com um gancho de latão a partir do qual [a agulha] era suspensa e que sustentava um espelho plano redondo com 30 milímetros de diâmetro cuja normal era ortogonal ao eixo magnético [da agulha]. Com o comprimento dado da agulha, que não chegava a um décimo do diâmetro do multiplicador, não era preciso levar em consideração a influência da distribuição particular de magnetismo [na agulha] e, portanto, [essa distribuição] não precisava ser incluída no cálculo. A agulha foi estendida nas duas extremidades por dois pinos de latão com 31 milímetros de comprimento que suportavam duas bolas de latão com diâmetro de 11,7 milímetros. O peso servia para aumentar o momento de inércia da agulha, o que forneceu ao período de oscilação um valor que era conveniente para as observações. Essa agulha era suspensa por quatro linhas de seda[560] que eram combinadas em um único fio que era preso à parede interna do multiplicador de tal forma que o centro da agulha podia ficar no ponto central do multiplicador. Finalmente, o espaço que era englobado pelo multiplicador, no centro do qual flutuava a agulha, foi convertido em uma caixa fechada por duas tampas de madeira que eram presas aos dois lados. Em uma dessas tampas, havia uma pequena abertura para o espelho da agulha, sendo que a abertura era fechada com um pedaço plano e paralelo de vidro. O telescópio de leitura para o magnetômetro era colocado no plano vertical da normal ao espelho em uma distância de aproximadamente 4 metros, e uma escala era presa a ele perpendicularmente à normal ao espelho. Sua distância horizontal até o espelho chegava a:

$$4087,5 \text{ milímetros},$$

e a imagem da escala podia ser observada pelo telescópio que era apontado em direção ao espelho.

15.14 Observações

As seguintes observações foram feitas com esses instrumentos. O indutor era colocado de tal forma que seu plano coincidia com o meridiano magnético, e a agulha magnética era colocada em repouso. O indutor era então girado repentinamente de 90°. Dessa forma, a agulha era colocada em oscilação, e o estado da agulha em sua maior elongação positiva na escala, que ela alcançava após meio período de oscilação,[561] era observada pelo telescópio. A agulha alcançava sua maior elongação negativa após $1\frac{1}{2}$ período de oscilação, o que também era observado na escala. O indutor era então girado 180° para trás no instante em que a agulha oscilando para frente passava mais uma vez por sua posição original de repouso, isto é, dois períodos de oscilação após o início da experiência. A agulha oscilante era então parada no meio de seu movimento e lançada para trás, e então foi observado primeiro o maior alongamento negativo e depois o maior alongamento positivo na escala. Após transcorrerem quatro períodos de oscilação, no instante em que a agulha retornava de sua última elongação e estava passando por sua posição original de repouso, o indutor era novamente girado de 180° para trás, sendo que então foram feitas as mesmas observações de elongação assim como na primeira vez, e a experiência foi continuada até que tivesse sido obtida uma série satisfatória de observações. A próxima Tabela engloba quatro dessas séries de observações. Para cada série, as elongações que foram observadas na escala foram registradas sucessivamente na primeira coluna. Na segunda coluna foram adicionados os valores médios de cada duas elongações sucessivas positiva e negativa. Finalmente, na terceira coluna, é dada a diferença entre as maiores elongações positiva e negativa, ou o valor do arco de oscilação total, sendo que abaixo de cada série é anotado o valor médio.

[560]Em alemão: Kokonfäden.

[561]Ver a Nota de rodapé 113 na página 59.

Primeira Série			Segunda Série			Terceira Série			Quarta Série		
467,1			467,1			463,0			462,0		
540,7			540,5			536,7			534,7		
	543,70			543,65			539,65			538,20	
546,7			546,8			542,6			541,7		
		80,10			79,65			80,40			80,00
461,4			461,3			456,6			455,3		
	463,60			464,00			459,25			458,20	
465,8			466,7			461,9			461,1		
		79,75			79,55			80,35			79,75
540,6			540,8			537,6			535,1		
	543,35			543,55			539,60			537,95	
546,1			546,3			541,6			540,8		
		79,25			79,90			79,55			79,50
462,3			461,8			458,3			456,0		
	464,10			463,65			460,05			458,45	
465,9			465,5			461,8			460,9		
		79,45			80,00			79,70			79,50
541,4			542,1			537,7			535,3		
	543,55			543,65			539,75			537,95	
545,7			545,2			541,8			540,6		
		79,75			79,70			79,95			80,05
462,3			462,8			457,9			456,0		
	463,80			463,95			459,80			457,90	
465,3			465,1			461,7			459,8		
		79,70			79,85			79,85			79,85
542,0			542,3			537,6			536,1		
	543,50			543,80			539,65			537,75	
545,0			545,3			541,7			539,4		
		79,45			80,10			79,70			79,55
462,8			462,7			458,2			456,8		
	464,05			463,70			459,95			458,20	
465,3			464,7			461,7			459,6		
		79,45			79,80			80,10			79,65
542,0			542,3			537,6			536,0		
	543,50			543,50			540,05			537,85	
545,0			544,7			542,5			539,7		
		79,65			79,75			80,05			79,70
462,9			462,8			457,3			456,5		
	463,85			463,75			460,00			458,15	
464,8			464,7			462,7			459,8		
		79,85			79,60			79,50			79,60
542,7			541,9			536,6			535,8		
	543,70			543,35			539,50			537,75	
544,7			544,8			542,4			539,7		
		79,45			79,75			79,75			79,55
463,4			462,3			457,2			456,4		
	464,25			463,60			459,75			458,20	
465,1			464,9			462,3			460,0		
		79,70			79,85						79,55
542,6			541,3						535,7		
	543,95			543,45						537,75	
545,3			545,6						539,8		
		79,75									
462,8											
	464,20										
465,6											
Média 79,64			Média 79,79			Média 79,90			Média 79,69		

Como resultado disso, o valor médio do arco de oscilação total ao longo de todas as observações foi de 79,755 divisões da escala, o que forneceu a medida:

79,4 milímetros.

No entanto, esse resultado deve ser aumentado em 1/2 milímetro se quiser torná-lo independente da influência que *a duração da rotação do indutor* teve sobre ele: obtém-se então

79,9 milímetros.[562]

Para completar a medida, foi observado o período de oscilação da agulha, e foi encontrado um período de oscilação igual a:

10,2818 segundos

para 300 períodos de oscilação.

Além disso, a razão da força diretriz magnética[563] para a força diretriz do fio foi encontrada como sendo:

$$1770 : 1 .$$

Finalmente, como outros ímãs que não podiam ser removidos foram encontrado na sala onde os instrumentos estavam localizados, assim como nas salas ao lado, não podíamos assumir que a intensidade da componente horizontal do magnetismo terrestre que gerava a corrente no *indutor* seria exatamente igual à intensidade da componente horizontal do magnetismo terrestre que atuava na agulha no centro do *multiplicador*. Portanto, elas foram comparadas entre si de tal forma que o período de oscilação de uma mesma agulha colocada nos dois locais seria observada diretamente em sucessão, e isso forneceu esses períodos de oscilação no centro

do amortecedor = 2,9095 segundos,
do indutor = 2,9126 segundos.

Os quadrados desses períodos de oscilação são inversamente proporcionais à intensidade do magnetismo terrestre nos dois locais, isto é:

$$100\,000 : 99\,787 .$$

Essas foram todas as experiências necessárias para determinar a resistência do circuito

[562][Nota de Wilhelm Weber:] Devido ao seu tamanho, a rotação do indutor não poderia ser realizada tão rapidamente que sua duração seria insignificante em comparação com o período de oscilação da agulha. Portanto, ela sempre foi realizada com a maior uniformidade possível em 2 segundos. A intensidade da corrente induzida pode então ser determinada para cada instante da rotação, e será representada por $i \operatorname{sen} \pi\vartheta/2$, se i denotar a intensidade no meio da rotação e o tempo ϑ for medido desde o início da rotação. Se essa rotação for variável, a indução com duração de 2 segundos, com quase a mesma ação, pode ser substituída por uma indução uniforme que gera uma corrente de intensidade i por $4/\pi$ segundos. Essa corrente começa a agir sobre a agulha $2/\pi$ segundos antes que a agulha chegue no meridiano magnético, e lá se inverte, e após isso, ela flui novamente por $2/\pi$ segundos antes que cesse a corrente. Se α denotar a maior elongação da agulha e t seu período de oscilação, então a deflexão da agulha no instante em que a corrente começa ou termina será expressa aproximadamente por α/t, e a deflexão média ao longo de toda a duração da indução, será expressa por $\alpha/3t$. A aceleração da agulha devido à sua força diretriz que corresponde a tal deflexão é igual a $\alpha/3t \cdot \pi^2/t^2$, e a velocidade que ela produz durante a indução é igual a $4\pi \cdot \pi^2\alpha/3t^2$. Metade disso teria de ser adicionado à velocidade $\pi\alpha/t$ que a agulha adquire devido à sua elongação α quando ela atravessa o meridiano, para obter a velocidade que a agulha teria no instante após sua inversão se a indução fosse *instantânea*. Agora, assim como as velocidades possuem a razão $\pi\alpha/t : (1 + 2/3t^2)\pi\alpha/t$, o mesmo ocorre com a elongação observada α da agulha e a elongação que seria encontrada para a *indução instantânea*. Essa última [indução instantânea] é, portanto, $(1 + 2/3t^2)\alpha$. Agora, como o arco de oscilação total $2\alpha = 79,4$ milímetros, e tínhamos $t = 10,2818$ [s], segue disso o valor de 79,9 milímetros que foi citado anteriormente.

[563]Ver a Nota de rodapé 129 na página 78.

total que consistia no fio do indutor, do amortecedor, e os dois fios de conexão, em unidades *absolutas* usando o primeiro método. Antes de calcular o valor da resistência do circuito a partir dessas experiências, serão resumidos e apresentados de antemão os experimentos que foram feitos usando o *segundo* método.

15.15 Segundo Método

15.15.1 *A*

O segundo método inclui a simplificação que, entre os instrumentos que foram usados no primeiro [método], o indutor terrestre é tornado completamente supérfluo. Portanto, nas experiências seguintes, o fio do multiplicador que foi descrito anteriormente vai formar todo o circuito quando suas extremidades são conectadas entre si diretamente. A colocação do multiplicador, que foi convertido em um *amortecedor* dessa forma, permanece inalterada. Em contrapartida, a agulha no magnetômetro foi substituída por uma agulha maior e mais forte cujas oscilações podiam exercer uma maior força eletromotriz sobre o circuito fechado. Essa agulha consistia em nove barras imantadas que tinham a forma de paralelepípedos, sendo que cada um deles tinha 90 milímetros de comprimento e 9 milímetros de largura e de espessura, tinham eixos paralelos, e estavam espaçados entre si de 5 milímetros. Eles foram ligados em um sistema rígido, sendo equipados com um espelho para observar as oscilações.

Foi feita então a próxima experiência com esse instrumento simplificado. Quando ela começou, as extremidades do fio do amortecedor foram *separadas* entre si. A agulha foi então colocada em oscilação, sendo determinados o período de oscilação da agulha e a diminuição de seu arco de oscilação, ou seu decremento logarítmico, de acordo com as instruções fornecidas por Gauss em seu trabalho "*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*."[564,565] As extremidades dos fios do circuito foram então conectadas, ou o *amortecedor foi fechado*, e as mesmas observações foram repetidas. O amortecedor era então novamente aberto, e íamos alternando dessa forma por várias vezes. Os resultados dessas experiências estão resumidos na próxima Tabela, na qual a primeira coluna sob A fornece o decremento logarítmico da diminuição do arco de oscilação para um *amortecedor fechado*. Na segunda coluna, é fornecida a mesma grandeza para um *amortecedor aberto*, e na terceira coluna sob t, encontramos o *período de oscilação* associado. Foram adicionados nas partes inferiores das colunas os valores médios das determinações repetidas.

A	B	t
$0,028\,645$	$0,000\,460$	$9,1128$
$0,027\,955$	$0,000\,360$	$9,1148$
$0,028\,565$	$0,000\,380$	$9,1107$
$0,028\,388$	$0,000\,400$	$9,1128$

Finalmente, para completar as medições, foi realizada a seguinte experiência para determinar o magnetismo da agulha[566] e também para determinar a distribuição desse magnetismo até onde isso pareceu ser necessário. Ou seja, uma pequena bússola foi colocada tão próxima

[564] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Carl Friedrich Gauss, Vol. V, pág. 374.

[565] [Gau38a].

[566] Isto é, para determinar seu momento magnético.

quanto possível do local onde se encontrava a agulha oscilante, e sua deflexão v_1 foi observada quando a agulha se aproximou dela. Similarmente, a deflexão v_2 foi observada após a agulha ter sido girada de 180° ao redor de seu ponto central. Finalmente, foram observadas as deflexões correspondentes v_3 e v_4 quando a agulha foi deslocada paralelamente a si própria a uma distância igual nos lados opostos da bússola, sendo calculado o seguinte valor a partir disso:

$$v = \frac{1}{4}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4) \ .$$

Essa experiência foi então realizada para distâncias diferentes da bússola e para direções diferentes da linha passando pelo centro da agulha e da bússola, a saber, a distâncias de 300, 500, e 600 milímetros quando era perpendicular ao meridiano magnético e à distância de 400 milímetros quando a linha era paralela ao meridiano magnético. O eixo magnético da agulha defletora era sempre perpendicular ao meridiano magnético. Os resultados dessas experiências estão resumidos na próxima Tabela. Os números 1, 2, 3 referem-se aos casos nos quais essa linha era paralela ao meridiano magnético. A distância entre os pontos centrais das duas agulhas é fornecida na segunda coluna sob R, enquanto que os valores encontrados para v são fornecidos na terceira coluna.

Número	R	v
1.	400 mm	$32^\circ\ 37'\ 52,5''$
2.	500 mm	$18^\circ\ 1'\ 52,5''$
3.	600 mm	$19^\circ\ 37'\ 7,5''$
4.	400 mm	$17^\circ\ 24'\ 45,0''$

Deve ser observado que essa série de experiências foi realizada mais tarde do que as observações anteriores da agulha oscilante no amortecedor e que, portanto, não pode ser assumido que a razão do magnetismo da agulha para o magnetismo terrestre tenha permanecido completamente invariável durante esse tempo. Por esse motivo, uma daquelas experiências de deflexão foi realizada no intervalo de tempo entre os conjuntos individuais das observações de oscilação anteriores, a qual podia então ser utilizada para reduzir a razão do magnetismo da agulha para o magnetismo terrestre que foi obtida a partir da última série completa de observações de deflexão para o instante de tempo quando as observações de oscilação anteriores foram realizadas. A saber, uma comparação das deflexões correspondentes forneceu a razão:

$$10\,293 : 10\,000 \ ,$$

de onde emerge que o magnetismo da agulha havia diminuído perceptivelmente nesse intervalo de tempo. A razão da força diretriz magnética para a força diretriz do filamento [de suspensão da agulha] para as observações de oscilação era:

$$68 : 1 \ .$$

Essas são todas as experiências que foram necessárias para utilizar o segundo método para determinar em unidades absolutas a resistência do circuito ou do fio que formava o amortecedor.

15.15.2 *B*

A partir das experiências resumidas em (A) vem que uma agulha cujo comprimento chega a apenas quase a sétima parte do diâmetro do amortecedor e que realiza oscilações muito pequenas ainda exerce uma força eletromotriz sobre o amortecedor que é suficiente para gerar uma corrente cuja reação sobre a agulha é não apenas perceptível, mas que pode ser medida precisamente. Agora, se essas experiências devem ser usadas como base para calcular a resistência do circuito em unidades absolutas, então surgirão algumas complicações do fato de que, mesmo com as dimensões moderadas da agulha em comparação com o diâmetro do amortecedor, a distribuição do magnetismo na agulha não poderá ser completamente ignorada. Essa complicação pode ser evitada completamente quando uma agulha menor é suspensa no amortecedor e quando essa agulha menor possui tanto magnetismo quanto a agulha maior.[567]

No Instituto de Física [da Universidade] de Leipzig, encontra-se um ímã natural pequeno e de grande intensidade em comparação com seu tamanho, que pesa 40 gramas, juntamente com seu suporte, e que tem 24 milímetros de comprimento. Por ser pequeno e forte, ele era muito conveniente para ser usado como uma agulha do magnetômetro para essa experiência, e o diâmetro do amortecedor podia ser consideravelmente reduzido sem que fosse necessário fazer um estudo mais preciso da distribuição do magnetismo [no ímã]. Contudo, o tempo limitado que foi reservado durante o qual a grande massa de fio do amortecedor estava disponível para essas experiências não permitiu qualquer modificação no amortecedor, e então o ímã natural foi suspenso no amortecedor inalterado e uma segunda série de experiências foi realizada com ele que será da mesma forma resumida aqui, já que ela fornece uma prova interessante da precisão que as observações da diminuição no arco de oscilação com o amortecedor nos permite para reconhecer as ações de forças eletromotrizes muito fracas e para medi-las com precisão tolerável. Com essa finalidade, o ímã natural foi equipado com um suporte para prender o espelho e para ser pendurado em um fio no centro do amortecedor. O instrumento permaneceu inalterado de qualquer outra maneira, e a experiência foi então realizada exatamente da mesma forma que o experimento anterior. A próxima Tabela apresenta um resumo dos resultados que foram obtidas com ela, a saber, sob A encontramos o decremento logarítmico da diminuição do arco de oscilação para um amortecedor fechado, sob B encontramos o decremento logarítmico da diminuição no arco de oscilação para um amortecedor aberto, e sob t encontramos o período de oscilação associado.

A	B	t
$0,006\,01$	$0,002\,54$	$3,955$
$0,006\,13$	$0,002\,67$	$3,954$
$0,006\,15$	$0,002\,67$	$3,953$
$0,006\,05$	$0,002\,66$	$3,949$
$0,006\,085$	$0,002\,635$	$3,9527$

Para completar essa experiência, o magnetismo da pequena agulha foi determinado por uma experiência especial de uma maneira similar ao experimento da série anterior. Contudo, como era apenas necessário determinar o momento [magnético] desse pequeno ímã, essa experiência foi limitada a duas distâncias diferentes do ponto central da pequena bússola auxiliar na direção perpendicular ao meridiano magnético a Leste e Oeste da bússola. A próxima Tabela apresenta um resumo dos resultados que foram obtidos dessa maneira. Sob

[567]Ou seja, quando as duas agulhas possuem o mesmo momento magnético.

R encontramos a distância do centro do ímã natural ao centro da bússola, e sob v encontramos a deflexão da bússola, que foi calculada da mesma maneira que na série anterior.

R	v
180,08 mm	$20° \ 42' \ 0''$
240,18 mm	$9° \ 4' \ 52''$

Os resultados dessas observações são válidos para uma temperatura de $20°R$[568] do fio de cobre, que era a temperatura média para as observações nessa Seção e na anterior.

Os dados para a determinação da resistência do circuito em unidades absolutas são completamente fornecidos por essas experiências.

15.16 Regras para Calcular a Resistência a partir das Observações Anteriores

Se as condições nas quais foram realizadas as observações anteriores correspondessem precisamente com as condições que foram assumidas no esquema para determinar a resistência absoluta de um condutor que foram dadas na Seção 15.11, as regras para calcular a resistência a partir dos resultados observacionais que foram anunciados estariam incluídas na fórmula encontrada na conclusão daquele esquema:

$$w = \frac{\pi^3 r^4}{\alpha R^3 t} \ ;$$

já que o valor do número α, que fornece a amplitude da elongação a partir do repouso da agulha que é colocada em oscilação em partes do raio, assim como o valor do número r/R, que fornece a razão dos raios dos condutores circulares A e B para a distância BC e, finalmente, a velocidade r/t com a qual o raio do condutor circular vai se mover durante uma oscilação da agulha, seriam dados diretamente a partir dos resultados da observação. Contudo, como as observações anteriores, com a descrição dada, não foram realizadas com as condições precisas que foram assumidas no esquema mencionado, aquelas regras simples vão necessitar de algumas alterações para torná-las aplicáveis às observações atuais.

Algumas dessas alterações são facilmente obtidas quando assumimos que os raios dos dois condutores circulares são diferentes na dedução que foi dada para a equação $w = \pi^3 r^4/\alpha R^3 t$ e eles devem ser distinguidos por r' e r'', e quando incluímos no cálculo o número de seus enrolamentos m e n e quando, além disso, consideramos a elasticidade do fio que suspende a agulha, que vai fornecer uma força diretriz para a agulha que tem uma razão com sua força diretriz magnética de $\vartheta : 1$ e, finalmente, quando observamos a intensidade desigual do magnetismo terrestre nos dois locais A e B, cuja razão será representada por T'/T''. Encontramos então que na fórmula anterior, o quadrado r^2 tem de ser substituído pelo produto $r'r''$, e o valor total para w tem de ser multiplicado por $mn/(1+\vartheta) \cdot T'/T''$, consequentemente:

$$w = \frac{mn}{(1+\vartheta)} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{\pi^3 {r'}^2 {r''}^2}{\alpha R^3 t} \ .$$

[568]Isto é, 20° Réaumur. A escala Réaumur é uma escala de temperatura proposta em 1730 pelo físico e inventor francês René-Antoine Ferchault de Réaumur (1683-1757).

Além disso, as seguintes modificações essenciais podem agora ser consideradas para as observações realizadas de acordo com o primeiro método, a saber, *em primeiro lugar*, a agulha foi deslocada da distância de $BC = R$ para o centro do próprio círculo B, o que vai aumentar a amplitude da elongação observada na razão de:

$$r''^3 : 2R^3 \ .$$

Ao mesmo tempo, precisamos considerar o fato que o círculo A vai girar dois quadrantes de cada vez, em vez de um quadrante, o que vai aumentar da mesma maneira a amplitude da elongação em uma razão de:

$$1 : 2 \ .$$

Se denotarmos agora essa elongação aumentada por α, então temos de colocar de acordo com isso:

$$w = \frac{mn}{1+\vartheta}\frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi^3 r'^2}{\alpha r'' t} \ .$$

Em segundo lugar, a multiplicidade de enrolamentos nos dois círculos, que vai convertê-los em anéis que possuem áreas de seção reta significativas, precisa ser levada em consideração. Para o anel A, se lembrarmos que ele não possui uma forma exatamente circular, é suficiente substituir $m\pi r'^2$ com a soma das áreas que são limitadas pelas projeções de todos os seus enrolamentos no plano do anel e, consequentemente, se essa soma for denotada por S, então:

$$w = \frac{n}{1+\vartheta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi^2 S}{\alpha r'' t} \ .$$

Em contrapartida, o raio externo para o anel B é a'', o raio interno é a', a altura do anel é $2b'$ e, além disso, no que diz respeito à distribuição do magnetismo M na agulha, quando colocamos:

$$M = 2e'\mu \ ,$$

onde $\pm\mu$ denota a quantidade de fluido magnético Norte ou Sul, que pode ser pensado como espalhado pela superfície da agulha, de acordo com o conhecido teorema de Gauss sobre a distribuição ideal de magnetismo,[569] o comprimento e' deve ser levado em consideração, o que é feito ao substituir $1/r''$ pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{3/2}}\right)\frac{e'^2}{b'^2}\right\} \ .$$

As mudanças em relação à fórmula que foi encontrada na Seção 15.11 que foram citadas aqui, que são necessárias caso a resistência do circuito seja calculada a partir das experiências que foram descritas na Seção 15.14, são tão numerosas que, em vez de entrar em uma discussão e justificativa mais detalhada delas, prefiro deduzir as duas equações que serão utilizadas na próxima Seção 15.17 para calcular a resistência a partir das experiências que foram discutidas na Seção 15.14, a saber:

[569] Ver a Nota de rodapé 227 na página 133.

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{n}{1+\vartheta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi^2 S}{\alpha r'' t} \;, \\
\frac{1}{r''} &= \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{3/2}} \right) \cdot \frac{e'^2}{b'^2} \right\} \;,
\end{aligned}
$$

diretamente a partir das leis fundamentais do eletromagnetismo e da magnetoeletricidade. Encontramos essa dedução no *Anexo D* [Anexo 15.39] ao final desse Tratado.

Além disso, as seguintes equações serão utilizadas na Seção 15.18 para calcular a resistência a partir das experiências que foram descritas na Seção 15.15:

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{n^2\pi^2}{1+\vartheta} \cdot \frac{\pi^2+\lambda^2}{\lambda} \cdot \tan v_o \cdot \frac{r''}{t} \;, \\
\frac{1}{r''} &= \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{3/2}} \right) \cdot \frac{e'^2}{b'^2} \right\} \;,
\end{aligned}
$$

nas quais λ denota o logaritmo natural da razão observada de dois arcos de oscilação sucessivos da agulha do magnetômetro devido ao amortecimento do circuito fechado, e $\tan v_0$ foi escrito no lugar de $2M/T''r''^3$. Essas duas últimas equações também são deduzidas no *Anexo D* [Anexo 15.39] diretamente a partir das leis fundamentais do eletromagnetismo e da magnetoeletricidade.

Podemos agora prosseguir para calcular a própria resistência a partir das experiências que foram descritas nas Seções 15.14 e 15.15.

15.17 Cálculo da Resistência a partir da Primeira Série de Experiências

Nas séries de experiências da Seção 15.14, que foram realizadas usando o primeiro método, o circuito era constituído dos fios do indutor, do multiplicador e os dois fios de conexão, sendo a resistência a ser calculada a soma das resistências desses quatro fios.

O resultado imediato da experiência que foi descrita na Seção 15.14 foi, *em primeiro lugar*, o valor do arco de oscilação que foi medido com o magnetômetro, a saber:

$$79,9 \text{ milímetros,}$$

para um raio de comprimento de 8175 milímetros (igual ao dobro da distância horizontal do espelho até a escala). Isso forneceu:

$$\alpha = \frac{79,9}{8175} \;.$$

(ver o *Anexo C* [Anexo 15.39] sobre esse assunto, no qual é discutido em mais detalhes o método de retorno que foi utilizado aqui).

Em segundo lugar, o valor do período de oscilação da agulha do magnetômetro é:

$$t = 10,2818 \text{ segundos.}$$

Em terceiro lugar, a parte da força diretriz da agulha que se origina da elasticidade do fio de suspensão é:

$$\vartheta = \frac{1}{1770} \ ,$$

quando expressa em unidades da força diretriz magnética.

Em quarto lugar, a razão da intensidade da componente horizontal T' do magnetismo terrestre no local do indutor para a sua intensidade [horizontal] T'' no local do multiplicador é:

$$\frac{T'}{T''} = 0,997\,87 \ .$$

Os resultados das medições do indutor e multiplicador precisam ser adicionados a esses resultados diretos da observação. Para o *indutor*, é suficiente conhecer o resultado que a soma das áreas que são limitadas pelas projeções de seus 145 enrolamentos no plano da espira chega a:

$$S = 104\,924\,000 \text{ milímetros quadrados.}$$

Para o *multiplicador*, precisam ser adicionados os seguintes resultados das medições:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Raio interno } a' & = & 303,51 \text{ milímetros,} \\
\text{Raio externo } a'' & = & 374,41 \text{ milímetros,} \\
\text{Largura } 2b' & = & 202,05 \text{ milímetros,} \\
\text{Número de enrolamentos } n & = & 1854.
\end{array}$$

Com esses valores de a', a'', b', obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r''} &= \frac{1}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}}\right. \\
&\qquad \left. +\frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{3/2}}-\frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{3/2}}\right)\frac{e'^2}{b'^2}\right\} \ , \\
\frac{1}{r''} &= 0,002\,835\,2 + 0,000\,000\,015\,875\cdot e'^2 \ ,
\end{aligned}$$

no qual um valor aproximado para e' (de cerca de 20 milímetros) seria suficiente, dada a pequenez da agulha, de tal forma que $1/r'' = 0,002\,841\,55$. Isso fornece então:

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{n}{1+\vartheta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi^2 S}{\alpha r'' t} \\
&= \frac{1770}{1771} \cdot 1854 \cdot 0,997\,87 \cdot \frac{4\pi^2 \cdot 104\,924\,000}{79,9 \cdot 10,2818} 8175 \cdot 0,002\,841\,55 \ ,
\end{aligned}
$$

ou

$$
w = 2166 \cdot 10^8 \ .
$$

A resistência do circuito que consiste nos fios do indutor e multiplicador, juntamente com os dois fios de conexão, é então determinada completamente pela unidade de resistência W que foi definida e por esse número w, e na qual tem apenas de ser observado que essa determinação absoluta de unidade é baseada no milímetro como unidade linear e no segundo como unidade de tempo, que pode ser expressa pela seguinte notação:

$$
2166 \cdot 10^8 \ \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}} \ .
$$

Se uma outra unidade linear tiver uma razão de $1 : r$ com o milímetro e uma outra unidade de tempo tiver uma razão de $1 : t$ com o segundo, então a mesma resistência será:

$$
2166 \cdot 10^8 \cdot \frac{r}{t} \ ,
$$

quando as novas unidades forem utilizadas como base; por exemplo, quando a unidade linear básica for a milha, que tem uma razão de $1 : 0,000\,000\,135$ com o milímetro, teremos:

$$
29\,241 \ \frac{\text{milhas}}{\text{segundo}} \ .
$$

15.18 Cálculo da Resistência a partir da Segunda Série de Experiências

Na segunda série de experiências, que foi realizada utilizando o segundo método, o circuito consistia apenas no fio do amortecedor, isto é, o fio que definia o multiplicador na série anterior de experimentos.

Os resultados diretos das experiências foram:

Em primeiro lugar, o valor do decremento logarítmico da diminuição no arco de oscilação, de acordo com os logaritmos comuns,[570] após subtrair a parte que era independente de qualquer influência eletromagnética, que foi encontrado igual a:

$$
0,027\,988 \ .
$$

Consequentemente:

$$
\lambda = 0,064\,445 \ ,
$$

[570]Isto é, logaritmos na base 10.

em logaritmos naturais.

Em segundo lugar, o valor do período de oscilação da agulha do magnetômetro foi:

$$t' = 9,1128 \ ,$$

no qual deve ser observado que a força diretriz magnética foi aumentada em cerca de sua 68^a parte através da elasticidade do fio [de suspensão], de tal forma que:

$$\vartheta = \frac{1}{68} \ .$$

Em terceiro lugar, o valor da razão do magnetismo da agulha para o magnetismo terrestre pode ser inferido dos resultados das experiências de deflexão que estão incluídos na seguinte Tabela:

Número	R	v
1.	400 mm	$32^\circ\ 37'\ 52,5''$
2.	500 mm	$18^\circ\ 1'\ 52,5''$
3.	600 mm	$10^\circ\ 37'\ 7,5''$
4.	400 mm	$17^\circ\ 24'\ 45''$

Os primeiros três números referem-se às experiências para as quais o ponto central do magnetômetro e seu eixo magnético coincidiam com a perpendicular ao meridiano magnético, que passava pelo centro da bússola auxiliar. O quarto número refere-se a uma experiência na qual a agulha do magnetômetro estava igualmente posicionada com seu eixo perpendicular ao meridiano magnético, mas seu ponto médio encontrava-se na linha que passava através do centro da agulha auxiliar paralela ao meridiano magnético. Também foi determinado que a proporção resultante do magnetismo da agulha para o magnetismo terrestre deve ser aumentada na proporção de

$$10\,000 : 10\,293 \ ,$$

para ser válida no momento em que foram observados a diminuição nos arcos de oscilação e o período de oscilação da agulha do magnetômetro.

A dedução dos valores de e' e v_0 nas fórmulas que foram apresentadas para calcular a resistência:

$$\begin{aligned} w &= \frac{n^2\pi^2}{1+\vartheta}\tan v_0 \cdot \frac{\pi^2+\lambda^2}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t} \ , \\ \frac{1}{r''} &= \frac{1}{a''-a'}\left\{\log\frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}}\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{3/2}}\right)\frac{e'^2}{b'^2}\right\} \ , \end{aligned}$$

a partir dos dados que foram citados anteriormente é a seguinte. Imagina-se que os fluidos magnéticos distribuídos na superfície da agulha segundo a distribuição ideal, já mencionada na página 356,[571] estejam concentrados cada um em seu centro (centro de gravidade), isto

[571] Página 338 das *Obras* de Weber.

é, em dois pontos que se encontram a uma distância e' do centro da agulha em uma linha paralela à direção do eixo magnético e cuja distância de separação é igual a $2e'$. A posição do centro da agulha e seu eixo magnético em relação ao centro da bússola de deflexão e o meridiano magnético é determinada precisamente para cada experiência na Tabela anterior. Agora, se f' tiver o mesmo significado para a bússola que e' possui para a agulha do magnetômetro, então isso vai explicar o fato de que para qualquer deflexão dada v da bússola, a posição dos quatro pontos nos quais os fluidos magnéticos das duas agulhas são considerados como estando concentrados são completamente determinados tanto em relação mútua entre si quanto em relação ao meridiano magnético por e' e f', e o fato de que a razão do torque que a agulha do magnetômetro exerce em relação ao torque que o magnetismo terrestre exerce sobre a bússola pode então ser determinada pela razão do magnetismo M da agulha do magnetômetro para o magnetismo T terrestre usando a lei pela qual dois elementos do fluido magnético atuam entre si. A deflexão v pela qual esses dois torques são iguais e opostos é aquela [deflexão] que é observada independentemente de e', f', e M/T. A equação que expressa a dependência dessas grandezas fornece então:[572]

$$\frac{T}{M}\tan v = \frac{2}{R^3} + \frac{4e'^2 - 6(1 - 5\,\mathrm{sen}\,v^2)f'^2}{R^5} + ...$$

para o caso no qual a linha R que conecta os centros das duas agulhas é perpendicular ao meridiano magnético e:

$$\frac{T}{M}\tan v = \frac{1}{R^3} - \frac{3}{2}\frac{e'^2 - (4 - 15\,\mathrm{sen}\,v^2)f'^2}{R^5} + ...$$

para o caso no qual R é paralelo ao meridiano magnético. A suposição da concentração do fluido magnético só é admissível quando podem ser negligenciados os termos que são divididos por R^7 e por potências superiores. Agora, como os valores de R e v são dados para cada experiência na Tabela anterior, cada experiência fornecerá uma equação entre e', f', M/T, e, consequentemente, as quatro experiências que estão incluídas na Tabela anterior vão fornecer quatro equações entre essas três grandezas, três das quais servem para determinar essas grandezas e a quarta serve como um controle para garantir que o valor de R é de fato tão grande que os termos de ordens superiores podem ser desprezados. Os valores das três grandezas acima que melhor se adequam às observações são:

$$\begin{aligned} e' &= 33{,}715\ , \\ f' &= 14{,}856\ , \\ \frac{M}{T} &= 20\,143\,000\ . \end{aligned}$$

O último valor de M/T é válido para o instante no qual foi feita a experiência de deflexão e, assim como na página 360,[573] precisa ser multiplicado por 1,0293 se for para ser válido no instante em que foram observados o período de oscilação e a diminuição no arco de oscilação. Obtemos para esse último instante:

$$\frac{2M}{T} = 41\,466\,000\ .$$

[572] A expressão $\mathrm{sen}\,v^2$ deve ser entendida como $\mathrm{sen}^2 v$.

[573] Página 342 das *Obras* de Weber.

Se além disso substituirmos o valor que foi encontrado para e' na equação:

$$\frac{1}{r''} = 0,002\,835\,2 + 0,000\,000\,015\,875 e'^2 \ ,$$

que também é válida para a segunda série de experiências, já que as medições do amortecedor aqui são as mesmas que as medições do multiplicador na primeira série de experiências, então obteremos:

$$\frac{1}{r''} = 0,002\,853\,2 \ ,$$

ou

$$r'' = 350,48 \ ,$$

e com esse valor:

$$\frac{2M}{Tr''^3} = \tan v_0 = 0,963\,14 \ .$$

Além disso, assim como na primeira série de experiências, temos:

$$n = 1854 \ .$$

Isso fornece então:

$$\begin{aligned} w &= \frac{n^2\pi^2}{1+\vartheta}\tan v_0 \cdot \frac{\pi^2+\lambda^2}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t} \\ &= \frac{68}{69} \cdot 1854^2\pi^2 \cdot 0,963\,14 \cdot \frac{\pi^2 + 0,064445^2}{0,064\,445} \cdot \frac{350,48}{9,1128} \ , \end{aligned}$$

ou

$$w = 1898 \cdot 10^8 \ .$$

A resistência do circuito que consiste apenas no fio do amortecedor é então determinada completamente pela unidade definida de resistência W e pelo número w.

15.19 Cálculo da Resistência a partir da Terceira Série de Experiências

Também na terceira série de experiências o circuito cuja resistência era para ser determinada consistia apenas no fio do amortecedor, e a experiência foi realizada utilizando o segundo método. A diferença principal em relação à segunda série de experiências consistia apenas no fato de que o ímã natural que foi utilizado para a agulha do magnetômetro tinha dimensões muito menores, o que significa por uma lado, que os cálculos foram de fato simplificados, já que com dimensões tão pequenas em comparação com o diâmetro do amortecedor, é irrelevante a maneira pela qual o magnetismo livre é distribuído [no ímã]. Por outro lado, a medição perdeu precisão dessa maneira, já que o magnetismo, apesar de ser intenso em comparação com o tamanho do ímã, chegava a cerca da 19^a parte do magnetismo da agulha maior, o que tornou o amortecimento tão fraco que as observações não permitiram um determinação precisa do decremento logarítmico da diminuição do arco de oscilação.

Os resultados diretos das experiências foram como segue. *Em primeiro lugar*, o valor do decremento logarítmico para a diminuição do arco de oscilação, após subtrair a parte que era independente das influências eletromagnéticas, que foi encontrado igual a:

$$0,003\,45$$

com base nos logaritmos comuns, é encontrado, consequentemente, com base nos logaritmos naturais como:

$$\lambda = 0,007\,944 \ .$$

Em segundo lugar, o período de oscilação da agulha:

$$t' = 3,9527 \ .$$

A elasticidade do fio de suspensão pode ser desprezada, porque não aumentou a força diretriz em 1/2000.

Em terceiro lugar, o valor do magnetismo da agulha em comparação com o magnetismo terrestre foi inferido a partir das experiências de deflexão que estão resumidas na próxima Tabela:

R	v
180,08 mm	$20^\circ\ 42,0'$
240,18 mm	$9^\circ\ 4,52'$

A linha R, que conecta os pontos centrais das agulhas defletora e defletida, era então perpendicular ao meridiano magnético.

A partir da regra fornecida por Gauss no trabalho *Intensitas vis magneticae terrestris etc.*,[574] segue-se então que:

$$\begin{aligned}
\tan 20^\circ\ 42' &= \frac{2M}{T} \cdot 180,08^{-3} + a \cdot 180,08^{-5} \ , \\
\tan 9^\circ\ 4'\ 52'' &= \frac{2M}{T} \cdot 240,18^{-3} + a \cdot 240,18^{-5} \ ,
\end{aligned}$$

de tal forma que

$$\frac{2M}{T} = 2\,224\,660 \ .$$

Contudo, deve ser observado que com o baixo grau de precisão que as experiências de deflexão possuem quando são realizadas com uma agulha tão pequena, a eliminação do segundo termo, que depende da quinta potência da distância, é muito incerta, de tal forma que um resultado similarmente preciso, ou ainda mais preciso, seria obtido se não considerássemos de forma alguma esse segundo termo. Encontramos então:

[574]Ver a Nota de rodapé 114 na página 59.

$$\begin{aligned} \tan 20^\circ\ 42' &= \frac{2M}{T} \cdot 180{,}08^{-3}\ , \\ \tan 9^\circ\ 4'\ 52'' &= \frac{2M}{T} \cdot 240{,}18^{-3}\ , \end{aligned}$$

sendo que isso fornece os dois valores para $2M/T$:

$$\begin{aligned} &2\,206\,600\ , \\ &2\,214\,500\ , \end{aligned}$$

ou o valor médio:

$$2\,210\,550\ .$$

Sobre a dúvida que existe sobre preferir o primeiro ou o segundo cálculo no caso atual, e como os resultados que foram obtidos das duas maneiras diferem de qualquer forma apenas ligeiramente, o valor médio será considerado a partir dos resultados dos dois cálculos, a saber:

$$\frac{2M}{T} = 2\,217\,600\ .$$

Como se aplicam ao amortecedor as mesmas dimensões da série de experimentos anterior, mas o termo dependente de e' no valor de $1/r''$ é imperceptível devido ao pequeno tamanho da agulha, o resultado é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r''} &= 0{,}002\,835\,2\ , \\ r'' &= 352{,}71\ , \end{aligned}$$

e, consequentemente:

$$\frac{2M}{Tr''^3} = \tan v_0 = 0{,}050\,54\ .$$

Além disso temos, como na série anterior:

$$n = 1854\ .$$

Quando ϑ for desprezado, devido ao seu valor pequeno, isso fornecerá então:

$$\begin{aligned} w &= n^2\pi^2 \cdot \tan v_0 \cdot \frac{\pi^2+\lambda^2}{\lambda} \cdot \frac{r''}{t} \\ &= 1854^2 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}05054 \cdot \frac{\pi^2 + 0{,}007944^2}{0{,}007\,944} \cdot \frac{352{,}71}{3{,}9527}\ , \end{aligned}$$

ou

$$w = 1900 \cdot 10^8 \ .$$

A diferença entre esse valor e o deduzido da segunda série de experimentos é menor do que aquela que os erros inevitáveis de observação na última série podem causar.

15.20 Comparação da Resistência do Circuito na Primeira Série de Experiências com a Resistência do Circuito na Segunda e Terceira Séries

As resistências de dois circuitos foram medidas em unidades absolutas nas séries de experiências anteriores, a primeira das quais era composta de:

1. Um fio A, que serviu como o multiplicador,
2. um fio B que serviu como um indutor terrestre, e
3. dois fios curtos e grossos de conexão C.

Por outro lado, o último circuito consistia apenas no fio A que foi usado como um amortecedor. Uma comparação das resistências dos dois circuitos foi baseada principalmente em uma comparação da resistência A com a resistência B, já que a resistência C era tão pequena que sua influência poderia ser facilmente levada em consideração no cálculo como uma correção de acordo com a proporção de seu comprimento e seção reta.

Como a comparação direta das resistências A e B, dada sua grande diferença, leva a um resultado menos confiável, foram utilizados três fios auxiliares a, b, c para tornar possível basear a razão $A : B$ somente em relação àquelas medições nas quais apenas duas resistências que eram muito próximas entre si podiam ser comparadas.

Todas essas comparações de resistências foram realizadas utilizando o método que está descrito no *Anexo C* [Anexo 15.39], sendo explicadas em um exemplo e, portanto, é suficiente resumir os resultados na próxima Tabela sem entrar nos detalhes sobre as observações. Na primeira coluna são distinguidas por números as comparações que foram feitas usando o método dado. A segunda coluna fornece sob X a relação da razão de resistência procurada, e a terceira coluna fornece sob q o valor numérico que foi encontrado. Finalmente, são introduzidos nas duas últimas colunas os logaritmos de q e $q + 1$.

Número	X	q	$\log q$	$\log(q+1)$
1.	B/c	$1,043\,54$	$0,018\,51$	$0,310\,38$
2.	$b/(B+c)$	$1,034\,98$		$0,308\,56$
3.	$a/(B+b+c)$	$1,007\,52$		$0,302\,66$
4.	$A/(B+a+b+c)$	$0,915\,29$	$9,961\,56$	
	A/B	$7,322\,4$	$9,943\,05$	$0,921\,60$

Agora, temos que:

$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log\left(\frac{A}{B+a+b+c}\right) - \log\frac{B}{c}$$
$$+\ \log\left(\frac{B}{c}+1\right)\left(\frac{b}{B+c}+1\right)\left(\frac{a}{B+b+c}+1\right)\ ,$$

isto é, a diferença entre os dois logaritmos na quarta coluna (que é dado abaixo dela) é adicionado à soma dos três logaritmos na última coluna (que também é dada abaixo dela) para obter o logaritmo da razão procurada A/B, que é então calculada na terceira coluna.

Para C, é suficiente observar que a seção reta era três vezes maior do que aquela de B, enquanto que o comprimento era trinta vezes menor. Consequentemente, como os dois fios eram de cobre, a razão das resistências era:

$$\frac{B}{C} = 90\ ,$$

de onde finalmente, comparando a resistência $A + B + C$ do circuito que foi utilizado na primeira série de experiências com a resistência do circuito A nas outras duas séries de experiências, segue:

$$\frac{A+B+C}{A} = 1 + \frac{1+90}{7,3224\cdot 90} = 1,138\ .$$

Agora, $A + B + C$ foi determinado em unidades absolutas a partir da primeira série de experiências como sendo:

$$A+B+C = 2166\cdot 10^8\ \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}}\ .$$

Se dividirmos esse valor pelo quociente anterior, obteremos então o valor de A que é obtido da primeira série de experiências:

$$A = 1903\cdot 10^8\ \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}}\ .$$

15.21 Visão Geral das Várias Medidas da Resistência do Fio A do Multiplicador ou do Amortecedor

I. A partir da primeira série de experiências:

$$A = 1903\cdot 10^8\ \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}}\ .$$

II. A partir da segunda série de experiências:

$$A = 1898\cdot 10^8\ \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}}\ .$$

III. A partir da terceira série de experiências:

$$A = 1900\cdot 10^8\ \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}}\ .$$

Dessas três medições da mesma resistência, deve ser dado um peso menor à terceira medida em relação às duas primeiras, como já foi observado. Contudo, como ela concorda muito aproximadamente com as outras duas, não há motivo para excluí-la, e isso vai fornecer o seguinte valor médio de todas elas:

$$A = 19\,003 \cdot 10^7 \ \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}} \ .$$

A concordância que existe então entre as duas medições da resistência do fio A, que foram obtidas por métodos totalmente diferentes, ou seja, entre o da primeira e o da última série de experimentos, apresenta então um interesse especial, já que ela prova que os 1854 enrolamentos que transformavam esse fio em um multiplicador ou amortecedor, estavam suficientemente isolados pela lã que foi enrolada ao redor deles. Se tivesse ocorrido condução de um enrolamento para o próximo através da lã, então o efeito do multiplicador sobre o magnetômetro teria sido enfraquecido por ela na primeira série de experiências, e o cálculo teria fornecido uma resistência que era muito grande, como se a corrente que fluísse por todo o circuito tivesse sido enfraquecida por uma resistência maior. Por outro lado, a condução através da lã de um enrolamento para a outro não teria tido influência no resultado calculado a partir da segunda série de experimentos; porque é sabido que a força de atenuação de um amortecedor não é alterada ao colocar seus enrolamentos de fio em conexão condutora entre si. Pelo menos, a força amortecedora não pode ser reduzida dessa forma. Contudo, um aumento nela, se tivesse sido perceptível, significaria que o cálculo teria mostrado que a resistência era muito pequena.

15.22 Padrões para as Medições de Resistência em Unidades Absolutas

Se o fio A, cuja resistência era conhecida em unidades absolutas a partir das medições anteriores, fosse reservado para ser usado como um padrão de resistência, então ele mesmo poderia ter servido para reduzir todas as medições de resistência a unidades absolutas sem que fosse necessário repetir a medição original, desde que pudéssemos contar com a invariância do padrão. Contudo, aquele fio não foi projetado para essa finalidade, e seu uso na pesquisa atual só foi permitido por um curto tempo. Portanto, para não perder o benefício a longo prazo que os resultados obtidos poderiam ter para futuras medições de resistência, foi necessário fazer cópias do fio A, garantindo a mesma resistência, ou padrões cuja resistência fosse exatamente comparada com a resistência A. Os três fios de cobre a, b, c mencionados anteriormente podem agora servir como tais padrões, que foram usados como fios auxiliares para comparar as resistências A e B, e cuja razão de resistência para A pode ser deduzida das observações anteriores. Porque de acordo com as observações anteriores, temos:

$$\begin{aligned}
\log \frac{B}{c} &= 0,018\,51 \ , \\
\log \frac{b}{B+c} &= 0,014\,93 \ , \\
\log \frac{a}{B+b+c} &= 0,003\,25 \ .
\end{aligned}$$

Se adicionarmos ainda, de acordo com os resultados anteriores:

$$\begin{aligned} \log \frac{A}{B} &= 0,864\,65 \ , \\ \log A &= 11,278\,82 \ , \end{aligned}$$

isso fornecerá então as resistências dos três fios de cobre a, b, c em unidades absolutas, a saber:

$$\begin{aligned} a &= 10\,420 \cdot 10^7 \ \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}} \ , \\ b &= 5260 \cdot 10^7 \ \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}} \ , \\ c &= 2487 \cdot 10^7 \ \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}} \ . \end{aligned}$$

Essas três resistências padrão que foram assim determinadas, com a notação dada e os valores de resistência associados, foram colocadas na coleção de instrumentos do Instituto de Física da Universidade de Leipzig.

Contudo, como já foram realizadas muitas medições de resistência com o padrão de resistência criado por Jacobi e cópias dele já foram distribuídas, pareceu conveniente para as aplicações práticas determinar o valor desse padrão em unidades *absolutas*, o que pode ser facilmente alcançado ao comparar a resistência desse padrão com a resistência do fio de cobre que foi denominado por c anteriormente. Essa comparação também não pode ser determinada diretamente, mas apenas através de um quarto fio de cobre d.

Na página 338,[575] a resistência de uma cópia do padrão de Jacobi J foi comparada com a resistência do original. Encontramos uma comparação dessa mesma cópia com uma outra [cópia] no *Anexo C* [Anexo 15.39]. Disso resulta a resistência:

$$\begin{aligned} \text{da } \textit{primeira} \text{ [cópia]} &= 0,9815 \cdot J \ , \\ \text{da } \textit{segunda} \text{ [cópia]} &= 0,9839 \cdot J \ , \\ \text{no total} &= 1,9654 \cdot J \ . \end{aligned}$$

Uma comparação dessa resistência com aquela do fio d, usando o método que está descrito no *Anexo C* [Anexo 15.39], fornece o seguinte valor para d:

$$d = 1,1295 \cdot 1,9654 \cdot J = 2,220 \cdot J \ .$$

Contudo, uma comparação dessa última resistência, juntamente com aquelas das duas cópias, com o fio c forneceu o seguinte valor para c:

$$c = 0,993 \cdot (2,220 + 1,9654) \cdot J = 4,156 \cdot J \ ,$$

[575]Página 214 do artigo original de Weber, que corresponde à página 317 das *Obras* de Weber, assim como à página 338 dessa tradução em português.

e, consequentemente, como c em unidades absolutas é igual a $2487 \cdot 10^7$ (milímetros/segundo), [obtemos:]

$$J = 598 \cdot 10^7 \ \frac{\text{milímetros}}{\text{segundo}} = 807 \ \frac{\text{milhas}}{\text{segundo}} \ .$$

O inspetor Leyser[576] em Leipzig produziu várias cópias do padrão de Jacobi cuja resistência foi fornecida ainda mais precisamente pelo teste realizado pelo Dr. Quintus Icilius[577] em partes da unidade de Jacobi, assim como em partes da unidade absoluta.

15.23 Sobre a Constante de Indução de Neumann e Sua Determinação por Kirchhoff

Um artigo do Dr. G. Kirchhoff apareceu recentemente nos *Annalen* de Poggendorff, Vol. 76, págs. 412 e seguintes (1849), com o título "Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducirter elektrischer Ströme abhängt — Determinação da constante da qual depende a intensidade das correntes elétricas induzidas."[578]

Kirchhoff disse:

> A lei matemática das correntes induzidas foi estabelecida por Neumann[579] e Weber. Na expressão que eles apresentaram para a intensidade de uma corrente induzida apareceu uma constante que, além das grandezas que precisam ser medidas em cada caso, precisa ser determinada de uma vez por todas experimentalmente e que foi denominada por Neumann de ε. Me empenhei em determiná-la.

Agora, a constante ε que Kirchhoff determinou tem uma relação simples com a unidade de resistência que ele utilizou e com a unidade absoluta de resistência que foi definida anteriormente, que pode ser expressa da seguinte maneira.

Com as unidades que foram estabelecidas anteriormente para a intensidade de corrente, força eletromotriz, e resistência, obtemos a seguinte equação para a intensidade de corrente i que é produzida pela força eletromotriz e em um condutor fechado cuja resistência é w:

$$i = \frac{e}{w} \ .$$

Se introduzirmos algumas outras unidades que se relacionam com as unidades absolutas como:

$$a : 1 \ ,$$
$$b : 1 \ ,$$
$$c : 1 \ ,$$

[576]Ver a Nota de rodapé 124 na página 66.
[577]Ernst Wilhelm Gustav von Quintus Icilius (1824-1885).
[578]G. R. Kirchhoff (1824-1887), ver [Kir49a].
[579]F. E. Neumann (1798-1895).

e se denotarmos as três grandezas acima quando são expressas nas novas unidades por i', e', w', obteremos então:

$$ai' = i \ , \qquad be' = e \ , \qquad cw' = w \ ,$$

e, consequentemente:

$$ai' = \frac{be'}{cw'} \ .$$

Um teste mais preciso e uma comparação dessas unidades, que são baseadas na expressão de Neumann para a intensidade de uma corrente e no cálculo de Kirchhoff, com as unidades anteriores fornece:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad \text{e} \qquad b = \sqrt{2} \ ,$$

quando as unidades de espaço e tempo na medição da velocidade são baseadas nos milímetros e segundos, respectivamente, e obtemos então:

$$i' = \frac{2e'}{cw'} \ ,$$

para a qual também podemos escrever:

$$i' = \frac{\frac{2}{c}e'}{w'} \ .$$

Agora, o coeficiente constante $2/c$ com o qual é multiplicado a força eletromotriz e' nessa expressão para a corrente induzida é a constante que Neumann e Kirchhoff denotaram por ε. Ao mesmo tempo, vemos por essa apresentação que $c = 2/\varepsilon$ é o número que fornece quantas vezes a unidade escolhida de resistência é maior do que a unidade absoluta de resistência que foi definida na Seção 15.10. Se escolhermos, por exemplo, uma unidade fundamental para a qual a constante de indução $\varepsilon = 1$, então a razão dessa unidade fundamental para a unidade definida na Seção 15.10 será $2 : 1$. Agora, Kirchhoff encontrou a partir de suas próprias observações que:

> A constante ε é $= 1$ quando assumimos que a unidade de velocidade é uma velocidade de 1000 pés por segundo e a unidade de resistência é a resistência de um fio de cobre com uma seção reta de uma linha quadrada[580] e um comprimento de 0,434 polegadas.

Esta informação é baseada na medida prussiana de comprimento. Em unidades métricas, ela se traduz no seguinte. A constante ε será $= 1$ se a unidade de velocidade for considerada a velocidade de 313 853 milímetros por segundo, e a unidade de resistência for considerada a resistência de um fio de cobre com uma seção reta de 4,75 milímetros quadrados e um comprimento de 11,35 milímetros.

Agora, pode ser facilmente mostrado que $\varepsilon = 1$ ainda ocorrerá desde que permaneça inalterada a razão entre as duas unidades, a saber, [a razão entre] a unidade de velocidade e a unidade de resistência. Portanto, a constante ε ainda será igual a 1 quando escolhermos a unidade de velocidade como sendo a velocidade de 1 milímetro por segundo e a unidade de

[580] Em alemão: *Einer Quadratlinie Querschnitt*.

resistência como sendo a resistência de um fio de cobre com uma seção reta de $4,75 \cdot 313\,853$ milímetros quadrados e um comprimento de 11,35 milímetros.

Agora, como $c = 2$ para $\varepsilon = 1$, isso significa que essa unidade de resistência é duas vezes maior do que a unidade de resistência que foi definida na Seção 15.10.

As observações de Kirchhoff, após a redução dada para a unidade que foi definida na Seção 15.10, vai implicar então que a unidade absoluta de resistência é igual à resistência de um fio de cobre de seção reta de $4,75 \cdot 313\,853$ milímetros quadrados e comprimento 11,35 milímetros, ou de seção reta de 262 752 milímetros quadrados e comprimento de 1 milímetro.

No entanto, a partir das observações apresentadas nesse Tratado, o que foi dito na Seção 15.22 implica que o fio de cobre de Jacobi com uma seção reta de $0,3335^2 \cdot \pi$ milímetros quadrados e um comprimento de 7619,75 milímetros possuía uma resistência que era $598 \cdot 10^7$ vezes maior do que a unidade absoluta de resistência que foi definida na Seção 15.10 e, consequentemente, com aquele tipo de cobre, a resistência de um fio de cobre de seção reta $0,3335^2 \cdot 598 \cdot 10^7 \cdot \pi$ milímetros quadrados e comprimento 7619,75 milímetros, ou a resistência de um fio de cobre de seção reta 274 250 milímetros quadrados e comprimento 1 milímetro devem ter unidades de resistência iguais.

A concordância entre esses dois conjuntos de dados, que foram obtidos de formas completamente diferentes, torna-se ainda mais inesperado quando observamos que os fios de Jacobi e Kirchhoff foram feitos a partir de tipos diferentes de cobre, e que frequentemente ocorrem diferenças ainda maiores na condutividade ou nos coeficientes de resistência do cobre. Se fôssemos atribuir a diferença nesses dois conjuntos de dados apenas à inclusão da diferença entre os tipos de cobre, isso implicaria então que o cobre que Jacobi utilizou possuía uma condutividade um pouco menor, ou um coeficiente de resistência algo maior, do que o cobre usado por Kirchhoff. Também encontrei que o coeficiente de resistência para o cobre que usei era menor do que no cobre que Jacobi utilizou, e a diferença era ainda consideravelmente maior do que ocorreu para o cobre utilizado por Kirchhoff. Uma comparação direta da resistência do fio de Kirchhoff com a unidade fundamental de Jacobi seria então especialmente interessante para obter uma comparação mais precisa dos resultados das duas medições.

III - Exemplos de Aplicações da Unidade Absoluta de Resistência

15.24 Aplicação da Unidade de Resistência para a Medição de Correntes Galvânicas em Suas Utilizações Técnicas

Falta uma regra simples e que seja compreensível geralmente para as aplicações técnicas do galvanismo, por exemplo, para fins químicos e para a galvanoplastia. Cada técnico necessita então testar as relações que fornecem resultados favoráveis com suas próprias experiências. O gasto de tempo e de dinheiro que é criado dessa forma complica apreciavelmente as aplicações do galvanismo, especialmente com grandes empreitadas. Contudo, o motivo de tais regras estarem faltando não é tanto por não terem sido realizadas experiências satisfatórias, mas sim devido ao fato que os resultados dos experimentos que foram feitos não podem ser expressos de maneira simples e inequívoca, já que não são suficientes meras descrições dos processos utilizados. Apenas através de medições galvânicas é possível apresentar os resultados das experiências que foram realizadas em poucas palavras e em números que sejam geralmente compreendidos e que apresentem regras bem definidas e precisas para utilização futura. Essas medições galvânicas também são necessárias nas aplicações se quisermos estar certos que as regras prescritas foram seguidas.

Lidamos então com a eficácia das correntes galvânicas que, contudo, são medidas de formas muito *diferentes* devido à variedade de situações. Frequentemente, lidamos apenas com a *intensidade de corrente*, por exemplo, na precipitação galvanoplástica. Contudo, frequentemente a intensidade de corrente é apenas um fator que afeta a eficácia em questão, sendo que o outro fator é o *comprimento do condutor* através do qual flui essa corrente, por exemplo, quando o condutor está enrolado ao redor de uma barra de ferro que deve ser transformada em um eletroímã. Finalmente, há também o caso no qual cada parte do comprimento do condutor através do qual flui a corrente está associado com um *valor especial* da eficácia em questão, por exemplo, para um multiplicador cujos vários enrolamentos possuem cada um uma posição ideal diferente em relação à agulha magnética.

O caso mais simples para aplicações técnicas, que também é o mais importante, é o primeiro deles, no qual a eficácia em questão depende apenas da *intensidade de corrente*. A construção de oficinas galvânicas e os vários tipos de projetos que são realizados nelas pode ser facilitado e promovido consideravelmente quando a intensidade de corrente que é ideal para cada propósito é determinada precisamente e quando temos um meio conveniente à nossa disposição para testar se aquela intensidade de corrente está presente quando realizamos o teste.

No que diz respeito ao estudo e determinação precisa das intensidades de correntes ideais, o voltâmetro[581] que Faraday forneceu para esse propósito, no qual o volume de gás que é produzido pela decomposição da água em um certo tempo indica essa intensidade, oferece uma maneira simples de alcançar esse objetivo e, portanto, sua utilização precisa ser enfatizada. Ele só não é aplicável para correntes *fracas*, para as quais a decomposição da água ocorre muito lentamente. Além disso, o voltâmetro nem sempre é conveniente na prática comum quando tem de ser usado continuamente para testar a intensidade de corrente prescrita, já

[581] Ver a Nota de rodapé 201 na página 120.

que o intervalo de tempo precisa ser medido como um elemento essencial. Finalmente, o voltâmetro precisa permanecer continuamente no circuito já que quando ele é removido, a intensidade de corrente não será mais a mesma, mas sim uma corrente bem maior. Contudo, o enfraquecimento da corrente que está associado com sua inserção [no circuito] pode ser muito desfavorável em muitos casos. Em todas as situações nas quais não é prática a utilização do voltâmetro pelas razões já citadas, ele pode ser substituído por um *galvanômetro tangencial* que foi descrito nos "*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*," págs. 85 *e seguintes*[582,583] e cuja utilização para medições de intensidade foi explicada lá por exemplos. Cada unidade de intensidade de corrente que foi medida com o galvanômetro tangencial por aquela regra decompôs 0,009 376 miligramas de água em 1 segundo ou 1 miligrama de água em 1 minuto $46\frac{2}{3}$ segundos no voltâmetro (aproximadamente 1 grão a cada meia hora). Não é necessário relógio para a utilização do galvanômetro tangencial, e a inserção ou remoção do instrumento do circuito não tem influência perceptível na intensidade da corrente.[584]

Finalmente, a *medição de resistência* oferece uma terceira ferramenta prática para determinar a *intensidade de corrente*. A intensidade de corrente depende de duas coisas: a *força eletromotriz* e a *resistência* do circuito, das quais, como regra, apenas a variabilidade da resistência é considerada na utilização prática. Isso ocorre devido ao fato de que, em instituições técnicas, sempre utilizamos o mesmo tipo de bateria [voltaica], cuja força eletromotriz pode ser determinada de uma vez por todas com uma precisão que é suficiente para fins práticos. A corrente que é produzida por essas células [voltaicas] vai fluir algumas vezes através de mais recipientes e em outras vezes por menos recipientes e através de vários fluidos, o que vai variar consideravelmente a resistência.

Se assumirmos que a força eletromotriz E é conhecida e se formos medir apenas a resistência, então qualquer *galvanômetro arbitrário* pode ser utilizado para determinar a *intensidade de corrente* quando utilizamos uma *resistência padrão* w como uma unidade absoluta. Isso ocorre devido ao fato de que se a denota a leitura do galvanômetro quando o padrão é excluído do circuito e b denota a leitura quando ele é incluído, então a resistência do circuito em unidades absolutas W será assim determinada, a saber:

$$W = \frac{bw}{a-b} \ ,$$

e a intensidade de corrente será então obtida simplesmente por:

$$\frac{E}{W} = \frac{a-b}{bw} \cdot E \ .$$

15.25 Aplicação da Unidade de Resistência para a Medição das Forças Eletromotrizes em Unidades Absolutas

A observação final da Seção anterior leva a uma aplicação adicional que podemos fazer de um *padrão de resistência* conhecido em unidades absolutas. Pois do que foi dito segue-se

[582][Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 8.
[583][Web41b] com tradução para o inglês em [Web21f].
[584]Já que a resistência do galvanômetro é desprezível comparada com a resistência do circuito.

que, quando utilizamos um galvanômetro tangencial ou um voltâmetro, ou qualquer outro instrumento com o qual a intensidade da corrente pode ser medida em unidades *absolutas*, em vez de utilizar um galvanômetro arbitrário, a própria força eletromotriz E pode ser encontrada em unidades *absolutas* da maneira dada quando ela ainda é desconhecida. Isto ocorre devido ao fato de que se denotarmos a intensidade de corrente, medida em unidades absolutas, por α quando o padrão de resistência é excluído do circuito e por β quando ele é incluído então, assim como anteriormente, isso vai fornecer a resistência W do circuito em unidades absolutas:

$$W = \frac{\beta w}{\alpha - \beta} \ ,$$

e obtemos a força eletromotriz E em unidades absolutas a partir disso:

$$E = \alpha W = \frac{\alpha \beta w}{\alpha - \beta} \ .$$

Vemos a partir disso, por exemplo, como as forças eletromotrizes em *células galvânicas* podem ser determinadas dessa maneira em unidades absolutas, assim como as forças eletromotrizes que o *magnetismo terrestre* vai exercer sobre circuitos fechados quando estão em movimento. Contudo, é importante medir as forças eletromotrizes que são criadas por fontes diferentes, tais como forças hidroelétricas e magnetoelétricas, nas mesmas unidades, já que dessa forma estará preparado o caminho para um estudo comparativo dessas fontes. Isso será fácil e simples quando é aplicado a um condutor de resistência absoluta conhecida, mas sem tal condutor envolve grandes dificuldades, como por exemplo se a comparação fosse feita da seguinte maneira.

Seja a célula galvânica cuja força eletromotriz é para ser comparada com uma força magnetoelétrica, sem ser aplicada a um condutor de resistência absoluta conhecida, conectada por um condutor de comprimento e forma arbitrários, e possa então todo o conjunto ser girado. Devido à rotação vai surgir uma segunda corrente no circuito, a saber, além da corrente que surge da força eletromotriz da própria célula, há uma outra corrente que se origina da força eletromotriz do magnetismo terrestre. Está em nosso alcance arranjar que as direções das duas correntes no circuito sejam opostas entre si ao escolher a *direção* da rotação. Por outro lado, podemos tornar iguais as intensidades das duas correntes, ao menos por um pequeno intervalo de tempo durante o qual as duas correntes vão se cancelar, ao escolher a *velocidade* da rotação. Contudo, caso as intensidades das duas correntes sejam iguais, então segue-se que as forças eletromotrizes são iguais nesse caso, isto é, a igualdade da força eletromotriz da *célula* [voltaica] com a força eletromotriz do *magnetismo terrestre*. Essa última força eletromotriz é dada imediatamente em unidades absolutas pelo valor conhecido do magnetismo terrestre e pela forma e rotação do circuito fechado. Consequentemente, a força eletromotriz da *célula* também será encontrada nas mesmas unidades dessa forma. Contudo, isso também explica o fato de que a comparação dessas forças será alcançada de maneira muito mais simples e fácil da maneira anterior com o auxílio das unidades absolutas de resistência.

IV - Sobre os Princípios dos Vários Sistemas Absolutos de Unidade na Eletrodinâmica

15.26 Base Independente das Unidades Absolutas na Eletrodinâmica, Sem Referência às Unidades Magnéticas

Assim como não há necessidade de estabelecer uma *unidade fundamental* separada para os valores das velocidades quando já são fornecidas tais unidades para o espaço e o tempo, da mesma forma, como vimos, não há necessidade de estabelecer uma *unidade fundamental* separada para o valor das resistências galvânicas se já forem fornecidas as unidades para os valores das forças eletromotrizes e intensidades de corrente. Contudo, também não é necessário assumir *unidades fundamentais* separadas para esses dois últimos tipos de grandeza, já que também podemos fornecer unidades *absolutas* para elas, o que foi feito com as definições que foram fornecidas na Seção 15.10 *ao reduzir a unidade magnética* às *três unidades fundamentais da mecânica*.

Para a maioria das medições eletrodinâmicas, é de fato suficiente e conveniente reduzir as unidades das grandezas eletrodinâmicas à *unidade magnética* estabelecida, como foi feito na Seção 15.10. Contudo, a dependência pela qual as unidades eletrodinâmicas foram convertidas às unidades magnéticas não é de forma alguma justificada no próprio assunto, como é evidente pelo fato de que as leis eletrodinâmicas fundamentais são independentes das leis magnéticas. Em vez disso, a unidade eletrodinâmica pode ser estabelecida ainda de outra maneira que a torna completamente independente de como foi definida a unidade magnética. Para fazer isso, só é necessário reverter às leis fundamentais da *eletrodinâmica* e da *indução eletrovoltaica*,[585] em vez de começar com as leis fundamentais do *eletromagnetismo* e da *magnetoeletricidade*, assim como foi feito na Seção 15.10.

A lei fundamental da *eletrodinâmica* fornece a seguinte fórmula para o valor da *força de repulsão* entre dois elementos de corrente α e α' com intensidades de corrente i e i' separados pela distância r, que forma os ângulos ϑ e ϑ' com as duas direções de corrente, enquanto o ângulo entre as duas direções de corrente é igual a ε, a saber:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii'\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) .$$

A lei fundamental da *indução eletrovoltaica*, como dada na Seção 30 do primeiro Tratado sobre "*Medições Eletrodinâmicas*,"[586] fornece a seguinte fórmula para a força eletromotriz que um elemento de corrente α com intensidade de corrente i exerce sobre um outro elemento α' à distância r, quando r forma os ângulos ϑ e ϑ' com a direção da corrente e com a direção na qual α' é deslocado com uma velocidade v, respectivamente, e quando as últimas duas direções formam um ângulo ε:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}vi\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\vartheta\cdot\frac{di}{dt} .$$

[585] Ver a Nota de rodapé 173 na página 105.
[586] Ver a Seção 6.30.

Essa força, que atua na direção r, tem de ser decomposta na direção de α', já que será cancelada a componente que é perpendicular a α'. Se η denota o ângulo que α' faz com r, então essa fórmula precisa ser multiplicada por $\cos\eta$.

Agora, *em primeiro lugar*, uma unidade absoluta da *intensidade da corrente* pode ser definida por essa lei fundamental independentemente da unidade magnética da seguinte maneira:

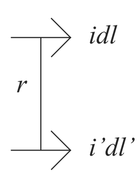
> Quando uma corrente circula ao redor de uma unidade de área e atua sobre uma corrente que circula ao redor de uma área similar a uma grande distância R, e as duas áreas são perpendiculares de tal forma que a extensão da primeira área divide ao meio a segunda [área], a unidade de intensidade de corrente será a intensidade de corrente que a primeira corrente vai possuir quando ela exerce um torque sobre a última corrente que tem uma razão para a unidade de torque de $1 : 2R^3$.

Essa nova unidade *absoluta* de intensidade de corrente pode ser definida ainda mais simplesmente quando nos é permitido reduzir a interação entre correntes fechadas à interação entre elementos de corrente individuais que não podem ser observados diretamente, já que tais elementos de corrente estão presentes apenas como componentes de correntes fechadas, a saber:

> A unidade de intensidade de corrente é a intensidade de corrente que um elemento de corrente vai possuir quando ele exerce uma força de atração sobre um elemento de corrente igual e paralelo que é perpendicular à linha de conexão a uma distância que é igual a uma unidade de comprimento, e a razão dessa força para a unidade de força será a razão do quadrado do comprimento desse elemento de corrente para a unidade de área.[587]

Essa segunda unidade *absoluta* de intensidade de corrente não é igual à primeira, que

[587] Essa situação está ilustrada na Figura dessa Nota de rodapé, a saber:



depende de unidades magnéticas, mas possui uma razão em relação a ela de $1 : \sqrt{2}$.[588,589]

[588][Nota de Wilhelm Weber:] A dedução das definições que foram apresentadas aqui a partir das leis fundamentais da eletrodinâmica é como segue.

Primeira definição. — Na Seção 9 do Tratado anterior sobre "*Medições Eletrodinâmicas*," Leipzig, 1846 [*Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 86, [Web46, pág. 86 das *Obras* de Weber]], já foi deduzida a partir das leis fundamentais da eletrodinâmica a seguinte expressão para o torque que uma corrente plana exerce sobre uma outra [corrente plana] à distância, a saber, [nota de AKTA: a expressão $\cos\psi^2$ deve ser entendida como $\cos^2\psi$]:

$$\frac{1}{2}\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3}\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\ ,$$

na qual i, i' denotam as intensidades de corrente, λ, λ' são as áreas que são circuladas [pelas correntes], r é a distância entre seus pontos médios, ψ é o ângulo entre a normal à primeira corrente planar e r, sendo δ o ângulo que a segunda corrente planar faz com a *força diretriz*. Contudo, a força diretriz está contida no plano traçado pela normal à primeira corrente planar A e pelo centro da segunda corrente planar C, e está no triângulo retângulo ACB em C, cuja hipotenusa AB é a normal à corrente planar A, paralela àquela reta CD que intercepta o lado do triângulo AB em D de tal forma que $AD : DB = 1 : 2$. — Agora, sob as circunstâncias que foram indicadas na primeira definição, teremos $i = i'$, $\lambda = \lambda' = 1$, $\delta = \psi = \pi/2$, $r = R$, o que fará com que o *torque* assuma o valor:

$$\frac{i^2}{2R^3}\ ,$$

que terá uma razão com o torque *unitário* de $1 : 2R^3$ quando $i = 1$.

Segunda definição. — Na expressão para a *força de atração* entre dois elementos de corrente que é dada diretamente pela lei fundamental da eletrodinâmica:

$$\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii'\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)\ ,$$

sob as circunstâncias que foram indicadas na definição, teremos $i = i'$, $\alpha = \alpha'$, $\vartheta = \vartheta' = \pi/2$, $\varepsilon = 0$, $r = 1$, o que fará com que a *força de atração* assuma o valor:

$$\alpha^2 i^2\ ,$$

que terá uma razão para a *força unitária* de $\alpha^2 : 1$ quando $i = 1$.

Ainda falta ser provado que a segunda unidade *absoluta* de intensidade de corrente que foi apresentada aqui possui uma razão para a primeira [unidade de intensidade de corrente], que depende das unidades magnéticas, de $1 : \sqrt{2}$.

A expressão para o *torque* que um ímã [com momento magnético] m exerce sobre um outro [ímã com momento magnético] m' à distância r foi dada anteriormente na Seção 9 *da obra citada*, de acordo com leis conhecidas, a saber:

$$\frac{mm'}{r^3}\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\ ,$$

na qual ψ e δ possuem os significados citados quando trocamos nela as normais às duas correntes planas pelos eixos dos dois ímãs. Agora, se denotarmos a primeira unidade de intensidade de corrente por K, que depende de unidades magnéticas, e a segunda [unidade de intensidade de corrente] por J, para distinguir as duas unidades de intensidade de corrente, então kK e $k'K$ serão as duas intensidades de corrente bem definidas que podem ser expressas em termos da primeira unidade, enquanto que iJ e $i'J$ serão as mesmas intensidades de corrente, que podem ser expressas em termos da segunda unidade como segue:

Em segundo lugar, a unidade de *força eletromotriz* é baseada na citada lei fundamental da indução eletrovoltaica, independentemente da unidade magnética, da seguinte maneira:

> A unidade de força eletromotriz é a força eletromotriz que uma corrente que circula ao redor da unidade de área exerce a uma grande distância R sobre um condutor delimitando uma área igual, perpendicular à primeira [área], e dividida ao meio por ela, quando sua intensidade tem uma razão com a unidade *absoluta* de $2R^3 : 1$, enquanto o condutor é girado com uma velocidade angular unitária ao redor da linha de interseção das duas áreas.

Se fosse permitido reverter à força eletromotriz sobre um elemento de corrente isolado, então essa definição poderia ser simplificada da seguinte maneira:

> A unidade de força eletromotriz é a força eletromotriz que um elemento de corrente exerce sobre um elemento condutor igualmente longo que é perpendicular a ele, paralelo à linha de conexão, e a uma distância de uma unidade de comprimento, quando sua intensidade possui a mesma razão para a unidade absoluta que foi apresentada, assim como a razão da *unidade de área* para o *quadrado do comprimento* desse elemento, enquanto o elemento condutor é deslocado com velocidade unitária na direção que é paralela, mas oposta, à direção da corrente.[590]

$$iJ = kK \qquad \text{e} \qquad i'J = k'K \ .$$

De acordo com a lei fundamental do eletromagnetismo, o *torque* permanecerá inalterado quando colocamos o ímã m igual à corrente kK que circula ao redor de uma área $\lambda = m/k$ [— isto é, se colocarmos o momento magnético m do ímã igual a $k\lambda$]. Se colocarmos, da mesma forma, o ímã m' igual à corrente $k'K$ que circula ao redor de uma área $\lambda' = m'/k'$, então obteremos o *torque* que a primeira corrente planar exerce sobre a segunda:

$$\frac{kk'\lambda\lambda'}{r^3} \operatorname{sen}\delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos\psi^2} \ .$$

Contudo, o seguinte valor foi encontrado anteriormente para esse torque:

$$\frac{1}{2}\frac{ii'\lambda\lambda'}{r^3} \operatorname{sen}\delta \cdot \sqrt{1 + 3\cos\psi^2} \ ,$$

de onde segue que $ii'/2 = kk'$, isto é, quando $k = k'$ e $i = i'$ [então]:

$$i = k\sqrt{2} \ .$$

Assim, a equação $iJ = kK$ fornecerá:

$$J : K = 1 : \sqrt{2} \ .$$

[589]Ver a Seção 6.9. A expressão $\cos\psi^2$ deve ser entendida como $\cos^2\psi$.

[590][Nota de Wilhelm Weber:] Para deduzir a primeira dessas duas novas definições de uma unidade *absoluta* para a força eletromotriz a partir da lei geral de indução eletrovoltaica, observamos em primeiro lugar que a corrente indutora i na definição é considerada como constante, de tal forma que $di/dt = 0$, o que significa que a expressão geral para a força eletromotriz que é exercida na direção r será reduzida a:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2} vi \left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) \ .$$

Contudo, a expressão similar para a força de atração entre dois elementos de corrente:

Essa segunda unidade *absoluta* para a força eletromotriz não é igual à primeira [unidade], que depende de unidades magnéticas, mas tem uma razão para ela de $\sqrt{2} : 1$.

Em terceiro lugar, é auto-explicativo que a definição da terceira unidade eletrodinâmica, a saber, a *resistência*, também pode ser tornada independente da unidade magnética quando as unidades *absolutas* de intensidade de corrente e força eletromotriz nas definições que

---

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}ii'\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) ,$$

fornece a direção e valor da força que uma corrente i que circula ao redor de uma área λ vai exercer sobre o elemento de corrente α', a saber, que *em primeiro lugar*, a direção é perpendicular ao plano que é formado pela direção da corrente i' e pela *força diretriz*. (A força diretriz está contida no plano traçado pela normal à corrente planar indutora A e pelo centro do elemento induzido C, e é paralela à linha CD no triângulo ACB, reto em C, cuja hipotenusa AB é a normal à corrente planar A que corta o lado AB do triângulo em D de tal forma que $AD : DB = 1 : 2$.). *Em segundo lugar*, o valor da força é igual a:

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda\alpha'}{r^3}ii'\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2} ,$$

onde ψ denota o ângulo entre a normal à corrente planar e r, sendo que δ denota o ângulo que a direção da corrente em α' forma com a força diretriz. — Similarmente, a partir da expressão anterior da força eletromotriz que um elemento de corrente exerce sobre um elemento condutor na direção da linha que os conecta, resulta a direção e valor da força eletromotriz que toda a corrente i que circula ao redor da área λ exerce sobre o elemento condutor α', a saber, *em primeiro lugar*, a direção é perpendicular ao plano que é definido pela trajetória ao longo da qual α' é deslocado e a direção da *força diretriz* e, *em segundo lugar*, o valor é igual a:

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda\alpha'}{r^3}vi\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2} ,$$

onde ψ denota o ângulo que a normal à corrente planar forma com r, e δ é o ângulo que a direção na qual α' é deslocado forma com a força diretriz. (Ver a Seção 9, *obra citada*, Nota na página 264 [*Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 86], onde deve ser observado que ε possui o mesmo significado que δ possui aqui, mas o fator $\operatorname{sen}\varepsilon$ foi omitido erroneamente da fórmula para a força que uma corrente planar exerce sobre o elemento móvel, que depende da direção de movimento desse elemento.)

Agora, se o elemento condutor α' também pertence à fronteira de uma área λ' cuja normal é paralela à direção na qual o elemento condutor foi deslocado (como resultado de uma rotação do condutor em torno de um eixo que divide ao meio seu plano) e, portanto, faz um ângulo δ com a *força diretriz*, então temos de decompor cada elemento α' da linha de fronteira em dois elementos ds e $d\sigma$ tal que um deles seja paralelo à linha na qual um plano que é normal à força diretriz CD corta o plano do condutor, enquanto que o outro [elemento] é perpendicular à linha de interseção. Podemos arranjar os primeiros elementos em pares de igual comprimento $ds = ds'$ e tal que sejam conectados pela perpendicular x à linha de interseção. Se denotarmos por a, b, c as distâncias dos elementos ds e ds' e o ponto de interseção da perpendicular x com o eixo rotacional dessa linha de interseção, e além disso denotarmos por γ à velocidade angular, enquanto δ' é o ângulo que o eixo rotacional que divide ao meio o plano do condutor faz com essa linha de interseção, então se v e v' denotarem as velocidades com as quais os elementos ds e ds', respectivamente, são deslocados, teremos:

$$\begin{aligned} a-b &= x , \\ (a-c)\gamma\cos\delta' &= v , \\ (b-c)\gamma\cos\delta' &= v' . \end{aligned}$$

Se observarmos além disso que a direção da força eletromotriz que foi dada anteriormente é diretamente paralela ao elemento ds e paralela, mas oposta, ao outro [elemento] ds', obteremos então a força eletromotriz, quando decomposta nas direções dos dois elementos [como dada por]:

foram dadas na Seção 15.10, que dependiam da unidade magnética, são trocadas por essas novas unidades que são independentes da unidade magnética, de tal forma que a definição permanecerá completamente inalterada. A razão dessa nova unidade para a antiga unidade, vai então implicar que a nova unidade *absoluta* de resistência terá uma razão de 2 : 1 para a unidade que foi definida na Seção 15.10.

$$+\frac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3}\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\cdot\gamma\cos\delta'\cdot(a-c)ds\ ,$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3}\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\cdot\gamma\cos\delta'\cdot(b-c)ds\ .$$

Consequentemente, a soma entre elas será:

$$+\frac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3}\cdot\gamma\cos\delta'\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\cdot xds\ .$$

Finalmente segue disso que a soma de todas as forças eletromotrizes que são exercidas pelos elementos do condutor fechado que são paralelos à linha de interseção anterior, quando decompostas ao longo da direção do condutor, será:

$$+\frac{1}{2}\frac{\lambda i}{r^3}\cdot\gamma\cos\delta'\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\cdot\int xds\ ,$$

isto é, como a integral $\int xds$ denota o valor λ' da área que é limitada:

$$+\frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda'}{r^3}i\gamma\cos\delta'\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\ .$$

Se considerarmos similarmente as forças eletromotrizes que atuam sobre todos os elementos $d\sigma$ que são perpendiculares à linha de interseção anterior e as decompusermos ao longo de suas direções, encontraremos então que a soma delas será igual a zero. Consequentemente, a fórmula anterior vai expressar a força eletromotriz total que a corrente planar exerce sobre o condutor fechado.

Se aplicarmos essa expressão à razão que foi indicada na primeira definição, na qual temos $i=i'$, $\lambda=1$, $r=R$, $\gamma=1$, $\delta=0$, $\varepsilon=\psi=\pi/2$, então isso vai fornecer o valor da força eletromotriz:

$$\frac{i}{2R^3}\ ,$$

isto é, ela será igual a 1 quando $i=2R^3$.

Segunda definição. — A expressão geral para a força eletromotriz de um elemento de corrente sobre um elemento condutor que foi citada anteriormente:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}vi\left(\cos\varepsilon-\frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)\cos\eta-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}\cos\vartheta\cos\eta\cdot\frac{di}{dt}\ ,$$

vai reduzir-se ao valor:

$$\alpha^2 i\ ,$$

quando a aplicamos à situação que foi indicada na segunda definição da unidade *absoluta* da força eletromotriz, onde $\alpha=\alpha'$, $\varepsilon=\eta=0$, $\vartheta=\vartheta'=\pi/2$, $r=1$, $v=-1$, $di/dt=0$, isto é, ao *valor unitário*, quando a intensidade da corrente indutora i tiver uma razão de $1:\alpha^2$ para a unidade estabelecida de intensidade [de corrente].

Finalmente, a razão dessa segunda unidade *absoluta* de força eletromotriz que foi apresentada aqui para a primeira, que depende da unidade magnética, é obtida como segue. Na expressão para o *torque* da Nota de rodapé anterior que um ímã m exerce sobre um outro [ímã] m' à distância r, a saber:

15.27 A Relação entre as Unidades Absolutas na Eletrodinâmica e na Mecânica

Uma força *eletromotriz* é qualquer força que tenta mover os dois fluidos elétricos em um local em direções opostas. Essas forças, entretanto, são todas determinadas pela lei fundamental da *eletrostática*, já que todas essas forças são forças de atração e repulsão e, de fato, a mesma força que é uma força de atração para um fluido elétrico será necessariamente uma

---

$$\frac{mm'}{r^3}\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\ ,$$

se substituirmos o ímã m' pela corrente $k'K$ que circula ao redor da área $\lambda' = m'/k'$, obteremos então o torque que o ímã m exerce sobre essa corrente:

$$\frac{m\lambda'}{r^3}k'\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\ ,$$

e a partir disso, usando as relações conhecidas que existem entre as leis eletromagnéticas e as leis magnetoelétricas, e que se encontram discutidas detalhadamente no *Anexo* D no final desse Tratado, obteremos a força eletromotriz que o ímã m exerce sobre o condutor de corrente fechado quando esse último é girado com velocidade angular unitária na direção que é oposta a esse torque, quando colocamos $k' = 1$, a saber:

$$\frac{m\lambda'}{r^3}\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\ .$$

Finalmente, se também colocarmos o ímã m nessa expressão igual a uma corrente kK que circula ao redor da área $\lambda = m/k$, obteremos então a força eletromotriz que essa corrente vai exercer sobre aquele condutor de corrente fechado, durante sua rotação descrita, como dada por:

$$\frac{\lambda\lambda'}{r^3}k\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\ ,$$

quando expressa em termos da *primeira unidade*, que foi expressa em termos da *segunda unidade* como:

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda'}{r^3}i\gamma\cos\delta'\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\ ,$$

isto é:

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda'}{r^3}i\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\ ,$$

quando observamos que $\gamma = 1$ e $\cos\delta' = 1$.

Se denotarmos agora a primeira unidade por E e a segunda unidade por E', com o objetivo de distinguir as duas unidades, e se denotarmos a mesma força eletromotriz nas duas unidades por eE e $e'E'$, respectivamente, então, quando observamos que $i = k\sqrt{2}$, obtém-se que:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\lambda\lambda'}{r^3}i\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\ , \\ e' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda\lambda'}{r^3}i\operatorname{sen}\delta\cdot\sqrt{1+3\cos\psi^2}\ , \end{aligned}$$

e, consequentemente, como $eE = e'E'$, teremos:

$$E' : E = e : e' = \sqrt{2} : 1\ .$$

força de repulsão para o outro.[591] Agora, como todos os tipos de forças eletromotrizes são comparáveis entre si e, portanto, todas elas podem ser expressas nas unidades pelas quais qualquer uma delas foi medida, isso vai explicar o fato de que todos os tipos de forças eletromotrizes precisam ser capazes de serem expressos na unidade que é estabelecida para as forças elétricas na *eletrostática*, e o fato de que então não precisaremos de qualquer outra unidade para as forças eletromotrizes além daquela que é usada para as forças eletrostáticas. Contudo, na eletrostática, as forças elétricas não são medidas com uma unidade especial, mas sim com a mesma unidade assim como todas as forças na *mecânica*, na qual a unidade de força é considerada como a força que fornece a unidade de aceleração sobre uma unidade de massa ponderável quando essa força atua sobre a massa. A força elétrica que é exercida sobre a partícula elétrica é então igual a 1 quando a unidade de massa ponderável contida na partícula elétrica recebe uma unidade de aceleração como resultado dessa força. Vemos disso que não é de forma alguma necessário estabelecer uma unidade especial para as forças *eletromotrizes*, mas que é suficiente a unidade que é estabelecida para todas as forças na mecânica.

Uma consideração semelhante se aplica à *intensidade* das correntes elétricas, se, na mecânica, a unidade de corrente é considerada aquela taxa ou intensidade de corrente na qual a unidade de massa de qualquer fluido atravessa a seção transversal do canal [condutor] durante uma unidade de tempo. Agora, como a unidade de massa dos fluidos elétricos na eletrostática já foi determinada, a saber, a massa[592] que vai exercer uma força sobre uma massa igual localizada à distância R que possui uma razão para a unidade de força de $1 : R^2$, isso vai explicar o fato de que não precisamos de uma unidade especial para a intensidade das correntes elétricas.

Agora, se é para evitar completamente o uso de todas unidades especiais para as forças eletromotrizes e intensidades de corrente, então tem de ser encontrada uma regra para reduzir as medições que foram citadas até agora em termos de unidades especiais para poder representá-las independentemente dessas unidades especiais.

Para encontrar essa regra, não é suficiente reverter às leis fundamentais da eletrostática, eletrodinâmica e indução, mas é necessário reverter à lei fundamental geral da teoria da eletricidade que relaciona e conecta ao mesmo tempo a eletrostática, eletrodinâmica e indução, e que foi apresentada no Tratado anterior sobre "Medições Eletrodinâmicas," Leipzig, 1846.[593,594] De acordo com essa última lei, a força que a massa elétrica e exerce sobre a massa elétrica e' localizada à distância r, com uma velocidade relativa dr/dt e uma aceleração relativa d^2r/dt^2 é representada por:[595]

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right) \ ,$$

na qual $1/c^2$ é o mesmo fator constante que foi denotado por $a^2/16$ naquele Tratado [de

591 Se um conjunto de partículas eletrizadas exerce uma força de atração sobre uma carga positiva, então esse mesmo conjunto de partículas vai exercer uma força de repulsão sobre uma carga negativa localizada no mesmo ponto que a primeira carga.

592 Em alemão: *Masse*. Weber está referindo-se aqui à massa elétrica, ou seja, o valor da carga elétrica da partícula.

593 [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 157.

594 [Web46, pág. 157 das *Obras* de Weber]. Weber está se referindo aqui à sua lei de força que aparece na equação na Nota de rodapé 272 na página 164.

595 A expressão dr^2/dt^2 deve ser entendida como $(dr/dt)^2$.

1846].[596]

Para um valor constante da velocidade relativa dr/dt, teremos $d^2r/dt^2 = 0$ e, consequentemente, a força será igual a:

$$\frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}\right) ,$$

de onde segue que c *denota o valor constante da velocidade relativa* dr/dt *na qual duas massas elétricas não exercem nenhuma ação uma sobre a outra.*

Agora, foi verificado além disso na Seção 21 do Tratado citado[597] que o número i, que está ligado à unidade J que foi definida na Seção anterior, vai determinar uma *intensidade de corrente* tal que:

$$i = aeu = \frac{4}{c} \cdot eu ,$$

na qual eu denota a quantidade de eletricidade que atravessa a seção reta do condutor durante uma unidade de tempo com essa intensidade de corrente. Agora, se essa intensidade de corrente fosse expressa na unidade comum de corrente K que é estabelecida na mecânica por:

$$kK = iJ ,$$

teríamos então:

$$k = eu = \frac{c}{4}i .$$

Isso implica a regra pela qual as medições que foram realizadas na Seção anterior e definidas em unidades especiais podem ser reduzidas para torná-las independentes dessas unidades especiais, a saber: multiplicamos os valores obtidos por $c/4$. Dessa forma, obteremos o valor da intensidade da corrente elétrica como expressa na unidade de corrente comum da mecânica.

Foi encontrado de forma semelhante na Seção 24 do Tratado citado[598] que uma *força eletromotriz*, que é determinada por um número e e uma unidade especial E que foi definida na Seção anterior, será determinada na unidade geral F para todas as forças na mecânica pelo número f tal que $fF = eE$ quando fazemos:

$$f = \frac{4}{c}e ,$$

já que a força eletromotriz que uma corrente constante exerce sobre um condutor móvel, na unidade geral de força na mecânica, foi dada na Seção 24 da obra citada pela seguinte expressão:

$$f = -\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) \cdot au'\cos\varphi .$$

Contudo, sob certas circunstâncias para as quais a força eletromotriz que é determinada dessa forma torna-se igual à unidade especial que foi definida na Seção anterior, teremos:

[596] Esse Tratado está traduzido no Capítulo 6.

[597] Ver a Seção 6.21.

[598] Ver a Seção 6.24.

$$\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i = 1, \qquad \varepsilon = 0, \qquad \vartheta = \frac{1}{2}\pi, \qquad \varphi = \pi, \qquad u' = 1 ,$$

e, consequentemente, para $e = 1$, teremos $f = a = 4/c$, ou, mais geralmente:

$$f = \frac{4}{c}e .$$

Segue-se disso a regra pela qual as medições das forças eletromotrizes que foram realizadas na Seção anterior em termos das unidades especiais são reduzidas para torná-las independentes dessas unidades especiais, a saber: multiplicamos o valor obtido por $4/c$. Dessa forma obteremos o valor da força eletromotriz como expressa em termos da unidade geral de força da mecânica.

Finalmente, se for deduzida uma *unidade absoluta de resistência* a partir das unidades gerais de força e corrente da mecânica quando as usamos para as forças eletromotrizes e corrente elétrica da mesma forma que na Seção anterior a partir das unidades especiais que foram definidas lá, a saber, tal que a resistência que foi considerada como uma unidade era a resistência que um circuito teria para que uma unidade de força eletromotriz produzisse uma unidade de corrente, então se w denotar essa resistência com a unidade que foi definida na Seção anterior, que é v na nova unidade, isso vai fornecer a seguinte equação:

$$v = \frac{16}{c^2}w .$$

A *velocidade* c com a qual duas massas elétricas precisam se deslocar uma em relação à outra, se é para elas não atuarem entre si, ainda não foi determinada até o momento,[599] e esse é o motivo pelo qual a unidade especial, como definida na Seção anterior, ainda é indispensável no momento para a utilização prática na eletrodinâmica, já que sem conhecer a velocidade c, ainda não pode ser realizada a redução das *intensidades de corrente*, *forças eletromotrizes* e *resistências* medidas para as unidades conhecidas da mecânica.

[599]Weber e Rudolf Kohlrausch (1809-1858) determinaram experimentalmente essa constante poucos anos mais tarde, em 1855-1857: [Web55] com tradução para o inglês em [Web21e]; [WK56] com tradução para o português em [WK08] e para o inglês em [WK03] e [WK21]; e [KW57] com tradução para o inglês em [KW21]. Ver ainda [Ass21c].

V - Conexão entre a Teoria dos Circuitos Galvânicos e as Leis Fundamentais da Eletricidade

15.28 Equalização das Forças Eletromotrizes no Circuito Através da Distribuição da Eletricidade Livre

A teoria dos circuitos galvânicos, por ela própria, define uma parte da eletrodinâmica e, portanto, precisa ser desenvolvida a conexão entre as leis dos circuitos galvânicos e as leis fundamentais da eletricidade.[600] Isso não ocorreu até o momento. Em vez disso, a teoria dos circuitos galvânicos tem sido considerada isoladamente, e as leis dos circuitos galvânicos foram em parte extraídas diretamente da experiência, em parte deduzidas de suposições feitas independentemente das leis elétricas fundamentais. Isso se aplica em particular às leis do circuito galvânica dadas por Ohm,[601] cuja correção e importância prática são geralmente reconhecidas. O motivo pelo qual um desenvolvimento da teoria dos circuitos galvânicos a partir das leis fundamentais da eletricidade ainda não foi fornecido pode estar ligado principalmente à complexidade matemática que encontramos se esse desenvolvimento é para ser completo e rigoroso. Contudo, pode ser apropriada aqui uma discussão especial relacionada à conexão entre a teoria dos circuitos galvânicos e as leis fundamentais da eletricidade que está mais fortemente conectada com os tópicos que são tratados nesse trabalho.

Ao longo desse Tratado, frequentemente tivemos a necessidade de nos referir à lei de Ohm dos circuitos galvânicos, já que todas as medições de resistência são essencialmente baseadas nessa lei, e até mesmo a definição da unidade de resistência precisa ser baseada nela. Isso ocorre já que a resistência é basicamente definida apenas pela constante que é dada pela lei de Ohm para qualquer condutor fechado como sendo a razão da força eletromotriz para a intensidade de corrente.

A lei de Ohm assume que a intensidade da corrente elétrica é a mesma em todas as partes do circuito fechado já que isso tem de ocorrer de fato quando a corrente é constante. Por essa suposição, o domínio no qual a lei de Ohm é válida fica restrito e não contém todos os movimentos da eletricidade no circuito. Essa suposição exclui, por exemplo, todos os movimentos que a eletricidade precisa fazer no circuito antes que ele alcance um estado estacionário. Isso também explica por qual motivo essa lei é baseada empiricamente apenas até o ponto em que ela lida com a dependência das intensidades de corrente em todas as partes do circuito onde as correntes ficaram iguais com a soma de todas as forças eletromotrizes no circuito e com a soma de todas as resistências em todas as partes do circuito, enquanto uma lei fundamental real pode fazer com que a intensidade da corrente em qualquer ponto do circuito dependa apenas da força eletromotriz que atua nesse ponto e da resistência presente nesse ponto. Agora, Ohm de fato direcionou sua atenção para a diferença entre as cargas elétricas nas várias partes do circuito para chegar a uma lei fundamental real e tentou basear a lei na suposição de que para intensidades de corrente iguais, a diferença entre as cargas nos dois locais entre os quais não há força eletromotriz (por exemplo, quando não existe ponto

[600] As Seções 15.28 até 15.36 foram detalhadamente discutidas no Apêndice A do livro *A Força Elétrica de uma Corrente: Weber e as Cargas Superficiais de Condutores Resistivos com Correntes Constantes*. Ele está disponível em inglês, [AH07], português, [AH09], e alemão, [AH13].

[601] Ver a Nota de rodapé 116 na página 61.

de contato entre metais diferentes) será proporcional à resistência da parte do circuito que está entre esses locais e que, ao contrário, em qualquer local onde há uma força eletromotriz (por exemplo, onde há o contato entre dois metais diferentes), a carga fará um salto abrupto de um lado para outro e que a diferença de carga entre os dois lados será proporcional à força eletromotriz que existe nesse local; finalmente, [supôs] que para diferentes intensidades de corrente, a diferença entre as cargas eletromotrizes[602] em dois locais bem definidos do mesmo condutor vai ser proporcional à intensidade de corrente. Guiado por isso, Ohm apresentou então uma lei fundamental para a dependência da corrente elétrica em cada parte do circuito na distribuição da carga elétrica que era análoga àquela [lei] que Fourier[603] apresentou para a dependência do fluxo de calor em qualquer parte de um condutor térmico em relação à distribuição de temperatura e provou que as consequências que podiam ser inferidas dessa analogia concordavam com as experiências até onde esses resultados podiam ser garantidos.

Ohm realmente encontrou na distribuição da carga elétrica a verdadeira chave para abrir a passagem da lei de base empírica, que abrange todo circuito fechado, para a verdadeira lei fundamental que deve ser estabelecida universalmente para cada parte do circuito; mas no que diz respeito à ação dessa distribuição elétrica no movimento da eletricidade, que ele considerou apenas por analogia com a ação da distribuição de temperatura no movimento do calor, existem suposições subjacentes que não parecem nem necessárias nem admissíveis. Afinal de contas, a ação da eletricidade livre já é dada pela lei fundamental geral da teoria da eletricidade ou, se abstrairmos dos movimentos relativos, pela lei fundamental da eletrostática e pode ser calculada a partir dela para toda distribuição no condutor, a partir da qual a inadmissibilidade de suposições arbitrárias pode ser facilmente deduzida por analogia com a ação da distribuição de temperatura no movimento do calor. No que diz respeito à própria distribuição, parece portanto inadmissível supor uma distribuição da eletricidade livre que não seja sobre a *superfície* do condutor. Além do mais, isso também vai explicar uma diferença essencial, a saber, que precisa necessariamente existir uma relação entre a propagação de calor e a diminuição de temperatura que existe em sua direção, de tal forma que a propagação não é possível sem que haja essa diminuição. Não existe uma tal dependência da corrente elétrica em relação à distribuição da eletricidade livre nos circuitos galvânicos, já que as forças que produzem a corrente elétrica não atuam apenas na proximidade imediata, mas também agem a grandes distâncias e, portanto, podem existir completamente fora do condutor, o que não é possível para um condutor térmico.

Considere, por exemplo, que o condutor é um anel de cobre cuja seção reta é a mesma em toda parte e desloque um ímã ao longo da linha traçada pelo centro do anel perpendicularmente ao seu plano. Sabe-se que o ímã exerce a mesma força eletromotriz em todos os elementos do anel como resultado desse movimento, e como todos os elementos também possuem a mesma resistência, será gerada simultaneamente por esse movimento uma mesma corrente elétrica em todos os elementos, de onde segue que não pode surgir uma acumulação maior ou menor de eletricidade positiva ou negativa em qualquer ponto do anel. Teremos aqui então o caso de uma corrente em um circuito fechado sem distribuição de carga livre no circuito. Logo a lei da dependência da intensidade de corrente em relação à distribuição de eletricidade livre no condutor não será aplicável a todos os casos para os quais as forças

[602] Em alemão: *der Unterschied der elektromotorischen Ladung*, ou seja, a diferença entre a carga eletromotriz. Provavelmente isso é um erro de impressão. O correto deveria ser *der Unterschied der elektromotorischen Kräfte*, isto é, a diferença entre as forças eletromotrizes, ou *der Unterschied der elektrischen Ladungen*, isto é, a diferença entre as cargas elétricas.

[603] J.-B. J. Fourier (1768-1830). Ver [Fou22] com tradução para o inglês em [Fou52].

eletromotrizes dadas se estendem a todo o circuito fechado e atuam proporcionalmente às resistências em todas as partes. Só vai ocorrer uma distribuição da eletricidade livre para uma ação não uniforme das forças eletromotrizes dadas nas várias partes do circuito, e o fato de que uma corrente uniforme e constante existe em todas as partes do circuito vai então provar que essa distribuição de eletricidade livre no condutor tem a ação de equalizar todas as desigualdades na maneira pela qual atuavam originalmente as forças eletromotrizes. Contudo, se esse balanceamento fosse considerado uma prova do fato de que existe uma corrente constante, então ainda faltaria, *em primeiro lugar*, provar que é possível uma tal distribuição a partir da lei fundamental da eletricidade e como ela pode ocorrer e, *em segundo lugar*, mostrar como ela pode ser criada e mantida.

15.29 Demonstração da Possibilidade de Distribuição da Eletricidade Livre no Condutor, Através da Qual as Desigualdades na Ação de Dadas Forças Eletromotrizes nas Diferentes Partes do Circuito São Compensadas Proporcionalmente às Suas Resistências

Qualquer partícula de eletricidade livre, positiva ou negativa, que é encontrada sobre a superfície de um condutor exerce forças eletromotrizes sobre todas as partes do condutor que enfraquecem as forças eletromotrizes dadas no circuito em alguns pontos e as fortalecem em outros pontos, e então perguntamos se uma tal distribuição de eletricidade livre sobre toda a superfície do condutor é possível tal que ela tornaria a força eletromotriz mais intensa sempre que ela for fraca, e mais fraca sempre que ela for intensa, criando dessa forma um equilíbrio das forças eletromotrizes em todas as partes do circuito proporcionalmente às suas resistências, sendo que essa é a condição para que haja uma corrente uniforme e constante. Essa questão, se a influência dos movimentos relativos das partículas elétricas umas contra as outras for abstraída de antemão, deve ser decidida a partir da lei fundamental da eletrostática, pela qual são determinadas as forças exercidas pela eletricidade em qualquer distribuição na superfície [ao atuarem] em todos os pontos dentro do condutor.

É sabido que Poisson[604] provou o seguinte teorema a partir da lei fundamental da eletrostática:

> Se quaisquer forças elétricas atuam sobre um condutor de qualquer formato a partir do exterior, então tal distribuição de eletricidade livre é sempre possível na superfície do condutor — mas apenas uma única distribuição — na qual as forças elétricas resultantes dessa eletricidade livre distribuída [sobre a superfície] equilibram simultaneamente as forças elétricas que atuam do exterior em todos os pontos dentro do condutor.

Imaginamos inicialmente um condutor de forma cilíndrica e uma massa concentrada de fluido elétrico livre (positivo ou negativo) na direção de seu eixo a uma grande distância que exerce forças em todas as partes do cilindro que são iguais e paralelas ao seu eixo. Segue-se

[604]Ver a Nota de rodapé 273 na página 165.

então dessa proposição que é possível haver uma distribuição de eletricidade livre sobre a superfície do cilindro para a qual, na ausência daquela massa distante, resultariam forças eletromotrizes [atuando] em todas as partes do cilindro que são iguais e paralelas ao seu eixo, a saber, as forças que tinham mantido o equilíbrio das forças que foram exercidas pela massa distante antes que ela fosse removida.

Em contraste, se imaginarmos uma haste curva e uma massa concentrada de fluido livre (positivo ou negativo) na direção da tangente a um dos elementos da haste e a uma grande distância, então segue-se da mesma maneira que é possível haver uma distribuição de eletricidade livre sobre a superfície desse elemento tal que, na ausência dessa massa distante, resultarão forças eletromotrizes em todas as partes do elemento que são iguais e paralelas à sua tangente, e essa possibilidade também vai existir quando as cargas elétricas em todos os outros elementos da haste curva atuam sobre o elemento em questão, não importando como essas cargas possam ser obtidas, exceto que a maneira com que a eletricidade livre é distribuída sobre a superfície do elemento considerado dependerá então da carga no restante da haste.

Esse argumento pode ser aplicado agora a todos os elementos da haste curva tal que vão resultar forças eletromotrizes em todos os elementos que são iguais e paralelas às suas tangentes. As cargas em todos os elementos individuais serão dessa maneira dependentes da carga em toda a haste, e a carga em toda a haste, por sua vez, deve, em última análise, ser igualada à soma das cargas de todos os elementos.

Agora que a carga em toda a haste curva foi determinada dessa forma, a haste pode definir apenas uma parte menor ou maior de um círculo. As cargas nas superfícies de contato de dois elementos adjacentes devem ser neutralizadas para que a distribuição da eletricidade livre permaneça limitada à *superfície da haste* que, no entanto, deve incluir essencialmente as *superfícies inicial* e *final* da haste, as quais, portanto, não devem coincidir.

A necessidade de manter o início e a extremidade da haste separados, se a eletricidade livre distribuída na superfície tiver que exercer as mesmas forças eletromotrizes em uma direção tangencial em todos os elementos da haste, decorre do fato de que as cargas no início e na extremidade da haste, ao se aproximarem uma da outra, não se aproximariam de nenhum valor limite definido, mas teriam que crescer até o infinito, como pode ser visto na observação a seguir.

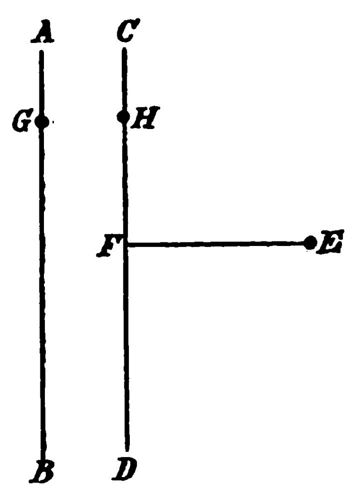


Fig. 2.

Seja AB [na Figura 2] a superfície inicial da haste e CD sua superfície final; denomine por δ à distância muito pequena entre essas duas superfícies. Pode ser assumido que a distribuição de eletricidade livre sobre toda a superfície da haste, com exceção de AB e CB, permanece quase inalterada quando δ fica menor, de onde segue que a força eletromotriz resultante em um ponto E da haste pode ser considerada como inalterada desde que a força eletromotriz resultante em E devida às cargas sobre as duas superfícies AB e CD permaneça a mesma. Sejam G e H dois elementos iguais e opostos das superfícies AB e CD. A carga sobre o elemento G é denominada $-e$, enquanto que a carga no elemento H é denominada $+e$. A distância FH, que é perpendicular à direção da força eletromotriz resultante em E, é chamada de β; a distância FE é chamada de α. A partir da lei fundamental da eletrostática, a força que atua de H para E na direção tangencial EF é então igual a:

$$\frac{+\alpha e}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}} ,$$

enquanto que a força que atua de G para E na mesma direção é igual a:

$$\frac{-(\alpha + \delta)e}{[(\alpha + \delta)^2 + \beta^2]^{3/2}} ,$$

consequentemente, a soma das duas forças será:

$$= \frac{2\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^{5/2}} \cdot \delta e ,$$

quando δ é muito pequena comparada com α. Segue-se então disso que a força eletromotriz resultante em E permanecerá inalterada na medida em que δ fica menor, quando o produto δe mantiver o mesmo valor. Para valores decrescentes de δ, a carga e deve então crescer até o infinito, o que era para ser provado.

Isso explica da mesma maneira o fato de que quando supõe-se que a força eletromotriz, que é a mesma em toda a haste, aumenta ou diminui, o valor do produto δe tem de mudar proporcionalmente.

Finalmente, se K denotar um ponto localizado entre as superfícies AB e CD, então isso vai explicar o fato que as cargas sobre as superfícies AB e CD exercem uma força eletromotriz sobre K que tem a direção oposta à força eletromotriz sobre E. Portanto, se um circuito fechado for definido no qual forças eletromotrizes iguais atuam em toda parte no mesmo sentido (o que seria necessário para a existência de uma corrente uniforme e constante), então K teria de ser o local de uma força eletromotriz que é independente da distribuição de eletricidade livre sobre a superfície da haste, o que seria o caso, por exemplo, quando cobre e zinco se tocam no ponto K. Também pode ser provado que, sob condições de outra forma iguais, a força eletromotriz dada em todos os pontos K da linha δ que conecta as duas superfícies opostamente eletrizadas, precisa ser proporcional ao produto δe, e que esse produto pode ser considerado como sendo uma unidade da força eletromotriz dada.[605]

Os seguintes resultados podem ser inferidos a partir dessas considerações gerais, os quais podem ser comparados com as leis conhecidas dos circuitos galvânicos:

1. Segue do argumento anterior que não é possível produzir corrente em um anel fechado ao simplesmente distribuir eletricidade livre sobre sua superfície, mas forças eletromotrizes precisam ser fornecidas, ao menos em *uma seção reta* desse anel, por exemplo, através do

[605] [Nota de Wilhelm Weber:] AB e CD [na figura 3] representam duas superfícies opostamente eletrizadas cuja distância de separação é igual a δ.

contato entre cobre e zinco, se é para ser suposto que uma corrente uniforme e constante é para surgir em todo o anel por meio de uma certa distribuição de eletricidade livre sobre a superfície do anel.

2. Se a corrente é para ser duplicada em um certo circuito, então a quantidade de eletricidade livre sobre toda a superfície precisa ser dobrada. Consequentemente, também precisa acontecer a duplicação do fator e no produto δe, isto é, uma duplicação da força eletromotriz que é proporcional a esse fator. Uma duplicação da força eletromotriz corresponde então a uma duplicação da intensidade da corrente nesse circuito.

3. Se *todas* as dimensões de um circuito forem dobradas e a força eletromotriz permanecer a mesma em todos os pontos como antes, então a espessura da camada elétrica deve ter permanecido inalterada nos pontos correspondentes da superfície, enquanto a área da superfície coberta por ela deve aumentar quatro vezes. Ao mesmo tempo, a expansão proporcional de todas as dimensões implica que a distância δ no produto δe precisa ser considerada como tendo sido dobrada, de tal forma que como e deve permanecer inalterado, o produto δe e a força eletromotriz que é proporcional a esse fator precisam ter seus valores dobrados. Segue-se disso que vai ser necessária uma força eletromotriz duplicada, para produzir um

---

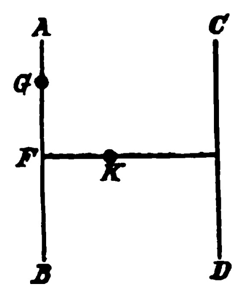


Fig. 3.

Seja G o elemento da superfície AB cuja carga será denominada por e. A distância FG, que é perpendicular à direção da força eletromotriz resultante em K, será denominada por β, e a distância FK será denominada por α. A força que atua de G para F na direção FK é obtida então da lei fundamental da eletrostática, e é igual a:

$$\frac{e\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}} ,$$

consequentemente, para todos os pontos K de $\alpha = 0$ até $\alpha = \delta$, ela vai ser igual a:

$$e\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2+\delta^2}}\right) .$$

Para todos os elementos que estão a uma distância igual β de F, teremos então, ao multiplicar por $2\pi\beta$:

$$2\pi e\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\delta^2}}\right) .$$

Finalmente, para todos os elementos superficiais de $\beta = 0$ até $\beta = b$, teremos:

$$2\pi e\left(\delta + b - \sqrt{b^2+\delta^2}\right) ,$$

ou, como δ é muito pequena comparada com b:

$$2\pi e\delta .$$

O mesmo resultado vai ser obtido para a força que é exercida sobre a superfície CD e, consequentemente, a soma das duas forças será igual a $4\pi e\delta$, isto é, proporcional ao produto δe.

movimento elétrico em um circuito com o dobro do comprimento e quatro vezes a seção reta, que seja tão intenso quanto é [esse movimento elétrico] em um circuito de comprimento simples e seção reta simples. Contudo, um movimento elétrico desse tipo que é igualmente intenso em todos os pontos forneceria quatro vezes a intensidade da corrente para uma seção reta quadruplicada. Logo a força eletromotriz duplicada produziria quatro vezes a intensidade da corrente em um circuito com o comprimento dobrado e a seção reta quadruplicada, o que ocorre de fato a partir das leis conhecidas dos circuitos galvânicos.

Um desenvolvimento completo das leis dos circuitos galvânicos necessita de uma determinação mais precisa da distribuição de eletricidade livre sobre a superfície do circuito.

15.30 Sobre a Lei da Distribuição da Eletricidade Livre sobre a Superfície de um Condutor com Corrente Uniforme e Constante

Para um condutor *linear*, é possível substituir a distribuição de eletricidade livre sobre a superfície por uma distribuição dela ao longo da linha que define o eixo do condutor. Isso é evidente em relação a todas as partes do condutor que estão a uma grande distância daquele ponto para o qual é para ser determinada a força eletromotriz que é exercida por essa eletricidade livre e, portanto, resta apenas prová-lo para a parte do condutor que fica mais próxima a esse ponto.

Seja A [na Figura 4] o ponto para o qual é para ser determinada a força eletromotriz que é exercida pela eletricidade livre no elemento $BCDE$ do condutor.

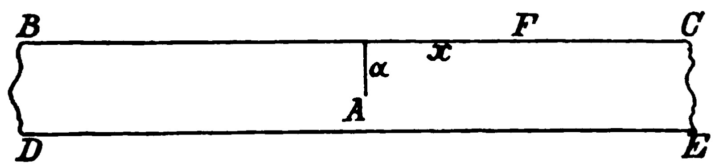


Fig. 4.

Seja α o raio infinitamente pequeno do fio condutor. A espessura da camada de eletricidade livre no ponto F, cuja pequena distância até a seção reta do condutor que passa por A é denotada por x, pode ser representada por:

$$a + bx \ ,$$

e a força eletromotriz que a eletricidade livre do elemento de superfície $2\pi\alpha dx$ em F exerce sobre o ponto A pode ser representada por:

$$\frac{2\pi\alpha(a + bx)dx}{\alpha^2 + x^2} \ ,$$

de onde segue que a componente dessa força na direção do eixo é dada por:

$$\frac{2\pi\alpha(a + bx)xdx}{(\alpha^2 + x^2)^{3/2}} \ .$$

O valor da integral dessa grandeza entre os limites $x = -\lambda$ e $x = +\lambda$ é então:[606]

$$2\pi\alpha b \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{x^2 dx}{(\alpha^2 + x^2)^{3/2}} = 2\pi\alpha b \left(\log \frac{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}+\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}-\lambda} - \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}} \right) \ ,$$

ou, como α é muito pequeno comparado com λ:

$$= 4\pi\alpha b \cdot \log \frac{2\lambda}{e\alpha} = 4\pi\alpha b \left(\log \lambda - \log \frac{e}{2}\alpha \right) \ ,$$

na qual e denota a base do sistema de logaritmos naturais.

Se a mesma eletricidade livre, em vez de estar distribuída na superfície do condutor, estivesse concentrada em seu eixo, então, a partir do elemento axial no qual a eletricidade livre $2\pi\alpha(a+bx)dx$[607] estivesse concentrada, uma força eletromotriz agiria sobre A na direção do eixo, que é representada por

$$\pm \frac{2\pi\alpha(a+bx)dx}{x^2} \ ,$$

dependendo se x tem um valor positivo ou negativo. O valor da integral dessa expressão entre os limites $x = -\lambda$ e $x = -e\alpha/2$ seria então igual a:

$$2\pi\alpha b \left(\log \lambda - \log \frac{e}{2}\alpha \right) + 2\pi\alpha a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{e\alpha} \right) \ ,$$

já entre os limites $x = +e\alpha/2$ e $x = +\lambda$, ela seria igual a:

$$2\pi\alpha b \left(\log \lambda - \log \frac{e}{2}\alpha \right) - 2\pi\alpha a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{e\alpha} \right) \ ;$$

consequentemente, o valor da integral entre os limites $x = -\lambda$ e $x = +\lambda$, excluindo a parte que está entre os limites $x = -e\alpha/2$ e $x = +e\alpha/2$, seria igual a:

$$4\pi\alpha b \left(\log \lambda - \log \frac{e}{2}\alpha \right) \ ,$$

de onde viria que seria possível substituir uma distribuição de eletricidade livre sobre o eixo do condutor no lugar de sua distribuição sobre a superfície quando excluímos a parte da integral da força eletromotriz que está entre os limites $x = -e\alpha/2$ e $x = +e\alpha/2$.

Se o condutor tiver, por exemplo, a forma de um círculo cujo raio é igual a r, e se A denotar o ponto inicial de um arco $AB = r\varphi$ que é o local da força eletromotriz dada no circuito, seja então

$$f\varphi \cdot d\varphi$$

a eletricidade livre no elemento com comprimento de arco $rd\varphi$ no final do arco $r\varphi$.[608] O valor do *potencial* dessa massa elétrica no ponto C ao final do arco $AC = r\psi$ é então igual a:

[606] Na próxima equação a expressão "log" deve ser entendida como o logaritmo natural de base $e = 2,718$, isto é, ln.

[607] Devido a um erro de impressão, no texto original essa expressão apareceu como $2\pi\alpha(a + x)dx$.

[608] A grandeza $f\varphi$ deve ser entendida como uma densidade angular de carga, isto é, a quantidade de carga por unidade de ângulo. Ela é uma função do ângulo φ ao longo do anel, ou seja, $f(\varphi)$. Weber vai tentar determinar aproximadamente a função $f(\varphi)$ que vai produzir uma força eletromotriz que tenha o mesmo valor para todos os ângulos φ.

$$\frac{f\varphi \cdot d\varphi}{2r \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} \ ,$$

e, consequentemente, o valor do *potencial* da massa elétrica de todo o condutor no ponto C será:[609]

$$\frac{1}{2r} \int \frac{f\varphi \cdot d\varphi}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(\varphi - \psi)} = F\psi \ ,$$

na qual a integração vai de $\varphi = \psi + e\alpha/2r$ até $\varphi = 2\pi + \psi - e\alpha/2r$. Isso vai implicar que a força eletromotriz que é exercida sobre o ponto C, como expressa em termos da derivada[610] do potencial com relação ao comprimento de arco $r\psi$, é igual a:

$$\frac{d \cdot F\psi}{rd\psi} \ .$$

Agora, se essa força eletromotriz for igual em todas as partes do condutor, isto é, se $d \cdot (F\psi)/rd\psi$[611] tiver um valor constante c, então teríamos:

$$F\psi = c\psi + \text{constante},$$

ou, para uma distribuição simétrica da eletricidade livre positiva e negativa no condutor, na qual $F\pi = c\pi + \text{constante} = 0$, [então, nesse caso:]

$$F\psi = c(\psi - \pi) \ .$$

Agora, se encontrarmos dificuldades em descobrir a forma geral da função $f\varphi$, então apesar disso não seria difícil submeter a hipótese de Ohm a um teste e decidir até que ponto ela é permissível.

A hipótese de Ohm consiste essencialmente em afirmar que o valor [da função] $f\varphi$ cresce proporcionalmente a φ desde $\varphi = 0$ até $\varphi = 2\pi$, de tal forma que para o caso da distribuição simétrica de eletricidade positiva e negativa no condutor, para a qual $f(0) = -f(2\pi)$, [teríamos]:

$$f\varphi = a(\varphi - \pi) \ .$$

Supondo isso, podemos determinar o valor do *potencial* da eletricidade livre em todo o condutor nos pontos para os quais $\varphi = \psi$ da seguinte maneira:

Seja A o ponto inicial do arco $r\varphi$, de tal forma que $AB = BD = r\psi$. Todos os elementos do arco $r\varphi$ desde A até D podem ser arranjados aos pares por meio de suas distâncias até B. A saber, se um elemento pertence a $\varphi = \psi - \chi$, e sua distância até B é igual a $2r \operatorname{sen} \frac{1}{2}\chi$, então o elemento que pertence a $\varphi = \psi + \chi$ terá a mesma distância até B. As massas elétricas que pertencem a esses dois elementos são:

$$a(\psi - \chi - \pi)d\chi \qquad \text{e} \qquad a(\psi + \chi - \pi)d\chi \ ,$$

e os valores dos *potenciais* dessas massas no ponto B serão:

$$\frac{a(\psi - \chi - \pi)d\chi}{2r \operatorname{sen} \frac{1}{2}\chi} \qquad \text{e} \qquad \frac{a(\psi + \chi - \pi)d\chi}{2r \operatorname{sen} \frac{1}{2}\chi} \ ,$$

[609]Na próxima equação a grandeza $F\psi$ deve ser entendida como uma função do ângulo ψ, isto é, $F(\psi)$.

[610]Em alemão: *Differentialquotienten*. Ver a Nota de rodapé 392 na página 251.

[611]Por um erro de impressão, no original essa expressão apareceu como: $d \cdot d(F\psi)/rd\psi$.

e, consequentemente, sua soma será igual a:

$$\frac{a(\psi-\pi)d\chi}{r \operatorname{sen} \frac{1}{2}\chi} \ .$$

Decorre disso o valor do potencial da eletricidade livre de todo o arco AD no ponto B:[612]

$$\frac{a(\psi-\pi)}{r}\int_{e\alpha/(2r)}^{\psi}\frac{d\chi}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\chi} = \frac{2a(\psi-\pi)}{r}\cdot\left(\log\tan\frac{1}{4}\psi - \log\tan\frac{e\alpha}{8r}\right) \ .$$

O ponto C sobre o círculo está diametralmente oposto ao ponto B e, consequentemente, o comprimento de arco $ABC = r(\psi+\pi)$. Todos os elementos do arco $r\varphi$ desde D passando por C até A podem ser arranjados da mesma forma aos pares de acordo com suas distâncias até C. A saber, se um dos elementos pertence a $\varphi = \psi+\pi-\chi$, e sua distância até C é igual a $2r\operatorname{sen}\frac{1}{2}\chi$, então o elemento que pertence a $\varphi = \psi+\pi+\chi$ terá a mesma distância até C. As massas elétricas que pertencem a esses dois elementos são:

$$a(\psi-\chi)d\chi \qquad \text{e} \qquad a(\psi+\chi)d\chi \ ,$$

e os valores dos *potenciais* dessas massas no ponto B serão:

$$\frac{a(\psi-\chi)d\chi}{2r\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\pi-\chi)} \qquad \text{e} \qquad \frac{a(\psi+\chi)d\chi}{2r\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\pi-\chi)} \ ,$$

e, consequentemente, sua soma será igual a:

$$\frac{a\psi}{r}\cdot\frac{d\chi}{\cos\frac{1}{2}\chi} \ .$$

Resulta disso o valor do potencial da eletricidade livre de todo o arco DCA no ponto B:

$$\frac{a\psi}{r}\int_0^{\pi-\psi}\frac{d\chi}{\cos\frac{1}{2}\chi} = -\frac{2a\psi}{r}\log\tan\frac{1}{4}\psi \ ,$$

assim o valor do potencial da eletricidade livre de todo o circuito será então igual a:

$$-\frac{2a\psi}{r}\log\tan\frac{e\alpha}{8r} - \frac{2a\pi}{r}\left(\log\tan\frac{1}{4}\psi - \log\tan\frac{e\alpha}{8r}\right) \ .$$

Isso fornece a força eletromotriz que é exercida sobre o ponto B, como expressa em termos da diferencial do potencial com relação ao comprimento de arco $r\psi$, que é igual a:

$$-\frac{2a}{r^2}\log\tan\frac{e\alpha}{8r} - \frac{a\pi}{r^2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi} \ ,$$

ou

$$= \frac{2a}{r^2}\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \frac{a\pi}{r^2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi} \ .$$

Para valores de ψ que diferem pouco de π, a força eletromotriz é quase a mesma; porém, quanto mais o valor de ψ se aproximar dos valores 0 ou 2π, mais a força eletromotriz vai

[612] A expressão $\log\tan\frac{1}{4}\psi - \log\tan\frac{e\alpha}{8r}$ deve ser entendida como $\ln\left(\tan\frac{\psi}{4}\right) - \ln\left(\tan\frac{e\alpha}{8r}\right)$.

cair abaixo desse valor limite, de onde segue que a hipótese de Ohm sobre a distribuição da eletricidade livre é apenas aproximadamente permissível para a parte central do circuito.

Agora, assim como, de acordo com essa hipótese, o valor da força eletromotriz em todas as partes do circuito é menor do que o valor limite que é válido para a parte central do circuito, também podemos facilmente propor uma hipótese para a qual esse valor será maior. A hipótese de Ohm precisa ser complementada para não contradizer a proposição de que a distribuição de eletricidade livre na superfície de um condutor só pode resultar em uma força eletromotriz que é a mesma em todo o interior do condutor, quando duas áreas da seção transversal do condutor pertencerem a essa superfície (ver a página 388).[613] O motivo é que isso implicaria em nossa representação linear, que toda a eletricidade livre que é encontrada nessas duas superfícies de seção reta teriam de ser consideradas como concentradas em dois pontos, enquanto que apenas a eletricidade que é encontrada na linha de fronteira de uma seção reta seria considerada como concentrada em um ponto no restante do circuito. Isso implicaria que uma concentração de eletricidade livre que Ohm não considerou teria de existir, ao menos naqueles dois pontos finais que representam as duas seções retas. Se as denotarmos por $\pm\varepsilon$, onde o sinal superior vale para um ponto e o sinal inferior para o outro ponto, e se δ denotar a pequena distância entre os dois pontos, então a força eletromotriz que precisa ser adicionada para cada ponto do circuito dessa forma pode ser determinada pelas mesmas leis fornecidas por Gauss para a ação de um ímã à distância. Ver o trabalho "*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*," páginas 33 e 34.[614,615] A saber, se ACA' é um condutor circular e o ponto de contato está em A, e se temos de determinar a força eletromotriz que é adicionada pela eletricidade livre $\pm\varepsilon$ dos dois lados de A no ponto C do condutor, precisamos então traçar a tangente em A e estendê-la até cruzar a linha estendida $A'C$ em B, onde A' denota o ponto do círculo que está diametralmente oposto ao ponto A. Se fizermos além disso $AD = \frac{1}{3}AB$ e traçarmos CD, então CD será a direção da força eletromotriz que $\pm\varepsilon$ exerce sobre C, e o valor dessa força será representado por:

$$\frac{CD}{AD} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{AC^3} \, .$$

Finalmente, se traçarmos a tangente ao círculo em C e baixarmos a perpendicular DE a partir desse ponto, isso vai fornecer então a componente na direção da tangente ao círculo em C, isto é, a força eletromotriz desejada, que é igual a:

$$\frac{CE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{AC^3} = \frac{CE}{AD} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{AC^3} \, .$$

Se denotarmos o raio do círculo por r e o arco circular AC por ψ, encontraremos então a seguinte expressão para ela:[616]

$$\frac{1 + \cos\frac{1}{2}\psi^2}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi^3} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{8r^3} \, .$$

[613] Pág. 275 do artigo original de Weber de 1852. Quando esse artigo foi reimpresso no Vol. III das *Obras* de Weber, apareceu aqui pág. 273, ver [Web52a, pág. 380]. Certamente isso foi um erro de impressão, o correto deveria ser a pág. 373 do Vol. III das *Obras* de Weber, que corresponde à página 388 dessa tradução em português.

[614] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, págs. 434 e 435.

[615] [Gau41d, págs. 434-435 das *Obras* de Gauss].

[616] As expressões $\cos\frac{1}{2}\psi^2$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi^3$ devem ser entendidas como $\cos^2(\psi/2)$ e $\operatorname{sen}^3(\psi/2)$, respectivamente.

Se adicionarmos agora essa força eletromotriz àquela que foi obtida com a hipótese de Ohm, encontraremos então:

$$\frac{2a}{r^2}\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\frac{a\pi}{r^2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi}+\frac{1+\cos\frac{1}{2}\psi^2}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi^3}\cdot\frac{\delta\varepsilon}{8r^3}\ .$$

Esse valor também é quase constante para valores de ψ que diferem apenas ligeiramente de π, como vemos ao obter a derivada, a saber:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{2r^2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi^2}\left(a\pi-\frac{\delta\varepsilon}{4r}\left(1+\frac{3}{2}\frac{1+\cos\frac{1}{2}\psi^2}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi^2}\right)\right)\ ,$$

que é igual a zero quando $\psi=\pi$. Contudo, além disso, o valor de $\delta\varepsilon$ pode ser determinado de tal forma que as derivadas de segunda e terceira ordem[617] também sejam nulas para $\psi=\pi$, o que ocorrerá quando:

$$\delta\varepsilon=\frac{8}{5}a\pi r\ .$$

Se substituirmos esse valor de $\delta\varepsilon$ na expressão da força eletromotriz, obteremos então:

$$\frac{2a}{r^2}\log\cot\frac{e\alpha}{8r}+\frac{2a\pi}{5r^2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi^3}\left(3\cos\frac{1}{2}\psi^2-2\right)\ ,$$

cuja derivada é igual a:[618]

$$-\frac{3}{5}\frac{a\pi\cos\frac{1}{2}\psi^3}{r^2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi^4}\ ,$$

e ela será igual a zero para $\psi=\pi$, pois ela tem $\cos\frac{1}{2}\pi=0$ como um fator. Vemos também que as duas próximas derivadas serão nulas para $\psi=\pi$, já que elas também possuem o fator $\cos\frac{1}{2}\pi=0$.

Vemos disso que de acordo com essa hipótese, o valor da força eletromotriz em todas as partes do circuito é maior do que o valor limite que vale para o centro do circuito, enquanto que de acordo com a hipótese de Ohm, esse valor seria menor. A hipótese correta sobre a distribuição da eletricidade livre que deve fornecer em todo lugar uma força eletromotriz igual está então incluída entre os limites que são fornecidos pelas duas hipóteses anteriores, o que significa o mesmo que: a carga elétrica no circuito não cresce uniformemente a partir do ponto de indiferença até o ponto de contato, mas acelera gradualmente.[619] Disso emerge que a força eletromotriz que é igual em toda parte deve estar presumivelmente entre os valores limite que são dados pelas duas hipóteses anteriores, a saber:

$$\frac{2a}{r^2}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\frac{1}{2}\pi\right)$$

e

[617]Em alemão: *der zweite und dritte Differentialquotient*.

[618]As expressões $\cos\frac{1}{2}\psi^3$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\psi^4$ devem ser entendidas como $\cos^3(\psi/2)$ e $\operatorname{sen}^4(\psi/2)$, respectivamente.

[619]Isto é, a densidade superficial de carga elétrica não cresce linearmente como função do ângulo azimutal do anel. Ela só é linear em função desse ângulo longe do ponto de contato entre dois metais diferentes, aumentando a inclinação gradualmente na medida em que o ângulo azimutal se aproxima do ponto de contato entre os dois metais diferentes, ou na medida em que o ângulo azimutal se aproxima dos terminais da bateria voltaica ligada ao anel.

$$\frac{2a}{r^2}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r}-\frac{2}{5}\pi\right) .$$

O fator a refere-se então ao *gradiente* da carga elétrica no meio do circuito quando o gradiente significa, de acordo com Ohm, a derivada da carga $f\varphi$ com relação ao comprimento de arco φ.

15.31 [Continuação]

A distribuição da eletricidade livre em um condutor *linear* por meio da qual flui uma corrente constante e a força eletromotriz que depende do valor dessa distribuição podem ser determinados aproximadamente em cada caso individual da seguinte maneira. Para simplificar, assumiremos que o condutor possui o formato de um círculo e uma força eletromotriz igual de valor a será dada para um único ponto dele.

Se dividirmos o círculo em quatro partes iguais por meio dos pontos A, (A^1), B, (A_1), e se B for o ponto no qual é dada a força eletromotriz a, então pode ser facilmente dada uma distribuição de eletricidade livre nos dois pontos (A^1) e (A_1), por meio das quais são equilibradas as forças eletromotrizes nos dois pontos A e B. Se $+e$ denotar então a eletricidade livre em (A^1) e $-e$ a eletricidade livre em (A_1), e se r for o raio do círculo, então as distâncias entre os pontos A e B até (A^1) ou (A_1) será $2r\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi = r\sqrt{2}$. A partir da lei fundamental da eletrostática, isso vai fornecer então a força eletromotriz na direção da tangente ao círculo:

Em B:[620]

$$= a-\frac{2e}{4r^2\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi^2}\cdot\cos\frac{1}{4}\pi = a-\frac{e}{r^2}\sqrt{\frac{1}{2}} ,$$

em A:

$$= +\frac{2e}{4r^2\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi^2}\cdot\cos\frac{1}{4}\pi = +\frac{e}{r^2}\sqrt{\frac{1}{2}} ,$$

portanto, para que haja o equilíbrio solicitado:

$$a=\frac{e}{r^2}\cdot\sqrt{2} ,$$

ou

$$+e=+ar^2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} ,$$

respectivamente.

Da mesma forma, quando o círculo é dividido em $4n$ partes iguais pelos pontos A, (A^1), A^1, (A^2), etc., e a força eletromotriz a é dada no ponto B que é diametralmente oposto ao ponto A, obteremos uma distribuição da eletricidade livre nos $2n$ pontos (A^1), (A^2), etc., por meio da qual podem ser equilibradas as forças eletromotrizes nos $2n$ pontos A, A^1, etc. Isso ocorre devido ao fato que se $\pm e_1$ denotar a eletricidade livre em (A^1), (A_1), e $\pm e_2$ denotar a eletricidade livre em (A^2), (A_2), etc., e se r é o raio do círculo, e se colocarmos:

[620] A expressão $\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi^2$ deve ser entendida como $\operatorname{sen}^2(\pi/4)$.

$$\frac{\cos\frac{(2m-1)\pi}{4n}}{4r^2\left[\operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi}{4n}\right]^2} = p_m \ ,$$

encontraremos então a força eletromotriz na direção da tangente ao círculo:

Em B:

$$= a - 2p_n \cdot e_1 - 2p_{n-1} \cdot e_2 - ... - 2p_1 \cdot e_n \ ,$$

em A:

$$= 2p_1e_1 + 2p_2e_2 + ... + 2p_ne_n \ ,$$

em A^m ou em A_m:

$$\begin{aligned} = \quad & - p_me_1 - p_{m-1}e_2 - ... - p_1e_m + p_1e_{m+1} + ... + p_{n-m}e_n \\ & + p_{m+1}e_1 + p_{m+2}e_2 + ... + p_ne_{n-m} - p_ne_{n-m+1} - ... - p_{n-m+1}e_n \ , \end{aligned}$$

onde m pode ser qualquer número inteiro de 1 a $n-1$. Ao colocar todos esses $(n+1)$ valores iguais entre si, obteremos n equações para determinar n grandezas desconhecidas e_1, e_2, ... , e_n.

Além disso, isso fornece o valor médio das primeiras duas das $(n+1)$ forças eletromotrizes k que foram igualadas anteriormente:

$$k = \frac{1}{2}a + (p_1 - p_n)e_1 + (p_2 - p_{n-1})e_2 + ... \ ,$$

e a soma de todas elas:

$$(n+1)k = a + (p_1 - p_n)e_1 + (p_2 - p_{n-1})e_2 + ... \ ,$$

consequentemente:

$$(n+1)k - a = k - \frac{1}{2}a \ ,$$

ou

$$a = 2nk \ .$$

Por exemplo, para $n = 2$, isso fornece:

$$\begin{aligned} e_1 &= 0,015\,67 \cdot 4r^2a \ , \\ e_2 &= 0,058\,33 \cdot 4r^2a \ , \\ k &= \frac{1}{4}a \ ; \end{aligned}$$

para $n = 4$:

$$\begin{aligned}
e_1 &= 0,001\,537 \cdot 4r^2 a \ , \\
e_2 &= 0,004\,744 \cdot 4r^2 a \ , \\
e_3 &= 0,008\,570 \cdot 4r^2 a \ , \\
e_4 &= 0,015\,922 \cdot 4r^2 a \ , \\
k &= \frac{1}{8} a \ ;
\end{aligned}$$

para $n = 8$:

$$\begin{aligned}
e_1 &= 0,000\,158\,2 \cdot 4r^2 a \ , \\
e_2 &= 0,000\,477\,1 \cdot 4r^2 a \ , \\
e_3 &= 0,000\,804\,7 \cdot 4r^2 a \ , \\
e_4 &= 0,001\,149\,5 \cdot 4r^2 a \ , \\
e_5 &= 0,001\,527\,1 \cdot 4r^2 a \ , \\
e_6 &= 0,001\,972\,6 \cdot 4r^2 a \ , \\
e_7 &= 0,002\,595\,1 \cdot 4r^2 a \ , \\
e_8 &= 0,004\,118\,7 \cdot 4r^2 a \ , \\
k &= \frac{1}{16} a \ .
\end{aligned}$$

Quanto maior for o número n, mais o valor de e_1 vai se aproximar dos valores:

$$\frac{1}{3} e_2 \ , \qquad \frac{1}{5} e_3 \qquad \dots \ .$$

Se agora distribuirmos as massas e_1, e_2, ... , e_m, para as quais podem ser desprezados como imperceptíveis os desvios em relação às massas e_1, $3e_1$, ... , $(2m-1)e_1$, ao longo dos m arcos circulares $\pi r/n$ no centro dos quais elas se encontram, proporcionais à distância x do ponto A, então, se b denotar um fator constante teremos:

$$b \int_0^{m\pi r/n} x dx = \frac{1}{2} b \cdot \frac{m^2 \pi^2 r^2}{n^2} = e_1 + e_2 + \dots + e_m = m^2 e_1 \ ,$$

e, consequentemente:

$$b = \frac{2n^2}{\pi^2} \cdot \frac{e_1}{r^2} \ .$$

Agora, se o arco circular $m/n \cdot \pi r$ é pequeno o suficiente para que seja considerado como imperceptível seu desvio em relação a uma linha reta, então a força eletromotriz no ponto A que é devida às massas e_1, e_2, ... , e_m que estão concentradas nos pontos centrais dos m arcos circulares $\pi r/n$, será igual a:

Devido a e_1:

$$= \frac{4n^2}{\pi^2 r^2} \cdot e_1 \ ,$$

devido a e_2:

$$= \frac{4n^2}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{1}{9} e_2 = \frac{4n^2}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{1}{3} e_1 \ ,$$

devido a e_m:

$$= \frac{4n^2}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{1}{(2m-1)^2} e_m = \frac{4n^2}{\pi^2 r^2} \cdot \frac{1}{2m-1} \cdot e_1 \ ,$$

de tal forma que a força eletromotriz total que é exercida por essas m massas no ponto A será igual a:

$$\frac{4n^2}{\pi^2 r^2} \left(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2m-1}\right) e_1 = 2\left(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2m-1}\right) b \ .$$

Em contrapartida, a força eletromotriz que é exercida no ponto A pela mesma massa que está distribuída continuamente ao longo de todo o arco $m\pi r/n$ de acordo com a lei dada, quando essa distribuição linear assume o lugar da distribuição real sobre a superfície de um fio fino de raio α, assim como na Seção 15.30, será dada por:[621]

$$b \int_{e\alpha/2}^{m\pi r/n} \frac{dx}{x} = b \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{ne\alpha} \ .$$

As duas expressões para a força eletromotriz que são exercidas pelas m massas em A serão iguais quando α assume um valor tal que:

$$2\left(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2m-1}\right) = \log \text{nat} \frac{2m\pi r}{ne\alpha} \ ,$$

isto é,

$$e\alpha = \frac{2m}{n} \pi r e^{-2\left(1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2m-1}\right)} \ ,$$

na qual e denota a base do sistema natural de logaritmos. Quando maior for o número n (e, consequentemente, também o número m), menor influência ele terá sobre o valor de α se o número m for aumentado ou diminuído em uma ou em algumas unidades. Isso ocorre devido ao fato que se m denotar um número maior e α' denotar o valor assumido por α quando m é aumentado de 1, então α' pode ser representado por $(2m^2 + 3m + 1)\alpha/(2m^2 + 3m)$, que vai diferir apenas ligeiramente de α para grandes valores de m. Para esse valor de α, as massas de eletricidade livre que estão concentradas nos pontos centrais dos m arcos circulares $\pi r/n$ podem ser colocadas iguais a uma massa igualmente grande que é distribuída continuamente sobre a superfície do condutor. Isso ocorre porque para as partes do circuito que são mais próximas dos pontos considerados, esse fato vem da igualdade que acabou de ser provada para as forças eletromotrizes, mas para as partes distantes do circuito, isso é evidente assim como na Seção 15.30.

[621] A expressão "log nat" na próxima equação deve ser entendida como o logaritmo natural ou neperiano, ln, isto é:

$$b \int_{e\alpha/2}^{m\pi r/n} \frac{dx}{x} = b \ln \frac{2m\pi r}{ne\alpha} \ .$$

Para o caso que foi considerado anteriormente, quando $n = 8$, vemos facilmente que m não pode ser considerado maior do que 2; consequentemente:

$$e\alpha = \frac{1}{2}\pi r e^{-8/3} = 0,109\,15 \cdot r \ .$$

Agora, como isso é baseado em valores tão pequenos de n e m, esse valor de α não pode ser considerado preciso, além disso, ele é muito grande pelas regras que foram desenvolvidas na Seção 15.30 para ser aplicável com precisão suficiente, já que elas eram válidas apenas para pequenos valores de α. Uma aplicação mais precisa daquelas regras necessitaria que n não fosse menor do que 32, e obteríamos:

$$e\alpha = \frac{1}{4}\pi r e^{-352/105} = 0,027\,49 \cdot r \ ,$$

quando assumimos que $m = 4$. O presente caso deve, portanto, servir apenas para explicar como a distribuição da eletricidade livre no condutor e a força eletromotriz dela resultante podem ser determinadas até certo ponto aproximadamente da maneira indicada, apesar da imprecisão e do valor de α. Além disso, podemos obter o valor de $e\alpha$:

$$e\alpha = 0,109\,15 r \ ,$$

a saber, para esse caso teremos:

$$b = \frac{32}{\pi^2} \cdot \frac{e_1 + e_2}{r^2} = 0,008\,239 \cdot a \ ,$$

e a força eletromotriz, que é igual em todo o circuito, será:

$$k = \frac{1}{16} a \ .$$

Esse resultado só pode ser comparado com as fórmulas que foram desenvolvidas na página 396,[622] a partir das quais essa força eletromotriz pode ser representada aproximadamente pelas seguintes expressões, a saber:[623]

$$\frac{2a}{r^2}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{1}{2}\pi\right)$$

ou

$$\frac{2a}{r^2}\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{2}{5}\pi\right) \ ,$$

nas quais temos de observar que o elemento de massa da eletricidade livre no elemento de comprimento de arco $rd\varphi$, que se encontrava a uma pequena distância $r\varphi$ do ponto de indiferença A, era denotado lá por $a\varphi d\varphi$, enquanto que o mesmo elemento de massa foi representado aqui por $bxdx$, onde $x = r\varphi$ e $dx = rd\varphi$; temos então de colocar $a = br^2$ naquelas fórmulas. Vamos então obter aproximadamente:

$$k = 2b\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{1}{2}\pi\right) = 0,004\,88 \cdot a$$

[622]Pág. 382 do Vol. III das *Obras* de Weber.
[623]Nas próximas quatro equações a expressão $\log\cot\frac{ea}{8r}$ deve ser substituída por $\log\cot\frac{e\alpha}{8r}$.

ou

$$k = 2b\left(\log\cot\frac{ea}{8r} - \frac{2}{5}\pi\right) = 0,050\,06 \cdot a \ ,$$

em vez de $k = \frac{1}{16}a = 0,0625 \cdot a$, que foi encontrado anteriormente. Vemos então disso que quando o valor de k que foi calculado anteriormente também não concorda precisamente com os últimos dois valores aproximados (o que é impossível, devido à imprecisão e magnitude do valor de α), esse próprio caminho vai ao menos levar a um valor de k com a mesma ordem de grandeza sob essas condições desfavoráveis. Poderia ser esperada uma concordância melhor quando o cálculo é realizado, por exemplo, para $n = 32$ ou para números ainda maiores. Por um aumento apropriado nos números n e m, a distribuição da eletricidade livre no condutor linear, bem como a força eletromotriz dependente dela, pode ser determinada aproximadamente com qualquer precisão necessária.

Além disso, dificilmente é necessário observar, em particular, que a forma circular do condutor nessa apresentação foi escolhida apenas como um exemplo para simplificar o cálculo, mas que o método ainda seria aplicável para qualquer outra forma linear para o condutor. A mesma coisa também é verdadeira quando são dadas várias forças eletromotrizes em locais diferentes do condutor, em vez de apenas uma delas, ou quando o condutor é decomposto em partes com resistências específicas diferentes, de tal forma que exista uma distribuição não uniforme de força eletromotriz que seja proporcional a essas resistências. Acima de tudo, a aplicação desse método só é restrita pela suposição de um condutor *linear*, além da complexidade dos cálculos.

15.32 Demonstração de como Surge na Superfície do Condutor Fechado a Distribuição de Eletricidade Livre que é Necessária para uma Corrente Uniforme e Constante

É claro que, se as forças eletromotrizes estiverem presentes apenas em pontos individuais de um circuito fechado, uma corrente elétrica só pode começar diretamente nesses pontos e não em todo o circuito; porque em todas as partes da corrente nas quais não atuam forças eletromotrizes, os fluidos elétricos também não são movidos. Mas se os fluidos elétricos começarem a se mover nos pontos onde as forças eletromotrizes estão presentes, ou seja, o fluido positivo em uma direção e o negativo na direção oposta, enquanto os fluidos à frente deles ainda estão em repouso, então esse deslocamento do fluido positivo de um lado para o outro vai produzir um acúmulo de eletricidade positiva livre que vai exercer uma força eletromotriz para frente e para trás. Para trás ele enfraquece ou anula a ação da força eletromotriz dada, para frente ele exerce uma força eletromotriz no mesmo sentido que a força eletromotriz dada, só que em um ponto diferente do circuito. A mesma coisa também ocorre para o fluido negativo que é deslocado na direção oposta, desde que os fluidos elétricos nas partes do circuito que estão antes dele continuem em um estado de repouso. O acúmulo de eletricidade livre negativa também vai atuar para frente e para trás, a saber, enfraquece a ação da força eletromotriz dada para trás e exerce uma força eletromotriz para frente no mesmo sentido que a força eletromotriz dada, exceto que ocorre em um local diferente do circuito. Se considerarmos esse argumento, veremos então que em geral esse acúmulo de eletricidade livre pode parar de crescer e ficar estacionário apenas para uma corrente uniforme em todas as partes do circuito, e que qualquer desvio da corrente em relação à uniformidade vai levar a uma mudança nesse acúmulo que aumentaria até que novamente tivesse desaparecido a não uniformidade na corrente.

A distribuição de eletricidade livre sobre a superfície do condutor que foi discutida nas Seções 15.29 e 15.30 é tal que não pode haver equilíbrio para a eletricidade livre distribuída; pois isso exigiria que a resultante de todas as forças sofridas por uma partícula de eletricidade livre sobre a superfície, devida a todas as outras partículas, apontasse perpendicularmente para fora à superfície, o que não é o caso. O motivo é que a apresentação que foi dada na Seção 15.29, por si própria, explicou como resultaria uma força tangencial sobre cada partícula de eletricidade livre sobre a superfície, em adição a uma força apontando para fora que é perpendicular à superfície, de onde segue que essa eletricidade livre sobre a superfície não poderia permanecer em um estado de repouso, mas precisa tomar parte na corrente que existe no interior [do condutor]. Mas esta participação da eletricidade livre sobre a superfície na corrente no interior pode muito bem existir com uma distribuição inalterada da eletricidade livre na superfície do condutor. Pois se representarmos a distribuição de toda a eletricidade positiva que flui na fronteira e no interior de um condutor que consideramos se estender ao longo de um linha reta AA' pelas ordenadas de uma outra linha reta BC e, da mesma forma, representarmos a distribuição de toda a eletricidade negativa que flui nele pelas ordenadas de uma terceira linha reta $B'C'$ que corta a linha BC em O, então estará presente na seção reta OP, [Figura 5], uma quantidade igual dos dois fluidos.

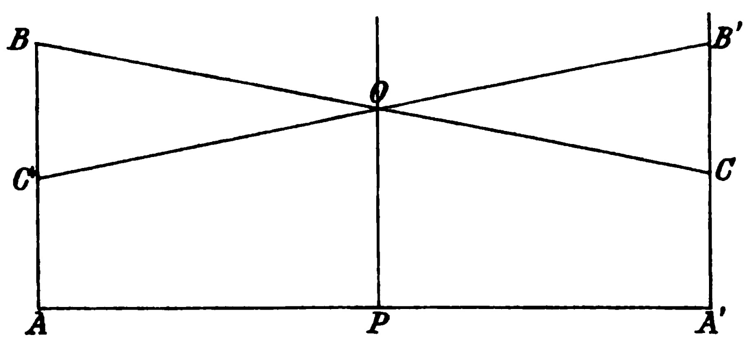


Fig. 5.

Contudo, o excesso de eletricidade positiva aumenta de P para A proporcionalmente à distância em relação a P. De P para A', o excesso de eletricidade negativa também aumenta proporcionalmente à distância em relação a P. O fluxo geral de corrente será então representado por um avanço igualmente rápido das linhas BC e $B'C'$ em direções opostas paralelas a AA', de onde seguiria facilmente que a ordenada do ponto de interseção das duas linhas PO — isto é, o ponto de indiferença do circuito — permaneceria imóvel e que o aumento desse excesso de cada uma das duas fontes de eletricidade à distância P permaneceria inalterado com esse avanço, desde que possamos assumir que a eletricidade avançada nos pontos de contato A e A' é sempre substituída por outras recém-separadas, de modo que as linhas retas avançadas BC e $B'C'$ sejam sempre alongadas para trás até as ordenadas dos pontos A e A'. A partir da ilustração, poderia parecer como se a quantidade de eletricidade que flui entre A e A' vai sempre aumentar. Isso ocorre porque a eletricidade em A e A', que está constantemente sendo separada e se movendo em direções opostas, é levada em consideração, enquanto que não é levada em consideração a eletricidade que fica em repouso entre A e A' pela reunificação. Contudo, essa reunião gradual dos dois fluidos elétricos entre A e A' também pode ser facilmente ilustrada por um avanço da linha das abcissas para cima, o que pode ser feito com tal velocidade que a ordenada PO permanece sempre com o mesmo comprimento, o que expressa que a quantidade de eletricidade positiva e negativa presente permanece inalterada.

A lei de proporcionalidade de Ohm é assumida para a carga no circuito nessa representação. Se levarmos em consideração o desvio dessa lei que foi discutido nas Seções anteriores, então o cálculo também precisará incluir a diferença na velocidade com a qual precisam fluir os dois tipos de eletricidade se quantidades iguais dos dois [tipos] atravessam a seção reta para um excesso dado [de um dos tipos de eletricidade]. A partir de uma discussão mais precisa, também encontraríamos que o princípio eletrostático que foi utilizado como base aqui por motivo de simplicidade não mais seria satisfeito, logo seria necessário um retorno à lei geral fundamental da ação elétrica.

15.33 Sobre a Dedução por Kirchhoff das Leis de Ohm, Satisfazendo à Teoria da Eletrostática

Durante a impressão desse Tratado, apareceu nos *Annalen* de Poggendorff, Vol. 79, pág. 506, uma publicação do Dr. Kirchhoff da Sociedade Física de Berlim intitulada "Ueber eine Ableitung der Ohm'sche Gesetze, welches sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst," na qual foram submetidos a um teste mais preciso os princípios nos quais foram baseados a discussão anterior.[624] Foi mostrado, em particular, que a lei de Ohm dos circuitos galvânicos não tem necessariamente qualquer conexão com a suposição feita por Ohm em sua dedução, contradizendo a lei fundamental da eletrostática, a saber, que a eletricidade em um condutor pode ser encontrada em um estado de repouso quando ela preenche seu volume com uma densidade uniforme. Em vez disso, a dedução dessa lei permanece inalterada quando substituímos a suposição que contradiz a lei fundamental da eletrostática por uma outra [hipótese] que concorda com ela e que resulta necessariamente dela, a saber, que o fluido elétrico neutro em um condutor pode ser encontrado em um estado de repouso quando o *potencial* da eletricidade livre que é distribuída sobre sua superfície possui o mesmo valor em todo ponto no interior do condutor e quando, no desenvolvimento da dedução, colocamos o valor do potencial no interior do condutor que é devido à eletricidade livre que se encontra na superfície igual à densidade de eletricidade que deve ser encontrada no interior de acordo com Ohm. A prova apresentada por Kirchhoff é tão curta que não pode ser resumida e, por esse motivo, temos de nos referir ao próprio [artigo] original. Podemos citar apenas a observação final que Kirchhoff acrescentou em relação a isso, na qual tentou justificar a redução das leis do circuito galvânico às leis fundamentais da *eletrostática*, já que as leis dos circuitos galvânicos lidam com fenômenos *eletrodinâmicos*, de tal forma que a lei fundamental da eletrostática geralmente não seria suficiente para explicá-los. Ele disse o seguinte na obra citada, pág. 512:[625]

> As considerações que apresentamos estão baseadas na lei eletrostática para a ação de partículas elétricas. Nem os fenômenos eletrodinâmicos de Ampère,[626] nem os

[624] Esse trabalho de Kirchhoff está traduzido no Capítulo 12.
[625] Ver a página 295 dessa tradução em português.
[626] Ver a Nota de rodapé 10 na página 19.

fenômenos de indução [de Faraday],[627] podem ser explicados por essa lei. Weber descobriu uma lei mais geral pela qual foi bem sucedido ao explicar esses fenômenos;[628] uma lei na qual é introduzida a velocidade relativa entre as partículas cuja ação mútua estava sendo considerada, e que volta à lei da eletrostática quando essa velocidade desaparece. Portanto, ao trazer os vários domínios da teoria da eletricidade sob um único ponto de vista, temos de deduzir as leis das correntes em circuitos fechados a partir da lei de Weber. Essa dedução parece difícil; contudo é fácil provar, *a posteriori*, que a concepção das correntes, à qual levou a admissão da lei eletrostática, também está de acordo com a lei de Weber, quando um certa hipótese vem em seu auxílio, a saber, aquela hipótese de acordo com a qual, ao calcular a força que produz uma separação das duas eletricidades no espaço v de um dos condutores, as eletricidades em v têm de ser consideradas em repouso. Não há nada oposto a esse ponto de vista quando levamos em consideração que o movimento da eletricidade em um condutor só ocorre de molécula para molécula; de tal forma que toda partícula de eletricidade encontra um ponto de repouso na molécula que ela alcança. Adotando esse ponto de vista, pode ser prontamente concedido que a quantidade de eletricidade que é transferida de uma molécula para uma molécula próxima só é condicionada por forças que são exercidas sobre as partículas de eletricidade, enquanto elas ainda estão em um estado de repouso na partícula anterior, mas não por forças que atuam sobre elas enquanto estão passando para a próxima molécula. No que diz respeito à teoria da indução de Weber, não é relevante se é feita ou não essa hipótese. Se ela for feita, e se as correntes no circuito forem consideradas geralmente como estando de acordo com o ponto de vista da eletrostática, então, no que diz respeito à intensidade e direção da força que tende a separar as eletricidades no elemento v e, portanto, em relação à força eletromotriz, como Weber a denomina, é indiferente se partimos da lei eletrostática ou da lei de Weber. Portanto, a diferença que possivelmente poderia ocorrer, tem de surgir das forças exercidas pelas eletricidades fluindo nas outras partes do sistema; e essas forças, de acordo com o que foi apontado por Weber, não contribuem para essa força eletromotriz, desde que as correntes sejam constantes, e transportem quantidades iguais das duas eletricidades em direções opostas com a mesma velocidade.

15.34 Determinar, Comparando Observações Eletromotrizes e Galvanométricas, a Velocidade Relativa entre Duas Massas Elétricas na Qual Não Acontece Atração nem Repulsão

Se for dada a lei da distribuição da eletricidade livre sobre a superfície de um condutor no caso de uma corrente uniforme e constante, então isso pode ser a base para uma aplicação que é geralmente importante no estudo da eletricidade. Pois é claro que a força eletromotriz pode ser determinada de duas maneiras, a saber, *em primeiro lugar*, a partir de sua ação, isto é, a partir da intensidade da corrente que ela produz no caso de uma resistência conhecida no circuito. Dessa forma, a determinação da força eletromotriz vai depender de medições da

[627] Ver a Nota de rodapé 26 na página 26.
[628] Ver o Capítulo 6.

intensidade de corrente e da resistência do circuito, sendo que essas duas medidas podem ser realizadas em unidades absolutas, como foi mostrado nesse Tratado. *Em segundo lugar*, ela pode ser determinada a partir de sua causa, isto é, a partir da eletricidade livre que fica distribuída sobre a superfície do condutor. Se forem encontradas a intensidade de corrente i e a resistência w do circuito nas unidades que foram definidas na Seção 15.26, então a força eletromotriz em todo o circuito será determinada nas unidades que são dadas para ela através do seguinte produto:

$$iw \ ,$$

e, de acordo com a Seção 15.27, esse valor pode ser reduzido à unidade de força geral na mecânica ao multiplicá-lo por $4/c$, onde c denota a velocidade relativa com a qual duas massas elétricas precisam se deslocar uma em relação à outra quando elas não se atraem nem se repelem. A força eletromotriz em todo o circuito é então calculada como sendo igual a:

$$\frac{4}{c}iw$$

nas unidades gerais de força da mecânica. Para determinar a força eletromotriz nesse circuito a partir de sua causa, poderíamos agora baseá-la na expressão encontrada na Seção 15.30:

$$\frac{2a}{r^2}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right) \ ,$$

na qual β tinha um valor menor do que $1/2$ e maior do que $2/5$. Do que foi visto na página 393,[629] a grandeza a nessa equação denota o fator que vai fornecer, quando multiplicado por $(\varphi - \pi)d\varphi$, a massa de eletricidade livre que está distribuída ao longo do elemento de comprimento $rd\varphi$ no circuito ao final do arco $r\varphi$. Agora, se a massa de eletricidade livre em dois elementos do circuito de comprimento dx, um deles ao final do arco $\pi - \chi$, enquanto que o outro está ao final do arco $\pi + \chi$, for medida de fato, sendo a primeira [massa de eletricidade] encontrada igual a Edx, enquanto que a última é igual a $E'dx$, então temos de colocar:

$$\begin{aligned} Edx &= -a\chi d\chi \ , \\ E'dx &= +a\chi d\chi \ , \end{aligned}$$

e $rd\chi = dx$; consequentemente:

$$a = \frac{r}{2\chi}(E' - E) \ .$$

Se substituirmos agora esse valor de a na expressão anterior, obteremos então:

$$\frac{E' - E}{r\chi}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right) \ .$$

Contudo, essa expressão não fornece a força eletromotriz para todo o comprimento do circuito, mas apenas para uma parte do circuito que possui comprimento unitário, e precisa ser

[629]Pág. 378 do Vol. III das *Obras* de Weber.

multiplicada pelo comprimento do circuito ($= 2\pi r$) se é para obtermos a força eletromotriz em todo o circuito, a saber:

$$\frac{2\pi}{\chi}(E' - E)\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right) .$$

Assim, ao colocar iguais entre si as forças eletromotrizes em todo o circuito que são determinadas das duas maneiras, isso vai fornecer finalmente a seguinte equação:

$$\frac{4}{c}iw = \frac{2\pi}{\chi}(E' - E)\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right)$$

ou

$$c = \frac{2\chi}{\pi}\frac{iw}{E' - E} \cdot \frac{1}{\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi} .$$

Dessa maneira determinamos então a velocidade c com a qual duas massas elétricas precisam se deslocar uma em relação à outra quando elas não devem se repelir nem se atrair. A importância da determinação dessa própria velocidade c é explicada pela lei fundamental de interação entre duas massas elétricas que foi expressa no primeiro Tratado sobre "Medições Eletrodinâmicas,"[630] assim como na Seção 15.27 desse Tratado, onde foi mostrado que quando for conhecida a velocidade c, todas as forças eletromotrizes poderão ser expressas nas unidades de força estabelecidas na mecânica. Contudo, a partir do próprio significado de c, já é interessante verificar a possibilidade de uma tal determinação mesmo quando sua realização real encontra obstáculos que ainda não podem ser superados, já que ainda faltam os instrumentos que seriam apropriados para essa determinação. De fato, esses obstáculos nos impedem agora de realizar a medição eletrométrica delicada pela qual seriam encontradas os valores de E' e E. Nenhum de nossos modernos eletroscópios e eletrômetros parece capaz de realizar essas medições. Só seria possível então determinar a razão das grandezas E e E', mas não seus valores absolutos; ao menos até agora ainda não foi feita qualquer tentativa nesse sentido. Contudo, a construção de novos eletroscópios e eletrômetros que seriam apropriados para esse fim define uma tarefa por si própria, a qual não consideraremos aqui já que nesse Tratado vamos nos restringir apenas a medições eletrodinâmicas.[631]

15.35 Relação entre a Velocidade de Deriva e a Velocidade de Propagação de uma Corrente

Não existem quaisquer dados experimentais sobre a velocidade com que o próprio fluido elétrico se desloca nos condutores [com corrente constante]. Sabemos apenas que a velocidade com que muitos *fenômenos* elétricos se propagam, tais como os raios, precisam ser muito grandes, já que suas propagações mesmo através dos maiores espaços não requer os menores intervalos de tempo mensuráveis. Da mesma forma, sabemos apenas que a propagação de uma corrente galvânica através de um longo circuito acontece com uma velocidade extraordinária, já que o tempo necessário para uma corrente que é gerada em um certo ponto alcançar a mesma intensidade em todas as partes do circuito é tão pequeno que

[630] Ver o Capítulo 6 na página 39.

[631] A primeira medida da constante c foi feita por Weber e Kohlrausch entre 1854 e 1856, ver a Nota de rodapé 353 na página 219.

até o momento não foi possível medi-lo. As experiências de Wheatstone[632] relacionadas à não simultaneidade das faíscas que são produzidas em pontos diferentes de um fio condutor interrompido quando a eletricidade positiva e negativa acumulada nos dois condutores se combinam entre si através do fio condutor também não fornece, da mesma maneira, informação sobre a velocidade com que os fluidos elétricos estão se deslocando [em relação ao circuito], mas apenas sobre a propagação do movimento através do meio eletricamente neutro no fio condutor. Pois o aparecimento das faíscas assume que o meio eletricamente neutro que é encontrado no local em questão foi colocado em movimento. Contudo, esse aparecimento não pressupõe de forma alguma que a eletricidade positiva e negativa que havia sido acumulada nos condutores de antemão tenha sido ela própria forçada a ir para esse local. Portanto, a não simultaneidade das faíscas observadas por Wheatstone nos vários pontos de interrupção do fio condutor pode apenas fornecer informação sobre a velocidade de propagação do movimento através do meio eletricamente neutro nas partes do fio condutor que estão entre elas. Em um circuito fechado e que não seja interrompido em parte alguma, no qual o equilíbrio do fluido elétrico é perturbado continuamente pelas forças eletromotrizes, temos de distinguir dois tipos de velocidade, a saber, a velocidade do movimento que se propaga de partícula para partícula, e a velocidade do movimento que é peculiar a cada partícula. A primeira é denominada de *velocidade da distribuição da corrente*,[633] enquanto que a última é denominada de *velocidade de deriva*.[634] A velocidade de deriva tem o mesmo valor em todo lugar para uma corrente constante em um circuito homogêneo. Tal corrente é chamada de uniforme, já que ela foi *propagada* uniformemente por todo o circuito e, enquanto permanecer inalterada, não podemos mais falar de qualquer outra *distribuição de corrente*. Se formos falar mais uma vez da distribuição da corrente, então precisamos introduzir uma *mudança* na corrente: a corrente precisa ficar mais forte ou mais fraca. Isso então levanta a questão de saber se qualquer mudança na intensidade da corrente, isto é, se qualquer mudança na *velocidade de deriva*, ocorre simultaneamente em todas as partes do circuito ou se ocorre gradualmente de uma parte para as outras partes. No *primeiro* caso, diríamos que a corrente se propaga com velocidade infinita através do circuito ou então que a velocidade da distribuição da corrente é imensurável. No *outro* caso, diríamos que a corrente se propaga com velocidade finita através do circuito ou então que a velocidade da distribuição da corrente é mensurável. Disso vem que a medição da velocidade da distribuição da corrente assume uma mudança ou modificação na intensidade da corrente no circuito, já que sem essa mudança não poderíamos falar de forma alguma dessa medição.

Agora, já foi explicado em um exemplo na página 386[635] que, de fato, são possíveis mudanças na intensidade da corrente, ou na *velocidade de deriva*, que acontecem em todas as partes do circuito simultaneamente, a saber, quando as forças eletromotrizes dadas que

---

[632] Ver a Nota de rodapé 217 na página 129.

[633] Em alemão: *Geschwindigkeit der Stromverbreitung*. A palavra *Verbreitung* pode ser traduzida como distribuição, propagação, transmissão, disseminação, difusão, dispersão, expansão etc. Logo essa expressão pode ser traduzida como *velocidade da distribuição da corrente*, *velocidade de propagação da corrente* etc. Weber está se referindo aqui à velocidade de propagação ao longo do circuito de uma perturbação na corrente, ou a velocidade de propagação ao longo do circuito de uma perturbação na distribuição da eletricidade livre. Essa velocidade foi determinada teoricamente pela primeira vez como sendo a velocidade da luz no vácuo por Weber e Kirchhoff em 1857, ver as Notas de rodapé 46 e 219 nas páginas 30 e 131, respectivamente.

[634] Em alemão: *Stromgeschwindigkeit*. Essa expressão pode ser traduzida como *velocidade de deriva*, *velocidade de arraste* ou *velocidade da corrente*. Weber está se referindo aqui à velocidade de cada partícula eletrizada em relação ao corpo, massa ou matéria do condutor. Nesse caso seria a velocidade de cada partícula em relação ao fio. Ver também as Notas de rodapé 45 e 46, página 30.

[635] Página 371 das *Obras* de Weber.

causam a mudança atuam em todas as partes do circuito proporcionalmente à sua resistência. Contudo, tal caso especial ainda não prova a imensurabilidade da velocidade da distribuição da corrente em geral. Se a velocidade da distribuição da corrente é para ser chamada de imensurável em geral, então essa simultaneidade da mudança na corrente precisa acontecer em todas as partes do circuito em todos os casos e, em particular, mesmo quando a força eletromotriz dada que causa a mudança atua diretamente apenas sobre parte do circuito. Contudo, nesse caso, a conexão entre as leis dos circuitos galvânicos e as leis fundamentais da eletricidade que foi discutida na Seção anterior implica que a mudança na velocidade de deriva precisa persistir por algum tempo em todas as partes do circuito onde ela foi produzida diretamente pela força eletromotriz dada, antes que ela possa ocorrer em outras partes do circuito, ou seja, porque a ocorrência dessa mudança de corrente em outras partes do circuito deve necessariamente ter sido precedida por um novo acúmulo de eletricidade livre, que exerce sobre essas partes da corrente uma força eletromotriz necessária para produzir a mudança de corrente nessas partes. Contudo, esse novo acúmulo de eletricidade livre só pode ser produzido por uma mudança na corrente em uma parte do circuito durante o intervalo de tempo no qual essas mudanças na corrente ainda não aconteceram nas partes restantes do circuito. Segue-se, então, que a mudança na corrente provocada por uma determinada força eletromotriz diretamente em apenas um ponto do circuito não pode ocorrer simultaneamente em todas as outras partes do circuito, mas só pode surgir gradualmente em uma parte após a outra, depois que o acúmulo de eletricidade livre necessário para sua produção em cada parte tiver sido formado anteriormente.

Se, por simplicidade, nos concentrarmos, por exemplo, na hipótese aproximadamente permitida de Ohm sobre a distribuição da eletricidade livre no condutor, por meio da qual a eletricidade livre no elemento de comprimento $rd\varphi$ do circuito ao final do arco φ é representada por $a(\varphi - \pi)d\varphi$, então isso fornecerá o seguinte valor integral para a eletricidade negativa livre em uma metade do condutor circular:

$$= a \int_0^\pi (\varphi - \pi) d\varphi = -\frac{\pi^2}{2} a \ ,$$

e o seguinte valor integral para a eletricidade positiva livre na outra metade:

$$= a \int_\pi^{2\pi} (\varphi - \pi) d\varphi = +\frac{\pi^2}{2} a \ ,$$

na qual, pela página 406:[636]

$$a = \frac{r}{2\chi}(E' - E) \ ,$$

se Edx denotar a massa de eletricidade livre no elemento de comprimento dx ao final do arco $r(\pi - \chi)$ e se $E'dx$ denotar a massa de eletricidade livre em um elemento igualmente longo dx ao final do arco $r(\pi + \chi)$. O comprimento do pedaço do circuito que está entre esses dois elementos é então igual a $2r\chi$. Se denotarmos agora a massa da eletricidade livre em dois de tais elementos dx, mas entre os quais está contido apenas uma pedaço do circuito de comprimento unitário, por εdx e $\varepsilon' dx$, obteremos então:

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{E' - E}{2r\chi} \ ,$$

[636]Pela página 393 das *Obras* de Weber.

e, consequentemente:

$$a = r^2(\varepsilon' - \varepsilon) \ ,$$

e quando substituímos esse valor de a na expressão anterior para o valor integral da eletricidade livre negativa e positiva, obteremos:

$$-\frac{\pi^2 r^2}{2}(\varepsilon' - \varepsilon) \qquad \text{e} \qquad +\frac{\pi^2 r^2}{2}(\varepsilon' - \varepsilon) \ .$$

A partir da página 406,[637] a força eletromotriz que resulta disso é:

$$\frac{2\pi}{\chi}(E' - E)\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right) = 4\pi r(\varepsilon' - \varepsilon)\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right) \ .$$

Se k denotar a resistência de uma unidade de comprimento e de seção reta do condutor nas unidades que foram estabelecidas na Seção 15.27 (de tal forma que a resistência de todo o circuito de comprimento igual a $2\pi r$ e cuja seção reta é igual a $\pi\alpha^2$ será denotada por $2rk/\alpha^2$), então o quociente entre essa força eletromotriz e essa resistência representará a intensidade de corrente eu, na qual e é a massa de eletricidade positiva ou negativa que está incluída em um pedaço do circuito de comprimento unitário e u denota a velocidade de deriva, assim:

$$4\pi r(\varepsilon' - \varepsilon)\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right) = \frac{2r}{\alpha^2}k \cdot eu \ .$$

Agora, se a intensidade de corrente nesse circuito mudar por uma razão de $1 : n$, então neu teria de entrar no lugar de eu, consequentemente, $n(\varepsilon' - \varepsilon)$ também teria de entrar no lugar de $(\varepsilon' - \varepsilon)$, e dessa forma a eletricidade livre negativa e positiva assumiria a seguinte expressão:

$$-\frac{\pi^2 r^2}{2} \cdot n(\varepsilon' - \varepsilon) \qquad \text{e} \qquad +\frac{\pi^2 r^2}{2} \cdot n(\varepsilon' - \varepsilon) \ .$$

Isso produziria então uma mudança nesse valor integral que é igual a:

$$-\frac{\pi^2 r^2}{2}(n-1)(\varepsilon' - \varepsilon) \qquad \text{e} \qquad +\frac{\pi^2 r^2}{2}(n-1)(\varepsilon' - \varepsilon) \ .$$

Contudo, a possibilidade dessa mudança assume que o aumento na velocidade de deriva que é igual a $(n-1)u$ no início do circuito onde ocorre o fortalecimento da força eletromotriz pelo qual ocorre a mudança na intensidade da corrente, aconteceu mais cedo do que no centro do circuito, que é mais distante desse local e, de fato, durante um intervalo de tempo T no qual uma massa de eletricidade negativa ou positiva que é igual a $(n-1)eu \cdot T$ fluiu através da seção reta do circuito como resultado da mudança na velocidade $(n-1)u$, que é igual à mudança no valor integral anterior, o que vai fornecer a seguinte equação:

$$\frac{\pi^2 r^2}{2}(n-1)(\varepsilon' - \varepsilon) = (n-1)eu \cdot T \ .$$

Segue disso que, em conjunto com a equação que foi obtida anteriormente:

$$4\pi r(\varepsilon' - \varepsilon)\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right) = \frac{2r}{\alpha^2}k \cdot eu \ ,$$

[637] Página 393 das *Obras* de Weber.

que o intervalo de tempo T é:

$$T = \frac{\pi^2 r^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{eu} = \frac{\pi r^2}{4\alpha^2} \frac{k}{\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi} \ .$$

Aqui assume-se que no primeiro instante da mudança a velocidade de deriva no primeiro elemento do circuito muda imediatamente de n para nu e que esta nova velocidade de deriva nu neste elemento permanece inalterada a partir de então. Com a suposição de que uma transição repentina similar na velocidade de deriva de u para nu acontece em todas as partes do circuito, podemos finalmente determinar a velocidade da distribuição da corrente em cada parte do circuito. A saber, com essa suposição, o tempo t necessário para a corrente se propagar através de um pedaço do circuito correspondendo a um arco $r\psi$ é determinada pela seguinte equação:

$$t = \frac{\psi^2 r^2}{4\pi\alpha^2} \cdot \frac{k}{\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi} \ .$$

Obtemos a velocidade de propagação[638] $rd\psi/dt$ ao diferenciar essa equação com relação a t e ψ:

$$\frac{rd\psi}{dt} = \frac{2\pi\alpha^2}{kr\psi}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right) \ ,$$

o que afirma que essa velocidade vai ficar menor na medida em que aumenta o pedaço $r\psi$ do circuito através do qual a mudança na corrente já tenha se propagado.

Nessa expressão para a velocidade de propagação, k denota a resistência do condutor para a unidade de seu comprimento e seção reta e, de fato, nas unidades que foram definidas na Seção 15.27. Se q denotar a resistência de um condutor com o mesmo comprimento e seção reta nas unidades que foram definidas na Seção 15.26 (que é medida por métodos conhecidos), teremos então a partir da Seção 15.27:

$$k = \frac{16}{c^2} q \ ,$$

e se substituirmos esse valor de k na equação anterior, obteremos então a velocidade de propagação $rd\psi/dt$:

$$\frac{rd\psi}{dt} = \frac{\pi c^2 \alpha^2}{8qr\psi}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right) \ ,$$

de onde segue que quando conhecermos a velocidade c com a qual duas massas elétricas precisam se deslocar uma em relação à outra quando elas não se atraem nem se repelem, a velocidade de propagação $rd\psi/dt$ poderá ser calculada a partir disso e, inversamente, quando for medida a velocidade de propagação $rd\psi/dt$, a velocidade c poderá ser calculada a partir dela. Contudo, se as duas velocidades c e $rd\psi/dt$ puderem ser determinadas por observações independentes, então teremos obtido o meio de testar experimentalmente a validade da equação anterior. Essa equação implica que a velocidade de propagação $rd\psi/dt$ difere não apenas entre circuitos diferentes, mas também em locais diferentes do mesmo circuito. Isso ocorre devido ao fato que o coeficiente numérico $\frac{1}{8}(\log\cot e\alpha/8r - \beta\pi)$ possui valores diferentes

[638] Em alemão: *Fortpflanzungsgeschwindigkeit*.

para circuitos diferentes, e em um mesmo circuito para o qual o coeficiente numérico é dado como

$$\frac{1}{8}\left(\log\cot\frac{e\alpha}{8r} - \beta\pi\right) = n \ ,$$

a velocidade de propagação em um local bem definido no circuito será inversamente proporcional à resistência nesse pedaço $r\psi$, por meio da qual a propagação da corrente aconteceu desde a fonte até lá. Se denotarmos essa resistência na unidade que foi definida na Seção 15.26 por $w = q \cdot r\psi/\pi\alpha^2$, então $rd\psi/dt = n \cdot c^2/w$. A velocidade de propagação vai então diminuir na medida em que a propagação fica mais distante de sua fonte e, portanto, vai ser muito mais fácil medir em circuitos muito longos do que em circuitos mais curtos.

Contudo, no que diz respeito à velocidade de deriva u, vemos facilmente que, além dos obstáculos encontrados na medição da velocidade c na Seção 15.34 ou da forma indicada nessa Seção, sua determinação falha principalmente devido à nossa completa ignorância das massas de eletricidade positiva ou negativa $\pm e$ que estão contidas em um pedaço do condutor de comprimento unitário; pois, para determinar o produto eu, pela Seção 15.27, temos a equação:

$$eu = \frac{c}{4}i \ ,$$

na qual i pode ser medida da maneira conhecida. Parece que a possibilidade de obter informação detalhada sobre os valores de e e u seria baseada no fato de que a resistência de um condutor, que até agora foi definida apenas por suas ações, a saber, pela dependência da intensidade da corrente nele em função de uma dada força eletromotriz, também poderia ser determinada mais precisamente por suas causas. A saber, se formos bem sucedidos em determinar as causas da resistência e se isso implicar, por exemplo, que a resistência em um condutor depende do valor e, que pertence ao condutor, ou seja, de tal forma que ela será maior ou menor caso o valor de e seja menor ou maior, e se ela puder ser representada por d/e, onde d é determinado independentemente de e a partir de outras propriedades do condutor, isso explicaria então o fato que, a partir da Seção 15.27, i pode ser colocada igual ao quociente da força eletromotriz $\varepsilon \cdot 4/c$ (na qual ε é mensurável, como na Seção 15.26) para a resistência d/e, consequentemente:

$$eu = \frac{c}{4}i = \frac{\varepsilon}{d}e \ ,$$

de tal forma que:

$$u = \frac{\varepsilon}{d} \ .$$

Dessa determinação de u resultaria também o valor de e. Isso mostra a importância de uma investigação mais aprofundada das causas da resistência no estudo da eletricidade, o que ainda não foi discutido até o momento.

15.36 Sobre as Causas da Resistência em um Condutor

Para uma compreensão completa da resistência, não é suficiente definir o valor da resistência por suas ações, isto é, pela intensidade de uma corrente que é produzida por uma força eletromotriz dada, mas também é necessário definir o valor da resistência por suas causas. Sem essa extensão essencial, estaria incompleto nosso conhecimento da essência da resistência, e o valor que é determinado para ela seria meramente uma ferramenta para a eletrodinâmica cujo verdadeiro significado físico ainda seria desconhecido. Se a resistência até agora foi considerada apenas em termos de suas ações, a razão para isso é que nada de essencial foi determinado sobre suas causas. Só foi determinado até o momento a dependência da resistência em relação às dimensões externas do condutor (a saber, seu comprimento e [área de] seção reta), mas essa dependência só está ligada à resistência absoluta de um fio condutor e não tem relação com a resistência específica dos metais condutores, sobre cujas causas nada é conhecido. As causas parecem estar escondidas tão profundamente na natureza do corpo que elas são inacessíveis pelos caminhos de pesquisa seguidos até agora. Brevemente, a questão das causas da resistência galvânica leva a um campo da ciência ainda pouco explorado. Portanto, vou me restringir apenas a uma discussão especializada, a saber, uma discussão da relação da resistência em relação à natureza do próprio fluido elétrico, como ela deve ser definida, e qual relação ela possui com as correntes elétricas duplas, como sempre foi assumido e registrado aqui de acordo com a concepção usual.

A questão das causas da resistência nos leva em primeiro lugar a focar no quanto essas causas estão no condutor ponderável da corrente e no quanto elas estão no fluido elétrico que o condutor contém. Que a presença das partes ponderáveis pode estreitar mais ou menos os canais através dos quais os fluidos elétricos fluem, e assim afetar a corrente elétrica, é auto-evidente. Contudo, isso levanta a questão de saber se apenas essa causa já é suficiente para explicar a resistência. Essa causa apenas restringiria a massa de fluido elétrico que toma parte na corrente. Contudo, está na natureza da resistência, como a compreendemos por suas ações, que o valor da resistência não vai apenas restringir a massa do fluido elétrico que participa no movimento do fluido, mas que ela também vai restringir o próprio movimento. Contudo, a restrição do próprio movimento não pode ser baseada apenas na presença de partes ponderáveis, mas precisa assumir necessariamente que existem forças que preservam o equilíbrio das forças eletromotrizes atuantes, já que sem essas forças os fluidos elétricos teriam de continuar acelerando seus movimentos, o que não é o caso para uma corrente uniforme e constante.

Então perguntamos, de onde se originam as forças que preservam o equilíbrio das forças eletromotrizes atuantes para uma corrente uniforme e constante, e dessa forma impedem a aceleração adicional do fluido elétrico em seu movimento? São essas forças puramente elétricas ou são elas forças que as partes ponderáveis exercem sobre os fluidos elétricos que fluem através delas? Se assumirmos, como sempre temos feito, que existem dois fluidos elétricos na corrente galvânica que fluem simultaneamente através desse condutor em direções opostas, seria então óbvio procurar uma causa da resistência ao movimento de cada fluido no fluido que vem em sua direção. A saber, os fluidos positivo e negativo vão se combinar em uma mistura neutra no instante em que se encontram e, não importando quão fácil pudesse ser separar essa combinação neutra, uma tal nova separação só poderia resultar de uma nova força eletromotriz, e não como uma consequência de uma persistência dos movimentos que os dois fluidos possuíam antes de sua combinação, já que esses [movimentos] precisam ser considerados como cancelando-se mutuamente como resultado do encontro e combinação [dos fluidos opostos]. Isso implica em que enquanto precisa ser atribuído a cada fluido um movimento persistente por si próprio, os movimentos dos dois fluidos juntos não vão persistir em uma corrente dupla. Contudo, mesmo que seja correto essa justificativa para a não persistência do movimento dos fluidos elétricos na corrente dupla, mesmo assim não ganharíamos qualquer percepção clara do próprio fenômeno dessa maneira enquanto não conhecermos as forças que atuam na mistura e combinação dos fluidos elétricos quando se encontram e que precisam ser superadas durante a separação repetida entre eles. Nos perguntamos então se ainda outras forças precisam ser levadas em consideração dessa maneira além daquelas forças que já estão determinadas pela lei fundamental geral da eletricidade, por exemplo, se também precisam ser consideradas forças moleculares especiais atuando sobre o fluido elétrico. Se esse não for o caso, então a evolução da combinação e separação alternadas do fluido elétrico na corrente dupla teria de ser determinada mais precisamente de acordo com a lei fundamental conhecida da ação elétrica. Sem uma tal determinação mais precisa, só podemos assumir geralmente com alguma plausibilidade que a intensidade de uma corrente dupla precisa depender não apenas da massa do fluido elétrico que participa na corrente, mas também do número de separações que resultam em um certo intervalo de tempo, e que o número dessas separações precisa ser proporcional à força eletromotriz que continua a atuar durante esse intervalo de tempo. Se isso implicar, por exemplo, no fato de que cada partícula elétrica sempre sofrerá um número igual de combinações e separações em um intervalo de tempo igual para uma mesma força eletromotriz, e percorreria dessa maneira um mesmo segmento de trajetória, então a velocidade de deriva u seria sempre a mesma para uma mesma força eletromotriz, e a intensidade de corrente para uma mesma força eletromotriz variaria apenas com a quantidade de eletricidade e que está contida em um tal segmento de trajetória (por exemplo, em uma unidade de comprimento do condutor) e, de fato, seria proporcional a ela, o que implica que a assim denominada resistência variaria da mesma maneira apenas com e sendo, de fato, inversamente proporcional a e, que é o caso explicado no final da Seção anterior.

Se a causa da resistência estiver de fato contida na combinação e separação alternada dos fluidos elétricos quando eles se encontram na corrente dupla, seguiria então além disso a impossibilidade de uma corrente dupla *persistente* sem uma força eletromotriz externa contínua, e então surgiria a questão, como isso seria compatível com a suposição de *correntes moleculares persistentes* para explicar os fenômenos magnéticos e diamagnéticos. A possibilidade dessas correntes moleculares precisa então necessariamente ser baseada em uma ação das moléculas ponderáveis pelas quais as trajetórias dos fluidos elétricos que circulam ao redor dessa molécula em direções opostas permaneceriam separadas entre si, por exemplo, um fluido descreveria uma órbita menor, enquanto o outro fluido descreveria uma órbita maior, de tal maneira que os dois fluidos nunca poderiam se encontrar e se combinar durante seus movimentos.

O próximo argumento servirá para explicar a evolução da combinação e separação alternada dos fluidos elétricos na corrente dupla, como seria deduzida a partir da lei fundamental da ação elétrica sem recorrer a forças moleculares especiais nesse fluido. Suponha que em A, B, C, ..., estão massas elétricas positivas, sobre as quais podemos inicialmente assumir que elas estão fixas nos locais em que se encontram, [Figura 6].

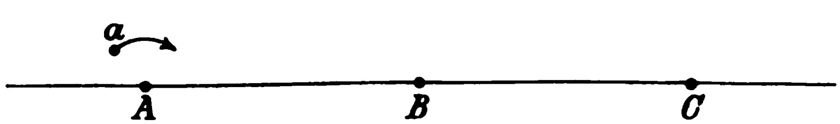


Fig. 6.

Em a encontra-se atualmente uma massa elétrica negativa em movimento sobre a qual a massa positiva vizinha em A atua tão fortemente que pode ser desprezada a ação das massas mais distantes B, C, ... As massas em A e a atuam entre si com uma força que depende de suas grandezas, distância, velocidade relativa e de sua mudança. Enquanto isso, por simplicidade, assumimos que a correção em relação à força eletrostática (que depende das massas e distância)[639] resultante da velocidade relativa e sua variação é tão pequena em relação à força eletrostática que também pode ser desprezada. Com essas suposições, segue-se que quando não atuam outras forças na massa localizada em a, essa massa precisa seguir às leis de movimento através de forças centrais, que são inversamente proporcionais ao quadrado da distância. Consequentemente, a massa em a vai descrever, por exemplo, uma órbita elíptica ao redor de A, de acordo com as leis de Kepler.[640] No entanto, ocorrerá uma perturbação nesse movimento da massa em questão em torno de A assim que, além da força central, uma força eletromotriz paralela à linha AB atuar sobre a massa em questão com intensidade constante. Os elementos do movimento elíptico que ocorreu até agora serão então modificados continuamente, e a órbita que é descrita pela massa considerada passaria a ser uma curva espiral dessa forma, na qual essa massa seria finalmente levada tão longe de A que ela deixaria a esfera de atuação de A e chegaria à esfera de atuação de B, e assim por diante, até que tivesse descrito várias curvas espirais ao redor de B que também a levariam tão longe de B que ela deixaria a esfera de atuação de B e entraria na esfera de atuação de C. Dessa maneira, portanto, uma força eletromotriz pode fazer com que a eletricidade negativa se desloque na direção ABC, sendo que as massas positivas em A, B, C não participam [desse movimento]. A essência desse argumento consiste no fato que tão logo a força eletromotriz deixe de atuar, essa massa irá, ao mesmo tempo, descrever mais uma vez uma órbita elíptica de acordo com as leis de Kepler ao redor da massa positiva em cuja vizinhança se encontre, já que após o desaparecimento da força perturbadora, não vão ocorrer mudanças nos elementos de seu movimento central. Também vemos facilmente que nada mudaria nessa relação fundamental caso as massas positivas localizadas em A, B, C, ... também fossem supostas como estando em movimento e, além da força central exercida pelas massas negativas em cujas vizinhanças estão localizadas, estivessem sujeitas à ação perturbadora da mesma força eletromotriz, que, no entanto, teria a direção oposta para essas massas positivas e para as negativas. Isso implica no seguinte resultado. Se somente a força eletromotriz c agisse sobre a massa negativa em consideração, ela transmitiria a essa massa na direção ABC durante o tempo t uma velocidade ct com a qual essa massa, mesmo depois que a força c tivesse deixado de agir, teria de se mover persistentemente na direção ABC. Contudo, quando combinada com as forças centrais das massas positivas localizadas em A, B, C, ..., enquanto a força eletromotriz c estiver atuando, ela irá de fato da mesma maneira fazer com que a massa considerada avance na direção ABC, porém, tão logo pare de atuar a força c, vai parar esse avanço, isto é, o avanço da massa considerada não pode acontecer na direção ABC com uma velocidade que persiste após deixar de atuar a força que produziu esse avanço. Portanto, o motivo pelo qual a massa considerada não vai continuar avançando na direção ABC após ter cessado de atuar a força eletromotriz está nas forças centrais que as massas positivas exercem sobre essa massa negativa. Contudo, na teoria das correntes galvânicas, a palavra *resistência* refere-se apenas ao fato que o avanço do fluido elétrico em uma corrente galvânica é proporcional à força eletromotriz, isto é, ele vai cessar quando a força eletromotriz deixar de atuar. Disso segue então que o motivo para a resistência poderia estar nas *forças centrais* que as massas positivas e negativas exercem mutuamente entre si

[639] Isto é, que depende da quantidade de carga elétrica nas duas partículas que estão interagindo e da distância entre elas.

[640] Ver a Nota de rodapé 368 na página 225.

quando se encontram na corrente elétrica dupla. Seria importante para uma investigação teórica posterior deduzir disso uma definição clara e precisa de resistência e desenvolver as relações nas quais a resistência, definida de acordo com sua ação, se posiciona em relação a essa definição. Isso dependeria principalmente de uma determinação do tempo que uma partícula precisa para se mover em sua órbita espiral de uma volta em torno de uma massa central A para a volta correspondente em torno da massa central seguinte B. Contudo, a teoria das perturbações na astronomia mostra que tal determinação também pode encontrar muitas dificuldades, mesmo quando são dados todos os elementos essenciais para o cálculo.

VI - Comparação dos Princípios Gerais da Teoria Matemática de Neumann das Correntes Elétricas Induzidas com as Leis de Indução Deduzidas da Lei Fundamental da Ação Elétrica

15.37 Sobre a Diferença que Ocorre de Acordo com Neumann nos Contatos Deslizantes

O Tratado que Neumann apresentou à Academia de Ciências de Berlim em 1845, a saber, "Die mathematischen Gesetze der inducierten Ströme — As leis matemáticas das correntes induzidas,"[641] foi citado anteriormente na Seção 26 do primeiro Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*.[642] Esse Tratado [de Neumann], que ainda não havia sido impresso naquela época, só poderia ser citado ali a partir do trecho publicado nos *Annalen* de Poggendorff. Desde então, Neumann apresentou um trabalho ainda mais abrangente sobre o mesmo assunto para a Academia de Ciências de Berlim: "Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducierter Ströme — Sobre um princípio geral da teoria matemática das correntes induzidas," que apareceu nas publicações da Academia de Ciências de Berlim em 1847 e que foi publicado por Reimer em Berlim em 1848.[643] Neumann estabeleceu o seguinte teorema geral nesse Tratado:

> Se um sistema fechado e não ramificado de arcos condutores $A_|$ for convertido em outro [sistema] $A_{||}$ de uma nova forma e posição por qualquer deslocamento de seus elementos, mas sem romper a conexão condutiva do mesmo, e se essa mudança de $A_|$ para $A_{||}$ ocorrer sob a influência de um sistema de correntes elétricas $B_|$ que sofre simultaneamente uma mudança de posição, forma e intensidade de $B_|$ para $B_{||}$ através de um deslocamento arbitrário de seus elementos, então a soma das forças eletromotrizes que são induzidas por essa mudança no sistema de arcos condutores será igual à constante de indução ε multiplicada pela diferença nos valores do potencial da corrente $B_{||}$ em relação a $A_{||}$ e da corrente $B_|$ em relação a $A_|$, quando se considera que a unidade de corrente está fluindo através de $A_{||}$ e $A_|$.

Após Neumann ter desenvolvido esse teorema, juntamente com suas consequências, nos primeiros quatro parágrafos de seu Tratado, ele continuou no parágrafo 5:

> Em seu tratado *Elektrodynamische Maassbestimmungen etc.*,[644] W. Weber abriu o caminho para preencher a lacuna em nosso conhecimento das ações eletrostáticas e eletrodinâmicas da eletricidade. Ele mostra como as leis de Ampère para a ação entre dois elementos de corrente podem ser deduzidas da ação da eletricidade positiva e negativa de um elemento sobre as duas eletricidades do outro elemento.[645] Essa análise das leis de Ampère levou à lei fundamental para a ação entre duas massas

[641] Ver [Neu46]. Ver também [Neu47] com tradução para o francês em [Neu48a]. Ver ainda a Nota de rodapé 68 na página 36.

[642] Ver a Seção 6.26.

[643] [Neu48b] e [Neu49].

[644] [Web46] com tradução para o português no Capítulo 6.

[645] Ver a Nota de rodapé 10 na página 19.

elétricas, de acordo com a qual essa ação depende não apenas da distância relativa entre elas, mas também de sua velocidade relativa e de sua variação.[646] Como Weber demonstrou, essa lei fundamental também explica os fenômenos de indução e fornece suas leis. O objetivo deste parágrafo é mostrar até que ponto os resultados contidos nos itens anteriores concordam com as leis de indução deduzidas da lei fundamental de Weber para a ação elétrica.

Neumann, no local indicado de seu Tratado, desenvolveu uma expressão geral para a indução a partir dessa lei fundamental da ação elétrica, como ela foi apresentada no primeiro Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*,[647] a qual aplicou então a vários tipos de indução, a saber, nos seguintes casos.

1. Quando nem os elementos de corrente nem os elementos condutores sofrem qualquer deslocamento, e a indução é devida apenas a uma mudança na intensidade de corrente.

2. Quando a indução é produzida apenas por uma mudança na posição do elemento condutor que ocorre sob a influência de uma corrente constante e imóvel.

3. Quando o condutor induzido estava em repouso e a indução é produzida por um movimento de todo o portador de uma corrente constante.

Todos esses casos levaram ao resultado de que a lei de indução que foi deduzida da lei geral fundamental da ação elétrica[648] concordava completamente com os resultados do princípio geral da teoria matemática das correntes induzidas que Neumann havia apresentado.

Neumann continuou:

> A situação é diferente com a equação que expressa a força eletromotriz induzida por um simples circuito de corrente[649] sob a suposição de que este último consiste em um condutor móvel e um condutor estacionário [...] A soma da força eletromotriz que é excitada durante a circulação dos elementos do indutor é a mesma de acordo com ambas as fórmulas, mas a direção da corrente induzida é oposta.[650]

Agora, para decidir se existia uma discrepância nesse único caso entre os resultados da lei de indução que Neumann havia deduzido da lei geral fundamental da ação elétrica e os resultados de seu próprio princípio geral da teoria matemática das correntes induzidas, e qual deles estava de fato correto, Neumann citou uma experiência em seu Tratado que havia provado que a fórmula que foi deduzida do princípio geral de Neumann também era a correta nesse caso. Também repeti essa experiência, que será descrita a seguir, e confirmei completamente o resultado obtido por Neumann. Depois que a verdadeira lei válida para este

[646] Isto é, a força de Weber depende não apenas da distância r entre as partículas eletrizadas que estão interagindo, mas também da velocidade relativa entre elas, dr/dt, assim como da aceleração relativa entre elas, d^2r/dt^2.

[647] Traduzido no Capítulo 6 na página 39.

[648] Devida a Weber em 1846.

[649] Em alemão: *einfachen Stromumgang*, que está sendo traduzido aqui como um simples circuito de corrente. Em seu trabalho Neumann considera um circuito indutor que possui um contato deslizante, de tal forma que o circuito possui uma componente circular aberta parada em relação ao laboratório e uma outra componente que gira em relação ao laboratório.

[650] Ou seja, de acordo com Neumann sua teoria prevê nesse caso a direção da corrente induzida em um sentido, enquanto que a teoria de Weber preveria a corrente induzida no sentido oposto.

caso foi estabelecida factualmente por esses experimentos, Neumann submeteu sua própria dedução da lei de indução deste caso a partir da lei fundamental geral da ação elétrica a um exame mais detalhado. Ele disse:

> Portanto, é preciso analisar onde a dedução da fórmula a partir da lei fundamental de Weber ficou aquém do esperado. O fato de que a contradição em questão só ocorre no caso de indutores com contatos deslizantes nos leva imediatamente a eles. Aqui, novos elementos entram ou saem do caminho da corrente, nos quais a intensidade da corrente muda em um tempo muito curto de 0 para i, e que exercem um efeito indutor por meio dessa mudança de intensidade [da corrente], que já está contido em minhas fórmulas, mas que ainda deve ser levado em consideração ao aplicar a lei fundamental de Weber.

Esse teste levou Neumann ao resultado de que essa segunda parte da indução que não foi considerada na primeira dedução da lei geral fundamental da ação elétrica, compensa metade da contradição em questão, pois a soma das forças eletromotrizes da primeira e da segunda parte é igual a zero.

Após esse exame do cálculo, que não levou a nenhum resultado satisfatório, Neumann finalmente passa a examinar a suposição subjacente a esse cálculo, ou seja, as condições físicas que existem nesse caso e sob as quais a indução ocorre. Essa suposição consistia em assumir que as intensidades de corrente nos elementos condutores que entravam ou deixavam a trajetória da corrente no contato deslizante mudavam de 0 para i ou de i para 0 em um intervalo de tempo muito curto. No entanto, é condição para uma corrente constante que a mesma intensidade de corrente ocorra em todos os elementos do circuito fechado, e mesmo que varie a intensidade de corrente nos elementos que entram ou saem no contato deslizante, ainda aparece aqui o valor *médio* da intensidade de corrente no curto espaço de tempo em que ela varia, condição que, se a intensidade de corrente for a mesma ($= i$) em todo o circuito, pressupõe que a intensidade de corrente nos elementos que entram ou saem no contato deslizante mude de 0 para $2i$ ou de $2i$ para 0. Agora, com essa suposição sobre as circunstâncias físicas sob as quais ocorre a indução, pode ser facilmente mostrado que vai desaparecer completamente a contradição apontada inicialmente, e que a lei de indução que é deduzida a partir da lei fundamental geral da ação elétrica[651] também vai concordar com o princípio geral de Neumann da teoria matemática das correntes induzidas para esse caso.

Contudo, no que diz respeito à própria suposição, sob a qual repousa a eliminação da contradição em questão, Neumann afirmou que ela foi "justificada menos por sua evidência do que por seu sucesso". Contudo, apesar das preocupações que podem ser levantadas em relação à própria suposição, me parece que se a suposição fosse correta, então isso levaria necessariamente a uma consequência que mais uma vez negaria completamente esse sucesso. A saber, se for dado que as intensidades de corrente que entram ou saem nos contatos deslizantes de fato mudam de 0 para $2i$ ou de $2i$ para 0 dentro de um intervalo de tempo muito curto, então me parece que isso teria que necessariamente levar à consequência de que imediatamente após as intensidades de corrente nos elementos que estão entrando aumentarem para $2i$, elas vão da mesma maneira diminuir mais uma vez para i nos elementos que permanecem no circuito, já que i representa a intensidade necessariamente igual de corrente em todas as partes do circuito. Da mesma maneira, para todas as partes que deixam o contato deslizante, nas quais a intensidade de corrente era constantemente igual a i, antes que essa

[651]Devida a Weber em 1846.

intensidade de corrente diminuísse de $2i$ para 0, ela teria de subir em primeiro lugar de i para $2i$. Se introduzirmos não apenas a mudança que foi assumida anteriormente no cálculo, mas também essa [suposição], que está necessariamente conectada com ela, isso fornecerá então os mesmos resultados que no caso em que ignoramos essa suposição e assumimos simplesmente, como foi feito anteriormente, que as intensidades de corrente nos elementos que entram ou deixam o contato deslizante mudam de 0 para i ou de i para 0 dentro de um intervalo de tempo muito curto.

A contradição, que, a meu ver, não pode ser resolvida pela suposição anterior, é resolvida por si mesma se examinarmos mais de perto se, no caso em questão, na dedução de Neumann da lei da indução a partir da lei fundamental geral da ação elétrica, todos os movimentos relativos dados dos fluidos elétricos e suas mudanças foram realmente levados em consideração, e esta solução deve ser dada após a descrição na próxima Seção dos experimentos mencionados feitos por Neumann para decidir esta importante questão, juntamente com minha repetição dessas experiências.

15.38 Descrição das Experiências de Neumann e Sua Repetição

Na pág. 59 do Tratado citado [relacionado à Figura 7 a seguir] Neumann disse o seguinte:

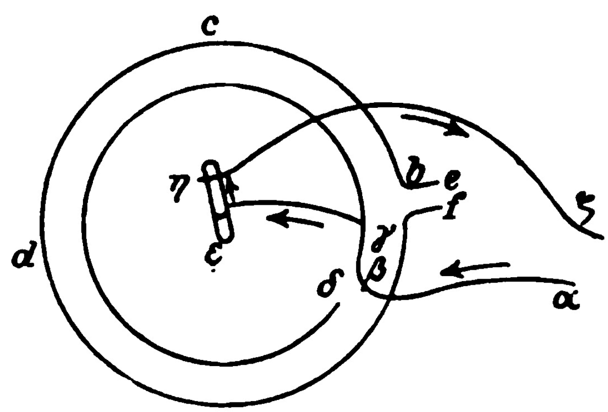


Fig. 7.

> Embora tenha excluído qualquer descrição de experiências desse Tratado, vou dar um breve esboço do instrumento que utilizei para testar as fórmulas que foram citadas devido à importância desse caso. Uma parte do fio de fechamento de um circuito galvânico α está curvado em um círculo $\beta\gamma\delta$. A extremidade δ desse círculo chega bem próxima de seu ponto inicial β sem fazer uma conexão condutiva com ele. Um eixo rotatório $\varepsilon\eta$ que é perpendicular ao plano do círculo em seu centro carrega consigo a parte móvel da trajetória $\varepsilon\gamma$ ao redor em um círculo de tal forma que sua extremidade γ vai deslizando no anel. Começando de α, a corrente indutora entra o anel em β e o deixa em γ para entrar na parte móvel da trajetória, e então deixa essa parte e entra no eixo condutor $\varepsilon\eta$, e em η, ela volta para α através do fio condutor $\eta\zeta$, que está em repouso. A direção da corrente é indicada pelas setas na Figura. Concêntrico ao anel, há um condutor circular bcd, no qual é induzida uma corrente pelo movimento do segmento de trajetória $\varepsilon\gamma$. Devido à curta distância de δ para β, a

própria trajetória pode ser considerada como fechada quando o segmento de trajetória móvel β avança de γ para δ, sendo esse o motivo pelo qual as fórmulas dadas podem ser aplicadas para a determinação da força eletromotriz que é desenvolvida durante um ciclo... Para observar a direção e intensidade da corrente induzida, foi utilizado o seguinte arranjo: o condutor circular induzido foi interrompido em b[652] e aqui provido de duas extensões e e f, uma se comunicando diretamente com uma extremidade do fio multiplicador, enquanto que a outra [extremidade] foi para uma mola de metal que está em contato por fricção com uma luva de metal, que foi inserida isolada do eixo rotatório $\varepsilon\eta$. A corrente induzida passava então dessa mola para a luva, a deixava por meio de uma segunda mola metálica pressionada contra ela, e então a deixava para ir para a outra extremidade do fio do multiplicador. A luva tinha uma seção preenchida com madeira, na qual repousava uma mola no momento em que o segmento de trajetória móvel $\gamma\varepsilon$ deixava o anel $\beta\gamma\delta$ em δ, com a finalidade de ficar mais uma vez conectado condutivamente com ele em β. A saber, nesse instante, o fechamento da corrente indutora será interrompido e então restabelecido, de tal forma que corrente vai desaparecer e então reaparecer, mas nenhuma indução será excitada no condutor ao fazer isso, já que o arranjo que foi dado anteriormente não vai oferecer uma trajetória de conexão fechada. Portanto, apenas a corrente que é induzida pelo movimento do segmento de trajetória $\gamma\varepsilon$ vai chegar no multiplicador, e sua direção e intensidade podem ser observadas, já que ela flui na mesma direção sob rotação continuada do eixo $\varepsilon\eta$. A observação indicou uma corrente induzida, e no que diz respeito à sua direção, ela foi a mesma que a direção exigida por minha fórmula. Para provar que não apenas a direção, mas também a intensidade da corrente induzida era expressa corretamente por essa fórmula, procedi como segue: A mola que interrompeu a conexão condutiva na trajetória da corrente induzida foi colocada tão alto que ela não mais encontrava o recorte da luva cheia de madeira, através da qual a interrupção acabara de ocorrer. Agora é sempre oferecida uma trajetória fechada para as correntes induzidas. Com uma rápida rotação do eixo $\varepsilon\eta$, três correntes chegaram no multiplicador dentro de um tempo muito curto, a saber, aquela que foi induzida pelo movimento do segmento de trajetória $\gamma\varepsilon$, depois aquela que foi induzida pelo desaparecimento da corrente indutora no instante quando o segmento de trajetória móvel deixou o anel em δ e, finalmente, aquela que foi induzida pelo seu reaparecimento uma vez que a peça alcançasse novamente o anel em β. A força que essas três correntes exerciam durante a breve duração de uma volta do segmento de trajetória $\gamma\varepsilon$ sobre a agulha magnética do multiplicador é proporcional à soma de suas forças eletromotrizes. A agulha vai assumir sua posição quase fixa em um lado ou outro do meridiano [magnético] caso o sinal dessa soma seja positivo ou negativo, ou vai manter sua posição ao longo do meridiano quando essa soma é igual a zero... A observação mostrou que quando a rotação acontecia rapidamente, a agulha permanecia no meridiano, o que prova a validade da minha fórmula no que diz respeito tanto à direção quanto à intensidade da corrente induzida.

Para repetir essa experiência, 1 quilograma de fio de cobre que tinha uma espessura de 2/3 milímetro e estava envolvido por seda foi enrolado ao redor de um fino anel de latão com diâmetro de 120 milímetros. Um cilindro de madeira cuja diâmetro era um pouco menor do que o anel de latão foi colocado dentro desse anel de latão, e esse cilindro tinha um eixo de

[652]Devido a um erro de impressão no texto original, temos β aqui no lugar de b.

metal pelo qual ele podia ser girado rapidamente por meio de uma engrenagem. Uma tira de cobre foi inserida no cilindro de madeira, alcançando desde o eixo metálico até a periferia. Três molas de latão foram conectadas a essa tira de cobre em sua periferia que entravam em contato com o anel de latão em três pontos internos que estavam ao longo de uma linha que era paralela ao eixo de rotação. Essas três molas serviam para estabelecer um contato seguro para manter a conexão entre o anel de latão e as outras duas molas quando uma das três molas falhava por um instante. Um dos dois fios de conexão de uma bateria de Grove[653] foi fixada na posição do eixo de rotação, enquanto que o outro foi fixado em qualquer ponto do anel de latão. As duas extremidades do fio de cobre coberto de seda que foi enrolado ao redor do anel de latão foram conectadas ao multiplicador do galvanômetro, cuja agulha possuía um período de oscilação de cerca de 10 segundos.

O instrumento descrito diferia do aparelho de Neumann essencialmente em apenas um aspecto, a saber, devido ao fato que o anel de latão não foi cortado, o que fazia com que a corrente na haste que entrava no eixo rotacional de metal podia seguir duas trajetórias desde o local no anel de latão ao qual ela era levada pela mola de latão até um outro lugar no anel de latão de onde ela retornava à haste. A corrente, portanto, se divide entre esses dois caminhos, ou seja, entre as duas partes do anel de latão que conectam o ponto de contato das molas de latão com aquele ponto onde o outro fio condutor da haste está preso ao anel de latão. Esta divisão da corrente tem essencialmente a mesma finalidade que a segunda tentativa de Neumann de manter o fechamento do circuito induzido no momento em que o contato deslizante passou pelo corte do anel de latão, ou seja, que a soma das forças eletromotrizes exercidas pelos elementos de corrente entrando e saindo do contato deslizante torna-se igual a zero para uma revolução completa do eixo e, portanto, com rotação rápida, a ação observada no galvanômetro dependia apenas da soma dessas forças eletromotrizes que resultaram do movimento do segmento de trajetória $\gamma\varepsilon$. A divisão da corrente que acabou de ser descrita tornou possível, da mesma maneira, que a soma das forças eletromotrizes que foram exercidas pelos elementos que entraram e saíram do contato deslizante fosse igual a zero e, de fato, não apenas para toda a duração de uma rotação, mas para cada instante individual, o que forneceu uma vantagem ao realizar a experiência pois seu sucesso não estava mais ligado com a condição de uma rápida rotação, o que aconteceu no experimento de Neumann.[654] Um outro instrumento que foi projetado para repetir a primeira experiência

[653] Ver a Nota de rodapé 115 na página 61.

[654] [Nota de Wilhelm Weber:] Que a divisão da corrente que foi descrita realmente tem a ação declarada pode ser demonstrado da seguinte maneira. Denotamos por i a intensidade constante da corrente indivisa e dividimos essa corrente em duas partes quando ela entra o anel de latão, uma parte tem uma intensidade $i_{|}$ e atravessa o arco circular ψ até o ponto de saída, enquanto que a outra parte tem uma intensidade $i_{||}$ e atravessa o arco $2\pi - \psi$ até o ponto de saída. As leis de Ohm da divisão da corrente fornecem então as seguintes equações:

$$\begin{aligned} i_{|} + i_{||} &= i \ , \\ i_{|} : i_{||} &= (2\pi - \psi) : \psi \ . \end{aligned}$$

Se agora aumentarmos ψ em $d\psi$, então a intensidade de corrente $i_{||}$ vai desaparecer no elemento de arco $d\psi$, e em seu lugar vai surgir no mesmo elemento a intensidade de corrente $-i_{|}$ (onde o sinal negativo significa que a direção da corrente recém criada tem a direção oposta em relação ao arco crescente ψ). O desaparecimento de uma corrente positiva $i_{||}$ no elemento $d\psi$ cria uma força eletromotriz que é proporcional a $i_{||}d\psi$, e a criação de uma corrente negativa $-i_{|}$ no elemento $d\psi$ vai produzir uma força eletromotriz que é proporcional a $-(-i_{|}d\psi) = i_{|}d\psi$, cuja soma é então igual a:

de Neumann, assim como a segunda, completamente inalteradas, será descrito mais tarde.

Foram feitas as duas experiências seguintes. *Em primeiro lugar*, o cilindro de madeira foi girado ao redor de seu eixo 10 vezes por segundo por meio de uma engrenagem, enquanto a corrente induzida fluía através do eixo rotacional e do anel de latão, e foi observado que nenhuma corrente foi induzida dessa maneira. O estado não perturbado da agulha do galvanômetro podia ser confirmado dentro de 1/2 divisão da escala. O resultado concordou completamente com aquele da segunda experiência de Neumann. *Em segundo lugar*, foi enrolado ainda um outro fio auxiliar ao redor do anel de latão, e suas extremidades foram conectadas com a haste, de tal forma que a corrente tinha de atravessar esse fio, em vez de atravessar o eixo rotacional e o anel de latão. No instante em que esse circuito foi fechado, uma corrente induzida foi observada com o galvanômetro cuja direção era oposta àquela da corrente indutora. Abrir o circuito produzia uma corrente induzida de mesma intensidade, mas com a mesma direção que a corrente indutora. Nos dois casos, a agulha do galvanômetro obtinha uma deflexão de aproximadamente 22 divisões da escala. A segunda experiência serviu para provar que na primeira experiência, para 100 rotações do segmento móvel de corrente durante uma oscilação, a agulha do galvanômetro teria de assumir uma deflexão de 1000 divisões da escala se cada rotação fosse produzir uma força eletromotriz que seria igual àquela que foi determinada na segunda experiência. Contudo, tal força não estava presente.

Com a divisão de corrente descrita, essa experiência é de particular interesse porque corresponde exatamente ao conhecido experimento de rotação eletrodinâmica, onde uma parte móvel da corrente está localizada dentro de uma corrente circular fixa, que é direcionada para o centro da primeira [corrente]. Para uma descrição dessa experiência de rotação eletrodinâmica, ver Poggendorff nos *Annalen*, Vol. 77 (1849), págs. 22 e seguintes.[655] Sabe-se que a corrente circular faz com que a corrente radial móvel gire na direção da própria corrente circular ou na direção oposta caso a direção da corrente no segmento de corrente móvel aponte em direção ao centro ou dele para fora. A partir da regra aceita pela qual experimentos eletromagnéticos ou eletrodinâmicos são convertidos em experimentos de indução

---

$$a(i_| + i_{||})d\psi = aid\psi \ ,$$

se a denotar um fator constante. Contudo, quando ψ cresce de $d\psi$, a razão de $i_| : i_{||} = (2\pi - \psi) : \psi$ vai mudar da mesma maneira, enquanto que a soma $i_| + i_{||} = i$ vai permanecer inalterada, o que vai implicar as duas equações diferenciais a seguir:

$$\begin{aligned} di_| + di_{||} &= 0 \ , \\ \psi di_| - (2\pi - \psi)di_{||} &= -id\psi \ , \end{aligned}$$

consequentemente, $di_| = -id\psi/2\pi$ e $di_{||} = +id\psi/2\pi$. A mudança na intensidade $di_|$ da corrente $i_|$ no arco ψ na direção dos valores decrescentes de ψ vai gerar uma força eletromotriz $+a\psi di_| = -a\psi id\psi/2\pi$ que é proporcional a $\psi di_|$. A mudança na intensidade $di_{||}$ no arco $(2\pi - \psi)$ na direção dos valores crescentes de ψ vai gerar uma força eletromotriz $= -a(2\pi - \psi)di_{||} = -a(2\pi - \psi)id\psi/2\pi$ que é proporcional a $-(2\pi - \psi)di_{||}$. Isso torna a soma de todas as forças eletromotrizes que resultam do aumento $d\psi$ no arco ψ igual a:

$$aid\psi - a\psi\frac{id\psi}{2\pi} - a(2\pi - \psi)\frac{id\psi}{2\pi} = 0 \ ,$$

o que era para ser provado.

[655] [Pog49]. Essa experiência tem a ver com o motor de Ampère, ver [Cha09], [AC11, Seção 7.2.3], [AC12], [CA13] e [AC15, Seção 7.2.3].

magnetoelétrica ou de indução eletrovoltaica, parece que quando essa corrente radial em movimento é girada, como foi o caso em nossos experimentos, uma corrente paralela ou oposta à direção da rotação teria de ser induzida no condutor circular fixo, conforme a corrente no condutor em movimento fosse direcionada para fora ou em direção ao centro, respectivamente. Também é claro que a troca do recipiente de mercúrio, no qual imergimos o segmento móvel de corrente na experiência de rotação mencionada anteriormente, por um anel de latão tocado pelo segmento móvel de corrente, é insignificante e não pode ter nenhuma influência sobre o resultado. Contudo, a experiência nos ensinou que a corrente de indução que esperaríamos a partir da regra citada não existe nesse caso. Logo essa regra de inversão não é verdadeira em geral, mas vai existir uma exceção para ela quando a corrente *indutora* fechada consiste em um segmento móvel de corrente e um [segmento] imóvel que são conectados por um *contato deslizante*. Como é conhecido, a corrente de indução vai existir quando o condutor *induzido* consiste em duas partes que são conectadas por um *contato deslizante*.

Além disso, também repeti a experiência de Neumann inalterada, na qual o anel de latão foi cortado próximo ao local onde o fio condutor que veio da haste foi ligado a ele. Uma conexão entre o fio que foi enrolado ao redor do anel de latão e o multiplicador do galvanômetro foi estabelecida por uma mola e podia ser rompida comprimindo a mola. Essa compressão era realizada por uma haste de madeira que foi ligada ao cilindro de madeira e colocada de tal forma que a mola fosse solta no momento em que as molas de latão presas ao cilindro de madeira pousassem na parte cortada do anel de latão. Deve ser ainda observado que o fio que foi enrolado ao redor do anel de latão tinha um menor número de enrolamentos do que antes. Foi então feita a seguinte experiência. *Em primeiro lugar*, o cilindro de madeira foi girado ao redor de seu eixo por meio de uma engrenagem 10 vezes por segundo, e foi observada uma corrente induzida com o galvanômetro que era tão forte que a deflexão da agulha chegava acima de 500 divisões da escala e não mais podia ser medida por essa escala. *Em segundo lugar*, após remover a haste de madeira, o cilindro de madeira foi fixado na posição onde as molas de latão que estavam fixadas nele entravam em contato com a extremidade do anel de latão rompido que não estava conectado com a pilha, de tal forma que a corrente teria de fluir através de todo o anel de latão. Agora, no instante em que a pilha foi fechada, foi observada uma corrente induzida no galvanômetro que defletiu a agulha por 13,5 divisões da escala na mesma direção que na primeira experiência, assumindo que a direção da corrente indutora foi a mesma, e que a primeira tentativa foi girada naquela direção, na qual as molas de latão avançariam da posição mencionada anteriormente para o corte no anel de latão. *Em terceiro lugar*, um fio auxiliar foi enrolado uma vez ao redor do anel de latão, e a pilha foi então fechada de tal forma que a corrente fluiu através desse enrolamento de fio na mesma direção em que ela fluiu anteriormente no anel de latão. No instante em que a pilha foi fechada, foi então observada uma corrente induzida com o galvanômetro que defletiu a agulha por 13,8 divisões da escala na mesma direção que antes. *Em quarto lugar*, o multiplicador foi enfraquecido, e a primeira experiência foi novamente repetida. A corrente induzida produziu então uma deflexão permanente da agulha do magnetômetro de 377 divisões da escala, embora uma medição mais precisa dessa deflexão não pudesse ser realizada, devido a flutuações significativas que provavelmente foram devidas a imperfeições na engenharia do dispositivo rotatório. *Em quinto lugar*, a segunda experiência também foi repetida mais uma vez, e forneceu apenas uma deflexão de 8 divisões da escala com o multiplicador enfraquecido, em vez da deflexão observada anteriormente de 13,5 divisões da escala. *Em sexto lugar* e finalmente, a segunda das experiências de Neumann também foi repetida, o que diferiu do quarto experimento apenas no fato de que a haste de madeira foi removida do cilindro de madeira, o que fez com que o circuito induzido sempre permanecesse fechado com a rotação do cilindro de madeira. Nenhuma deflexão do galvanômetro foi observada para uma rotação que foi tão rápida quanto no primeiro e quarto experimento, e esse estado de repouso foi garantido até algumas divisões da escala dentro das quais flutuava a agulha.

Os resultados das medições que foram feitas na quarta e quinta experiências permitem uma comparação que merece ser observada, mesmo quando essas medidas não possuíam qualquer grande precisão. A saber, o resultado da medição que foi feita na quarta experiência nos permitiu calcular a maior elongação a partir do repouso que a agulha do magnetômetro alcançaria em consequência do movimento que seria fornecido a ela por uma única rotação momentânea do cilindro de madeira. Com essa finalidade, deve ser apenas acrescentado que o decremento logarítmico da diminuição no arco de oscilação da agulha era igual a $0,471\,60$, ou que quando denotamos por λ esse número dividido pelo módulo do sistema de logaritmos,[656] teríamos $\lambda = 1,088$. Se, além disso, y denotar a deflexão que foi observada na quarta experiência para n rotações durante o período de oscilação da agulha, isso fornecerá então a seguinte expressão para a maior elongação que a agulha vai alcançar em consequência do movimento que foi fornecido a ela por uma rotação:[657]

$$x = \frac{y}{n} \cdot \sqrt{\pi^2 + \lambda^2} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \ .$$

Agora, foi encontrado em divisões da escala que $y = 377$, além disso, $\lambda = 1,088$ e $n = 100$ (já que ocorrem 10 rotações em 1 segundo, e o período de oscilação era $\tau = 10$ segundos). Consequentemente, a maior elongação a partir do repouso que a agulha do magnetômetro alcançou em consequência do movimento que foi fornecido a ela por uma rotação era:

[656]O módulo μ do sistema de logaritmos é utilizado para a conversão de bases. Se temos o logaritmo de um número N na base a e queremos obter seu logaritmo na base b, podemos usar a seguinte relação:

$$\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N \ .$$

O fator $\log_a b$ é denominado módulo do sistema de logaritmos de base a com relação ao sistema de base b.

Para conversão entre logaritmos naturais e decimais usamos

$$\log_{10} N = \log_{10} e \cdot \log_e N \qquad \text{ou} \qquad \log N = 0,4343 \ln N \ .$$

Isto é,

$$\mu = \log e = \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{2,30258} = 0,4343.$$

[657][Nota de Wilhelm Weber:] Ver o *Anexo C* [Anexo 15.39], onde a velocidade angular que é fornecida à agulha em repouso, quando incluímos o amortecimento, é expressa por:

$$\frac{x}{\tau} \sqrt{\pi^2 + \lambda^2} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \ ,$$

se x denota a elongação desejada e se τ denota o período de oscilação sob a influência do amortecimento. Contudo, essa velocidade angular é dada pelo torque F que corresponde à deflexão y, dividido pelo momento de inércia K da agulha, e multiplicado pelo tempo de uma rotação τ/n na quarta experiência, de tal forma que ela é igual a $\tau/n \cdot F/K$. Finalmente, o torque que corresponde à deflexão y é $F = \frac{\pi^2+\lambda^2}{\tau^2} K y$, consequentemente:

$$\frac{x}{\tau} \sqrt{\pi^2 + \lambda^2} \cdot e^{\frac{\lambda}{n} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} = \frac{\tau}{n} \cdot \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\tau^2} y \ ,$$

que vai fornecer a expressão para x citada anteriormente.

$$x = 8,164 \;,$$

expresso em divisões da escala, enquanto que uma elongação de 8 divisões da escala foi de fato observada na quinta experiência quando o cilindro de madeira não foi girado, mas permaneceu fixo na posição em que a corrente que surgiu ao fechar a pilha tinha de fluir através de todo o anel de latão. Segue-se da concordância que surge dessa comparação que a corrente que foi induzida na quarta experiência, uma consequência apenas indireta da rotação, foi induzida pela corrente que foi gerada em todo o anel de latão por cada rotação (cujo novo desaparecimento não poderia ter influência, porque o circuito multiplicador foi aberto no momento desse desaparecimento). A rotação do próprio segmento de corrente móvel não teve então qualquer participação na corrente induzida. Encontramos então que as determinações fornecidas por Neumann são completamente confirmadas por essas experiências.

15.39 A Lei de Indução para as Correntes Indutoras com Contatos Deslizantes

O princípio geral da teoria matemática das correntes elétricas induzidas proposto por Neumann é um teorema que se refere às correntes e condutores como um todo, ou seja, refere-se apenas às suas intensidades e posições no início e ao final da indução considerada, e representa a soma desejada das forças eletromotrizes independentemente de qualquer consideração de todos os elementos interagindo individualmente e da consideração da transição gradual das correntes e condutores desde seus estados no início da indução até o final dela. A facilidade com que um teorema de tal simplicidade e generalidade permite a determinação real da soma das forças eletromotrizes procuradas, onde quer que seja aplicado, é evidente. As coisas são bem diferentes com a lei geral fundamental da ação elétrica, já que ela se destina a fornecer apenas uma regra que seja válida para todas as ações elementares, a partir da qual a soma desejada das forças eletromotrizes não vai ser obtida diretamente, mas pode ser encontrada apenas indiretamente a partir de uma soma de todas as ações elementares combinadas completamente. Quando estamos deduzindo uma lei de indução para um caso particular, chegamos principalmente a uma combinação completa de todas as ações elementares que o caso considerado assume. A dedução da lei de indução a partir da lei fundamental geral da ação elétrica necessita então uma atenção muito especial de todas as relações que devem ser determinadas em cada caso dado. Isso é o que acontece no caso das induções que os elementos de corrente exercem sobre outros elementos de corrente ou sobre outros elementos condutores no primeiro Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*,[658] assim como na dedução que Neumann forneceu no parágrafo 5 do Tratado citado, sendo que esse é o motivo pelo qual podemos exibir dois tipos essencialmente diferentes de ações elementares para esse caso, a saber, os tipos que um elemento de corrente exerce devido a seu movimento em relação ao elemento induzido, e os tipos que um elemento de corrente exerce devido a mudanças em sua intensidade de corrente.

Agora, Neumann também aplicou essa classificação das ações elementares ao caso de uma corrente indutora com *contato deslizante*. Essa corrente se divide em um segmento de corrente móvel e um segmento imóvel que possuem conexões condutoras em dois lugares, sendo que ao menos um deles é um contato deslizante. Isso implica facilmente que as ações

[658]Traduzido no Capítulo 6 na página 39.

elementares do segmento móvel de corrente pertencem ao primeiro tipo, a saber, o tipo [de ação] que os elementos de corrente exercem devido aos seus movimentos em relação aos elementos induzidos. Isso implica da mesma maneira que as ações elementares do segmento imóvel de corrente pertencem ao segundo tipo, a saber, o tipo [de ação] que os elementos de corrente exercem devido a mudanças em suas intensidades de corrente. Neumann calculou primeiro a parte da força eletromotriz originada apenas da primeira fonte, mas no exame subsequente ele adicionou a parte da força eletromotriz originada da outra fonte.

Um exame mais aprofundado só pode ser direcionado para saber se a compilação das ações elementares de acordo com os dois tipos dados é realmente exaustiva para o caso de uma corrente indutiva com um *contato deslizante*. De fato, ele seria realmente exaustivo apenas se os *elementos de corrente* induzidos fossem dados nesse caso, já que eles precisam pertencer ou aos segmentos de corrente móveis ou aos imóveis, o que significa que suas ações elementares precisam ser ou do primeiro tipo ou do último tipo, respectivamente. Contudo, se examinarmos mais atentamente no caso atual se todos os movimentos dados do fluido elétrico e suas variações podem realmente ser rastreados até os movimentos da eletricidade *nos elementos de corrente* e suas variações, então isso vai implicar facilmente que essa redução é sempre possível, *exceto no contato deslizante*. A saber, ocorre uma mudança *repentina* no movimento de todas as partículas elétricas no contato deslizante, pois aquelas que vão do segmento móvel de corrente para o segmento imóvel deixam de tomar parte no movimento da primeira componente, e aqueles que vão do segmento imóvel de corrente para o segmento móvel começam a tomar parte no movimento desse último segmento. Essa mudança repentina no movimento de todas as partículas elétricas no contato deslizante não pode ser tratada sob aquelas mudanças que ocorrem nos próprios elementos de corrente; pois essa mudança não ocorre nos elementos de corrente do segmento móvel de corrente (pois todas as partículas elétricas também precisam participar no movimento desses elementos de corrente, enquanto pertencem a essas componentes), nem nos elementos de corrente do segmento imóvel de corrente. Essa mudança repentina no movimento de todas as partículas elétricas no contato deslizante não pode, portanto, ser atribuída a mudanças nos movimentos dos próprios *elementos de corrente* e é, portanto, a fonte de um terceiro tipo de ação elementar, que deve ser diferenciado dos dois tipos de ações elementares associados aos elementos da corrente indutora. Logo perguntamos apenas se surgem ou não de fato forças eletromotrizes a partir da mudança repentina no movimento de todas as partículas elétricas no contato deslizante de acordo com a lei geral fundamental da ação elétrica. Vemos no primeiro caso que essas forças eletromotrizes ainda precisam ser adicionadas à soma das forças eletromotrizes calculadas por Neumann, já que ele não as incluiu em seus cálculos.

A dedução das forças eletromotrizes decorrentes da mudança repentina no movimento dos fluidos elétricos em um *contato deslizante* também não está incluída na dedução da lei da indução eletrovoltaica a partir da lei fundamental geral da ação elétrica dada na Seção 30 do primeiro Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*,[659] porque este último foi expressamente limitado à indução de *elementos de corrente*, de modo que apenas as mudanças no movimento dos fluidos elétricos que ocorrem nos elementos de corrente precisaram ser levadas em consideração. Contudo, quando existem mudanças no movimento do fluido elétrico que não ocorrem em qualquer elemento de corrente, mas apenas na *fronteira* entre dois elementos de corrente ou no instante em que o fluido elétrico vai de um elemento de corrente para outro (e um tal caso ocorre de fato em um *contato deslizante*), a lei de indução anterior vai necessitar de algum complemento se ela deve cobrir esse caso. Essa extensão pode ser

[659] Ver a Seção 6.30 na página 203.

facilmente fornecida, pois para fazer isso só é necessário que as massas elétricas que sofrem tais mudanças repentinas na velocidade de seus movimentos e os valores dessas mudanças sejam determinados com exatidão, para que a lei fundamental geral da ação elétrica também possa ser aplicada a elas. Dessa forma, para facilitar a compreensão, serão usadas as mesmas relações que foram usadas na dedução que foi fornecida na Seção 30 do primeiro Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*. Além disso, por brevidade, todas as disposições que são igualmente válidas aqui não serão desenvolvidas novamente, mas serão emprestadas de lá.

No que diz respeito à mudança na *massa*[660] que o fluido elétrico sofre devido a uma mudança repentina em seu movimento no contato deslizante, ela não pode ser expressa pelo produto $\pm\alpha e$, assim como ocorre para um elemento de corrente, onde α denota o comprimento do elemento de corrente,[661] em vez disso, α precisa ser substituído pelo comprimento do elemento de trajetória udt, que a eletricidade percorreria com a velocidade u, com a qual ela atravessa o contato deslizante, no elemento de tempo dt. Em contraste, assim como ocorreu na Seção 30 do Tratado citado, as massas induzidas podem ser representadas por $+\alpha'e'$ e $-\alpha'e'$, onde α' denota o comprimento do elemento induzido, enquanto que $\pm e'$ denota a eletricidade positiva ou negativa que está contida em uma unidade de comprimento do condutor induzido.

O movimento dessas massas indutoras $+eudt$ e $-eudt$, e as trajetórias que elas percorrem pode ser ilustrada da seguinte maneira, [Figura 8]:

[660]Isto é, mudança na quantidade de carga elétrica de um comprimento infinitesimal do condutor.

[661]Enquanto que $\pm e$ denota a carga positiva ou negativa por unidade de comprimento para esse elemento.

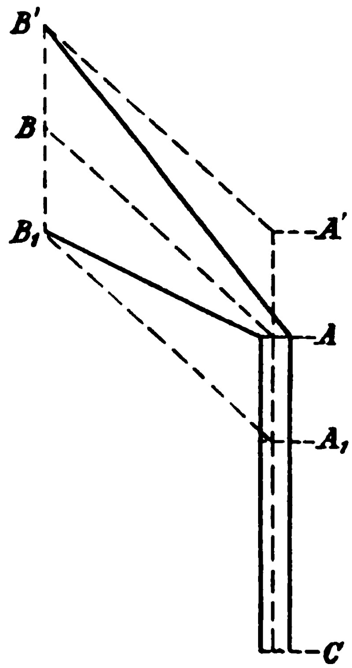


Fig. 8.

Seja A o contato deslizante, AB a parte adjacente da parte móvel de corrente, AC a parte adjacente da parte imóvel de corrente. O fluido elétrico vai então atravessar a trajetória $CA = AB$ com uma velocidade u durante o mesmo intervalo de tempo no qual o segmento móvel de corrente avança de A_1B_1 para AB ou de AB para $A'B'$. A composição dos dois movimentos fornece a trajetória B_1AC para a massa negativa (quando ela vai do segmento móvel de corrente para o segmento imóvel), e o segmento de trajetória B_1A será percorrido no mesmo intervalo de tempo que AC. Para a massa positiva, obtemos da mesma maneira a trajetória CAB', e os segmentos CA e AB' serão percorridos no mesmo intervalo de tempo. Assume-se nessa representação, para tornar mais clara a dedução, que a corrente faz uma curva repentina no contato deslizante A, indo da direção CA para a direção AB. Na realidade tal mudança repentina não ocorre, mas podemos supor que os dois elementos das trajetórias reais da corrente CA e AB definem algo próximo de uma linha reta, [como na Figura 9].

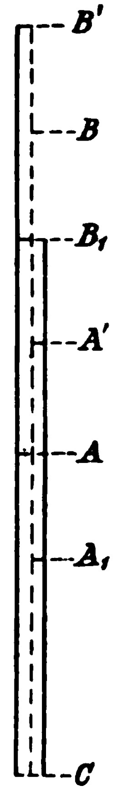


Fig. 9.

Se v denotar a velocidade do segmento móvel de corrente, então $A_1A = AA' = B_1B = BB' = vdt$, enquanto que o comprimento do elemento de corrente é $CA = AB = udt$. Isso vai então implicar que em dois elementos de tempo dt, sucessivos e iguais, a massa positiva vai percorrer as trajetórias $CA = udt$ e $AB' = (u+v)dt$, enquanto que a massa negativa vai percorrer as trajetórias $B_1A = -(u-v)dt$ e $AC = -udt$ nos mesmos elementos de tempo. A velocidade da eletricidade positiva muda então repentinamente em A de $+u$ para $+(u+v)$. Em contraste, a velocidade da eletricidade negativa muda repentinamente de $-(u-v)$ para $-u$ em A. Se essa mudança na velocidade ocorrer de acordo com a lei da continuidade, poderemos denotar então o tempo durante o qual essa transição ocorre por τ, embora ele seja bem pequeno. Denotamos a velocidade da eletricidade positiva em qualquer instante $d\sigma$ ao final do período de tempo σ dentro do intervalo de tempo τ por $+(u+v\cdot\sigma/\tau)$, da mesma forma denotamos a velocidade da eletricidade negativa por $-(u+v\cdot\sigma/\tau-v)$. Além disso, assim como na Seção 30 do Tratado citado, fazemos com que ϑ denote o ângulo que a direção de $+u$ (isto é, AB) faz com $A\alpha' = r$, enquanto que ϑ' denota o ângulo que a direção na qual a eletricidade positiva se desloca com a velocidade $+u'$ no elemento imóvel induzido α' faz com a linha $A\alpha'$ alongada, enquanto que ω denota o ângulo entre os dois planos que são traçados através de $A\alpha'$ paralelos às direções $+u$ e $+u'$. Finalmente, r_1 denota a distância da massa $+eudt$ até a massa $+\alpha'e'$, r_2 denota a distância da massa $-eudt$ até a massa $-\alpha'e'$, r_3 denota a distância da massa $+eudt$ até a massa $-\alpha'e'$, enquanto que r_4 denota a distância da massa $-eudt$ até a massa $+\alpha'e'$, que são todas iguais a r no instante que está sendo considerado, mas elas não permanecem as mesmas com os movimentos diferentes dessas massas. A lei geral fundamental da ação elétrica implica então que a *diferença* nas forças que atuam sobre a eletricidade *positiva* e *negativa* no elemento α', da qual depende a *indução*, será:

$$
\begin{aligned}
-\frac{a^2}{16}\cdot\frac{eudt\cdot\alpha' e'}{r^2}\Bigg\{&\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)\\
&-2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\Bigg\}\ .
\end{aligned}
$$

Essa equação difere da expressão para a diferença para um elemento de corrente indutor que foi deduzida na Seção 30 do Tratado citado (pág. 204)[662] apenas pelo fato de que $eudt$ aparece no lugar de αe. Além disso encontramos, na maneira que foi fornecida aqui, que para o nosso caso:

$$
\begin{aligned}
\frac{dr_1}{dt} &= -\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\cos\vartheta+u'\cos\vartheta'\ ,\\
\frac{dr_2}{dt} &= +\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\cos\vartheta-u'\cos\vartheta'\ ,\\
\frac{dr_3}{dt} &= -\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\cos\vartheta-u'\cos\vartheta'\ ,\\
\frac{dr_4}{dt} &= +\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\cos\vartheta+u'\cos\vartheta'\ ,
\end{aligned}
$$

o que difere das equações que foram fornecidas na obra citada apenas pelo fato que a velocidade da eletricidade positiva indutora foi colocada como $+(u+v\cdot\sigma/\tau)$, em vez de $+u$, a velocidade da eletricidade negativa indutora foi colocada como $-(u+v\cdot\sigma/\tau-v)$, em vez de $-u$, e o termo que dependia do movimento do elemento induzido α' foi eliminado. Temos então:[663]

$$
\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)=+4\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-\frac{1}{2}v\right)v\cos\vartheta^2\ .
$$

Obtemos a derivada de segunda ordem a partir disso da maneira que foi dada na obra citada quando consideramos o fato que aqui u, u', e v possuem valores constantes dados, a saber:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2r_1}{dt^2} &= +\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\ \mathrm{sen}\,\vartheta\frac{d\vartheta_1}{dt}-u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\frac{d\vartheta_1'}{dt}-\frac{v}{\tau}\cos\vartheta\ ,\\
\frac{d^2r_2}{dt^2} &= -\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\ \mathrm{sen}\,\vartheta\frac{d\vartheta_2}{dt}+u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\frac{d\vartheta_2'}{dt}+\frac{v}{\tau}\cos\vartheta\ ,\\
\frac{d^2r_3}{dt^2} &= +\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\ \mathrm{sen}\,\frac{d\vartheta_3}{dt}+u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\frac{d\vartheta_3'}{dt}-\frac{v}{\tau}\cos\vartheta\ ,\\
\frac{d^2r_4}{dt^2} &= -\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\ \mathrm{sen}\,\vartheta\frac{d\vartheta_4}{dt}-u'\,\mathrm{sen}\,\vartheta'\frac{d\vartheta_4'}{dt}+\frac{v}{\tau}\cos\vartheta\ .
\end{aligned}
$$

Temos então:

[662] Pág. 197 do Vol. III das *Obras* de Weber. Ver a pág. 204 dessa tradução em português.

[663] A expressão $\cos\vartheta^2$ deve ser entendida como $\cos^2\vartheta$.

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\\
=+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\operatorname{sen}\vartheta&\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{d\vartheta_3}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)\\
&-u'\operatorname{sen}\vartheta'\left(\frac{d\vartheta'_1}{dt}+\frac{d\vartheta'_2}{dt}-\frac{d\vartheta'_3}{dt}-\frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)\\
&-v\operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)-4\frac{v}{\tau}\cos\vartheta\ ,
\end{aligned}
$$

e encontramos da maneira que foi dada na obra citada que:

$$
\begin{aligned}
r\frac{d\vartheta_1}{dt}&=+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\operatorname{sen}\vartheta-u'\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega\ ,\\
r\frac{d\vartheta_2}{dt}&=-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\operatorname{sen}\vartheta+u'\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega\ ,\\
r\frac{d\vartheta_3}{dt}&=+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\operatorname{sen}\vartheta+u'\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega\ ,\\
r\frac{d\vartheta_4}{dt}&=-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\operatorname{sen}\vartheta-u'\operatorname{sen}\vartheta'\cos\omega\ ,\\
r\frac{d\vartheta'_1}{dt}&=-u'\operatorname{sen}\vartheta'+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\operatorname{sen}\vartheta\cos\omega\ ,\\
r\frac{d\vartheta'_2}{dt}&=+u'\operatorname{sen}\vartheta'-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\operatorname{sen}\vartheta\cos\omega\ ,\\
r\frac{d\vartheta'_3}{dt}&=+u'\operatorname{sen}\vartheta'+\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v\right)\operatorname{sen}\vartheta\cos\omega\ ,\\
r\frac{d\vartheta'_4}{dt}&=-u'\operatorname{sen}\vartheta'-\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\operatorname{sen}\vartheta\cos\omega\ .
\end{aligned}
$$

Se substituirmos esses valores, obteremos então:

$$
\begin{aligned}
r\left(\frac{d\vartheta_1}{dt}+\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{d\vartheta_3}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)&=+2v\operatorname{sen}\vartheta\ ,\\
r\left(\frac{d\vartheta'_1}{dt}+\frac{d\vartheta'_2}{dt}-\frac{d\vartheta'_3}{dt}-\frac{d\vartheta'_4}{dt}\right)&=0\ ,\\
r\left(\frac{d\vartheta_2}{dt}+\frac{d\vartheta_4}{dt}\right)=-2\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-v\right)\operatorname{sen}\vartheta&\ ,
\end{aligned}
$$

consequentemente:[664]

[664] A expressão $\operatorname{sen}\vartheta^2$ deve ser entendida como $\operatorname{sen}^2\vartheta$.

$$
\begin{aligned}
& r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right) \\
&= +4\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-\frac{1}{2}v\right)v\operatorname{sen}\vartheta^2-4\frac{rv}{\tau}\cos\vartheta \ ,
\end{aligned}
$$

o que fornece finalmente a *diferença* entre as forças que atuam na eletricidade *positiva* e *negativa* no elemento α', da qual depende a *indução*, a saber:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{a^2}{16}\cdot\frac{eudt\cdot\alpha'e'}{r^2}\left\{\left(\frac{dr_1^2}{dt^2}-\frac{dr_2^2}{dt^2}+\frac{dr_3^2}{dt^2}-\frac{dr_4^2}{dt^2}\right)\right. \\
& \qquad\left.-2r\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{d^2r_2}{dt^2}+\frac{d^2r_3}{dt^2}-\frac{d^2r_4}{dt^2}\right)\right\} \\
= \ & -\frac{a^2}{4}\cdot\frac{eudt\cdot\alpha'e'}{r^2}\left(u+\frac{\sigma}{\tau}v-\frac{1}{2}v\right)v\left(\cos\vartheta^2-2\operatorname{sen}\vartheta^2\right) \\
& \qquad -\frac{a^2}{2}\frac{eudt\cdot\alpha'e'}{r}\frac{v}{\tau}\cos\vartheta \ .
\end{aligned}
$$

Se multiplicarmos essa expressão pelo elemento de tempo $d\sigma$ e a integrarmos de $\sigma = 0$ até $\sigma = \tau$, obteremos então o valor da integral dessa diferença ao longo da duração da transição τ, que é igual a:

$$
-\frac{a^2}{4}\frac{eudt\cdot\alpha'e'}{r^2}\cdot uv\tau\cdot\left(\cos\vartheta^2-2\operatorname{sen}\vartheta^2\right)-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{eudt\cdot\alpha'e'}{r}\cdot v\cos\vartheta \ ,
$$

ou, quando τ é infinitamente pequeno (isto é, quando a mudança na velocidade do fluido elétrico no contato deslizante acontece muito rapidamente), ela é igual a:

$$
-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{eudt\cdot\alpha'e'}{r}\cdot v\cos\vartheta \ .
$$

Se colocarmos agora $aeu = i$ nessa [expressão] (como foi feito na *obra citada*, pág. 209)[665] e multiplicarmos por $\cos\vartheta'/e'$, isso fornecerá então a força *eletromotriz* exercida sobre o elemento induzido α' no elemento de tempo dt pela eletricidade que passou pelo contato deslizante, que é igual a:

$$
-\frac{1}{2}\frac{\alpha' vdt}{r}\cdot ai\cos\vartheta\cos\vartheta' \ .
$$

Agora, no entanto,

$$
vdt = \alpha
$$

é o comprimento do elemento condutor que entrou recentemente no circuito no contado deslizante durante o tempo dt, no qual a intensidade de corrente cresce então de 0 para

[665] Pág. 202 do Vol. III das *Obras* de Weber.

i. Entretanto, com o aumento na intensidade de corrente di/dt no elemento α, a força *eletromotriz* que é exercida por esse elemento sobre α' é (*obra citada*, pág. 209)[666]

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha\alpha'}{r}a\cos\vartheta\cos\vartheta'\frac{di}{dt}\ ,$$

consequentemente, a força eletromotriz quando a intensidade de corrente cresce de 0 para i será igual a:

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}ai\cos\vartheta\cos\vartheta'\ .$$

Finalmente, se colocarmos nisso α igual a seu valor vdt, veremos então que a força eletromotriz que é exercida sobre o elemento induzido durante o elemento de tempo dt devida à eletricidade que atravessa o contato deslizante será igual em valor, assim como em direção, à força eletromotriz que é exercida sobre o elemento induzido α' pelos elemento de corrente ai recém-entrando no contato deslizante durante o mesmo elemento de tempo dt, e que para incluir a primeira força no cálculo, temos apenas de dobrar a última força. Contudo, como Neumann provou, essa duplicação é a condição para que a lei de indução que é deduzida da lei geral fundamental da ação elétrica concorde com os resultados do princípio geral de Neumann da teoria matemática das correntes induzidas e com a experiência, mesmo no caso de um contato deslizante. Portanto, essa concordância é comprovada aqui. A mudança repentina no movimento de todas as partículas elétricas que ocorre no contato deslizante é então a fonte das forças eletromotrizes que Neumann não incluiu em seus cálculos para a dedução da lei de indução a partir da lei geral fundamental da ação elétrica, e se adicionarmos a soma das forças eletromotrizes que surgem dessa fonte à soma fornecida por Neumann, encontraremos então que desaparece completamente a contradição que parecia existir entre os resultados da lei geral fundamental da ação elétrica e o princípio geral de Neumann da teoria matemática das correntes induzidas, o que era para ser provado.

Finalmente, os resultados de todas as experiências que foram descritas na Seção 15.38 podem ser previstos com as leis que foram desenvolvidas aqui. A saber, se R denotar o raio do círculo que é descrito pelo contato deslizante, o qual difere apenas ligeiramente do raio $R_|$ do círculo induzido, e se m for o número dos últimos,[667] enquanto que n é o número de rotações do segmento móvel de corrente por unidade de tempo, e se i for a intensidade da corrente indutora, e se finalmente por brevidade colocarmos:

$$R_0=\frac{R^2R'^2}{(R^2+R'^2)^{3/2}}\cdot\left\{1+\frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{R^2+R'^2}\right)^2+\frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{R^2+R'^2}\right)^4+...\right\}\ ,$$

então a lei anterior vai implicar em que:

1. A soma das forças eletromotrizes no segmento móvel de corrente é igual a:

$$+mn\pi^2\cdot aiR_0\ .$$

2. A soma das forças eletromotrizes sobre o segmento de corrente que entra gradualmente no contato deslizante (quando a ação de seu desaparecimento repentino é cancelada pela abertura instantânea do circuito induzido com cada rotação, como foi o caso na primeira experiência de Neumann) é igual a:

[666] Pág. 202 do Vol. III das *Obras* de Weber.

[667] Ou seja, o número de círculos, espiras ou enrolamentos induzidos.

$$-mn\pi^2 \cdot aiR_0 \ .$$

3. A soma das forças eletromotrizes sobre a eletricidade que passa pelo contato deslizante devido à mudança repentina em sua velocidade no contato deslizante é igual a:

$$-mn\pi^2 \cdot aiR_0 \ .$$

Para a dedução desse valor, ver o *Anexo E* [Anexo 15.39]. A força eletromotriz total para todas as experiências que foram descritas na Seção 15.38 pode ser facilmente combinada a partir dessas somas parciais. Obtemos então:

a) A força eletromotriz para a primeira das experiências de Neumann pela adição de todas as três somas parciais, o que é igual a:

$$-mn\pi^2 \cdot aiR_0 \ .$$

A mesma coisa vale para as duas repetições dessa experiência, desde que coloquemos m igual a seu valor apropriado em cada experimento. O sinal negativo significa que a corrente no círculo induzido tem direção oposta à corrente no segmento circular de corrente indutora quando esse último aumenta pelo elemento que entrou recentemente pelo contato deslizante.

b) Para a segunda experiência de Neumann, onde a força eletromotriz sobre o elemento de corrente que entrou recentemente no contato deslizante era cancelada por seu desaparecimento ao final de cada rotação, a soma parcial em (2) desaparece, e adicionamos apenas as somas parciais em (1) e (3), o que fornece uma força eletromotriz que é:

$$= 0 \ .$$

A mesma coisa acontece para a repetição dessa experiência, assim como para sua modificação, na qual a mesma ação, que foi produzida por um desaparecimento repentino ao final da rotação de todos os novos elementos de corrente que entraram gradualmente durante uma rotação, seria obtida por uma divisão da corrente.

c) Tudo o que sobra então são as experiências nas quais a corrente indutora que atravessa um condutor circular sofre uma mudança na intensidade seja de 0 para i ou de i para 0, e nas quais essa corrente ou não flui de forma alguma através do segmento móvel do condutor ou esse segmento não estava em movimento enquanto a corrente estava fluindo. Para essa experiência, as somas parciais em (1) e (3) se cancelam completamente, e o que sobra como força eletromotriz é apenas a soma parcial em (2), na qual colocamos n igual ao valor 1, de tal forma que a soma é igual a:

$$-m\pi^2 \cdot aiR_0 \ .$$

O sinal negativo significa que quando o circuito é fechado, a corrente no círculo induzido tem a direção oposta em relação à corrente no círculo indutor.

Todas essas forças eletromotrizes estão expressas nas unidades de força gerais da mecânica e, a partir da Seção 15.27, elas podem ser convertidas na unidade absoluta que foi definida na Seção 15.26 ao multiplicá-las por $c/4 = 1/a$. O fator a desconhecido na expressão para essas forças vai desaparecer por essa redução, e o valor reduzido pode ser determinado pela medição. Além disso, as expressões anteriores fornecem as intensidades médias da força eletromotriz ou de seu valor integral por unidade de tempo em todas as experiências nas quais a ação perdurou uniformemente. Em contraste, para as experiências nas quais a ação foi apenas momentânea, as expressões anteriores fornecem o valor integral da força eletromotriz ao longo da duração total da ação. Se T_0 denotar geralmente o tempo no qual é válido o valor integral da força eletromotriz (de tal forma que colocamos $T_0 = 1$ em todas as experiências nas quais a ação perdurou uniformemente), então obteremos a intensidade média da força eletromotriz ao dividir o valor integral que foi encontrado por T_0, e ela pode então ser representada por:

$$\pm mn\pi^2 \cdot \frac{R_0}{T_0} \cdot i \ ,$$

para (1), (2), e (3), na qual m é o número de círculos induzidos e n o número de rotações. Se dividirmos essa intensidade média da força eletromotriz pela resistência do circuito induzido, como encontrada de acordo com a unidade que foi definida na Seção 15.26, obteremos então a intensidade média da corrente induzida. Contudo, descobriu-se que a resistência pode ser representada por:

$$p\frac{R'}{T'} \ ,$$

nas unidades dadas, onde p é um número puro, mas R', assim como R_0, referem-se à unidade de comprimento escolhida, e T', assim como T_0, referem-se à unidade de tempo escolhida. Consequentemente, isso vai fornecer a seguinte expressão para a intensidade média da corrente induzida:

$$\pm\frac{mn\pi^2}{p} \cdot \frac{R_0}{R'} \cdot \frac{T'}{T_0} \cdot i \ ,$$

na qual $(mn\pi^2/p)\cdot(R_0/R')\cdot(T'/T_0)$ é um número puro que é calculado a partir das medições e fornece a razão da intensidade da corrente induzida para a intensidade da corrente indutora. Dessa maneira, também é possível prever a intensidade da corrente induzida nas unidades dadas.

Anexos

A - Descrição de um Indutor Magnético para ser Usado em Medições de Resistência

Nas experiências para comparar as resistências de dois condutores, foi usado um indutor magnético como um motor elétrico que foi configurado da seguinte forma. Duas barras magnéticas cilíndricas com 300 milímetros de comprimento e 15 milímetros de espessura foram fixadas em um tubo de madeira de tal maneira que ficassem de frente uma para a outra com polos iguais (os polos Norte). Contudo, para que não se enfraquecessem mutuamente nessa posição, elas foram separadas uma da outra por um intervalo de 150 milímetros. O tubo de madeira AB (Figura 10),[668] juntamente com os ímãs sn e sn que foram incluídos nele, podia ser levantado e abaixado perpendicularmente por um dispositivo de alavanca $CDEF$ acionado com o pé e empurrado para frente e para trás através através da cavidade de uma bobina indutora GG, que era ligada fixamente à parte superior da estrutura $HHHH$, que estava aparafusada ao solo.

[668]Ver a Nota de rodapé 528 na página 328. Uma outra imagem dessa Figura 10 aparece nessa Nota de rodapé, a saber:

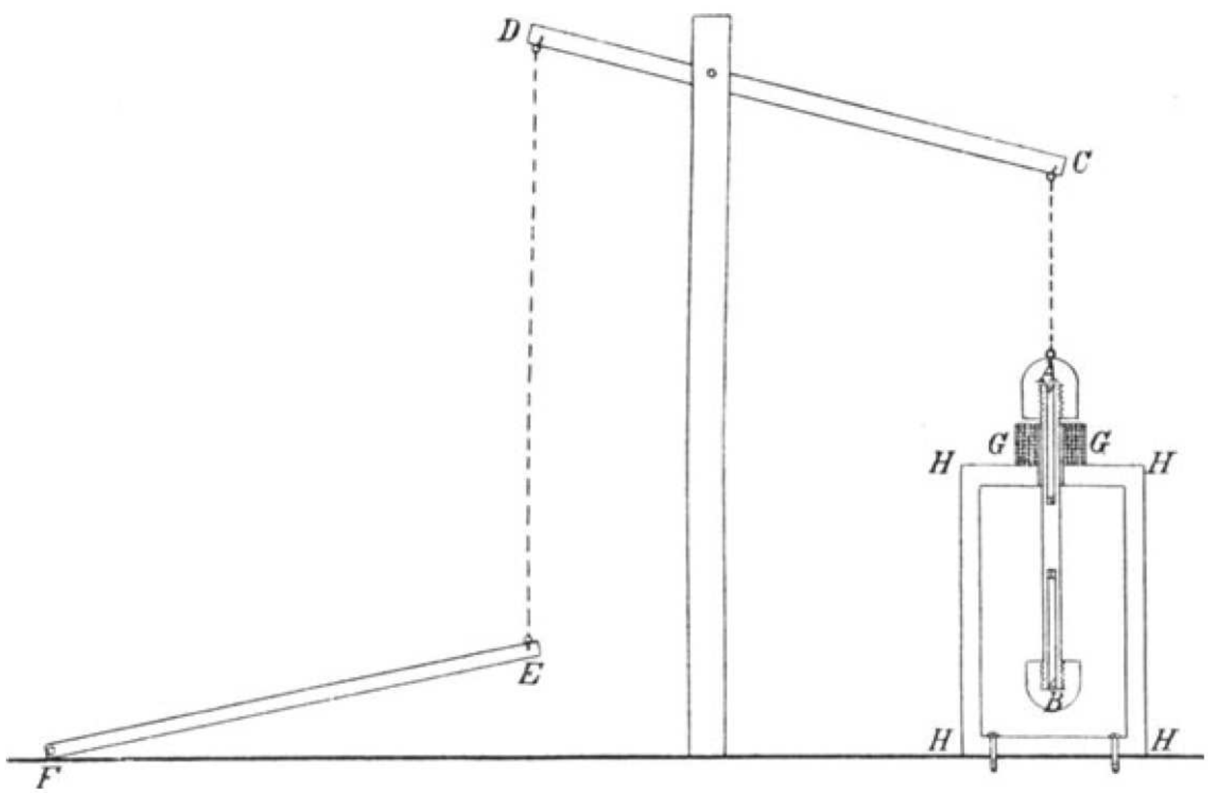


Fig. 10.

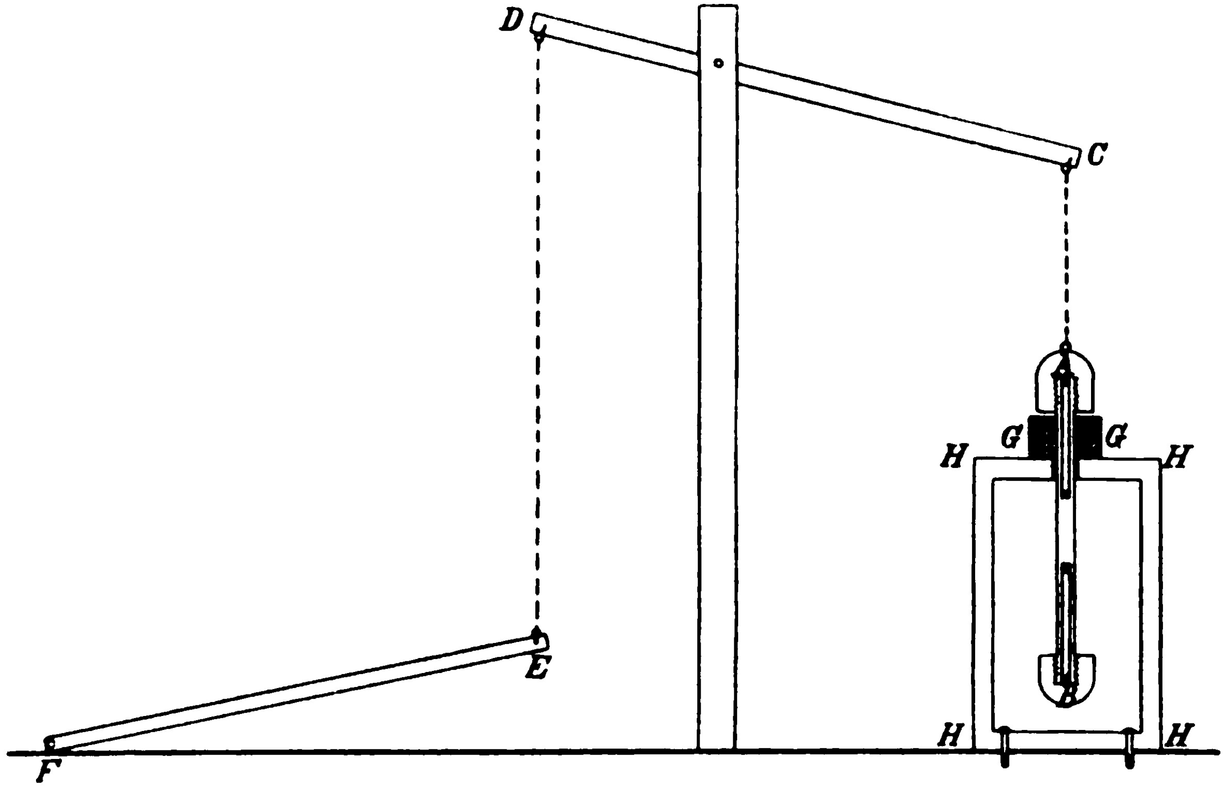


Fig. 10.

A Figura 10 representa uma seção vertical desse instrumento. Os polos Sul das duas barras magnéticas são denotados por s e os polos Norte por n.[669] O tubo de madeira no qual estão fixadas as barras magnéticas é fechado nas duas extremidades com tampas aparafusadas. Se o tubo for empurrado para baixo na bobina indutora até que, como na Figura 10, a tampa superior toque a bobina indutora GG, então o centro da barra magnética superior estará no meio da bobina indutora. Em contraste, se o tubo for empurrado para cima até que a tampa inferior toque a estrutura HH ao qual está ligada a bobina indutora GG, então o meio da barra magnética inferior estará no centro da bobina indutora. A indução será nula nessas duas posições extremas pois vão se cancelar as forças eletromotrizes dos polos que estão colocados simetricamente nos dois lados da bobina indutora quando ambos se deslocam para cima e para baixo simultaneamente. A indução aconteceu no mesmo sentido durante todo o deslocamento do tubo de baixo para cima e era mais forte quando as duas extremidades Norte da barra magnética atravessaram a bobina indutora. A indução ocorreu no sentido oposto durante todo o deslocamento na direção oposta de cima para baixo. Cada um desses movimentos é denominado um impulso de indução[670] e é positivo ou negativo, dependendo se o impulso é para cima ou para baixo, respectivamente. O fato de que cada impulso de indução começou e terminou em uma posição na qual a indução era nula tinha o objetivo de fazer com que o valor total da indução que correspondia a um impulso de indução fosse um máximo e permanecesse inalterado, mesmo quando essas posições extremas não eram exatamente alcançadas. O simples deslocamento pelo qual um

[669] O polo Sul do ímã superior está perto da letra A, enquanto que o polo Sul do ímã inferior está perto da letra B, de tal forma que os polos Norte dos dois ímãs estão voltados um para o outro no centro do tubo de madeira AB.

[670] Ver a Nota de rodapé 530 na página 328.

tal impulso de indução total era alcançado podia ser realizado muito rapidamente e era, portanto, especialmente adequado para medições nas quais os impulsos de indução tinham de acontecer nos momentos em que a agulha do galvanômetro passava por sua posição de equilíbrio. Para poder observar esses momentos com bastante precisão, foi feito o arranjo de que o impulso de indução positivo, ou seja, o movimento de baixo para cima, é obtido pelo abaixamento do pé na alavanca EF, enquanto o impulso de indução negativo, ou seja, o movimento de cima para baixo, é obtido pelo peso do próprio indutor assim que o pé abaixado é levantado novamente. Dessa maneira, o observador que seguia a trajetória da agulha do galvanômetro com o telescópio podia ver o impulso de indução no instante exato quando a agulha passava por sua posição de equilíbrio sem abandonar o telescópio.

B - Descrição do Galvanômetro

A seguinte descrição foi fornecida pelo mecânico Leyser em Leipzig,[671] que já havia construído vários desses instrumentos e lhes deu o preço referido a seguir. O galvanômetro também foi projetado de tal forma que as intensidades das correntes que foram observadas com ele pudessem ser determinadas nas unidades absolutas que foram estabelecidas na Seção 15.10, sendo que para essa finalidade são usados dois multiplicadores que podem ser deslocados sobre hastes de medida a diferentes distâncias da agulha. Como esse arranjo não estava necessariamente ligado ao instrumento e não foi usado aqui, não será mais mencionado na próxima descrição.[672]

[671]Ver a Nota de rodapé 124 na página 66.
[672]Uma outra reprodução das Figuras 11, 12 e 13 aparece na página 441.

Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13.

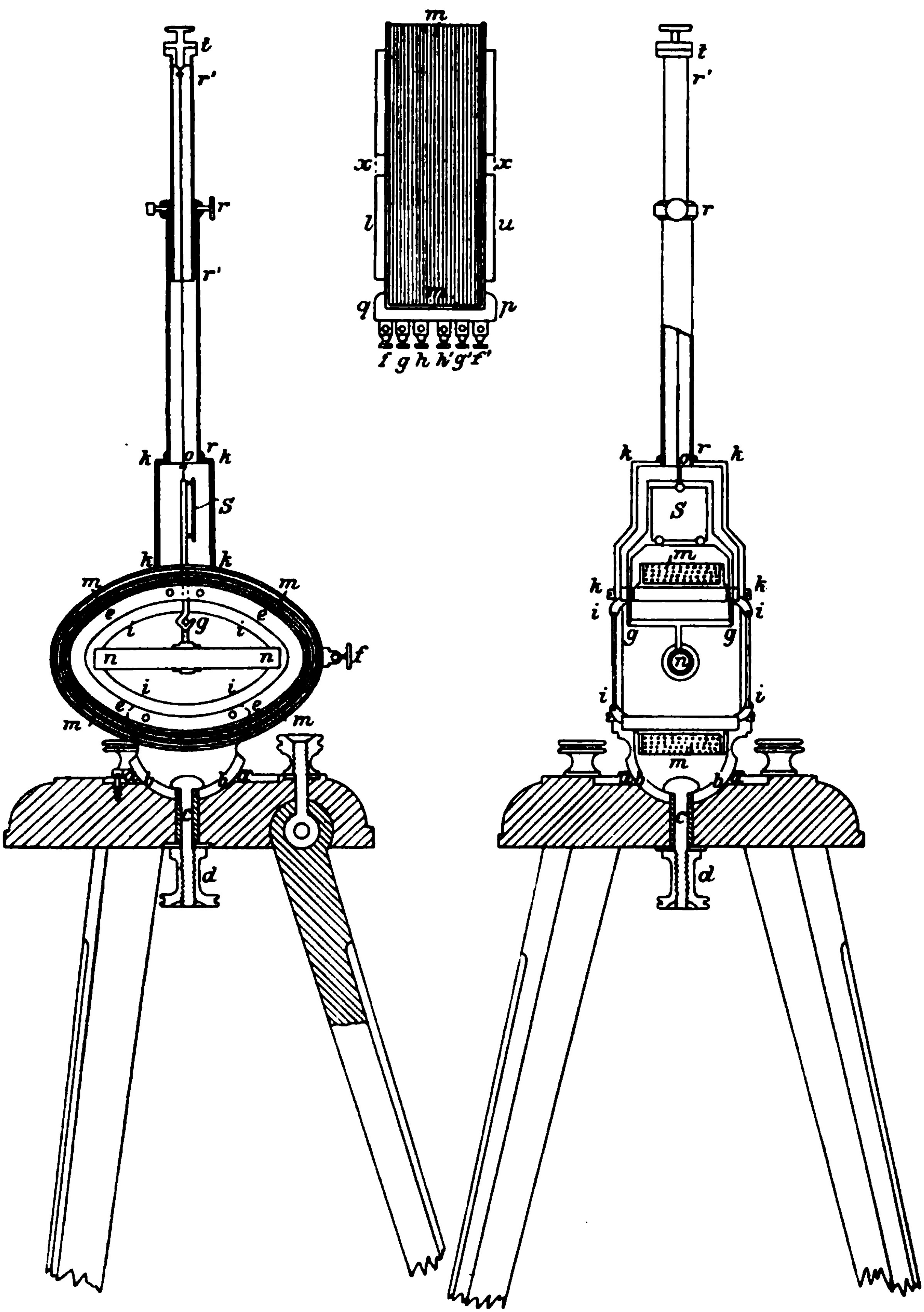
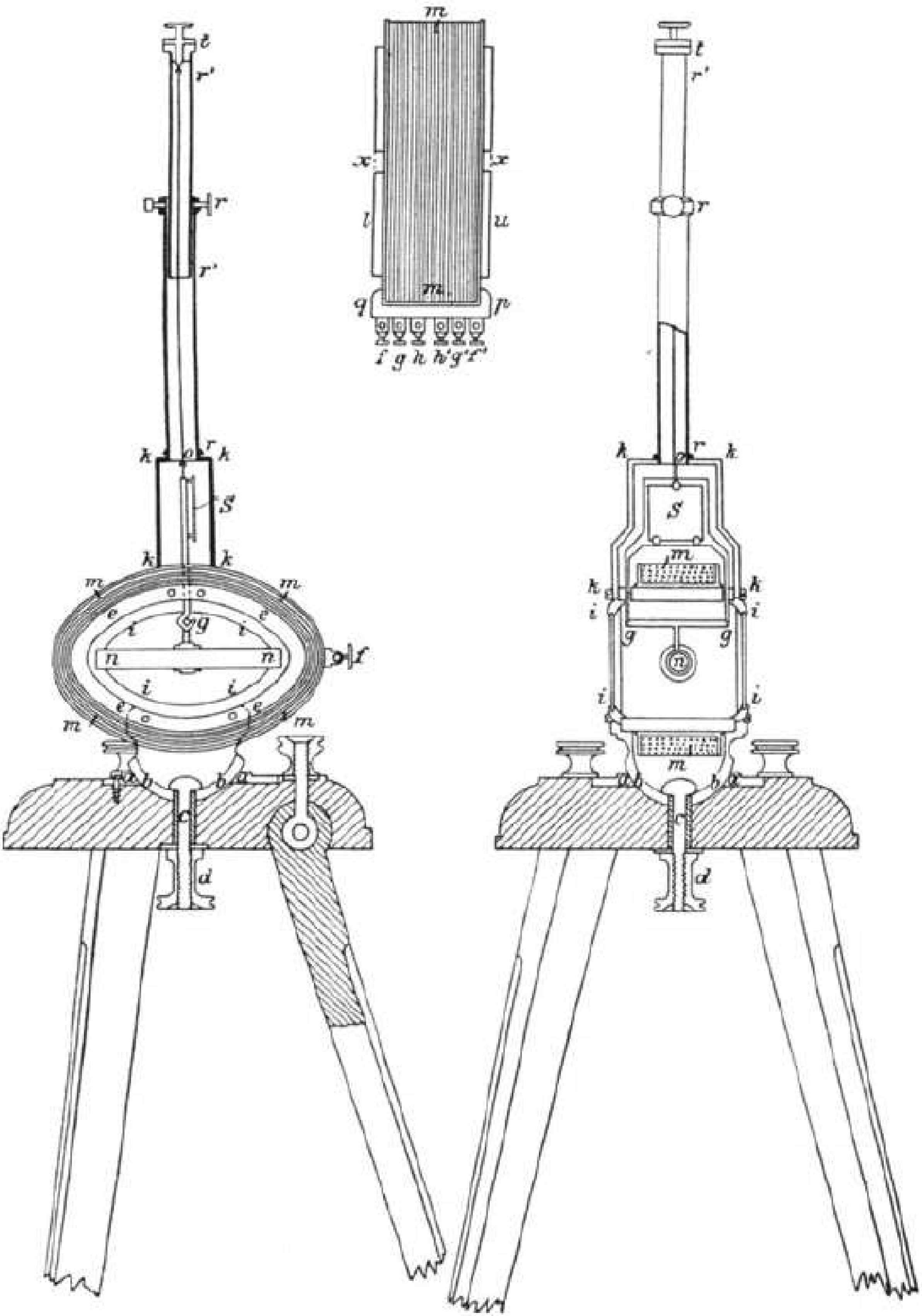


Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13.



Os desenhos anexos representam o galvanômetro na quinta parte de seu tamanho linear real, ou seja, a Figura 11[673] mostra uma seção longitudinal do galvanômetro na direção do meridiano magnético. A Figura 13 mostra uma seção dele que é perpendicular à direção do meridiano magnético. Exceto pela agulha magnética, foram evitados cuidadosamente ferro e aço na construção do instrumento, de tal forma que algumas de suas partes são de cobre, e algumas delas são de latão sem ferro. A própria estrutura sobre a qual está apoiado o instrumento é um disco de madeira que possui três pés móveis ligados a ela cujas extremidades convergem a pontas metálicas, da forma dos tripés que são usados para instrumentos de medida. Em seguida, uma placa metálica circular aa é embutida nesse disco de madeira cujo centro perfurado é esférico, de tal forma que uma superfície esférica apropriada bb pode ser instalada em todas as direções e presa à placa circular aa por meio de um parafuso c e uma porca d. Agora, o próprio galvanômetro é preso à superfície esférica bb mencionada anteriormente. Para essa finalidade, a superfície esférica bb é continuada para cima até duas placas laterais paralelas, que são sugeridas pelas linhas pontilhadas na Figura 11, sendo elas vistas claramente na Figura 13. Entre essas placas laterais há um amortecedor de cobre $eeee$, que é curvado na forma de um anel oval voltando a si mesmo com 80 milímetros de largura e 8 milímetros de espessura que é preso a cada lado com dois parafusos. A seção reta desse amortecedor é uma elipse, sendo que a agulha flutua sobre seu eixo maior. Uma estrutura feita de finas lâminas de latão pode ser empurrada lateralmente sobre esse amortecedor, que, provido de paredes verticais, acomoda uma quantidade de fio de cobre isolado enrolado ao redor dela e, portanto, representa um multiplicador $mmmm$ acima do amortecedor. As voltas do fio desse multiplicador circulam o amortecedor elipticamente e consistem em nove camadas concêntricas que estão uma acima da outra, sendo que cada camada tem 80 enrolamentos que são colocados um ao lado do outro; o fio tinha uma espessura de aproximadamente 2/3 milímetro. Nesse caso, o arranjo foi feito para poder usar o multiplicador ora integralmente, ora parcialmente, em três divisões de três camadas. Essas três divisões também podem ser conectadas de forma que sejam atravessadas simultaneamente pela mesma corrente que se divide entre elas. A disposição que é dada ao multiplicador para este propósito é evidente na Figura 12, que mostra o multiplicador visto de cima; qp é uma barra transversal de buxo presa às paredes salientes da estrutura para o multiplicador mm. A primeira seção do multiplicador começa com a primeira — ou mais baixa — camada dos enrolamentos, que começa no botão f. Ela vai ao redor do amortecedor de cobre em direção ao seu lado direito u e define assim a primeira camada. Ela vira então para o lado esquerdo l, e dessa forma define a segunda camada. A partir daí, ela vai mais uma vez para o lado direito u, criando assim a terceira camada, cuja extremidade se encontra no botão f'. Agora, em completa analogia com a maneira que a primeira seção do multiplicador definia três camadas que começavam em f e terminavam em f', a segunda e terceira seções possuem cada uma três camadas. Contudo, o começo da segunda seção é em g, enquanto seu fim é em g' e, finalmente, o começo da terceira seção é em h, enquanto seu fim é em h'. (Esses seis botões de cobre são perfurados transversalmente e inseridos firmemente na trave de buxo qp com parafusos, mas isolados entre si. Com esse arranjo para o multiplicador, vemos facilmente que as três seções em que consiste o multiplicador podem ser combinadas de maneiras diferentes dependendo da maneira

[673] Ver a Nota de rodapé 532 na página 328.

com que os botões são ligados por fios.) Encontramos uma pequena estrutura $kkkk$ sobre o amortecedor $eeee$ que é ligada a ele com parafusos, sendo que um de seus lados abertos é fechado com uma placa metálica macia, enquanto que o outro [lado] é fechado com uma placa de vidro com superfícies externas paralelas, que representam então um espaço retangular fechado. Um tubo rr é montado acima dela, o qual pode ser alongado ou encurtado por um tubo graduado ajustável $r'r'$. Esse tubo de extensão $r'r'$ termina com um círculo de torção t cuja construção é explicada diretamente nas figuras. Esse círculo de torção tem um pequeno ilhó[674] no qual é fixado a linha de seda que é dependurada dentro do tubo combinado e que carrega uma placa metálica retangular leve em um gancho o, na qual é presa por três parafusos um espelho plano s. Esta placa quadrangular continua para baixo através de dois recortes (indicados por xx na Figura 12) feitos lateralmente no amortecedor $eeee$, como duas hastes macias, cujas extremidades aparecem como ganchos gg nas figuras. A agulha magnética nn foi inserida nesses ganchos, no final dos quais é circundada no meio por uma luva estreita e provida de um pequeno cordão transversal preso a essa luva, cujas extremidades se afunilam em um formato cilíndrico e são inseridas no pequeno gancho gg. A posição da agulha em relação a seu tubo foi regulada pelo tubo de extensão $r'r'$. A torção no filamento pode ser eliminada ao girar o círculo de torção t. Contudo, todo o sistema do instrumento pode ser posicionado verticalmente por meio do movimento esférico permitido pela superfície esférica bb com a placa aa, e esse posicionamento é mais fácil quando prendemos o tubo de extensão nas proximidades do círculo de torção e realizamos o posicionamento ao apertar bem levemente o parafuso d, e a posição correta do instrumento é estabelecida então ao apertar o parafuso d. As aberturas dos dois lados do amortecedor $eeee$ devem ser fechadas com a inserção de molduras de madeira envidraçadas, cuja seção transversal é ilustrada em iii. O preço do instrumento com a possibilidade de medições absolutas é de 80 táleres. Sem as mesmas custa 60 táleres.[675]

C - Visão Geral dos Métodos de Observação para Medições Galvânicas quando Incluímos a Influência do Amortecimento

Nas medições galvânicas, geralmente é levada em consideração apenas a corrente galvânica que, excitada fora do multiplicador, passa por ele para ser medida pela deflexão da agulha [imantada]. Se essa corrente for *constante* e a deflexão da agulha não tiver sido medida até que ela tenha chegado ao *repouso*, então a deflexão da agulha iria depender de fato só dessa corrente. Contudo, se a corrente não for constante ou se durar apenas por um tempo muito curto, e se observarmos a deflexão antes da agulha atingir o repouso (por exemplo, se observarmos a primeira elongação da agulha), então estarão presentes outras correntes, além da corrente a ser medida, que frequentemente possuem uma grande influência sobre as observações que não devem ser ignoradas. Essas correntes se originam do movimento da agulha magnética, a qual *induz* correntes galvânicas em todos os condutores ao redor cujas intensidades serão proporcionais ao magnetismo da agulha e à velocidade com que ela se

[674] Ver a Nota de rodapé 103 na página 53.

[675] Ver a Nota de rodapé 378 na página 237.

desloca, e cujas direções sempre serão tais que suas reações sobre a agulha vão diminuir ou *amortecer* seu movimento já existente.

Uma tal corrente será induzida pelo movimento da agulha magnética, *em primeiro lugar*, no próprio multiplicador, e será mais forte quando forem maiores a seção reta metálica de todo o multiplicador e a fração que a resistência do multiplicador representa na resistência do circuito completo. Ela será a mais intensa de todas quando o multiplicador for fechado e a mais fraca quando o circuito do multiplicador estiver aberto.

Em segundo lugar, uma tal corrente também será excitada pela agulha magnética móvel em todas as partes metálicas do instrumento, e a reação sobre a agulha magnética será especialmente forte quando placas metálicas são encontradas na direção do meridiano magnético próximas à agulha ou quando a agulha é cercada por um anel metálico vertical, sendo esse o motivo pelo qual tal anel, quando ele for instalado intencionalmente com essa finalidade, é chamado de um *amortecedor*. Para a maioria das medições, a aplicação de um tal amortecedor não apenas torna muito mais fáceis as observações, mas também em geral contribui para uma maior precisão delas. Ver os "*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*," pág. 18.[676,677]

Chegamos então ao problema de tornar os resultados das observações independentes da influência amortecedora dessas duas correntes, ou então de determinar a *correção* que precisa ser feita nas observações devido ao *amortecimento*. Essa correção vai se tornar especialmente importante e significativa quando fazemos nossas medições galvânicas ou com um *magnetômetro* equipado com um amortecedor, ou com uma *agulha astática dupla*,[678] que é composta de duas fortes agulhas magnéticas e equipado da mesma maneira com um amortecedor, ou então é hermeticamente cercado por um forte multiplicador. Uma tal correção pode ser especialmente necessária no último caso, onde o amortecimento surge do multiplicador e pode ser muito diferente para diferentes maneiras de fechar o multiplicador, no caso em que temos de tornar as experiências comparáveis entre si.

Para determinar essa correção, *em primeiro lugar*, a força amortecedora do instrumento precisa ser determinada mais detalhadamente, o que pode ser facilmente realizado ao observar a *diminuição no arco de oscilação*. *Em segundo lugar*, temos então de mostrar como a influência dessa força amortecedora sobre os vários métodos de observação pode ser determinada ou eliminada no cálculo dos resultados.

1. Determinação da Força Amortecedora de um Galvanômetro

A força amortecedora de um galvanômetro é dividida em duas partes que precisam ser separadas entre si, a saber, uma parte *constante* que é independente do circuito ao qual pertence o multiplicador e uma parte *variável*.

Obtemos a parte *constante* da força amortecedora ao observar a diminuição no arco de oscilação quando o circuito ao qual pertence o multiplicador é aberto. A saber, quando o

[676] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 372.

[677] [Gau38b] com traduções para o inglês em [Gau41c] e [Gau21c].

[678] O adjetivo "astático" é utilizado na física com o significado de não ter tendência a assumir uma posição ou direção definida. Uma agulha astática pode ser uma combinação de duas agulhas magnetizadas paralelas que possuem momentos magnéticos iguais, mas com seus polos voltados para os lados opostos, isto é, em posição antiparalela. Essa montagem protege o sistema da influência do magnetismo terrestre. Ele foi inventado por Ampère, [Amp21] e [LA98]. Um sistema anterior composto de uma única agulha magnetizada também havia sido criado por Ampére, [Amp20c, pág. 198] com tradução para o português em [CA09, pág. 133], [Amp20a, pág. 239] e [Amp20b, pág. 2], ver também [AC11, págs. 60-63] e [AC15, pág. 57].

arco de oscilação não é muito grande, ele define uma série geométrica decrescente que pode ser representada por Ae^0, $Ae^{-\lambda'}$, $Ae^{-2\lambda'}$, ... , $Ae^{-n\lambda'}$, onde n denota o número de oscilações que a agulha realizou, como contado a partir do instante em que o arco era igual a A. Após um período de oscilação,[679] o arco terá então diminuído na razão:

$$e^{\lambda'} : 1 \ ,$$

após dois períodos de oscilação, ele terá diminuído na razão:

$$e^{2\lambda'} : 1 \ ,$$

e após n períodos de oscilação, ele terá diminuído na razão:

$$e^{n\lambda'} : 1 \ .$$

Se considerarmos então o expoente λ' como sendo a unidade de amortecimento durante o período de uma oscilação, ou durante τ' segundos, caso τ' expresse o período de oscilação da agulha em segundos, então $2\lambda'$ será a unidade de amortecimento para $2\tau'$ segundos, e $n\lambda'$ será a unidade [de amortecimento] para $n\tau'$ segundos. A razão da força de amortecimento assim determinada para o intervalo de tempo ao qual ela se refere, fornece então finalmente a constante $\lambda'/\tau' = 2\lambda'/2\tau' = n\lambda'/n\tau'$, a qual expressa a *unidade de amortecimento, quando reduzida à unidade de tempo*. Contudo, λ' nada mais é do que o logaritmo natural da razão entre dois arcos sucessivos de oscilação, e τ' é o período de oscilação da agulha sob a influência do amortecimento. Obtemos então a unidade de amortecimento, quando reduzida à unidade de tempo, quando dividimos esse logaritmo pelo período de oscilação, sendo que essas duas grandezas podem ser facilmente determinadas a partir das observações.

Para determinar a parte *variável* da força de amortecimento, é observada a diminuição no arco de oscilação quando o multiplicador é fechado nele mesmo. Se $e^{\lambda''} : 1$ for a razão entre dois arcos sucessivos de oscilação encontrada pela observação e se τ'' for o período de oscilação, então a *unidade de amortecimento por unidade de tempo* será igual a:

$$\frac{\lambda''}{\tau''} \ .$$

Isso fornecerá então a força de amortecimento no multiplicador fechado como sendo igual a:

$$\frac{\lambda''}{\tau''} - \frac{\lambda'}{\tau'} \ .$$

Na maioria dos casos, é desprezível a diferença entre os períodos de oscilação τ'' e τ', e a unidade de amortecimento para o multiplicador fechado será então igual a:

$$\frac{1}{\tau'}(\lambda'' - \lambda') \ .$$

A parte *variável* do amortecimento pode agora ser determinada a partir disso, se for conhecida a fração que a resistência do multiplicador forma em relação à resistência total de todo o circuito. Se a denotar a resistência do multiplicador, enquanto que $a+b$ é a resistência de todo o circuito, então o procurado *valor da parte variável do amortecimento* será igual a:

$$\frac{a}{a+b}\left(\frac{\lambda''}{\tau''} - \frac{\lambda'}{\tau'}\right) \ ,$$

[679]Ver a Nota de rodapé 113 na página 59.

na qual apenas b é variável e precisa ser determinada para cada caso individual em particular. Se combinarmos isso com a unidade da parte constante do amortecimento (que é igual a λ'/τ'), então essa soma fornecerá o *valor do amortecimento real*, que é igual a λ/τ, a saber:

$$\frac{\lambda}{\tau} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{\lambda''}{\tau''} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{\lambda'}{\tau'} \ ,$$

na qual λ denota o logaritmo natural da razão entre dois arcos sucessivos de oscilação para o caso considerado, enquanto que τ denota o período de oscilação.

2. Cálculo das Medições Galvânicas Considerando o Amortecimento

Se tivermos determinado dessa maneira a força de amortecimento, então essa determinação pode ser empregada para eliminar a influência do amortecimento no cálculo dos resultados dos vários métodos de observação ao usar a instrução fornecida por Gauss na publicação "*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*," págs. 58 *e seguintes*,[680,681] para determinar o período de oscilação de uma agulha magnética, sendo que nesse trabalho [de Gauss] se encontra o desenvolvimento das leis de acordo com as quais o amortecimento atua na posição e no período de oscilação da agulha. Serão considerados aqui os vários métodos de observação, mas apenas para pequenas oscilações da agulha em todos os casos.

Observação da Primeira Elongação

1. Se observarmos nas medições galvânicas apenas a *primeira elongação* feita pela agulha magnética após a entrada de uma corrente *constante*, então é conhecido que quando *nenhum amortecimento* está presente, essa elongação será duas vezes a deflexão da agulha para a qual ela permaneceria em equilíbrio sob a influência dessa corrente. Em contraste, quando há *amortecimento*, a deflexão E da agulha que corresponde ao equilíbrio pode ser determinada da seguinte maneira a partir da primeira elongação observada x da agulha:[682]

[680][Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 374.

[681][Gau38a].

[682][Nota de Wilhelm Weber:] *Quando o amortecimento não está presente*, temos a expressão:

$$x = p + A \operatorname{sen} \frac{\pi}{T}(t - B) \ ,$$

para a posição x da agulha oscilante no final do tempo t, sendo que T denota o período de oscilação. Em contraste, *quando o amortecimento está presente*, temos:

$$x = p + Ae^{-\lambda t/\tau} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{\tau}(t - B) \ ,$$

onde τ expressa o período de oscilação da agulha sob a influência do amortecimento, sendo [esse período] determinado pela seguinte equação:

$$\frac{\pi^2}{\tau^2} = \frac{\pi^2}{T^2} - \frac{\lambda^2}{\tau^2} \ .$$

Ver "*Resultate*," 1837, págs. 74 e 75 [Nota de Heinrich Weber: *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 389; Nota de AKTA: [Gau38a]], na qual ε denota a mesma coisa que λ/τ denota aqui, enquanto que T' denota a mesma coisa que τ denota aqui. Agora, se o ponto inicial do tempo t for escolhido como sendo o momento quando a corrente constante começa a mover a agulha, quando a velocidade será então $dx/dt = 0$, o que fará $\tan(-B\pi/\tau) = \pi/\lambda$, e, consequentemente,

$$E = \frac{x}{1+e^{-\lambda}} \ ,$$

a qual, para pequenos valores de λ, pode ser escrita como:

$$E = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\lambda x \ .$$

2. Nas medições galvânicas, se observarmos a *primeira elongação* após a agulha estacionária ter sido colocada em movimento por uma corrente *momentânea* (por exemplo, por um impulso de indução), teremos então essencialmente de deduzir a *velocidade* que a corrente momentânea forneceu à agulha a partir da elongação observada da agulha ($= x$). A velocidade C é obtida da seguinte equação:[683]

$$-B = \frac{\tau}{\pi} \cdot \arctan\frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{2}\tau - \frac{\tau}{\pi} \cdot \arctan\frac{\lambda}{\pi} \ ;$$

e se, além disso, a posição anterior da agulha for tomada como o ponto inicial do alongamento x, ou seja, $x = 0$ para $t = 0$, então a equação anterior assumirá a seguinte forma:

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}} + Ae^{-\lambda t/\tau}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \arctan\frac{\lambda}{\pi}\right) \ ,$$

onde $-\pi A/\sqrt{\pi^2+\lambda^2} = E$ denota a nova posição de repouso da agulha sob a influência da corrente constante. Consequentemente, no instante da *primeira elongação*, $t = \tau$, quando consideramos que

$$\cos\left(\pi - \arctan\frac{\lambda}{\pi}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2/\pi^2}} \ ,$$

teremos:

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}} \cdot \left(1+e^{-\lambda}\right) = E\left(1+e^{-\lambda}\right) \ ,$$

consequentemente:

$$E = \frac{x}{1+e^{-\lambda}} \ .$$

[683][Nota de Wilhelm Weber:] Após diferenciar a equação fornecida na Nota de rodapé anterior, a saber:

$$x = p + Ae^{-\lambda t/\tau}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{\tau}(t-B) \ ,$$

obtemos:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\lambda}{\tau}Ae^{-\lambda t/\tau}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{\tau}(t-B) + \frac{\pi}{\tau}Ae^{-\lambda t/\tau}\cos\frac{\pi}{\tau}(t-B) \ .$$

Se calcularmos então o tempo t a partir do instante em que a corrente momentânea atua na agulha e dermos a ela a velocidade $= C$, teremos então $B = 0$ e $dx/dt = C$ para $t = 0$; consequentemente, $A\pi/\tau = C$ ou $A = C\tau/\pi$.

Se para fins de simplificação colocarmos agora $p = 0$ na posição original da agulha, teremos então:

$$x = \frac{\tau}{\pi}Ce^{-\frac{\lambda}{\tau}t}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{\tau}t \ ,$$

consequentemente, no final da primeira elongação, para a qual $dx/dt = 0$, e, portanto,

$$\tan\frac{\pi t}{\tau} = \frac{\pi}{\lambda} \ , \qquad t = \frac{\tau}{\pi} \cdot \arctan\frac{\pi}{\lambda} \ , \qquad \mathrm{sen}\,\frac{\pi t}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2/\pi^2}} \ ,$$

teremos:

$$C = x \cdot \frac{\pi}{T} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \ ,$$

na qual T denota o período de oscilação da agulha quando não há amortecimento. Para pequenos valores de λ, podemos colocar:

$$C = \frac{\pi}{T} x + \frac{1}{2} \frac{\pi}{T} \lambda x \ .$$

Método da Multiplicação

1. Se, por causa da fraqueza da corrente *constante* a ser medida, não apenas observarmos o primeiro alongamento, mas se deixarmos a agulha oscilar para frente e para trás, mudando a direção da corrente no multiplicador ao final de cada oscilação, e então observarmos a magnitude crescente dos sucessivos arcos de oscilação, que serão denotados por x_1, x_2, x_3, ..., então a deflexão E correspondente ao equilíbrio da agulha resultará das seguintes equações:[684]

$$x = C \cdot \frac{\tau}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \ .$$

Contudo, temos $\tau / \sqrt{\pi^2 + \lambda^2} = T/\pi$, a qual obtemos da equação anterior $\pi^2/\tau^2 = \pi^2/T^2 - \lambda^2/\tau^2$, consequentemente:

$$x = C \cdot \frac{T}{\pi} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \qquad \text{ou} \qquad C = x \frac{\pi}{T} e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \ .$$

[684][Nota de Wilhelm Weber:] Vale aqui até o final da primeira elongação a mesma equação que valia na Nota de rodapé [682] na página 446 [ou seja, na página 437 do Vol. III das *Obras* de Weber], a saber:

$$x = -\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} + A e^{-\lambda t/\tau} \cos \left(\frac{\pi}{\tau} t - \arctan \frac{\lambda}{\pi} \right) \ ,$$

logo, no instante da primeira elongação, para o qual $t = \tau$, teremos:

$$x = -\left(\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \right) \cdot \left(1 + e^{-\lambda} \right) \ .$$

Nesse instante, quando termina a primeira oscilação e começa a segunda, a corrente no multiplicador vai inverter, o que vai converter o estado anterior de repouso da agulha $-\pi A / \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}$ em $+\pi A / \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}$. A deflexão da agulha a partir de seu estado de repouso, que era

$$x + \frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} = -\left(\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \right) \cdot e^{-\lambda}$$

ao final da primeira elongação, será então convertida em:

$$-\left(\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \right) \cdot \left(2 + e^{-\lambda} \right) \ ,$$

o que vai fornecer a amplitude da segunda oscilação de $t = \tau$ para $t = 2\tau$:

$$x = +\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} + A \left(2 + e^{-\lambda} \right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t - \tau)} \cos \left(\frac{\pi}{\tau} t - \arctan \frac{\lambda}{\pi} \right) \ ,$$

de tal forma que ao final da segunda elongação, em $t = 2\tau$, teremos:

$$x = +\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \left(1 + 2 \cdot e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} \right) \ .$$

Obtemos da mesma maneira a amplitude da terceira oscilação de $t = 2\tau$ até $t = 3\tau$:

$$
\begin{aligned}
-\frac{x_1}{E} &= 1+e^{-\lambda} \ , \\
+\frac{x_2}{E} &= 2+3e^{-\lambda}+e^{-2\lambda} \ , \\
-\frac{x_3}{E} &= 2+4e^{-\lambda}+3e^{-2\lambda}+e^{-3\lambda} \ , \\
+\frac{x_4}{E} &= 2+4e^{-\lambda}+4e^{-2\lambda}+3e^{-3\lambda}+e^{-4\lambda} \ .
\end{aligned}
$$

Quanto maior for o valor de λ, mais rapidamente x/E vai se aproximar de um valor limite, para o qual obteremos a seguinte expressão:

$$
\pm\frac{x}{E} = \frac{4}{1-e^{-\lambda}} - 2 \ .
$$

Consequentemente, quando continuamos a experiência até que o arco de oscilação pare de aumentar, encontraremos a deflexão E que corresponde ao equilíbrio da agulha a partir dos valores coincidentes de x dos últimos arcos de oscilação da seguinte maneira:

$$
E = \frac{x}{2}\cdot\frac{1-e^{-\lambda}}{1+e^{-\lambda}} \ .
$$

2. Devido à fraqueza da corrente *momentânea* a ser medida, se não observarmos apenas a primeira elongação após a agulha em repouso ter sido colocada em movimento, mas deixarmos a agulha oscilar para a frente e para trás enquanto deixamos a mesma corrente momentânea para acelerar a agulha atravessar o multiplicador na direção oposta a cada vez no próximo instante quando a agulha passa mais uma vez por sua posição original, e se então observarmos os valores crescentes dos arcos de oscilação, que serão denotados por x_1, x_2, x_3, ..., então isso vai fornecer da seguinte maneira a *velocidade* C que a corrente *momentânea* fornece à agulha a cada vez. Se colocarmos:

$$
x = -\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}} + A\left(2+2e^{-\lambda}+e^{-2\lambda}\right)e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-2\tau)}\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t - \arctan\frac{\lambda}{\pi}\right) \ ,
$$

de tal forma que, ao final da terceira elongação, em $t = 3\tau$, teremos:

$$
x = -\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}\left(1+2e^{-\lambda}+2e^{-2\lambda}+e^{-3\lambda}\right) \ ,
$$

e assim por diante. Se colocarmos um abaixo do outro os valores obtidos para x para $t = 0$, $t = \tau$, $t = 2\tau$, $t = 3\tau$ e assim por diante, obteremos:

$$
\begin{aligned}
&0 \ , \\
-&\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}\left(1+e^{-\lambda}\right) \ , \\
+&\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}\left(1+2e^{-\lambda}+e^{-2\lambda}\right) \ , \\
-&\frac{\pi A}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}\left(1+2e^{-\lambda}+2e^{-2\lambda}+e^{-3\lambda}\right) \ ,
\end{aligned}
$$

logo as diferenças entre dois valores sucessivos de x, um após o outro, fornecem os procurados arcos de oscilação x_1, x_2, x_3, onde $\pi A/\sqrt{\pi^2+\lambda^2} = E$.

$$B = C \cdot \frac{T}{\pi} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} ,$$

então:[685]

$$\begin{aligned} +\frac{x_1}{B} &= 1 , \\ -\frac{x_2}{B} &= 2 + e^{-\lambda} , \\ +\frac{x_3}{B} &= 2 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda} . \end{aligned}$$

---

[685][Nota de Wilhelm Weber:] Para o *primeiro* período de oscilação de $t = 0$ até $t = \tau$, vai valer a mesma equação que valia na Nota de rodapé [683] na página 447, [isto é, pág. 438 do Vol. III das *Obras* de Weber,] a saber:

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot Ce^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\tau} t ,$$

consequentemente, no instante da primeira elongação, para a qual tínhamos:

$$t = \frac{\tau}{\pi} \cdot \arctan \frac{\pi}{\lambda} , \qquad \operatorname{sen} \frac{\pi}{\tau} t = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2/\pi^2}} = \frac{T}{\tau} ,$$

então:

$$x = \frac{T}{\pi} \cdot Ce^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} .$$

Ao final do período de oscilação, quando $t = \tau$, isso vai fornecer $dx/dt = -Ce^{-\lambda}$. Agora, nesse instante, a velocidade da agulha vai mudar para $-C$ devido à corrente momentânea renovada, isto é, ela vai ser convertida em $-C(1 + e^{-\lambda})$, logo, para o *segundo* período de oscilação de $t = \tau$ até $t = 2\tau$, isso vai implicar em:

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C \left(1 + e^{-\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-\tau)} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{\tau} t ,$$

consequentemente, no instante da segunda elongação, para o qual:

$$t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda} , \qquad \operatorname{sen} \frac{\pi}{\tau} t = -\frac{T}{\tau} ,$$

teremos:

$$x = -\frac{T}{\pi} C \left(1 + e^{-\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} .$$

Para o *terceiro* período de oscilação, de $t = 2\tau$ até $t = 3\tau$, teremos da mesma maneira:

$$x = \frac{\tau}{\pi} \cdot C \left(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\tau}(t-2\tau)} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{\tau} t ,$$

e a partir disso, no instante da terceira elongação, para o qual temos:

$$t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \cdot \arctan \frac{\pi}{\lambda} , \qquad \operatorname{sen} \frac{\pi t}{\tau} = +\frac{T}{\pi} ,$$

obteremos:

$$x = +\frac{T}{\pi} \cdot C \left(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}\right) e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} ,$$

e assim por diante. Se escrevermos um após o outro os valores de x que são encontrados para $t = 0$, $t = \tau/\pi \cdot \arctan \pi/\tau$, $t = \tau + \tau/\pi \cdot \arctan \pi/\lambda$, $t = 2\tau + \tau/\pi \cdot \arctan \pi/\lambda$ e assim por diante, no qual, por brevidade, usamos B no lugar de $\frac{T}{\pi} Ce^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}$, a saber:

Também aqui x/B vai se aproximar mais rapidamente de um valor limite na medida em que aumenta o valor de λ, e isso vai fornecer um valor limite de:

$$\frac{x}{B} = \frac{2}{1 - e^{-\lambda}} \ .$$

Consequentemente, quando continuamos a experiência até que o arco de oscilação pare de crescer, encontraremos da seguinte maneira a *velocidade* C que a corrente momentânea fornece à agulha a cada vez a partir dos valores coincidentes de x do último arco de oscilação observado:

$$C = \frac{x}{2} \cdot \frac{\pi}{T} \left(1 - e^{-\lambda}\right) e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \ .$$

Método de Retorno

Finalmente, a aplicação do método de observação dado por Gauss, que foi descrito na obra "*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*," págs. 98 *e seguintes*,[686],[687] também pertence a esse caso, o que é de particular importância porque fornece um método preciso e conveniente de medir o *amortecimento* quando ele é forte, enquanto o método anterior, baseado na observação do decaimento dos arcos de oscilação, deve ser recomendado somente quando o amortecimento é mais fraco. O método mencionado anteriormente de medição é então especialmente apropriado quando empregamos um galvanômetro cuja agulha magnética possui um grande período de oscilação e nunca de afasta mais do que poucos graus de seu estado normal, o que é o caso para um magnetômetro equipado com um multiplicador. Se o instrumento não for equipado com um amortecedor, então a influência do fraco amortecimento que ainda é presente e que se original no multiplicador, juntamente com outras influências, será eliminada dos resultados pela combinação de observações que são peculiares a esse método. Por outro lado, para um amortecimento mais forte, o método de observação permanece essencialmente o mesmo, mas o cálculo dos resultados a partir das observações precisa ser modificado se esses resultados devem concordar completamente com os resultados obtidos sem amortecimento.

Agora, esse método consiste essencialmente em colocar repentinamente a agulha em movimento com uma *corrente momentânea* e observar sua *primeira elongação*, e então quando

---

$$\begin{aligned} 0 \ &, \\ +B \ &, \\ -B\left(1 + e^{-\lambda}\right) \ &, \\ +B\left(1 + e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}\right) \ &, \\ \cdots \ &, \end{aligned}$$

então as diferenças entre cada par sucessivo de valores vai fornecer a procurada sequência de arcos de oscilação x_1, x_2, x_3, etc.

[686][Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. II, pág. 115.

[687][Web39b, pág. 98 dos *Resultate* e pág. 115 das *Obras* de Weber]. Ver também [Gau38b] com traduções para o inglês em [Gau41c] e [Gau21c], [Gau38a], [Gau39a] com traduções para o inglês em [Gau41a] e [GT14], e [Web38b].

a agulha passa novamente por sua posição original pela primeira vez, uma corrente momentânea vai atuar sobre ela que, contudo, é duas vezes mais forte do que a primeira [corrente], e a mesma coisa vai acontecer com todas as outras [correntes]. Essa segunda corrente deve ter a mesma direção que a primeira. Então a agulha não só será repentinamente interrompida em seu movimento, mas também adquirirá uma velocidade na mesma direção de onde veio. Observamos então mais uma vez a *primeira elongação* feita pela agulha, que, sem amortecimento, é quase igual à anterior, e deixamos a agulha oscilar para o outro lado de sua posição de repouso, onde observamos também a *segunda elongação*. É apenas quando a agulha passa novamente por sua posição de repouso a partir do outro lado que fazemos com que uma corrente momentânea atue na direção oposta pela segunda vez que vai empurrar a agulha de volta para o mesmo lado de onde ela veio e, então, observamos a primeira e segunda elongações que seguem, quando então fazemos a corrente momentânea atuar na direção oposta em relação à vez anterior tão logo a agulha passe por sua posição de repouso, e assim por diante. Os alongamentos assim observados são organizados em pares de alongamentos positivos e negativos alternados, dos quais as médias são tiradas se diferirem pouco entre si, como é o caso de fraco amortecimento. Encontra-se que as diferenças entre esses valores médios positivos e negativos sucessivos são quase iguais e fornecem uma medida da intensidade da corrente *momentânea* que deve ser determinada.

Foi assumido aqui que apenas estava presente um fraco amortecimento. Contudo, o mesmo método também pode ser aplicado para um *forte* amortecimento, e ele pode alcançar até mesmo uma maior precisão. Porém, a dedução dos resultados a partir das observações sofrerá então uma modificação essencial.

Em primeiro lugar precisa ser observado que para um forte amortecimento, a primeira corrente momentânea não deve mais ser exatamente a metade da seguinte, mas se m denota a razão entre dois arcos de oscilação sucessivos, então a primeira corrente deve ser a $(m + 1/m)^a$ parte da [corrente] seguinte. Se, no entanto, esta relação também não for observada exatamente, as observações não sofrem significativamente, mas basta excluir as primeiras observações do cálculo dos resultados, porque nas observações seguintes a influência dessa irregularidade inicial desaparece muito rapidamente devido ao próprio amortecimento. Vemos então que as observações correspondentes (a saber, a primeira, quinta, nona, etc., ou a segunda, sexta, décima, etc., ou a terceira, sétima, décima primeira, etc., ou a quarta, oitava, décima segunda, etc.) vão se aproximar muito rapidamente de quatro valores limites. Se, então, a diferença entre o primeiro e terceiro valores limites for designada por b, e a diferença entre o segundo e quarto valores limites for denotada por a, então a razão $a : b$ será igual à razão entre dois arcos de oscilação sucessivos, consequentemente:

$$\lambda = \log \text{nat} \frac{a}{b} \ .$$

Além disso, a velocidade c que cada corrente momentânea (exceto a primeira) fornece à agulha será:

$$c = \frac{\pi}{2T} \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\lambda}{\pi}} \ ,$$

de tal forma que quando a e b diferem apenas ligeiramente entre si (isto é, para fraco amortecimento):

$$c = \frac{\pi}{2T} \cdot \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \ ,$$

e para um amortecimento ainda mais fraco, podemos colocar:

$$c = \frac{\pi}{2T}(a+b) \ .$$

A prova disso é similar às provas para as regras anteriores. A saber, se calcularmos o tempo t a partir do instante quando a corrente momentânea empurrou a agulha em direção ao lado da elongação positiva, então x será:

$$x = Ae^{-\lambda t/\tau} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\tau} t$$

para a duração das próximas duas oscilações não perturbadas. Para as duas elongações observadas x' e x'', teremos $dx/dt = 0$, ou:

$$0 = -\frac{\lambda}{\tau} A e^{-\lambda t/\tau} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\tau} t + \frac{\pi}{\tau} A e^{-\lambda t/\tau} \cos \frac{\pi}{\tau} t \ ,$$

consequentemente, teremos:

$$t = \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}$$

para o primeiro instante de observação e:

$$t = \tau + \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}$$

para o segundo [instante de observação]. Se substituirmos esses valores de t na equação para x, obteremos então:

$$\begin{aligned} x' &= +\frac{Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \ , \\ x'' &= -\frac{Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \ . \end{aligned}$$

Após ter decorrido um tempo $t = 2\tau$, a oscilação da agulha será novamente modificada pela ação da corrente, a saber, a velocidade $-c$ será adicionada à velocidade:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{\tau} A e^{-2\lambda} \ ,$$

que ela possui ao final do tempo $t = 2\tau$, o que vai resultar para a duração das duas próximas oscilações [na seguinte expressão]:

$$x = \left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\lambda(t-2\tau)/\tau} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\tau} t \ .$$

Par as duas elongações x''' e x'''' que são observadas durante o intervalo de tempo de $t = 2\tau$ até $t = 4\tau$, teremos $dx/dt = 0$, ou:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\lambda}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\lambda(t-2\tau)/\tau} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\tau} t \\ &\quad + \frac{\pi}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi} c\right) e^{-\lambda(t-2\tau)/\tau} \cos \frac{\pi}{\tau} t \ , \end{aligned}$$

consequentemente:

$$t = 2\tau + \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}$$

para o primeiro instante de observação, enquanto:

$$t = 3\tau + \frac{\tau}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}$$

para o segundo [instante de observação]. Se substituirmos esses valores de t na nova equação para x, obteremos então:

$$\begin{aligned} x''' &= +\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}c\right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \ , \\ x'''' &= -\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}c\right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \ . \end{aligned}$$

Após ter decorrido um tempo $t = 4\tau$, a oscilação da agulha será novamente modificada pelo efeito renovado da corrente momentânea, a saber, a velocidade $+c$ será adicionada à velocidade:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}c\right) e^{-2\lambda} \ ,$$

que ela possui ao final do tempo $t = 4\tau$, e dessa maneira fará com que a agulha possua daqui por diante o mesmo movimento que ela tinha no início para $t = 0$. Contudo, a velocidade em $t = 0$ era igual a:

$$\frac{\pi}{\tau}A \ ,$$

dessa forma:

$$\frac{\pi}{\tau}A = c + \frac{\pi}{\tau}\left(Ae^{-2\lambda} - \frac{\tau}{\pi}c\right) e^{-2\lambda} \ ,$$

de onde segue que:

$$c = \frac{\pi}{\tau}A\left(1 + e^{-2\lambda}\right) \ .$$

Se substituirmos esse valor na expressão anterior para x''' e x'''', encontraremos então que $x''' = -x'$ e $x'''' = -x''$, consequentemente:

$$\begin{aligned} a &= x' - x''' = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \ , \\ b &= x'''' - x'' = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) - \lambda}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \ , \end{aligned}$$

assim:

$$\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} = \frac{2Ae^{-\frac{\lambda}{\pi}\arctan\frac{\pi}{\lambda}}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \cdot \frac{1+e^{-2\lambda}}{e^{-\lambda/2}} = \frac{2Ae^{\frac{\lambda}{\pi}\arctan\frac{\lambda}{\pi}}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}} \cdot \left(1+e^{-2\lambda}\right) \ ,$$

o que implica em:

$$c = \frac{\pi}{2\tau}\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}e^{-\frac{\lambda}{\pi}\arctan\frac{\lambda}{\pi}} \ .$$

Agora, a equação:

$$\frac{\pi^2}{\tau^2} = \frac{\pi^2}{T^2} - \frac{\lambda^2}{\tau^2} \ ,$$

foi citada anteriormente na Nota de rodapé [682] na página 446,[688] de onde segue que:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau}\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}} \ ,$$

e

$$c = \frac{1}{2}\frac{\pi}{T} \cdot \frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\arctan\frac{\lambda}{\pi}} \ .$$

Vemos ao mesmo tempo que:

$$\frac{a}{b} = e^{\lambda} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \log \text{nat}\frac{a}{b} \ ,$$

de onde vem que, ao medir a e b, podemos obter simultaneamente uma determinação precisa da unidade de amortecimento reduzida ao período de oscilação, sendo que isso será especialmente útil quando, devido à rápida diminuição no arco de oscilação, não puder ser obtida uma determinação precisa a partir das observações desse último.[689]

Para explicar o método de observação que acabou de ser desenvolvido, podemos apelar àquelas observações que foram feitas para comparar a resistência de duas cópias do padrão fundamental de Jacobi usando esse método e que foram mencionadas anteriormente na página 368.[690] A *primeira* cópia era um fio não envernizado que foi enrolado ao redor de um cilindro de serpentina não envernizado, enquanto que a *segunda* cópia era um fio envernizado que foi enrolado ao redor de um tubo de vidro envernizado. As experiências foram divididas em cinco conjuntos. As extremidades do fio indutor foram conectadas com as extremidades do fio do multiplicador da mesma maneira em todos os grupos. No *primeiro* conjunto, os fios das duas cópias e o fio do indutor e do multiplicador foram combinados na maneira denominada D descrita no item (8) na página 329.[691] No *segundo* conjunto, eles foram combinados na maneira B descrita no item (7). No *terceiro* conjunto, eles foram combinados na maneira A descrita no item (6), na qual a primeira cópia entra no lugar do padrão fundamental. O *quarto* conjunto foi uma repetição do segundo e, finalmente, no *quinto* conjunto, os fios foram combinados na maneira C descrita no item (9). A experiência começou

[688]Pág. 437 do Vol. III das *Obras* de Weber.
[689]Isto é, isso será útil quando não puder ser obtida uma determinação precisa do amortecimento a partir das observações do arco de oscilação, devido à rápida diminuição desses arcos.
[690]Pág. 351 do Vol. III das *Obras* de Weber.
[691]Pág. 307 do Vol. III das *Obras* de Weber.

quando a agulha do galvanômetro estava em repouso. O primeiro impulso de indução positivo colocou a agulha em oscilação. Não foi observada a primeira elongação positiva e também não foi observada a segunda elongação negativa. O segundo impulso de indução negativo aconteceu no instante quando a agulha chegou no local que correspondia ao estado de repouso da segunda elongação na direção positiva, o que não apenas parou a agulha no meio de seu movimento positivo, mas até mesmo empurrou-a de volta para o lado de onde tinha vindo. A terceira elongação subsequente foi, portanto, novamente negativa e, como a quarta elongação positiva, ainda não foi observada. O terceiro impulso de indução positivo aconteceu no instante quando a agulha chegou no local que correspondia a seu equilíbrio a partir da quarta elongação na direção negativa, o que não apenas parou a agulha no meio de seu movimento negativo, mas até mesmo empurrou-a de volta para o lado de onde tinha vindo. A experiência continuou por um longo tempo da mesma maneira, e a elongação da agulha foi anotada na medida em que foi observada na escala daí por diante. As primeiras quatro elongações anotadas estão colocadas uma ao lado da outra nas linhas horizontais das próximas Tabelas, mas a quinta está abaixo da primeira, a sexta abaixo da segunda, etc. Finalmente, é fornecido o valor médio de cada coluna de observações.

D.

775,8	436,6	199,6	538,2
775,7	436,3	199,5	537,9
775,0	435,9	198,9	537,3
774,6	435,4	198,5	537,2
774,6	435,4	198,8	537,2
774,2	435,3	198,5	537,1
774,0	435,1	198,2	536,8
773,8	434,7	197,9	536,6
773,5	434,4	197,6	536,6
774,0	434,0	197,5	536,0
774,52	435,31	198,50	537,09

B.

692,1	448,0	277,0	521,1
691,8	447,8	276,7	521,0
691,7	447,4	276,5	520,8
691,3	447,3	276,2	520,5
691,3	447,2	276,0	520,7
691,4	447,2	276,0	520,6
691,4	447,2	275,9	520,5
691,3	447,1	275,9	520,5
691,4	447,0	275,9	520,4
691,3	447,0	275,8	520,3
691,50	447,32	276,19	520,64

A.

691,9	447,7	276,9	521,0
691,6	447,7	276,8	520,9
691,7	447,7	276,8	521,0
691,8	447,6	276,7	521,1
691,8	447,8	276,8	521,0
691,8	447,8	277,0	521,1
691,8	447,8	276,9	521,1
691,6	447,6	276,8	520,8
691,3	447,3	276,4	520,7
691,0	446,9	275,9	520,1
691,63	447,59	276,60	520,88

B.

691,6	447,0	275,7	520,5
691,4	446,9	275,6	520,3
691,2	446,7	275,3	520,0
690,9	446,3	275,2	520,0
690,7	446,2	275,0	519,7
690,5	446,1	274,9	519,8
690,5	446,5	274,8	519,7
690,3	445,9	274,6	519,4
690,1	445,8	274,6	519,2
690,1	445,6	274,3	519,2
690,73	446,30	275,00	519,78

C.

615,8	459,3	350,2	506,2
615,6	459,2	350,1	506,1
615,2	459,0	349,8	505,8
615,1	458,8	349,4	505,6
614,8	458,4	349,2	505,3
614,4	458,1	349,1	505,2
614,2	458,1	348,8	505,0
614,1	458,0	348,8	504,9
613,9	457,8	348,7	504,8
613,8	457,6	348,2	504,3
614,69	458,43	349,23	505,32

Deve ser observado em relação a essas Tabelas que a distância horizontal do espelho até a escala chegava a 2218 divisões da escala. Além disso, devemos observar que a bobina de indução que foi usada aqui era diferente daquela que foi usada anteriormente, na página 330.[692] A nova bobina indutora tem um número de enrolamentos muito menor, mas é feita de fio muito mais forte, de modo que sua resistência é muito menor do que a resistência da primeira bobina indutora. Esse fato tinha um efeito significativo na relação mútua entre as observações A, B, C e D.

Os valores médios das observações anteriores estão resumidos claramente na próxima Tabela, e estão adicionadas para cada conjunto de experiências as diferenças entre o primeiro e terceiro valores, assim como entre o segundo e quarto valores, e essas duas diferenças são denotadas por a e b, assim como ocorreu na página 452.[693]

[692]Pág. 309 do Vol. III das *Obras* de Weber, ver a Seção 15.6.
[693]Pág. 443 do Vol. III das *Obras* de Weber.

$D.$	774,52 435,31 198,50 537,09	$a = 576,02$ $b = 101,78$
$B.$	691,50 447,32 276,19 520,64	$a = 415,31$ $b = 73,32$
$A.$	691,63 447,59 276,70 520,88	$a = 414,93$ $b = 73,29$
$B.$	690,73 446,30 275,00 519,78	$a = 415,73$ $b = 73,48$
$C.$	614,69 458,43 349,23 505,32	$a = 265,46$ $b = 46,89$

Os valores de a e b que estão resumidos nessa Tabela necessitam inicialmente de uma correção, já que eles são as tangentes do dobro dos ângulos de elongação, de acordo com as leis catóptricas. Com a ajuda da distância dada entre o espelho e a escala, é fácil reduzi-los a valores que são proporcionais aos próprios ângulos de elongação, e essa redução é suficiente devido ao pequeno valor de todas essas elongações. Com essa finalidade, se x denotar os valores de a ou b que são dados em divisões da escala, então temos de reduzir o número x em:

$$\frac{1}{3}\frac{x^3}{4436^2} = \frac{x^3}{59\,034\,288} \ .$$

Após essa redução, obtemos os seguintes valores para a e b:

	a	b
$D.$	572,78	101,76
$B.$	414,10	73,31
$A.$	413,72	73,28
$B.$	414,51	73,47
$C.$	265,14	46,89

Se pegarmos agora a média entre os dois valores a e b dados para B, obteremos a seguinte composição:

	a	b	$\log\text{nat}\frac{a}{b} = \lambda$	$\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi}\arctan\frac{\lambda}{\pi}}$
$A.$	413,72	73,28	$1,730\,902$	768,22
$B.$	414,305	73,39	$1,730\,814$	769,23
$C.$	265,14	46,89	$1,732\,454$	492,44
$D.$	572,78	101,76	$1,727\,884$	1063,11

Agora, como foi mostrado na página 452 *e seguintes*,[694] os valores que são dados na última coluna podem servir como uma unidade de intensidade de corrente no multiplicador, isto é, eles podem ser considerados como sendo os valores que foram denominados por A, B, C, D na página 337.[695] Finalmente, com esses valores obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{AB - BC}{AB - AC} &= 0,997\,65 \ , \\ \sqrt{\frac{AB - AD}{AB - BD}} &= 0,997\,62 \ , \end{aligned}$$

a partir das fórmulas que foram apresentadas aqui. Com isso, obtemos a razão da resistência da primeira cópia para a segunda [cópia] como sendo igual a:

$$0,997\,64 : 1 \ ,$$

na média.

D - Justificativa das Regras para Calcular a Resistência de um Condutor a partir das Observações

Para justificar as regras para calcular a resistência de um condutor a partir das observações, vamos começar das seguintes duas leis fundamentais do estudo do *eletromagnetismo* e do estudo da *magneto-eletricidade*.

Primeira lei. O elemento linear ds de uma corrente galvânica exerce uma força motriz sobre um elemento μ do fluido magnético que é inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre eles. Contudo, ao mesmo tempo, um situação totalmente anômala entra aqui, a saber, que a direção da força não é ao longo da linha reta que os conecta, mas é perpendicular ao plano traçado por μ e a direção de ds, além disso, a intensidade da força não depende apenas da distância, dependendo da mesma maneira do ângulo que r faz com a direção de ds. Se denominarmos esse ângulo de ϑ então:

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta \cdot \mu ds}{r^2}$$

será a unidade de força motriz que ds exerce sobre μ, e ela é tão grande quando a força que μ exerce sobre o elemento de corrente ds ou sobre seu portador ponderável, cuja direção é paralela, mas oposta, à [força] anterior.[696]

Obervação. O elemento de corrente denotado por ds deve ser entendido como o produto de seu comprimento α pela intensidade i da corrente que o atravessa, ou seja, $ds = \alpha i$. — Este princípio fundamental do eletromagnetismo é reproduzido aqui textualmente como Gauss o expressou nos "*Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839*," págs. 1, 2.[697,698]

[694] Págs. 443 e seguintes do Vol. III das *Obras* de Weber.

[695] Pág. 316 do Vol. III das *Obras* de Weber.

[696] Ver a Nota de rodapé 155 na página 95.

[697] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 198.

[698] [Gau40] com tradução para o inglês em [Gau43].

Segunda lei. Se o elemento μ de fluido magnético se desloca com uma velocidade u paralela à força que atua sobre o elemento de corrente $ds = \alpha i$ de acordo com a primeira lei, então uma força eletromotriz que é paralela à direção da corrente i será exercida sobre o elemento linear do condutor α, cuja intensidade será representada pela expressão que foi dada na primeira lei, a saber, $\operatorname{sen}\vartheta \cdot \mu ds/r^2$, quando substituímos $ds = \alpha i$ por αu, ou seja, por:

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta \cdot \mu\alpha u}{r^2} .$$

Em contraste, se o elemento μ de fluido magnético se deslocar em uma direção diferente que faz um ângulo ψ com a direção mencionada anteriormente, então a expressão para a intensidade precisa ser multiplicada por $\cos\psi$.

Observação. — Se introduzirmos dois outros ângulos no lugar dos dois ângulos ϑ e ψ, a saber, o ângulo φ que a direção na qual μ se desloca faz com r, e o ângulo ε que a direção de α faz com a normal a um plano que é traçado paralelo à direção na qual μ se desloca e que passa por r, então a expressão $\operatorname{sen}\vartheta \cdot \mu\alpha u \cdot \cos\psi/r^2$ será convertida em $\operatorname{sen}\varphi \cdot \mu\alpha u \cos\varepsilon/r^2$. — Essa última expressão concorda com aquela que obtemos quando decompomos a força eletromotriz elementar que foi dada no primeiro Tratado sobre "*Medições Eletrodinâmicas*," pág. 345,[699,700] na direção do elemento induzido α. A expressão assim obtida vai conter de fato um fator constante cujo valor, contudo, depende da escolha da unidade para a força eletromotriz e é igual a 1 para uma certa unidade.

Os argumentos que seguem foram deduzidos dessas duas leis:

1. Existe uma relação entre as forças eletromagnética e magneto-elétrica tal que quando dois elementos magnéticos μ e μ', localizados aleatoriamente, exercem forças eletromagnéticas iguais e igualmente direcionadas sobre um elemento de corrente $ds = \alpha i$, então também serão iguais suas forças eletromotrizes sobre o elemento linear α do condutor, quando ele for movido. A mesma coisa vai valer quando μ e μ' são substituídos por um conjunto de elementos magnéticos distribuídos arbitrariamente. Disso decorre que, se o magnetismo da Terra em um local exerce a mesma força eletromagnética na mesma direção que uma barra magnética distante, a força eletromotriz do magnetismo da Terra em um indutor que se movimenta nesse local também será igual à força eletromotriz da barra magnética, independentemente da distribuição do magnetismo na Terra.

2. Quando o elemento de corrente ds pertence a uma corrente circular, a componente da força eletromagnética que ds exerce sobre μ que é perpendicular ao plano do círculo será obtida quando $\operatorname{sen}\vartheta \cdot \mu ds/r^2$ for multiplicado pelo cosseno do ângulo que o plano do círculo define com o plano que passa por μ e pela direção de ds. Essa componente é denominada C.

Deixe o elemento de corrente ds ser decomposto em seus fatores, a saber, em sua intensidade de corrente i e seu comprimento, que será representado pelo comprimento de um elemento circular por $ad\alpha$, se a for o raio do círculo ao qual ele pertence e α for o ângulo formado pelo raio associado com o raio que se encontra com μ em um plano perpendicular ao plano do círculo. Além disso, se b denotar a perpendicular baixada a partir de μ até o plano do círculo, enquanto que x denota a distância desde a base dessa perpendicular até o centro [do círculo], então:

$$r^2 = a^2 + b^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha \ ,$$

[699][Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 177.
[700]Ver a página 185 na Subseção 6.25.4.

e obteremos a expressão:

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta \cdot i\mu \cdot ad\alpha}{a^2+b^2+x^2-2ax\cos\alpha} \ ,$$

para a força total que ds exerce sobre μ. Além disso, o cosseno do ângulo que o plano do círculo define com o plano que passa por μ e pela direção de ds é:

$$\frac{a-x\cos\alpha}{r\operatorname{sen}\vartheta} = \frac{a-x\cos\alpha}{\operatorname{sen}\vartheta \cdot \sqrt{a^2+b^2+x^2-2ax\cos\alpha}} \ .$$

O produto desse cosseno com a expressão para a força total anterior fornece a expressão para a componente C procurada, a saber:

$$C = i\mu \cdot ad\alpha \frac{a-x\cos\alpha}{(a^2+b^2+x^2-2ax\cos\alpha)^{3/2}} \ .$$

Com essas duas leis que foram apresentadas, que são as leis básicas da magneto-eletricidade, obtemos a *força eletromotriz* que μ exerce sobre ds, quando μ se desloca com uma velocidade u paralela à direção da força C, ao multiplicar por u o valor que C possui quando $i=-1$, a saber:

$$-u\mu \cdot ad\alpha \frac{a-x\cos\alpha}{(a^2+b^2+x^2-2ax\cos\alpha)^{3/2}} \ .$$

Em contraste, quando ds se desloca com uma velocidade u na mesma direção que é perpendicular ao plano do círculo, a força eletromotriz que μ exerce sobre ds será:

$$+u\mu \cdot ad\alpha \frac{a-x\cos\alpha}{(a^2+b^2+x^2-2ax\cos\alpha)^{3/2}} \ .$$

Se além disso desenvolvermos a expressão anterior para C em potências de $\cos\alpha$, encontraremos então:[701]

$$\begin{aligned} C \ = \ & \frac{i\mu}{(a^2+b^2+x^2)^{3/2}} \left\{ a^2 d\alpha + (2a^2-b^2-x^2)\frac{ax}{a^2+b^2+x^2} \cdot \cos\alpha d\alpha \right. \\ & + \frac{3}{2}(3a^2-2b^2-2x^2)\frac{a^2x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2} \cdot \cos\alpha^2 d\alpha \\ & \left. + \frac{5}{2}(4a^2-3b^2-3x^2)\frac{a^3x^3}{(a^2+b^2+x^2)^3} \cdot \cos\alpha^3 d\alpha + ... \right\} \ . \end{aligned}$$

3. A expressão para a força *eletromagnética* que *toda* a corrente circular exerce sobre μ, perpendicular ao plano do círculo, é obtida da seguinte maneira. Como o raio a e a intensidade de corrente i, assim como b e x, são iguais para todos os elementos do círculo, a força procurada, ou a soma de todas as forças *eletromagnéticas* que todos os elementos de corrente exercem sobre μ, que são perpendiculares ao plano do círculo, será:

[701] As expressões $\cos\alpha^2$, $\cos\alpha^3$ etc. nessa equação e nas próximas equações devem ser entendias como $\cos^2\alpha$, $\cos^3\alpha$ etc., respectivamente.

$$
\begin{aligned}
& i\mu \cdot a \int_0^{2\pi} \frac{a - x\cos\alpha}{(a^2+b^2+x^2-2ax\cos\alpha)^{3/2}} d\alpha \\
= \frac{i\mu}{(a^2+b^2+x^2)^{3/2}} \cdot \Bigg\{ & a^2 \int_0^{2\pi} d\alpha + (2a^2-b^2-x^2)\frac{ax}{a^2+b^2+x^2}\int_0^{2\pi} \cos\alpha d\alpha \\
& + \frac{3}{2}(3a^2-2b^2-2x^2)\frac{a^2x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2} \cdot \int_0^{2\pi} \cos\alpha^2 d\alpha \\
& + \frac{5}{2}(4a^2-3b^2-3x^2)\frac{a^3x^3}{(a^2+b^2+x^2)^3} \cdot \int_0^{2\pi} \cos\alpha^3 d\alpha + ... \Bigg\} \ ,
\end{aligned}
$$

isto é:

$$
\frac{2\pi a^2 \cdot i\mu}{(a^2+b^2+x^2)^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{3}{4}(3a^2-2b^2-2x^2)\frac{x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2} + ... \right\} \ . \qquad (I)
$$

Além disso, podemos facilmente nos convencer que a intensidade de corrente que aparece aqui precisa ser determinada nas unidades absolutas que foram estabelecidas na Seção 15.10, quando colocamos a área do círculo $\pi a^2 = 1$, de onde encontramos que precisamos ter $i = 1$ para que a força que é exercida à distância sobre μ (onde a^2 desaparece em comparação com $b^2 + x^2$), perpendicular ao plano do círculo, seja igual à força que é exercida por um ímã na mesma direção, quando o ímã tem uma unidade absoluta de magnetismo[702] e seu eixo é normal ao plano do círculo. Seja A [na Figura 14] o centro do ímã, AB a direção de seu eixo, e seja o elemento μ encontrado em C.

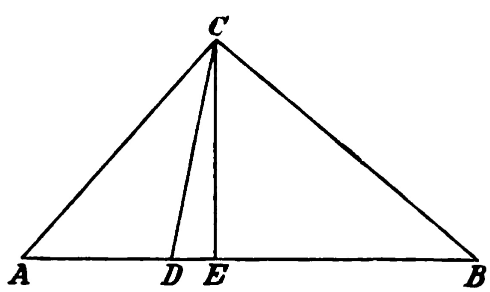


Fig. 14.

Seja ABC um triângulo retângulo em C, e seja $AD = AB$. A partir de um teorema conhecido ("*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*," págs. 33, 34),[703,704] CD será a direção da força que atua sobre μ, e sua intensidade será $\mu/AC^3 \cdot CD/AD$. Se baixarmos CE perpendicular a AB, então a componente que é paralela ao eixo do ímã será $\mu/AC^3 \cdot CD/AD \cdot ED/CD = \mu/AC^3 \cdot ED/AD$. Agora, se AE e CE são as linhas que anteriormente foram denominadas por b e x, então de acordo com isso:

[702]Ver a Nota de rodapé 548 na página 341.
[703][Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Gauss, Vol. V, pág. 434.
[704][Gau41d].

$$
\begin{aligned}
AC &= \sqrt{b^2+x^2}\ , \\
AD &= \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}\frac{AC^2}{AE} = \frac{b^2+x^2}{3b}\ ,
\end{aligned}
$$

e

$$
ED = AE - AD = \frac{2b^2-x^2}{3b}\ ;
$$

consequentemente, a força procurada será:

$$
\mu \cdot \frac{2b^2-x^2}{(b^2+x^2)^{5/2}}\ .
$$

Em contraste, quando colocamos $\pi a^2 = 1$ e $\frac{a^2}{b^2+x^2} = 0$ na expressão anterior, obtemos:

$$
i\mu \cdot \frac{2b^2-x^2}{(b^2+x^2)^{5/2}}\ ,
$$

o que implica que temos de ter $i = 1$, se supormos que a corrente que flui ao redor de uma área unitária exerce a mesma ação que a unidade absoluta do magnetismo. Contudo, essa intensidade de corrente é a unidade absoluta que foi estabelecida na Seção 15.10, o que explica o fato de que as intensidades de corrente precisam ser determinadas na unidade absoluta que foi estabelecida nas aplicações das leis eletromagnéticas anteriores.

4. A expressão para a *força eletromotriz* que μ exerce sobre *todo* o círculo quando ele[705] se desloca com uma velocidade u em uma direção que é perpendicular ao plano do círculo é obtida da seguinte maneira. As duas leis que foram apresentadas anteriormente implicam em que a força eletromotriz que μ exerce sobre ds quando ele se desloca com uma velocidade u paralela à direção da força C é obtida ao multiplicar u pelo valor de C, na qual colocamos $i = -1$, a saber:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mu u}{(a^2+b^2+x^2)^{3/2}} \cdot \Big\{ a^2 d\alpha &+ (2a^2-b^2-x^2)\frac{ax}{a^2+b^2+x^2}\cdot \cos\alpha d\alpha \\
&+\frac{3}{2}(3a^2-2b^2-2x^2)\frac{a^2x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2}\cdot \cos\alpha^2 d\alpha \\
&+\frac{5}{2}(4a^2-3b^2-3x^2)\frac{a^3x^3}{(a^2+b^2+x^2)^3}\cdot \cos\alpha^3 d\alpha + ...\Big\}\ .
\end{aligned}
$$

Consequentemente, a soma da força eletromotriz que μ exerce sobre todos os elementos do círculo é como segue:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mu u}{(a^2+b^2+x^2)^{3/2}} \Big\{ a^2\int_0^{2\pi} d\alpha &+ (2a^2-b^2-x^2)\frac{ax}{a^2+b^2+x^2}\int_0^{2\pi} \cos\alpha d\alpha \\
&+\frac{3}{2}(3a^2-2b^2-2x^2)\frac{a^2x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2}\int_0^{2\pi} \cos\alpha^2 d\alpha \\
&+\frac{5}{2}(4a^2-3b^2-3x^2)\frac{a^3x^3}{(a^2+b^2+x^2)^3}\int_0^{2\pi} \cos\alpha^3 d\alpha + ...\Big\}\ ,
\end{aligned}
$$

[705]Isto é, quando o elemento magnético μ.

isto é:

$$-\mu u\frac{\pi a^2}{(a^2+b^2+x^2)^{3/2}}\cdot\left\{2+\frac{3}{2}(3a^2-2b^2-2x^2)\frac{x^2}{(a^2+b^2+x^2)^2}+...\right\}\ . \qquad (II)$$

Além disso, podemos facilmente nos convencer que esse valor da força eletromotriz está expresso em termos da unidade absoluta que foi estabelecida na Seção 15.10. A saber, se colocarmos $b=0$ nesse valor, então a velocidade linear u do elemento μ será idêntica a uma velocidade angular $\gamma=u/x$ ao redor do diâmetro do círculo que é perpendicular a x, a qual pode então ser colocada igual à velocidade angular oposta $-\gamma$ do círculo ao redor do mesmo eixo sem alterar a força eletromotriz. A expressão para a força eletromotriz de μ sobre o círculo que gira com uma velocidade $-\gamma$ será então:

$$-\mu\gamma\frac{\pi a^2 x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\left\{2+\frac{3}{2}(3a^2-2x^2)\frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}+...\right\}\ ,$$

que é, portanto, $-\mu\gamma\cdot\pi a^2/x^2$ sobre o círculo que gira com uma velocidade $+\gamma$ quando μ atua à distância, onde a^2 desaparece em comparação com x^2. Isso implica que a soma das duas forças eletromotrizes quando temos, em primeiro lugar, $\mu=+m$ e $x=R+e$, e, em segundo lugar, $\mu=-m$ e $x=R-e$, isto é, a força eletromotriz de um ímã [com momento magnético] $M=2em$ que atua à distância R será:

$$-m\gamma\frac{\pi a^2}{(R+e)^2}+m\gamma\frac{\pi a^2}{(R-e)^2}=M\gamma\frac{2\pi a^2}{R^3}\ .$$

Se fizermos agora a velocidade angular γ do círculo grande o suficiente tal que sua projeção sobre um plano que é normal a x varie de uma unidade de área em uma unidade de tempo, isto é, $\gamma\pi a^2=1$, encontraremos então que o valor da força eletromotriz anterior precisa ser igual a 1 quando M é o magnetismo da barra[706] que exerce a mesma ação que a unidade do magnetismo terrestre cuja direção é paralela a x. A saber, se na direção do magnetismo terrestre T de um lugar existe à distância R um ímã M igualmente direcionado, então a ação de M em unidades magnéticas será igual à ação de T nesse local quando tivermos:

$$\frac{2M}{R^3}=T\ .$$

M vai então denotar o magnetismo da barra que atua igualmente como uma unidade do magnetismo terrestre quando tivermos:

$$\frac{2M}{R^3}=1\ ,$$

de onde vem que quando, ao mesmo tempo, $\gamma\pi a^2=1$, então o valor da força eletromotriz anterior também será igual a 1. Contudo, essa própria força eletromotriz é a unidade absoluta que foi estabelecida na Seção 15.10, o que explica o fato que a força eletromotriz é determinada na unidade absoluta dada nas aplicações das leis magneto-elétricas que foram desenvolvidas aqui.

Consideramos até agora as forças que um elemento μ de fluido magnético exerce ou sofre. A aplicação disso às experiências necessita que todos os elementos dos dois fluidos magnéticos que estão contidos em uma agulha magnética devam ser incluídos no cálculo. Contudo,

[706] Isto é, M é o momento magnético da barra imantada.

isso explica o fato que, de acordo com Gauss,[707] podemos então focar nos elementos dos fluidos magnéticos ideais que estão distribuídos sobre a superfície, que estão completamente separados entre si. Se a soma dos elementos positivos for igual a $+m$, então a soma dos elementos negativos será igual a $-m$, e se denotarmos por $2e$ à distância entre o centro de um deles até o centro do outro,[708] então o momento [magnético] da agulha será igual a $2em$, e o comprimento de linha e será uma quantidade mensurável. Isso também explica o fato de que quando todos os elementos positivos estão próximos entre si, o mesmo acontecendo com todos os elementos negativos, a ação deles será quase que a mesma como se todos eles estivessem concentrados em seus centros. Apenas a ação de dois pontos será então levada em consideração na agulha usada, a saber, aquele [ponto] em que é considerado como estando concentrado todo o fluido magnético Norte e aquele em que é considerado como estando concentrado todo fluido magnético Sul. Disso segue que:

5. A comparação do torque[709] que o multiplicador exerce na agulha em seu *centro*, com o torque que ele exerceria se a agulha estivesse *longe*, é a seguinte. O plano meridiano no qual se encontra a agulha divide o multiplicador de tal forma que um número igual de espiras se encontra dos dois lados. Se traçarmos uma linha horizontal nesse plano através do centro do multiplicador, então o ponto no qual está concentrado todo o fluido magnético Norte $+m$ estará ao longo dessa linha, e a distância dele até o centro será denominada $+e$. A distância entre o ponto ao longo da mesma linha no qual se considera que todo o fluido magnético Sul $-m$ está concentrado será denominada $-e$. Sejam a' e a'' os diâmetros interno e externo do multiplicador e seja $2b'$ a largura de sua seção reta, que será então $2(a''-a')b'$. A parte dessa seção reta de todo o anel que engloba uma espira, cujo diâmetro é a e cujo plano está a uma distância b do centro do multiplicador, será denominada por $dadb$: A partir [da equação] (I), o produto da seção reta de uma espira com a *força* que ela exerce sobre $+m$ será então:

$$+im\frac{2\pi a^2 dadb}{(a^2+b^2+e^2)^{3/2}}\left\{1+\frac{3}{4}(3a^2-2b^2-2e^2)\frac{e^2}{(a^2+b^2+e^2)^2}+...\right\} .$$

Se multiplicarmos esse produto com a perpendicular e que é traçada do eixo rotacional até a direção da força, obteremos então o produto da seção reta da espira com o *torque* que ela exerce. Finalmente, se substituirmos nessa expressão $-m$ por $+m$ e $-e$ por $+e$, obteremos então o mesmo valor para o produto dessa seção reta com o torque que é exercido sobre o fluido negativo por essa espira. Consequentemente, o produto do torque que é exercido por essa espira sobre toda a agulha será:

$$iM\frac{2\pi a^2 dadb}{(a^2+b^2+e^2)^{3/2}}\left\{1+\frac{3}{4}(3a^2-2b^2-2e^2)\frac{e^2}{(a^2+b^2+e^2)^2}+...\right\} ,$$

quando denominamos o magnetismo da agulha por $M=2em$.[710] Como e é uma pequena fração de a, podem ser desprezadas todas as partes que possuem como fator a quarta potência e potências maiores, e obtemos então:

$$iM\frac{2\pi a^2 dadb}{(a^2+b^2)^{3/2}}\left\{1+\frac{3}{4}\frac{a^2-4b^2}{(a^2+b^2)^2}\cdot e^2\right\} .$$

[707] Ver a Nota de rodapé 227 na página 133.

[708] Ou seja, esta é a distância entre o centro dos elementos positivos e o centro dos elementos negativos.

[709] Em alemão: *Drehungsmoment*. Ver a Nota de rodapé 119 na página 65.

[710] Ou seja, $M=2em$ é o momento magnético da agulha.

Segue então disso que a soma dos produtos da seção reta de cada espira com o torque que ela exerce será:

$$
\begin{aligned}
& iM \cdot 2\pi \int_{\alpha'}^{\alpha''} a^2 da \int_{-b'}^{+b'} \frac{db}{(a^2+b^2)^{3/2}} \left\{1 + \frac{3}{4}\frac{a^2-4b^2}{(a^2+b^2)^2} e^2\right\} \\
= iM & \left\{4\pi b' \cdot \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2+b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2+b'^2}} + \frac{\pi}{b'}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{3/2}}\right) \cdot e^2\right\} .
\end{aligned}
$$

Se dividirmos essa expressão pelo produto da seção reta de uma espira com o número de espiras — isto é, pela seção reta $2(a'' - a')b'$ de todo o anel, — obteremos então o torque médio exercido por uma espira sobre a agulha, de onde vai vir o torque do multiplicador sobre a agulha que é encontrada em seu centro quando multiplicamos pelo número n de espiras, a saber:

$$
\begin{aligned}
iM \cdot 2n\pi \cdot \frac{1}{a'' - a'} & \left\{\log \frac{a'' + \sqrt{a''^2+b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2+b'^2}}\right. \\
& \left. + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{3/2}}\right)\frac{e^2}{b'^2}\right\} .
\end{aligned}
$$

Para o caso no qual b' desaparece comparado com a', e no qual a' pouco difere de a'', isso será $iM \cdot 2n\pi/a'$, e a' será o raio do multiplicador nesse caso. Se agora entendermos geralmente que o raio do multiplicador de uma dada *agulha central* tem a seguinte expressão:

$$
\frac{a'' - a'}{\log \frac{a''+\sqrt{a''^2+b'^2}}{a'+\sqrt{a'^2+b'^2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{3/2}}\right)\frac{e^2}{b'^2}}
$$

e se o denominarmos por r', então o torque será:

$$
\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi .
$$

Em contraste, se a agulha estiver a uma grande distância do multiplicador, mas $+m$ e $-m$ estiverem sobre a mesma linha com as distâncias ao centro de $R+e$ e $R-e$, respectivamente, então temos de voltar à expressão C na página 462[711] para a força que um elemento ds exerce sobre μ perpendicularmente ao plano meridiano, na qual substituímos $+m$ ou $-m$ no lugar de μ, e $R+e$ ou $R-e$ no lugar de x. Obteremos então para $+m$:

$$
im \cdot ad\alpha \frac{a - (R+e)\cos\alpha}{(a^2+b^2+(R+e)^2 - 2a(R+e)\cos\alpha)^{3/2}} ,
$$

e para $-m$:

$$
-im \cdot ad\alpha \frac{a - (R-e)\cos\alpha}{(a^2+b^2+(R-e)^2 - 2a(R-e)\cos\alpha)^{3/2}} .
$$

[711]Pág. 453 do Vol. III das *Obras* de Weber.

A soma do primeiro valor, multiplicado por $+e$, com o último valor, multiplicado por $-e$, vai fornecer o torque que ds exerce sobre a agulha, a saber, quando colocamos M no lugar de $2em$ e observamos que a, b, e e desaparecem em comparação com R:

$$
\begin{aligned}
& iM \cdot ad\alpha \cdot \frac{a - R\cos\alpha}{(R^2 - 2aR\cos\alpha)^{3/2}} \\
= & -\frac{iM}{a}\left\{\frac{a^2}{R^2}\cos\alpha d\alpha + \frac{a^3}{R^3}(3\cos\alpha^2 - 1)d\alpha + ...\right\} ,
\end{aligned}
$$

consequentemente, o torque que todo o círculo, ao qual ds pertence, exerce sobre a agulha será:

$$
-\frac{iM}{a}\left\{\frac{a^2}{R^2}\int_0^{2\pi}\cos\alpha d\alpha + \frac{a^3}{R^3}\int_0^{2\pi}(3\cos\alpha^2 - 1)d\alpha + ...\right\} = -\frac{\pi a^2}{R^3} \cdot Mi ,
$$

já que podem ser eliminados os termos seguintes, que incluem a quarta potência e potências maiores de a/R.

Se integrarmos esse valor, multiplicado por $dadb$, entre os limites de $a = a'$ até $a = a''$ e de $b = -b'$ até $b = +b'$, então o produto dessa integral com $n/[2(a'' - a')b']$ será o torque que o multiplicador exerce sobre a agulha distante:

$$
-\frac{1}{3}\frac{n\pi Mi}{R^3} \cdot \frac{a''^3 - a'^3}{a'' - a'} = -\frac{n\pi Mi}{R^3} \cdot \frac{a'^2 + a'a'' + a''^2}{3} .
$$

Para o caso no qual a' difere ligeiramente de a'' isso fornecerá:

$$
-\frac{n\pi a'^2}{R^3} \cdot Mi ,
$$

e a' será o raio do multiplicador nesse caso. Se entendermos agora geralmente por raio do multiplicador de uma *agulha distante* a expressão:

$$
\sqrt{\frac{1}{3}(a'^2 + a'a'' + a''^2)} ,
$$

e se o denotarmos por r'', então o torque será:

$$
-\frac{n\pi r''^2}{R^3} \cdot Mi .
$$

Finalmente, se compararmos a expressão que foi encontrada para o torque que o multiplicador exerce sobre a agulha que se encontra em seu *centro*, com o torque que seria exercido se a agulha estivesse *a uma grande distância* [do centro do multiplicador], isso forneceria então a [seguinte] razão:[712]

$$
\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi : -\frac{n\pi r''^2}{R^3} \cdot Mi = 1 : -\frac{r'r''^2}{2R^3} .
$$

[712]Ou seja,

$$
-\frac{(2n\pi/r') \cdot Mi}{(n\pi r''^2/R^3) \cdot Mi} = -\frac{1}{r'r''^2/2R^3} .
$$

Regras para Calcular a Resistência a partir das Observações que são Realizadas pelo Primeiro Método na Seção 15.14

Seja a linha NS [na Figura 15] a direção da componente horizontal do magnetismo terrestre, cuja intensidade é igual a T' no ponto A, e T'' no ponto B.

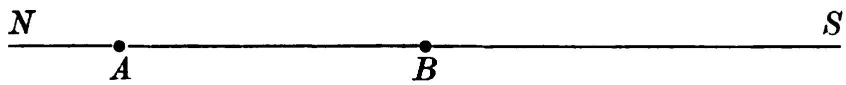


Fig. 15.

Um circuito fechado é composto de dois aneis verticais cujos centros estão em A e B. O anel B, que define o multiplicador, está fixo, enquanto que o anel A, que define o indutor, pode girar ao redor de seu diâmetro vertical. Seja S a soma das áreas que estão limitadas por todos os enrolamentos do anel A. Se ψ denotar o ângulo que a normal ao plano do anel forma com a direção NS ao final do intervalo de tempo t, então a projeção de S sobre um plano que é perpendicular a NS nesse instante será igual a $S\cos\psi$, e o aumento nessa projeção durante o elemento de tempo dt será $-S \operatorname{sen}\psi\cdot d\psi$. Isso vai fornecer o valor absoluto da *força eletromotriz* que o magnetismo terrestre T' exerce sobre o anel A assim como na Seção 15.10:

$$eE = -ST' \cdot \operatorname{sen}\psi \frac{d\psi}{dt} \cdot E \ .$$

O valor integral dessa grandeza desde o instante quando $\psi = \pi$ até o instante quando $\psi = 0$ será denotado por $e'E$, assim:

$$e' = 2ST' \ .$$

A corrente que é produzida por essa força eletromotriz em todo o circuito fechado, cuja intensidade ao final do intervalo de tempo t será denotada por iJ, atravessa o anel multiplicador B, e quando ela flui, ela vai exercer um torque sobre a agulha que se encontra em seu centro cujo eixo magnético coincide com NS e pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\frac{2n\pi}{r'} \cdot Mi \ ,$$

assim como na página 467,[713] na qual:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a'' - a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{a''^3}{(a''^2 + b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2 + b'^2)^{3/2}} \right) \frac{e^2}{b'^2} \right\} .$$

Nessa expressão, n denota o número de enrolamentos do anel multiplicador B, a' e a'' denotam o menor raio e o maior raio, respectivamente, $2b'$ denota sua altura, enquanto que M denota o magnetismo da agulha em unidades absolutas,[714] enquanto que $2e$ é o quociente M/m, quando m expressa a quantidade de fluido magnético Norte que está espalhada sobre a superfície da agulha na distribuição ideal.

Se K denotar o momento de inércia da agulha, então isso vai fornecer a aceleração de rotação da agulha como sendo igual a:

[713] Pág. 459 do Vol. III das *Obras* de Weber.

[714] Isto é, M denota o momento magnético da agulha.

$$\frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi}{K} \; .$$

Além disso, se denotarmos por $i'J$ o valor integral da intensidade de corrente iJ ao longo do intervalo de tempo desde o instante quando $\psi = \pi$ até o instante quando $\psi = 0$, então o valor integral da aceleração ao longo do mesmo intervalo de tempo — isto é, a velocidade angular que é fornecida à agulha pelo impulso de indução — será:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi'}{K} \; ,$$

a partir disso, ao multiplicar por t'/π, a amplitude da elongação α será:

$$\alpha = \frac{2nt'}{r'} \cdot \frac{i'M}{K} \; ,$$

consequentemente, obteremos:

$$i' = \frac{\alpha K r'}{2nMt'} \; ,$$

na qual t' denota o período de oscilação da agulha.

Se $1 : (1 + \vartheta)$ for a proporção em que a força diretriz magnética é aumentada pela elasticidade do fio no qual a agulha está suspensa, e se T'' for a intensidade da componente horizontal do magnetismo terrestre no local do multiplicador, então:

$$t'^2 = \frac{\pi^2 K}{(1+\vartheta)MT''} \; ,$$

ou

$$\frac{K}{Mt'} = \frac{(1+\vartheta)T''t'}{\pi^2} \; ,$$

consequentemente:

$$i' = \frac{(1+\vartheta)T''r't'}{2n\pi^2} \cdot \alpha \; .$$

Finalmente, se wW denotar a resistência de todo o circuito fechado, então isso vai fornecer a seguinte regra para calcular o coeficiente w:

$$w = \frac{e'}{i'} = \frac{n}{1+\vartheta} \cdot \frac{T'}{T''} \cdot \frac{4\pi^2 S}{\alpha r' t'} \; ,$$

o que era para ser provado.

Regras para Calcular a Resistência a partir das Observações que são Realizadas pelo Segundo Método na Seção 15.15

Se o anel fixo B que é paralelo ao meridiano magnético for fechado e se fizermos oscilar a agulha que é dependurada em seu centro, então será exercida por essa agulha uma *força eletromotriz* sobre o anel B que pode ser determinada da seguinte maneira.

Seja $+m$ o fluido magnético Norte, que é considerado como espalhado sobre a superfície da agulha na distribuição ideal, e seja $+e$ a distância entre o centro dessa massa magnética e o centro do anel B. Além disso, seja $-m$ o fluido magnético Sul, que é considerado como espalhado sobre a superfície da agulha na distribuição ideal, e seja $-e$ a distância entre o centro dessa massa magnética e o centro do anel B. Consequentemente, o magnetismo da agulha é[715]

$$M = 2em \ .$$

Então, pela página 465,[716] se γ for a velocidade angular da agulha para pequenas amplitudes de elongação da agulha, a força eletromotriz que a agulha exerce sobre uma espira do anel B de raio a e cujo plano está a uma distância b do centro do anel B, pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$-\gamma M \frac{\pi a^2}{(a^2+b^2+e^2)^{3/2}} \left\{ 2 + \frac{3}{2}(3a^2 - 2b^2 - 2e^2)\frac{e^2}{(a^2+b^2+e^2)^2} \right\} \ ,$$

na qual colocamos nela, *em primeiro lugar*, $\mu = +m$ e $u = +e\gamma$ e, *em segundo lugar*, colocamos $\mu = -m$ e $u = -e\gamma$, considerando então a soma desses dois valores. A força eletromotriz que a agulha exerce sobre todo o anel, cujos raios interno e externo são a' e a'', respectivamente, cuja altura é $2b'$, e que possui n enrolamentos, segue a partir disso como sendo dada por eE, onde:

$$e = -\frac{n}{2(a''-a')b'} \cdot \gamma M \pi \int_{a'}^{a''} a^2 da \int_{-b'}^{+b'} \frac{db}{(a^2+b^2+e^2)^{3/2}} \Bigg(2 + \frac{3}{2}(3a^2 - 2b^2 - 2e^2)\frac{e^2}{(a^2+b^2+e^2)^2} \Bigg) \ ,$$

ou

$$e = -\gamma M \cdot 2n\pi \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{3/2}} \right) \frac{e^2}{b'^2} \right\} \ ,$$

ou

$$e = -\frac{2n\pi}{r'} \cdot M\gamma \ ,$$

quando colocamos como acima:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{a''-a'} \left\{ \log \frac{a'' + \sqrt{a''^2 + b'^2}}{a' + \sqrt{a'^2 + b'^2}} + \frac{1}{4}\left(\frac{a''^3}{(a''^2+b'^2)^{3/2}} - \frac{a'^3}{(a'^2+b'^2)^{3/2}} \right) \frac{e'^2}{b'^2} \right\} \ .$$

[715] Ou seja, $M = 2em$ é o momento magnético da agulha.
[716] Pág. 456 do Vol. III das *Obras* de Weber.

A corrente que é induzida no anel multiplicador, cuja intensidade será denotada por $-\gamma iJ$, onde iJ é a corrente que seria produzida pela força eletromotriz $2n\pi/r'$, exerce um torque de volta na agulha oscilante, que é expresso, de acordo com a página 467,[717] da seguinte maneira:

$$-\frac{2n\pi}{r'} \cdot M\gamma i \ .$$

Se K denotar o momento de inércia da agulha, isso vai implicar então em um retardo na velocidade angular γ que é igual a:

$$-\frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{M\gamma i}{K} \ .$$

Finalmente, se φ denotar o pequeno ângulo que a agulha oscilante faz com o meridiano magnético em qualquer instante, de tal forma que $\gamma = d\varphi/dt$, então o torque que o magnetismo terrestre T exerce sobre a agulha será igual a:

$$-MT\varphi \ ,$$

e isso vai causar um retardo da velocidade γ que é igual a:

$$-\frac{MT}{K}\varphi \ ,$$

ao qual adicionamos a parte do retardo que se origina na elasticidade do fio de suspensão e que é igual a:

$$-\frac{\vartheta MT}{K}\varphi \ ,$$

quando ϑ expressa a força diretriz sobre a agulha que se origina disso, em unidades de sua força diretriz magnética. O retardo total da velocidade $\gamma = d\varphi/dt$ chega então a:

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2} = (1+\vartheta)\frac{MT}{K}\varphi + \frac{2n\pi}{r'} \cdot \frac{Mi}{K} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \ ,$$

de onde segue que:

$$\varphi = Ae^{-\frac{n\pi Mi}{Kr'}t} \operatorname{sen} t\sqrt{(1+\vartheta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2} \ ,$$

na qual e representa a base dos logaritmos naturais, t é o tempo contado a partir de uma passagem da agulha pelo meridiano, e:

$$\frac{\pi}{\sqrt{(1+\vartheta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2}}$$

é o período t' de oscilação da agulha, e finalmente

$$1 : e - \frac{n\pi Mit'}{Kr'}$$

[717] Pág. 459 do Vol. III das *Obras* de Weber.

é a razão entre dois arcos de oscilação sucessivos. O logaritmo natural dessa razão ou o decremento logarítmico da diminuição no arco de oscilação é, portanto:

$$\lambda = \frac{n\pi Mit'}{Kr'} \ .$$

Segue dessa equação que podemos determinar a intensidade iJ da corrente no anel fechado B que é produzida pela força eletromotriz $e = 2n\pi M/r'$:

$$i = \frac{Kr'}{n\pi Mt'} \cdot \lambda \ ,$$

e segue finalmente disso que podemos determinar a resistência wW do anel B:

$$w = \frac{e}{i} = \left(\frac{n\pi M}{r'}\right)^2 \cdot \frac{2t'}{K\lambda} \ .$$

Essa expressão para w pode ainda ser colocada em outra forma quando observamos que o período de oscilação da agulha é:

$$t' = \frac{\pi}{\sqrt{(1+\vartheta)\frac{MT}{K} - \left(\frac{n\pi Mi}{Kr'}\right)^2}} \ ,$$

e

$$\lambda = \frac{n\pi Mi}{Kr'} \cdot t' \ ,$$

de onde obtemos que:

$$\frac{MT}{K} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{(1+\vartheta)t'^2} \ ,$$

e se, além disso, for observado que quando colocamos:

$$\frac{2M}{Tr'^3} = \tan v_0 \ ,$$

então v_0 pode ser determinado pelas experiências de deflexão magnetométricas a partir de métodos conhecidos. Ao multiplicar essas duas equações, obtemos:

$$\frac{2M^2}{Kr'^3} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{(1+\vartheta)t'^2} \cdot \tan v_0 \ ,$$

consequentemente:

$$w = \frac{n^2\pi^2}{1+\vartheta} \cdot \tan v_0 \cdot \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\lambda} \cdot \frac{r'}{t'} \ ,$$

o que era para ser provado.

E - Regras para Calcular a Corrente que é Induzida por uma Corrente com Contato Deslizante

Suponha que é dada uma corrente de intensidade constante i que entra no arco circular ab em a e flui através dele até o ponto b, no qual ela passa a fluir através do raio bc até o centro c e é conduzida de volta de c para a, [como na Figura 16].[718]

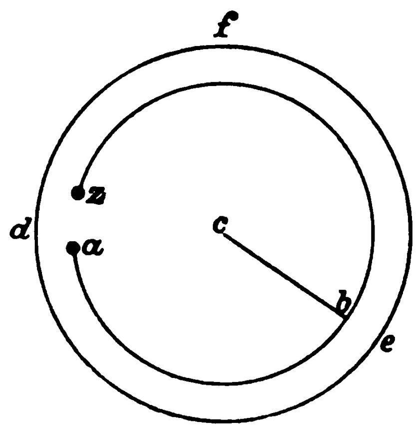


Fig. 16.

Precisamos calcular a força eletromotriz que essa corrente exerce sobre um ou mais círculos concêntricos def enquanto o segmento móvel de corrente bc descreve um círculo ao redor de c, ou, mais precisamente, enquanto a extremidade b do segmento móvel de corrente bc atravessa o arco abz, que é menor do que toda a periferia por um intervalo arbitrariamente pequeno za. Precisamos então distinguir três tipos de forças eletromotrizes, a saber:

1. As forças eletromotrizes que são exercidas pelos elementos do segmento móvel de corrente bc.

2. As forças eletromotrizes que são exercidas pelos novos elementos de corrente que entram no final do arco ab como resultado do avanço do segmento móvel de corrente bc.

3. As forças eletromotrizes que a eletricidade no contato deslizante b do arco ab exerce sobre o raio bc, ou que bc exerce sobre ba, em consequência da mudança na velocidade que ela sofre.

No que diz respeito ao *primeiro* tipo de força eletromotriz, a partir da Seção 30, pág. 367,[719,720] do primeiro Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*, a força eletromotriz de um elemento α do segmento móvel de corrente bc sobre um elemento α' do condutor induzido def pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$-\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\eta\cos\varpi-\frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\eta\right)\cdot av\cos\vartheta' \ .$$

A explicação das letras dada na *obra citada* indicada é evidente quando aplicada ao presente caso. A saber, seja C [na Figura 17] o centro do arco circular $A'A$, através do qual flui a corrente indutora i de A' para A, e seja o raio em movimento $CA = R$ o segmento móvel de corrente através do qual essa corrente i flui de A para C.

[718] A letra α na Figura 16 deve ser substituída pela letra a.

[719] [Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 202.

[720] Ver a página 209 na Seção 6.30. Ver também a Nota de rodapé 329 na página 203.

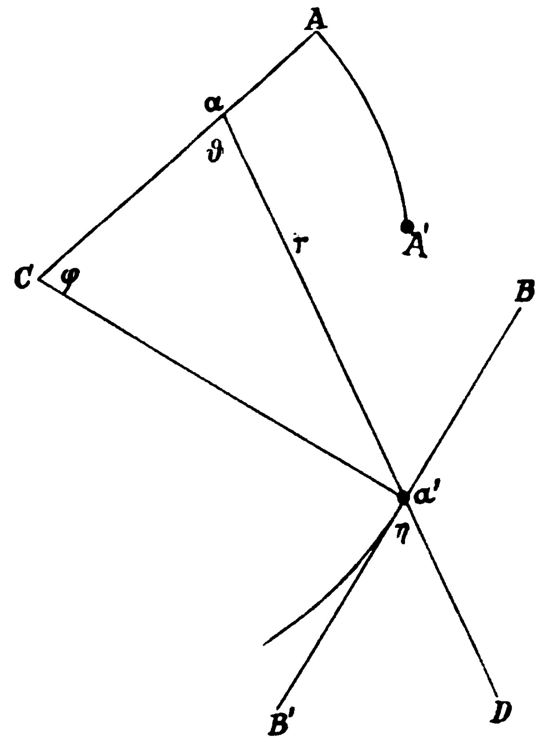


Fig. 17.

O elemento indutor α está ao longo desse raio a uma distância ρ do centro C. Seja o elemento induzido α' um elemento de um círculo concêntrico cujo raio é igual a R', e que o raio móvel CA forme o ângulo $\varphi = AC\alpha'$ com o raio que passa por α'. Seja r a reta que é traçada de α para α', que faz um ângulo $\alpha'\alpha C = \vartheta$ com a direção da corrente em α, a saber, com αC. Como a indução depende apenas do movimento relativo entre os dois elementos α e α', isso explica o fato de que podemos substituir a rotação de α ao redor do centro C, enquanto α' permanece imóvel, com a rotação de α' ao redor desse centro C com o mesmo valor de arco e com a direção oposta, enquanto α permanece imóvel. Assumimos então que o elemento α' desloca-se com uma velocidade v na direção da tangente negativa $\alpha'B'$. Essa direção forma um ângulo $D\alpha'B' = \eta$ com r prolongada, isto é, com $\alpha'D$. Além disso, como o próprio α' é um elemento do círculo cuja direção coincide com a tangente positiva do círculo $\alpha'B$, o ângulo que essa direção faz com r prolongado será $\vartheta' = \eta + \pi$. Finalmente, o ângulo ϖ[721] entre os dois planos que passam por r paralelos à direção da corrente em α e paralelos à direção na qual α' é deslocado, será $\varpi = 0$ quando ϑ e η forem ambos menores ou maiores que π, ou $\varpi = \pi$ se um dos dois ângulos ϑ, η for menor, enquanto o outro [ângulo] for maior que π. Portanto, se colocarmos para ϑ ou η, assim que eles forem maiores do que π, seus ângulos complementares iguais a 2π, então sempre teremos $\cos\varpi = +1$. Obtemos então para a expressão anterior:

$$+\frac{\alpha\alpha'}{r^2}i\left(\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta' - \frac{1}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right)\cdot av\cos\vartheta' \ ,$$

na qual o valor de ϑ é sempre menor do que π e o valor de ϑ' é sempre maior [do que π], e, além disso:

[721]Ver a Nota de rodapé 329 na página 203.

$$
\begin{aligned}
r^2 &= {R'}^2 + \rho^2 - 2R'\rho\cos\varphi \ , \\
r\,\mathrm{sen}\,\vartheta &= R'\,\mathrm{sen}\,\varphi \ , \\
r\cos\vartheta &= \rho - R'\cos\varphi \ , \\
r\,\mathrm{sen}\,\vartheta' &= \rho\cos\varphi - R' \ , \\
r\cos\vartheta' &= -\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \ .
\end{aligned}
$$

Se colocarmos, além disso, $\alpha = -d\rho$ e $\alpha' = R'd\varphi$, obteremos então a seguinte expressão:[722]

$$
+\frac{1}{2}avi \cdot R'\,\mathrm{sen}\,\varphi^2 d\varphi \cdot \left(1 - \frac{3R'}{r^2}(R' - \rho\cos\varphi)\right)\frac{\rho d\rho}{r^3} \ .
$$

Se colocarmos $r^2 = {R'}^2 + \rho^2 - 2R'\rho\cos\varphi$, encontraremos então que:

$$
\int \left(1 - \frac{3R'}{r^2}(R' - \rho\cos\varphi)\right)\frac{\rho d\rho}{r^3} = -\frac{\rho^2}{r^3} + \text{constante.}
$$

A soma de todas as forças eletromotrizes que todos os elementos do segmento móvel de corrente de $\rho = R$ até $\rho = 0$ exercem sobre o elemento induzido α' quando colocamos ${R'}^2 + R^2 - 2R'R\cos\varphi = {r'}^2$, é:

$$
+\frac{1}{2}avi \cdot R'R^2 \cdot \frac{\mathrm{sen}\,\varphi^2 d\varphi}{{r'}^3} \ .
$$

Finalmente, a soma das forças eletromotrizes sobre todos os elementos induzidos do círculo def, isto é, para todos os elementos de $\varphi = 0$ até $\varphi = 2\pi$, é:

$$
+\frac{1}{2}avi \cdot R'R^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}\,\varphi^2 d\varphi}{{r'}^3} \ .
$$

O produto dessa expressão com o tempo t é o valor integral da soma das forças eletromotrizes para o intervalo de tempo t ou para a trajetória vt que é percorrida pela corrente indutora durante esse intervalo de tempo. Consequentemente, se colocarmos $vt = 2n\pi R'$, isto é, igual a n vezes o comprimento da órbita, obteremos então o valor integral da força eletromotriz para n revoluções da corrente indutora, a saber:

$$
+ai \cdot n\pi R^2{R'}^2 \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}\,\varphi^2 d\varphi}{{r'}^3} \ .
$$

Se o condutor induzido consistir em não apenas um enrolamento, mas em m espiras cujos raios não são muito diferentes, então obteremos a soma das forças eletromotrizes que são exercidas sobre as m espiras do condutor induzido pelas n espiras do condutor indutor, a saber:

$$
+ai \cdot mn\pi R^2{R'}^2 \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{sen}\,\varphi^2 d\varphi}{{r'}^3} \ ,
$$

[722] A expressão $\mathrm{sen}\,\varphi^2$ deve ser entendida como $\mathrm{sen}^2\varphi$.

na qual colocamos $r'^2 = R'^2R^2 - 2R'R\cos\varphi$. Se colocarmos $R = kR'$, na qual $k < 1$, obteremos então:[723]

$$\frac{1}{r'^3} = \frac{1}{R'^3}\left\{\frac{1}{(1+k^2)^{3/2}} + \frac{3k\cos\varphi}{(1+k^2)^{5/2}} + \frac{15}{2}\frac{k^2\cos\varphi^2}{(1+k^2)^{7/2}} + \frac{35}{2}\frac{k^3\cos\varphi^3}{(1+k^2)^{9/2}} \right.$$
$$\left. + \frac{315}{8}\frac{k^4\cos\varphi^4}{(1+k^2)^{11/2}} + ...\right\} ,$$

consequentemente:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\varphi^2 d\varphi}{r'^3} = \frac{\pi}{(1+k^2)^{3/2}R'^3}\left\{1 + \frac{15}{8}\frac{k^2}{(1+k^2)^2} + \frac{315}{64}\frac{k^4}{(1+k^2)^4} + ...\right\} .$$

Se colocarmos novamente nessa expressão k igual a seu valor R/R' e:

$$R_0 = \frac{R^2R'^2}{(R^2+R'^2)^{3/2}} \cdot \left\{1 + \frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{R^2+R'^2}\right)^2 + \frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{R^2+R'^2}\right)^4 + ...\right\} ,$$

obteremos então a expressão:

$$+ai \cdot mn\pi^2 R_0 ,$$

o que era para ser provado.

No que diz respeito ao *segundo* tipo de forças eletromotrizes, a partir da Seção 30, pág. 367,[724,725] do primeiro Tratado sobre *Medições Eletrodinâmicas*, a força eletromotriz que um elemento do segmento imóvel de corrente α no qual a intensidade de corrente aumenta de di durante o elemento de tempo dt exerce sobre um elemento induzido α' será determinada pela seguinte expressão:

$$-\frac{1}{2}\frac{\alpha\alpha'}{r}a\cos\vartheta\cos\vartheta' \cdot \frac{di}{dt} .$$

Sejam agora α e α' os elementos de dois arcos circulares $A'\alpha$ e $B'\alpha'$, que possuem um centro comum C e raios R e R', respectivamente, de forma que $A'\alpha$ é o segmento imóvel da corrente indutora e αC é o segmento móvel [na Figura 18].[726]

[723]As expressões $\cos\varphi^2$, $\cos\varphi^3$ e $\cos\varphi^4$ devem ser entendidas como $\cos^2\varphi$, $\cos^3\varphi$ e $\cos^4\varphi$, respectivamente.
[724][Nota de Heinrich Weber:] *Obras* de Wilhelm Weber, Vol. III, pág. 202.
[725]Ver a página 209 na Seção 6.30.
[726]Substituí B por B' na parte inferior esquerda dessa Figura.

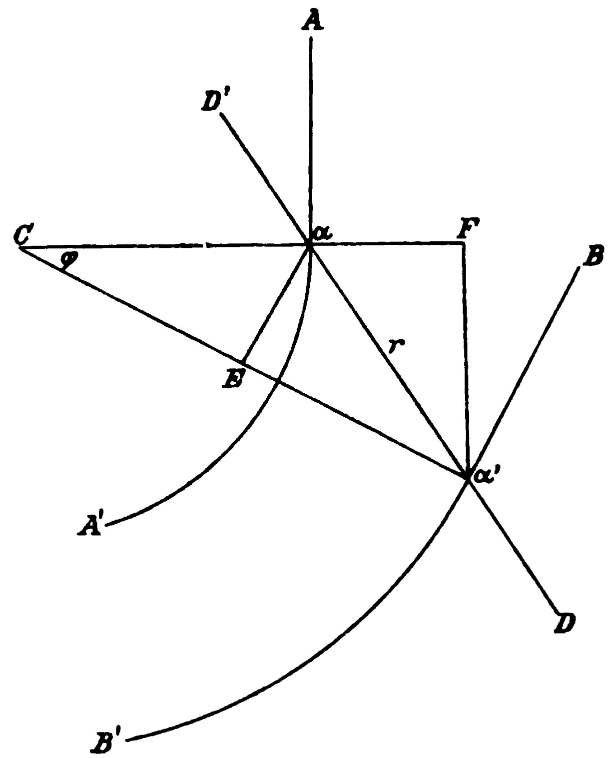


Fig. 18.

O ângulo $\alpha C \alpha' = \varphi$ é o ângulo que o segmento em movimento faz com o raio do elemento induzido α'; α é o elemento condutor recém-entrando no circuito de corrente enquanto a extremidade do segmento móvel de corrente avança de $Rd\varphi = \alpha$. A direção da corrente αA no elemento α faz um ângulo $D'\alpha A + \pi = \vartheta$ com a direção $\alpha\alpha' = r$. A direção $\alpha' B$ do elemento induzido α' faz um ângulo $\alpha\alpha' B + \pi = \vartheta'$ com a direção de r prolongada, isto é, com $\alpha' D$. Se traçarmos a perpendicular αE de α para $C\alpha'$, e a perpendicular $\alpha' F$ de α' para $C\alpha$ estendido, teremos então $\alpha\alpha' F = D'\alpha A = \vartheta - \pi$ e $\alpha'\alpha E = \alpha\alpha' B = \vartheta' - \pi$. Consequentemente, as perpendiculares serão:

$$\begin{aligned}
\alpha' F &= R' \operatorname{sen} \varphi = r \cos \alpha\alpha' F = -r \cos \vartheta \ , \\
\alpha E &= R \operatorname{sen} \varphi = r \cos \alpha' \alpha E = -r \cos \vartheta' \ .
\end{aligned}$$

Isso implica que:

$$\alpha \cos \vartheta \cos \vartheta' = \frac{R^2 R'}{r^2} \operatorname{sen} \varphi^2 d\varphi \ .$$

Se substituirmos esse valor na expressão anterior para a força eletromotriz, obteremos então:

$$-\frac{\alpha'}{2} \frac{R^2 R'}{r^3} \operatorname{sen} \varphi^2 d\varphi \cdot a \frac{di}{dt} \ .$$

Se colocarmos $di/dt = i/t$, na qual t denota o tempo durante o qual a intensidade de corrente aumenta de 0 para i no elemento indutor $\alpha = Rd\varphi$, então a força eletromotriz do novo elemento de corrente α que entra com a intensidade de corrente i será o produto dessa última expressão com o tempo t, a saber:

$$-\frac{\alpha'}{2} ai \cdot \frac{R^2 R'}{r^3} \operatorname{sen} \varphi^2 d\varphi \ ,$$

e a soma das forças eletromotrizes sobre todos os novos elementos de corrente que entram durante uma rotação do segmento móvel de corrente será:

$$-\frac{\alpha'}{2} ai \cdot R^2 R' \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \varphi^2 d\varphi}{r^3} = -\frac{\alpha'}{2} ai \cdot \pi \frac{R_0}{R'} \ ,$$

quando colocamos:

$$R_0 = \frac{R^2 R'^2}{(R^2 + R'^2)^{3/2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{15}{8} \left(\frac{RR'}{R^2 + R'^2} \right)^2 + \frac{315}{64} \left(\frac{RR'}{R^2 + R'^2} \right)^4 + ... \right\} \ .$$

Essa soma será proporcional ao comprimento de qualquer elemento induzido do círculo ao qual α' pertence. Se o condutor induzido formar então n enrolamentos cujos raios são aproximadamente iguais a R', de tal forma que seu comprimento seja igual a $2m\pi R'$, então quando substituirmos esse comprimento no lugar de α' na expressão anterior, obteremos a soma das forças eletromotrizes que os novos elementos de corrente exercem sobre todo o condutor induzido durante uma rotação do segmento móvel de corrente, ou quando multiplicarmos por n, a soma sobre n rotações do segmento móvel de corrente, assumindo que a ação do desaparecimento repentino de todos os elementos de corrente entrando ao final dessa rotação seja cancelada pelo fechamento do circuito induzido nesse instante. A força eletromotriz procurada será então:

$$-ai \cdot mn\pi^2 R_0 \ ,$$

o que era para ser provado.

Ainda precisa ser considerado o *terceiro* tipo de forças eletromotrizes, a saber, aquelas que são exercidas pela eletricidade que vai do segmento imóvel de corrente para o segmento móvel no contato deslizante devido à mudança de velocidade que ela sofre nessa transição. Contudo, como foi mostrado na Seção 15.39, todas as ações elementares que são produzidos dessa maneira são iguais às ações resultantes do *segundo* tipo de forças eletromotrizes. Consequentemente, essa igualdade também ocorre para a soma, de tal forma que ela é igualmente válida para a expressão que acabou de ser encontrada.

A força eletromotriz total durante a duração de n rotações da corrente indutora é a soma das três expressões encontradas, a primeira das quais é igual e oposta às duas últimas, e é então:

$$-ai \cdot mn\pi^2 R_0 \ .$$

Finalmente, se T denotar a duração das n rotações da corrente indutora e se w denotar a resistência do condutor induzido, obteremos então a seguinte equação para calcular a intensidade i' da corrente induzida, em comparação com a corrente i da corrente indutora que possui um contato deslizante:

$$\frac{i'}{i} = -\frac{a}{w} \cdot mn\pi^2 \frac{R_0}{T} \ ,$$

na qual o sinal negativo no segundo termo significa que a direção da corrente induzida é oposta à direção da corrente indutora, assumindo que novos elementos são sempre adicionados ao segmento imóvel de corrente pela rotação da corrente indutora. Se, por outro lado, o indutor girasse na direção oposta, o que removeria elementos da parte imóvel da corrente, o segundo elemento da equação, como é evidente, receberia o valor oposto.

Referências Bibliográficas

[AB23] A. K. T. Assis and L. L. Bucciarelli. *Coulomb's Memoirs on Torsion, Electricity, and Magnetism Translated into English*. Apeiron, Montreal, 2023. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[AC06] A. K. T. Assis and J. P. M. C. Chaib. Nota sobre o magnetismo da pilha de Volta — tradução comentada do primeiro artigo de Biot e Savart sobre eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 16:303–309, 2006.

[AC11] A. K. T. Assis and J. P. M. d. C. Chaib. *Eletrodinâmica de Ampère: Análise do Significado e da Evolução da Força de Ampère, Juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*. Editora da Unicamp, Campinas, 2011.

[AC12] A. K. T. Assis and J. P. M. C. Chaib. Ampère's motor: its history and the controversies surrounding its working mechanism. *American Journal of Physics*, 80:990–995, 2012. Doi: 10.1119/1.4746698.

[AC15] A. K. T. Assis and J. P. M. C. Chaib. *Ampère's Electrodynamics — Analysis of the Meaning and Evolution of Ampère's Force between Current Elements, together with a Complete Translation of His Masterpiece: Theory of Electrodynamic Phenomena, Uniquely Deduced from Experience*. Apeiron, Montreal, 2015. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[AH07] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *The Electric Force of a Current: Weber and the Surface Charges of Resistive Conductors Carrying Steady Currents*. Apeiron, Montreal, 2007. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[AH09] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *A Força Elétrica de uma Corrente: Weber e as Cargas Superficiais de Condutores Resistivos com Correntes Constantes*. Edusp e Edufal, São Paulo e Maceió, 2009. Volume 73 da Coleção Acadêmica.

[AH13] A. K. T. Assis and J. A. Hernandes. *Elektrischer Strom und Oberflächenladungen: was Wilhelm Weber schon vor mehr als 150 Jahre wußte*. Apeiron, Montreal, 2013. Tradução de H. Härtel. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Amp20a] A.-M. Ampère. Analyse des mémoires lus par M. Ampère a l'Académie des Sciences, dans les séances des 18 et 25 septembre, des 9 et 30 octobre 1820. *Annales Générales des Sciences Physiques*, 6:238–257, 1820.

[Amp20b] A.-M. Ampère. Analyse des mémoires lus par M. Ampère a l'Académie des Sciences, dans les séances des 18 et 25 septembre, des 9 et 30 octobre 1820. 20 páginas.

Reimpressão de *Annales Générales des Sciences Physiques*, Vol. 6, págs. 238-257 (1820), 1820.

[Amp20c] A.-M. Ampère. Suite du mémoire sur l'action mutuelle entre deux courans électriques, entre un courant électrique et un aimant ou le globe terrestre, et entre deux aimans. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:170–218, 1820.

[Amp21] A.-M. Ampère. Suite de la note sur un appareil à l'aide duquel on peut vérifier toutes les propriétés des conducteurs de l'électricité voltaïque, découvertes par M. Ampère. *Annales de Chimie et de Physique*, 18:313–333, 1821.

[Amp23] A.-M. Ampère. Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 21 novembre 1825. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6:175–387, 1823. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1827.

[Amp26] A.-M. Ampère. *Théorie des Phénomènes Électro-dynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience*. Méquignon-Marvis, Paris, 1826.

[Amp65] A.-M. Ampère. On the Mathematical Theory of Electrodynamic Phenomena, Experimentally Deduced. In R. A. R. Tricker*, Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 155–200, New York, 1965. Pergamon. Partial English translation by O. M. Blunn of Ampère's work "Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience", *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, Vol. 6, pp. 175-387 (1823), issued 1827.

[Amp69] A. M. Ampère. The solenoid. Circuits and magnetic shells. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 456–460, New York, 1969. McGraw-Hill. Extracts from "Théorie des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience," Paris, 1826.

[Amp12] A.-M. Ampère. Mathematical Theory of Electrodynamic Phenomena, Uniquely Derived from Experiments. Traduzido por M. D. Godfrey. Disponível em https://archive.org/details/AmpereTheorieEn e https://sites.google.com/site/michaeldgodfrey/physics-information-and-communication, 2012.

[Ara24] F. J. D. Arago. Untitled. *Annales de Chimie et de Physique*, 27:363, 1824.

[Ara25] F. J. D. Arago. Untitled. *Annales de Chimie et de Physique*, 28:325–326, 1825.

[Ara26] F. J. D. Arago. Note concernant les phénomènes magnétiques auxquels le mouvement donne naissance. *Annales de Chimie et de Physique*, 32:213–223, 1826.

[Ara54a] F. Arago. Notices Biographiques, Ampère. In J.-A. Barral, editor, *Oeuvres Complètes*, pages 1–116. Gide et J. Baudry, Paris, 1854. Vol. 2. Notice lue par extraits à l'Académie des Sciences le 21 août 1839.

[Ara54b] F. J. D. Arago. Du magnétisme de rotation. In J.-A. Barral, editor, *Oeuvres Complètes de François Arago*, volume 4, pages 424–448. Gide et J. Baudry, Paris, 1854.

[Ass89] A. K. T. Assis. On Mach's principle. *Foundations of Physics Letters*, 2:301–318, 1989.

[Ass92a] A. K. T. Assis. *Curso de Eletrodinâmica de Weber*. Setor de Publicações do Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP, Campinas, 1992. Notas de Física IFGW Número 5. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?down=60362.

[Ass92b] A. K. T. Assis. Teorias de ação a distância — uma tradução comentada de um texto de James Clerk Maxwell. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 7:53–76, 1992.

[Ass94] A. K. T. Assis. *Weber's Electrodynamics*. Kluwer, Dordrecht, 1994. Hoje em dia esse livro está disponível pela Springer. Doi: 10.1007/978-94-017-3670-1 e www.springer.com/gp/book/9780792331377.

[Ass98] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional*. Editora do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP/FAPESP, Campinas, 1998. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass99] A. K. T. Assis. *Relational Mechanics*. Apeiron, Montreal, 1999. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass03] A. K. T. Assis. Tradução de uma obra de Gauss. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 25:226–249, 2003.

[Ass10a] A. K. T. Assis. *The Experimental and Historical Foundations of Electricity*. Apeiron, Montreal, 2010. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass10b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Apeiron, Montreal, 2010. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass13] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional e Implementação do Princípio de Mach com a Força de Weber Gravitacional*. Apeiron, Montreal, 2013. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass14] A. K. T. Assis. *Relational Mechanics and Implementation of Mach's Principle with Weber's Gravitational Force*. Apeiron, Montreal, 2014. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass15a] A. K. T. Assis. *Eletrodinâmica de Weber: Teoria, Aplicações e Exercícios*. Editora da Unicamp, Campinas, 2015. Segunda edição. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e https://editoraunicamp.com.br/catalogo/?id=1718.

[Ass15b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*. Apeiron, Montreal, 2015. Livro em russo traduzido da versão em inglês por A. Baraov. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass17] A. K. T. Assis. *I Fondamenti Sperimentali e Storici dell'Elettricità*. Associazione per l'Insegnamento della Fisica, Parma, 2017. La Fisica nella Scuola, Anno L, n. 2 Supplemento, Quaderno 26. Traduzido por P. Cerreta, A. Cerreta e R. Cerreta. Editado por P. Cerreta, R. Serafini e R. Urigu. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass18a] A. K. T. Assis. *The Experimental and Historical Foundations of Electricity*, volume 2. Apeiron, Montreal, 2018. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass18b] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, volume 2. Apeiron, Montreal, 2018. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass19] A. K. T. Assis. *Os Fundamentos Experimentais e Históricos da Eletricidade*, volume 2. Apeiron, Montreal, 2019. Livro em russo traduzido do volume 2 da versão em inglês por A. Baraov. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass21a] A. K. T. Assis. Editor's comments on Kirchhoff's 1857 paper on the motion of electricity in wires. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 221–224, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass21b] A. K. T. Assis. Editor's comments on Poggendorff's 1857 paper. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 227–228, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass21c] A. K. T. Assis. The origins and meanings of Weber's constant c, of Maxwell's constant c and the relation of these two different constants with light velocity in vacuum. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 385–396, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ass22] A. K. T. Assis. *Tradução Comentada das Principais Obras de Coulomb sobre Eletricidade e Magnetismo*. Apeiron, Montreal, 2022. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Ber36a] Berzelius. Considerations respecting a new power which acts in the formation of organic bodies. *The Edinburgh New Philosophical Journal*, 21:223–228, 1836.

[Ber36b] Berzélius. Quelques idées sur une nouvelle force agissant dans les combinaisons des corps organiques. *Annales de Chimie et de Physique*, 61:146–151, 1836.

[Ber36c] J. Berzelius. Einige Ideen über eine bei der Bildung organischer Verbindungen in der lebenden Natur wirksame, aber bisher nich bemerkte Kraft. *Jahres-Bericht* *über die Fortschritte der physischen Wissenschaften von Jacob Berzelius*, 15:237–245, 1836.

[Ber74] J. Bertrand. Démonstration des théorèmes relatifs aux actions électrodynamiques. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 3:297–306 and 335–343, 1874.

[Bio21] J. B. Biot. *Précis élémentaire de Physique expérimentale*, volume II. Deterville, Paris, 1821. 2^a edição.

[Blo05] C. Blondel, 2005. Ampère et l'Histoire de l'Électricité. Homepage do CNRS que foi criada e coordenada por Christine Blondel. Disponível em www.ampere.cnrs.fr.

[BS20] J. B. Biot and F. Savart. Note sur le magnétisme de la pile de Volta. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:222–223, 1820.

[BS24] J. B. Biot and F. Savart. Sur l'aimantation imposée aux métaux par l'électricité en mouvement. In J. B. Biot, *Précis Élémentaire de Physique Expérimentale,* vol. II, troisième édition, pages 704–774. Gauthier-Villars, Paris, 1824.

[BS85] J. B. Biot and F. Savart. Sur l'aimantation imprimée aux métaux par l'électricitè en mouvement, in: *Précis élémentaire de Physique expérimentale*, troisième édition (Paris: Deterville, 1824), Vol. II, pp. 704-774. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique — Tome II: Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 80–127, Paris, 1885. Gauthier-Villars.

[BS65a] J. B. Biot and F. Savart. Magnetization of metals by electricity in motion. In R. A. R. Tricker*, Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 119–139, New York, 1965. Pergamon. Extracts from Biot's *Précis elémentaire de Physique expérimentale*, Vol. II, 3rd edition, pp. 707-723 and 740-746, 1824 (Translated by O. M. Blunn).

[BS65b] J. B. Biot and F. Savart. Note on the magnetism of Volta's battery. In R. A. R. Tricker*, Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 118–119, New York, 1965. Pergamon. Translated by O. M. Blunn.

[CA09] J. P. M. d. C. Chaib and A. K. T. Assis. Sobre os efeitos das correntes elétricas (segunda parte) — Tradução da primeira obra de Ampère sobre eletrodinâmica. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 2:118–145, 2009.

[CA13] J. P. M. d. C. Chaib and A. K. T. Assis. Motor de Ampère: elementos para um ensino crítico de física. In C. C. Silva and M. E. B. Prestes, editors, *Aprendendo Ciência e sobre Sua Natureza: abordagens históricas e filosóficas*, pages 55–70. Tipographia Editora Expressa, São Carlos, 2013.

[Cha09] J. P. M. d. C. Chaib, 2009. Tese de Doutorado: "Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de Sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica." Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP (Campinas, SP). Orientador: A. K. T. Assis. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis e http://repositorio.unicamp.br/Acervo/Detalhe/435449.

[Cha19] J. P. M. d. C. Chaib. Contextualização e tradução do artigo "Demonstração dos teoremas relativos às ações eletrodinâmicas", escrito por J. Bertrand. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 36:99–134, 2019. Doi: 10.5007/2175-7941.2019v36n1p99.

[Chi64] R. A. Chipman. Contributions from the museum of history and tecnology: Science and technology paper 38: The earliest electromagnetic instruments. *Bulletin of the United States National Museum*, pages 121–136, 1964. Disponível em https://www.gutenberg.org/ebooks/34061.

[Far26] J. Farrar. *Elements of Electricity, Magnetism, and Electro-magnetism, embracing the Late Discoveries and Improvements, digested into the Form of a Treatise; being the Second Part of a Course of Natural Philosophy*. Cambridge University Press, Cambridge, 1826. This volume, with the exception of the notes, is selected from Biot's *Précis Elémentaire de Physique*, third edition, printed at Paris in 1824, and translated with such alterations as were found necessary in order to adapt it to the English reader.

[Far32a] M. Faraday. Experimental researches in electricity. *Philosophical Transactions*, 122:125–162, 1832. Lido em 24 de novembro de 1831. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 265-285, parágrafos 1-139.

[Far32b] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Second series. *Philosophical Transactions*, 122:163–194, 1832. Lido em 12 de janeiro de 1832. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 286-302, parágrafos 140-264.

[Far32c] M. Faraday. Experimental-Untersuchungen über Elektricität. *Annalen der Physik und Chemie*, 25:91–142, 1832.

[Far32d] M. Faraday. Zweite Reihe von Experimental-Untersuchungen über Elektricität. *Annalen der Physik und Chemie*, 25:142–186, 1832.

[Far34a] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Seventh series. *Philosophical Transactions*, 124:77–122, 1834. Lido em 23 de janeiro, 6 e 13 de fevereiro de 1834. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 361-390, parágrafos 661-874.

[Far34b] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Sixth series. *Philosophical Transactions*, 124:55–76, 1834. Lido em 11 de janeiro de 1834. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 347-360, parágrafos 564-660.

[Far34c] M. Faraday. Von der elektro-chemischen Zersetzung — Fortsetzung. *Annalen der Physik und Chemie*, 33:301–331 and 433–451, 1834.

[Far46a] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Nineteenth series. *Philosophical Transactions*, 136:1–20, 1846. Lido em 20 de novembro de 1845. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 595-607, parágrafos 2146-2242.

[Far46b] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Twentieth series. *Philosophical Transactions*, 136:21–40, 1846. Lido em 18 de dezembro de 1845. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 607-619, parágrafos 2243-2342.

[Far46c] M. Faraday. Experimental researches in electricity. Twenty-first series. *Philosophical Transactions*, 136:41–62, 1846. Lido em 8 de janeiro de 1846. Reimpresso em *Great Books of the Western World*, R. M. Hutchins (editor), (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952), Vol. 45: Lavoisier, Fourier, Faraday. Págs. 619-632, parágrafos 2343-2453.

[Far46d] M. Faraday. Zwanzigste Reihe von Experimental-Untersuchungen über Elektricität. *Annalen der Physik und Chemie*, 69:289–320, 1846.

[Far47] M. Faraday. Ein und zwanzigste Reihe von Experimental-Untersuchungen über Elektricität. *Annalen der Physik und Chemie*, 70:24–59, 1847.

[Far89] M. Faraday. *Experimental-Untersuchungen über Elektricität*, volume I. Springer, Berlin, 1889. Deutsche Uebersetzung von S. Kalischer.

[Far11] M. Faraday. Pesquisas experimentais em eletricidade. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 28:152–204, 2011. Tradução de A. K. T. Assis e L. F. Haruna. Doi: 10.5007/2175-7941.2011v28n1p152.

[Fec45] G. T. Fechner. Ueber die Verknüpfung der Faraday'schen Inductions-Erscheinungen mit den Ampère'schen elektro-dynamischen Erscheinungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 64:337–345, 1845.

[Fec60] G. T. Fechner. *Elemente der Psychophysik*, volume I. Breitkopf und Härtel, Leipzig, 1860.

[Fec21] G. T. Fechner. On the connection between Faraday's induction phenomena and Ampère's electrodynamic phenomena. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 19–26, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Fou22] J. B. J. Fourier. *Théorie Analytique de la Chaleur*. Firmin Didot, Paris, 1822.

[Fou52] J. B. J. Fourier. Analytical Theory of Heat. In *Great Books of the Western World, Vol. 45*, pages 161–251, Chicago, 1952. Encyclopaedia Britannica. Translated by A. Freeman.

[Fra81] O. I. Franksen. *H. C. Ørsted — A Man of the Two Cultures*. Strandbergs Forlag, Birkerød, 1981.

[Gau32] C. F. Gauss. Anzeige der "Intensitas Vis Magneticae Terrestris ad Mensuram Absolutam Revocata". *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 205-207:2041–2058, 1832. Vol. 205 de 24 de dezembro, 1832, págs. 2041-2048; Vols. 206 e 207 de 27 de dezembro, 1832, págs. 2049-2058. Reimpresso em C. F. Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 293-304 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867). Versão corrigida em: Astronomische Nachrichten 10, 1833, Nr. 238, págs. 349-360: Anzeige der Abhandlung des Herrn Hofraths Gauß: Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata.

[Gau33a] C. F. Gauss. [abstract of the paper:] Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. *Philosophical Magazine*, 2:291–299, 1833.

[Gau33b] C. F. Gauss. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft, zurückgeführt auf absolutes Maass. *Annalen der Physik und Chemie*, 28:241–273 and 591–615, 1833. Traduzido por J. C. Poggendorff.

[Gau34] C. F. Gauss. Mesure absolue de l'intensité du magnétisme terrestre. *Annales de Chimie et de Physique*, 57:5–69, 1834.

[Gau36] C. F. Gauss, 1836. Ob isměrenii zemnago magnitizma. (Soč[inenie] Karl[a] Frid[richa] Gaussa). Per[evël] A. Drašusov. Učenyja zapiski Imperatorskago universiteta čast 11, 1836, Nr. 7 (Januar), str. 3-22; Nr. 8 (Februar), str. 246-271; Nr. 9 (März), str. 341-381.

[Gau37] C. F. Gauss. [abstract of the paper:] Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. *Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions of the Royal Society of London, from 1830 to 1837 inclusive*, 3:166–174, 1837.

[Gau38a] C. F. Gauss. Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, volume II, chapter IV, pages 58–80. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 374-394 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).

[Gau38b] C. F. Gauss. Ueber ein neues, zunächst zur unmittelbaren Beobachtung der Veränderungen in der Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus bestimmtes Instrument. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, volume II, chapter I, pages 1–19. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 357-373 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).

[Gau39a] C. F. Gauss. Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*, volume III, chapter I, pages 1–57. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1839. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 119-194 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).

[Gau39b] C. F. Gauss. Misura assoluta dell' intensità della forza magnetica terrestre. *Effemeridi astronomiche di Milano*, primo supplemento:3–132, 1839. Tradotta e commentata da P. Frisiani.

[Gau40] C. F. Gauss. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im Verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839*, volume IV, chapter I, pages 1–51. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1840. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 195-242 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).

[Gau41a] C. F. Gauss. General theory of terrestrial magnetism. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 2, pages 184–251, London, 1841. Richard and John E. Taylor. Translated by Mrs. Sabine, and revised by Sir John Herschel, Bart.

[Gau41b] C. F. Gauss. Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Goettingensis Recentiores*, 8:3–44, 1841. Apresentado na Sociedade Real de Ciências de Göttingen em 15 de dezembro de 1832. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 79-118 (Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).

[Gau41c] C. F. Gauss. On a new instrument for the direct observation of the changes in the intensity of the horizontal portion of the terrestrial magnetic force. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 2, pages 252–267, London, 1841. Richard and John E. Taylor. From the *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, Volume II, Chapter I, pp. 1-19. — Herausgegeben von Carl Friederich Gauss und Wilhelm Weber. Göttingen, 1838. Translated by Mr. William Francis, and revised by Major Sabine and Professor Lloyd.

[Gau41d] C. F. Gauss. Vorschriften zur Berechnung der magnetischen Wirkung, welche ein Magnetstab in der Ferne ausübt. In *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*, volume V, chapter II, pages 26–34. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1841. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 427-435 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).

[Gau43] C. F. Gauss. General propositions relating to attractive and repulsive forces acting in the inverse ratio of the square of the distance. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 3, pages 153–196, London, 1843. Richard and John E. Taylor.

[Gau45] C. F. Gauss, 1845. Zur Elektrodynamik. Carta [20] de C. F. Gauss para W. Weber de 19 de março de 1845. Reimpressa em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 5, págs. 627-629 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1867).

[Gau67] C. F. Gauss. Grundgesetz für alle Wechselwirkungen galvanischer Ströme. In Carl Friedrich Gauss' *Werke*, volume 5, pages 616–617. Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Göttingen, 1867. Disponível em https://gdz.sub.uni-goettingen.de/volumes/id/PPN235957348.

[Gau94] C. F. Gauss. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt. In E. Dorn, editor, *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Vol. 53*. Wilhelm Engelmann Verlag, Leipzig, 1894. Tradução de A. Kiel, Notas de E. Dorn. Reimpresso em *Carl Friedrich Gauss' — Werke — Supplement* — Volume 3: Varia: 15 Abhandlungen in deutscher Übersetzung. Mit einer Einleitung, einer Bibliographie und Registern herausgegeben von Karin Reich. Hrsg. von der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Universitätsverlag Göttingen 2019, págs. 533-594.

[Gau35] C. F. Gauss. The absolute measure of magnetic force. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 519–524, New York, 1935. McGraw-Hill.

[Gau52] C. F. Gauss, 1952. Intensivnost semnoj magnitnoj sily, privedennaja k absoljutnoj mere. In: B. M. Janovskij (Hrsg): Karl Fridrich Gauss. Izbrannye trudy po zemnomu magnetizmu. Perevod A. N. Krylova. Moskau 1952, str. 23-75.

[Gau75] C. F. Gauss. Letter from Gauss to Schumacher, April 29, 1845. In *Carl Friedrisch Gauss, Werke, Ergänzungsreihe, Vol. V, Briefwechsel C. F. Gauss — H. C. Schumacher, Part 2*, pages 436–440. Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1975.

[Gau03] C. F. Gauss. The intensity of the earth's magnetic force reduced to absolute measurement. Traduzido em 1995 por Susan P. Johnson, editado por L. Hecht. Disponível desde 2003 em http://21sci-tech.com/translation.html, 2003.

[Gau21a] C. F. Gauss. Fundamental law for all interactions of galvanic currents. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of Electromagnetism and Gravitation, page 11, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Gau21b] C. F. Gauss. [Gauss, 1832, Abstract of the paper:] Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 37–45, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Gau21c] C. F. Gauss. On a new instrument for the direct observation of the changes in the intensity of the horizontal portion of the terrestrial magnetic force. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 123–134, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Gau21d] C. F. Gauss. *Teoría General del Magnetismo Terrestre*. Catarata, Madrid, 2021. Introducción, traducción y notas de J. M. Vaquero.

[Gau21e] C. F. Gauss. The absolute measure of the earth's magnetic force. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 49–80, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Gau d] C. F. Gauss, [s. d.]. The complete correspondence of Carl Friedrich Gauß. Site of the Department "Digital Library" of the State and University Library in Göttingen on behalf of the Academy of Sciences in Göttingen. The metadata of the letters have been made available by Prof. Dr. Menso Folkerts. Disponível em https://gauss.adw-goe.de.

[Gil71a] C. S. Gillmor. *Coulomb and the Evolution of Physics and Engineering in Eighteenth-Century France*. Princeton University Press, Princeton, 1971.

[Gil71b] C. S. Gillmor. Coulomb, Charles Augustin. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography,* Vol. 3, pages 439–447. Charles Scribner's Sons, New York, 1971.

[Gro39] W. R. Grove. Volta'sche Säule von großser elektro-chemischer Kraft. *Annalen der Physik und Chemie*, 48:300–304, 1839.

[GT14] K. H. Glassmeier and B. T. Tsurutani. Carl Friedrich Gauss — General theory of terrestrial magnetism — a revised translation of the German text. *History of Geo- and Space Sciences*, 5:11–62, 2014. Doi: 10.5194/hgss-5-11-2014.

[GW37] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetisches Vereins im Jahre 1836*, volume I. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1837.

[GW38] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetisches Vereins im Jahre 1837*, volume II. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838.

[GW39a] Gauss and Weber. Remarks on the construction of magnetic observatories and the instruments which they should contain. *The Annals of Electricity, Magnetism, & Chemistry; and Guardian of Experimental Science*, 3:92–108, 1839.

[GW39b] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetisches Vereins im Jahre 1838*, volume III. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1839.

[GW40a] C. F. Gauss and W. Weber. *Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie Entworfen — Supplement zu den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetisches Vereins unter Mitwirkung von C. W. B. Goldschmidt*. Weidmann'sche Buchhandlung, Leipzig, 1840. Reimpresso em Carl Friedrich Gauss' *Werke*, Vol. 12, págs. 335-408 (Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1929).

[GW40b] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetisches Vereins im Jahre 1839*, volume IV. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1840.

[GW41] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetisches Vereins im Jahre 1840*, volume V. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1841.

[GW43] C. F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetisches Vereins im Jahre 1841*, volume VI. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1843.

[GW66] C. F. Gauss and W. Weber. Results of the observations made by the Magnetic Association in the year 1836. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 2, pages 20–97, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation. Translated by Mr. W. Francis. The translation has been revised by Professor Lloyd and Major Sabine.

[GW96] C. F. Gauss and W. E. Weber. Text of the Gauss-Weber correspondence. *21st Century Science & Technology*, 9(3):41–43, 1996. Cartas transcritas por K. Krause e A. Hartmann. Editado por L. Hecht. Tradução de S. P. Johnson. Disponível em https://21sci-tech.com/articles/Atomic_Science.pdf e https://archive.org/details/WeberAmpereElectrodynamicsHistory.

[GW21] C. F. Gauss and W. Weber. Text of the Gauss-Weber 1845 correspondence. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 11–17, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Hel47] H. von Helmholtz. *Über die Erhaltung der Kraft*. Engelmann, Leipzig, 1847. Reimpresso em H. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen (Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882), Vol. 1, Artigo 2, págs. 12-75.

[Hel53] H. Helmholtz. On the conservation of force; a physical memoir. In J. Tyndall and W. Francis, editors, *Scientific Memoirs,* Volume on Natural Philosophy, pages 114–162, London, 1853. Taylor and Francis. Translated by J. Tyndall. Disponível em https://books.google.com.br/books?id=C1i4AAAAIAAJ&hl=pt-BR&source=gbs_navlinks_s.

[Hel72a] H. Helmholtz. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. *Monatsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften*, pages 247–256, 1872. Reimpresso em H. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen (Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1882), Vol. 1, Artigo 34, págs. 636-646.

[Hel72b] H. von Helmholtz. On the theory of electrodynamics. *Philosophical Magazine*, 44:530–537, 1872.

[Hen38] J. Henry. Contributions to electricity and magnetism: III. On electro-dynamic induction. *Transactions of the American Philosophical Society*, 6:308–337, 1838.

[Hen42] J. Henry. Ueber elektro-dynamische Induction. *Annalen der Physik und Chemie*, Ergänzungsband:282–312, 1842.

[Hen04] K. Hentschel. Leben und Werke des Instrumentmachers Moritz Meyerstein (1808-82). *Einbecker Jahrbuch*, 49:157–184, 2004.

[Hen05] K. Hentschel. *Gaußens unsichtbare Hand: Der Universitätsmechanicus und Maschineninspector Moritz Meyerstein — Ein Instrumentbauer im 19. Jahrhundert.* Abhandlungen der Göttinger Akademie der Wissenschaften, Göttingen, 2005. Mathem.-Physik. Klasse, Reihe 3, Nr. 52.

[Hen07] K. Hentschel. Gauß, Meyerstein and Hanoverian metrology. *Annals of Science*, 64:41–72, 2007.

[Hen20] K. Hentschel. The 'invisible hand' of Carl Friedrich Gauß — retracing the life of Moritz Meyerstein, a 19th century instrument maker and Universitäts-Mechanicus. In C. Forstner and M. Walker, editors, *Biographies in the History of Physics: Actors, Objects, Institutions*, chapter 2, pages 13–36. Springer, Berlin, 2020. Translated by A. M. Hentschel.

[Jac51] Jacobi. Sur quelques points de la galvanométrie. *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris*, 33:277–282, 1851.

[Joh97] L. Johnson. In memoriam: Susan P. Johnson. *Executive Intelligence Review*, 24:58, 1997.

[Kir48] G. Kirchhoff. Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen. *Annalen der Physik und Chemie*, 75:189–205, 1848. Reimpresso em G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), págs. 33-48.

[Kir49a] G. Kirchhoff. Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducirter elektrischer Ströme abhängt. *Annalen der Physik und Chemie*, 76:412–426, 1849. Reimpresso em G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), págs. 118-131.

[Kir49b] G. Kirchhoff. Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst. *Annalen der Physik und Chemie*, 78:506–513, 1849. Reimpresso em G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), págs. 49-55.

[Kir50] G. Kirchhoff. On a deduction of Ohm's law, in connexion with the theory of electrostatics. *Philosophical Magazine*, 37:463–468, 1850.

[Kir54] G. Kirchhoff. Démonstration des lois de Ohm fondée sur les principes ordinaires de l'électricité statique. *Annales de Chimie et de Physique*, 41:496–500, 1854.

[Kir57a] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in wires. *Philosophical Magazine*, 13:393–412, 1857. Disponível em https://archive.org/stream/londonedinburghp13maga#page/392/mode/2up.

[Kir57b] G. Kirchhoff. Ueber die Bewegung der Elektricität in Drähten. *Annalen der Physik und Chemie*, 100:193–217, 1857. Reimpresso em G. Kirchhoff's *Gesammelte Abhandlungen* (Barth, Leipzig, 1882), págs. 131-154.

[Kir21a] G. Kirchhoff. On a deduction of Ohm's laws, in connexion with the theory of electrostatics. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 261–265, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Kir21b] G. Kirchhoff. On the motion of electricity in wires. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 201–220, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Koe89] A. Koestler. *O Homem e o Universo*. Ibrasa, São Paulo, 1989. Tradução de A. Denis.

[Koh49] R. Kohlrausch. Die elektroskopischen Eigenschaften der geschlossenen galvanischen Kette. *Annalen der Physik und Chemie*, 78:1–21, 1849.

[Koh83] F. Kohlrausch. *An Introduction to Physical Measurements — with appendices on absolute electrical measurement, etc.* J. & A. Churchill, London, 2nd edition, 1883. Translated from the fourth German edition by T. H. Waller and H. R. Procter.

[KW57] R. Kohlrausch and W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 3:221–292, 1857. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 609-676.

[KW21] R. Kohlrausch and W. Weber. Electrodynamic measurements, fourth memoir, specially attributing mechanical units to measures of current intensity. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 141–199, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[LA98] E. K. Lauridsen and N. Abrahamsen. The history of astatic magnet systems and suspensions. *Centaurus*, 40:135–169, 1998.

[Len34] E. Lenz. Ueber die Bestimmung der Richtung der durch elektrodynamische Vertheilung erregten galvanischen Ströme. *Annalen der Physik und Chemie*, 31:483–494, 1834.

[Len69] H. F. E. Lenz. Lenz' law. In W. F. Magie, editor, *A Source Book in Physics*, pages 511–513, New York, 1969. McGraw-Hill. Extract from a paper published in the *Annalen der Physik und Chemie*, vol. 31, p. 483, 1834, entitled "Ueber die Bestimmung der Richtung der durch elektrodynamische Vertheilung erregten galvanischen Ströme.".

[LSN21] A. R. d. S. Lima, A. P. B. d. Silva, and L. F. d. Nascimento. Uma proposta histórica e experimental para o estudo dos multiplicadores do efeito magnético. *Experiências em Ensino de Ciências*, 16:185–206, 2021.

[Mal82] S. R. C. Malin. Sesquicentenary of Gauss's first measurement of the absolute value of magnetic intensity. *Philosophical Transactions*, 306:5–8, 1982.

[Mal07] S. R. C. Malin. Gauss' determination of absolute intensity. In D. Gubbins and E. Herrero-Bervera, editors, *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*, pages 278–279. Springer, Dordrecht, 2007. Doi: 10.1007/978-1-4020-4423-6_104.

[Mar86] R. d. A. Martins. Ørsted e a descoberta do eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 10:89–114, 1986.

[Max58] J. C. Maxwell. On Faraday's lines of force. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 10:27–83, 1858. Lido em 10 de dezembro de 1855 e 11 de fevereiro de 1856. Reimpresso em W. D. Niven (ed.), The Scientific Papers of James Clerk Maxwell (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), Vol. 1, págs. 155-229.

[Max65] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions*, 155:459–512, 1865. Lido em 8 de dezembro de 1864. Reimpresso em W. D. Niven (ed.), The Scientific Papers of James Clerk Maxwell (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), Vol. 1, págs. 526-597.

[Max73a] J. C. Maxwell. On action at a distance. *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain*, 7:44–54, 1873. Reimpresso em W. D. Niven (ed.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), Vol. 2, págs. 311-323.

[Max73b] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume II. Clarendon Press, Oxford, 1873.

[Max83] J. C. Maxwell. *Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus*. Springer, Berlin, 1883. 2 Bde. Deutsche Übersetzung von B. Weinstein.

[Max54a] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover, New York, 1954. Two volumes. Unabridged republication of the third edition of 1891.

[Max54b] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volume II. Dover, New York, 1954. Unabridged republication of the third edition of 1891.

[MB82] S. R. C. Malin and D. R. Barraclough. 150th anniversary of Gauss's first absolute magnetic measurement. *Nature*, 297:285, 1982.

[Mer84] U. C. Merzbach. *Carl Friedrich Gauss: A Bibliography*. Scholarly Resources Inc., Wilmington, Delaware, 1984.

[ML22] B. C. d. S. Matos and M. C. d. Lima. Efeito Faraday: entre a atividade óptica natural e a teoria dos elétrons. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 44, 2022. Doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0395.

[Ner33] J. J. Nervander. Mémoire sur un galvanomètre à châssis cylindrique par lequel on obtient immédiatement et sans calcul la mesure de l'intensité du courant électrique qui produit la déviation de l'aiguille aimantée. *Annales de Chimie et de Physique*, 55:156–184, 1833.

[Neu46] F. E. Neumann. Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. *Annalen der Physik und Chemie*, 67:31–43, 1846.

[Neu47] F. E. Neumann. Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 1–87, 1847. Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 27. October 1845.

[Neu48a] F.-E. Neumann. Essai d'une théorie mathématique de l'induction. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 13:113–178, 1848. Traduit par M. A. Bravais.

[Neu48b] F. E. Neumann. *Über ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirte elektrischer Ströme*. G. Reimer, Berlin, 1848. Vorgelesen in der Berliner Akademie der Wissenschaften am 9. August 1847.

[Neu49] F. Neumann. Über ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirte elektrischer Ströme. *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 1–70, 1849. Vorgelegt in der Akademie der Wissenschaften am 9. August 1847.

[Neu58] C. Neumann. *Explicare tentatur quomodo fiat ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur*. Halis Saxonum, 1858.

[Neu63] C. Neumann. *Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichts — Versuch einer mathematischen Theorie*. Verlag des Buchhandlung des Waisenhauses, Halle, 1863.

[New34] I. Newton. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, Berkeley, 1934. Cajori edition.

[New90] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Nova Stella/Edusp, São Paulo, 1990. Livro I: O Movimento dos Corpos. Tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia.

[New99] I. Newton. *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, Berkeley, 1999. A new translation by I. B. Cohen and A. Whitman, assisted by J. Budenz.

[New08] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Edusp, São Paulo, 2008. Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência). Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis.

[New10] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Folha de São Paulo, São Paulo, 2010. Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis. Coleção Folha de São Paulo: Livros que Mudaram o Mundo, Volume 9.

[Nob33] L. Nobili. Physicalische Theorie der elektro-dynamischen Vertheilung. *Annalen der Physik und Chemie*, 27:401–436, 1833.

[Oer20a] H. C. Oersted. Expériences sur l'effet du conflict électrique sur l'aiguille aimantée. *Annales de Chimie et de Physique*, 14:417–425, 1820.

[Oer20b] H. C. Oersted. Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam. Copenhague, Dinamarca, autopublicado. Reimpresso em O. I. Franksen, H. C. Ørsted: A Man of the Two Cultures (Birkerød, Strandbergs Forlag, 1981), págs. 19-22, 1820.

[Oer20c] H. C. Oersted. Experiments on the effect of a current of electricity on the magnetic needle. *Annals of Philosophy*, 16:273–277, 1820. Traduzido a partir de uma versão impressa escrita em latim pelo autor e transmitida por ele ao Editor dos *Annals of Philosophy*. Reimpresso em Selected Works of Hans Christian Ørsted (Princeton, Princeton University Press, 1998), traduzido e editado por K. Jelved, A. D. Jackson e O. Knudsen.

[Oer20d] J. C. Oersted. Versuche über die Wirkung des electrischen Conflicts auf die Magnetnadel. *Annalen der Physik und Chemie*, 6:295–304, 1820. Traduzido por Gilbert.

[Oer95] H. C. Oersted. *Versuche über die Wirkung des elektrischen Conflicts auf die Magnetnadel*, volume 63 of *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*. Wilhelm Engelmann Verlag, Leipzig, 1895.

[Oer65] H. C. Oersted. Experiments on the effect of a current of electricity on the magnetic needle. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*, pages 113–117, New York, 1965. Pergamon. Translation from Thomson's *Annals of Philosophy*, October 1820. Translated from a printed account drawn up in Latin by the author and transmitted by him to the Editor of the *Annals of Philosophy*.

[Ohm26a] G. S. Ohm. Bestimmung des Gesetzes, nach welchem Metalle die Kontakt-Elektrizität leiten, nebst einem Entwurfe zu einer Theorie des Voltaschen Apparates und des Schweiggerschen Multiplikators. *Journal für Chemie und Physik*, 46:137–166, 1826. Reimpresso em *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Número 244, C. Piel (ed.), (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1938), págs. 8-29.

[Ohm26b] G. S. Ohm. Ein Nachtrag zu dem vorstehenden Aufsatz. *Annalen der Physik und Chemie*, 7:117–118, 1826.

[Ohm26c] G. S. Ohm. Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten elektroskopischen Erscheinungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 6:459–469, 1826.

[Ohm26d] G. S. Ohm. Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten elektroskopischen Erscheinungen (Beschluss). *Annalen der Physik und Chemie*, 7:45–54, 1826.

[Ohm27] G. S. Ohm. *Die Galvanische Kette, mathematisch bearbeitet*. T. H. Riemann, Berlin, 1827.

[Ohm60] G. S. Ohm. *Théorie Mathématique des Courants Électriques*. L. Hachette et Co., Paris, 1860. Traduction, préface et notes de J.-M. Gaugain.

[Ohm66] G. S. Ohm. The galvanic circuit investigated mathematically. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 2, pages 401–506, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation. English translation by W. Francis.

[Ørs86] H. C. Ørsted. Experiências sobre o efeito do conflito elétrico sobre a agulha magnética. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 10:115–122, 1986. Tradução de R. d. A. Martins.

[Ørs98] H. C. Ørsted. Experiments on the effect of the electric conflict on the magnetic needle. In K. Jelved, A. D. Jackson, and O. Knudsen, editors, *Selected Scientific Works of Hans Christian Ørsted*, pages 413–416. Princeton University Press, Princeton, 1998. Article originally written in Latin in 1820.

[Pog38] J. C. Poggendorff. Ueber einige Magnetisirungs-Erscheinungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 45:353–407, 1838.

[Pog49] J. C. Poggendorff. Ueber das Verhalten des Quecksilbers bei seiner elektromagnetischen Rotation. *Annalen der Physik und Chemie*, 77:1–32, 1849.

[Pog57] J. C. Poggendorff. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Prof. Kirchhoff. *Annalen der Physik und Chemie*, 100:351–352, 1857. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, pág. 242, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894).

[Pog21] J. C. Poggendorff. Comment on the paper by Prof. Kirchhoff. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, page 225, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Poi12a] Poisson. Extrait d'un mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, 75:229–237, 1812.

[Poi12b] Poisson. Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. *Mémoires de la Classe des Sciences Mathématiques et Physiques*, pages 1–92, 1812. Année 1811. Première partie. Lu les 9 mai et 3 août 1812.

[Poi13] Poisson. Second mémoire sur la distribution de l'électricité a la surface des corps conducteurs. *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, 77:380–386, 1813. Lu à l'Institut, le 6 septembre 1813.

[Poi19] Poisson. Essay on the distribution of electricity on the surface of conducting bodies. Traduzido por S. Gallagher. Disponível em https://histomathsci.blogspot.com, 2019.

[Pot84] A. Potier. *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, volume 1: *Mémoires de Coulomb*. Gauthiers-Villars, Paris, 1884.

[Pou37] Pouillet. Mémoire sur la pile de Volta et sur la loi générale de l'intensité que prennent les courrants, soit qu'ils proviennent d'un seul élément, soit qu'ils proviennnent d'une pile à grande ou à petite tension. *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences de Paris*, 4:267–279, 1837.

[Rei48a] F. Reich. Versuche über die abstossende Wirkung eines Magnetpoles auf unmagnetische Körper. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, Band I aus den Jahren 1846 und 1847:251–255, 1848.

[Rei48b] F. Reich. Versuche über die abstossende Wirkung eines Magnetpols auf unmagnetische Körper. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:60–65, 1848.

[Rei49] F. Reich. On the repulsive action of the pole of a magnet upon non-magnetic bodies. *Philosophical Magazine*, 34:127–130, 1849.

[Rei02] K. Reich. *Gauß' Werke in Kurzfassung*. Erwin Rauner, Augsburg, 2002. Algorismus, Studien zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, Vol. 39.

[Rei13] K. Reich. Die Beziehungen zwischen Kopenhagen und Göttingen auf dem Gebiet des Erdmagnetismus: Ergebnisse einer Analyse der Briefe, die "Hans Christian Oersted" mit "Carl Friedrich Gauß" und "Wilhelm Weber" wechselte. *Sudhoffs Archiv*, 97:21–38, 2013.

[Rei19] K. Reich, 2019. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft: Nr. 15, pp. xxxix-xlii. In *Carl Friedrich Gauss' — Werke — Supplement* — Band 3: Varia: 15 Abhandlungen in deutscher Übersetzung. Mit einer Einleitung, einer Bibliographie und Registern herausgegeben von Karin Reich. Hrsg. von der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Universitätsverlag Göttingen 2019, pp. 533-594.

[Sch20] J. S. Schweigger. Zusätze zu Oersted's elektro-magnetische Versuchen. *Allgemeine Literatur-Zeitung*, 296:cols. 622–624, 1820.

[Sch21a] Schweiger. Sur l'electro-magnétisme. *Bibliotheque Universelle des Sciences, Belles-Lettres, et Arts*, 16:197–200, 1821.

[Sch21b] J. S. Schweigger. Noch einige Worte über diese neuen elektromagnetischen Phänomene. *Journal für Chemie und Physik*, 31:35–41, 1821.

[Sch21c] J. S. Schweigger. Über Elektromagnetismus. *Journal für Chemie und Physik*, 31:7–17, 1821.

[Sch21d] J. S. Schweigger. Zusätze zu Oersted's elektromagnetische Versuchen. *Journal für Chemie und Physik*, 31:1–6, 1821.

[Sch88] U. Schmucker. The Wingst geomagnetic observatory and the development of geomagnetism during the past fifty years. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, 41:93–107, 1988. Doi: 10.1007/BF02225920.

[Sih21] A. Sihvola. Johan Jacob Nervander and the quantification of electric current. *IEEE Antennas & Propagation Magazine*, 63:123–128, 2021. Doi: 10.1109/MAP.2020.3039803.

[Smi17] G. S. Smith. Joseph Henry's role in the discovery of electromagnetic induction. *European Journal of Physics*, 38:015207, 2017. Doi: 10.1088/0143-0807/38/1/015207.

[TCA04] A. C. Tort, A. M. Cunha, and A. K. T. Assis. Uma tradução comentada de um texto de Maxwell sobre a ação a distância. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 26:273–282, 2004.

[Tho01] S. P. Thompson. *Michael Faraday: His Life and Work*. Cassell and Company, London, 1901.

[VS08] J. Venermo and A. Sihvola. The tangent galvanometer of Johan Jacob Nervander. *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, 11:16–23, 2008.

[Web33] W. Weber. Vergleichung der Theorie der Saiten, Stäbe und Blaseinstrumente. *Annalen der Physik und Chemie*, 28:1–17, 1833. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 1, W. Voigt (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 365-376.

[Web37] W. Weber. Bemerkungen über die Einrichtung magnetischer Observatorien und Beschreibung der darin aufzustellenden Instrumente. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836*, volume I, chapter I, pages 13–33. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1837. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 3-19.

[Web38a] W. Weber. Bemerkungen über die Einrichtung und den Gebrauch des Bifilar-Magnetometers. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, volume II, chapter II, pages 20–37. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 43-57.

[Web38b] W. Weber. Das Induktions-Inklinatorium. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, volume II, chapter V, pages 81–96. Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1838. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 75-88.

[Web38c] W. Weber. Remarques sur l'établissement des observatoires magnétiques, et description des instrumens à y placer. In A. Quetelet, editor, *Correspondance Mathématique et Physique*, pages 49–71. Société Belge de Librairie, Bruxelles, 1838. Tome X et Tome Second de la Troisième Série.

[Web39a] W. Weber. Das transportable Magnetometer. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*, volume III, chapter III, pages 68–85. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1839. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 89-104.

[Web39b] W. Weber. Der Induktor zum Magnetometer. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838*, volume III, chapter IV, pages 86–101. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1839. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 105-118.

[Web40] W. Weber. Unipolare Induction. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839*, volume IV, chapter III, pages 63–90. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1840. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 153-175, resumo com algumas alterações e modificações feitas por Weber em Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 176-179.

[Web41a] W. Weber. De tribus novis librarum construendarum methodis. *Commentationes societatis regiae scientiarum gottingensis recentiores*, 8, 1841. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 1, W. Voigt (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 497-515.

[Web41b] W. Weber. Messung starker galvanischer Ströme bei geringem Widerstande nach absolutem Maasse. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*, volume V, chapter VIII, pages 83–90. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1841. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 6-12.

[Web41c] W. Weber. Observations on the arrangement and use of the bifilar magnetometer. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 2, pages 268–280, London, 1841. Taylor and Francis. From the *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837*, Volume II, Chapter II, pp. 20-37. — Herausgegeben von Carl Friedrich Gauss und Wilhelm Weber. Göttingen, 1838. Translated by Mr. William Francis, and revised by Professor Lloyd and Major Sabine. Disponível em https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/2501#/summary.

[Web41d] W. Weber. On a transportable magnetometer. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 2, pages 565–586, London, 1841. Taylor and Francis. This article is translated partly from the *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jare 1838*, Volume III, Chapter III, pp. 68-85, and partly from manuscript communications from M. Weber to Major Sabine. Translation presented by Major Sabine. Disponível em https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/2501#/summary.

[Web41e] W. Weber. Remarks on the arrangement of magnetical observatories, and description of the instruments to be placed in them. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 2, pages 25–42, London, 1841. Taylor and Francis. From the *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836*, Volume I, Chapter I, pp. 13-33. Translated by Mr. William Francis, and revised by Professor Lloyd and Major Sabine. Disponível em https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/2501#/summary.

[Web41f] W. Weber. Ueber das elektrochemische Aequivalent des Wassers. In C. F. Gauss and W. Weber, editors, *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840*, volume V, chapter IX, pages 91–98. Weidmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1841. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 13-18.

[Web41g] W. Weber. Unipolare Induction. *Annalen der Physik und Chemie*, 52:353–386, 1841. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 153-175, resumo em Wilhelm Weber's *Werke*, Vol. 2, E. Riecke (ed.), (Springer, Berlin, 1892), págs. 176-179.

[Web42] W. Weber. Ueber das elektrochemische Aequivalent des Wassers. *Annalen der Physik und Chemie*, 55:181–189, 1842. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 13-18.

[Web46] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen — Über ein allgemeines Grundgesetz der elektrischen Wirkung. *Abhandlungen bei Begründung der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtstagfeier Leibnizen's herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft (Leipzig)*, pages 211–378, 1846. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlim, 1893), págs. 25-214.

[Web48a] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:193–240, 1848. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 215-254.

[Web48b] W. Weber. Über die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus nach den Gesetzen inducirter Ströme. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, Band I aus den Jahren 1846 und 1847:346–358, 1848. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 255-265.

[Web48c] W. Weber. Über die Erregung und Wirkung des Diamagnetismus nach den Gesetzen inducirter Ströme. *Annalen der Physik und Chemie*, 73:241–256, 1848. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 255-268.

[Web49] W. Weber. Bemerkungen zu Neumann's Theorie inducirter Ströme. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Classe*, pages 1–8, 1849. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 269-275.

[Web51] W. Weber. Messungen galvanischer Leitungswiderstände nach einem absolutem Maasse. *Annalen der Physik und Chemie*, 82:337–369, 1851. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 276-300.

[Web52a] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 1:199–381, 1852. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 301-471.

[Web52b] W. Weber. On the excitation and action of diamagnetism according to the laws of induced currents. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 5, pages 477–488, London, 1852. Taylor and Francis. Translated by W. Francis from

Poggendorff's *Annalen*, Jan. 7, 1848. Disponível em https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.212784 e https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/2501#/summary.

[Web52c] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 5, pages 489–529, London, 1852. Taylor and Francis. Disponível em https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.212784 e https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/2501#/summary.

[Web55] W. Weber. Vorwort bei der Übergabe der Abhandlung: Elektrodynamische maassbestimmungen, insbesondere zurückführung der stromintensitäts-messungen auf mechanisches maass. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse*, 17:55–61, 1855. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 591-596.

[Web61] W. Weber. On the measurement of electric resistance according to an absolute standard. *Philosophical Magazine*, 22:226–240 and 261–269, 1861. Traduzido pelo Dr. E. Atkinson.

[Web64] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über elektrische Schwingungen. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 6:571–716, 1864. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 105-241.

[Web71] W. Weber. Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physischen Classe*, 10:1–61, 1871. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 4, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1894), págs. 247-299.

[Web72] W. Weber. Electrodynamic measurements — Sixth memoir, relating specially to the principle of the conservation of energy. *Philosophical Magazine*, 43:1–20 and 119–149, 1872. Translated by Professor G. C. Foster, F.R.S., from the *Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften*, Vol. X (January 1871).

[Web87] W. Weber. Mesures électrodynamiques. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique,* Vol. III: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 289–402. Gauthier-Villars, Paris, 1887.

[Web94] W. Weber. Ueber die Einrichtung des Bifilargalvanometers. In H. Weber, editor, Wilhelm Weber's *Werke,* Vol. 4, pages 584–615, Berlin, 1894. Springer.

[Web66a] W. Weber. Observations on the arrangement and use of the bifilar magnetometer. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 2, pages 268–280, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.

[Web66b] W. Weber. On a transportable magnetometer. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 2, pages 565–586, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.

[Web66c] W. Weber. On the excitation and action of diamagnetism according to the laws of induced currents. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 5, pages 477–488, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation. Translated by W. Francis.

[Web66d] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In R. Taylor, editor, *Scientific Memoirs,* Vol. 5, pages 489–529, New York, 1966. Johnson Reprint Corporation.

[Web07] W. Weber, 2007. Determinations of electrodynamic measure: concerning a universal law of electrical action, *21st Century Science & Technology*, traduzido para o inglês por S. P. Johnson, editado por L. Hecht e A. K. T. Assis. Disponível desde março de 2007 em http://21sci-tech.com/translation.html e www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web19] W. Weber, 2019. On the measurement of electro-dynamic forces. Classics of Measure no. 1. Second edition. Version of 21 February 2019. This English translation appeared originally in R. Taylor (editor), *Scientific Memoirs, selected from the Transactions of Foreign Academies of Science and Learned Societies*, Volume V, part 20, article 14 (London: Taylor and Francis, 1852). Disponível em www.sizes.com/library/classics/Weber1.pdf.

[Web20] W. Weber, 2020. Remarks on Neumann's theory of induced currents. Segunda versão colocada online em julho de 2020 em www.ifi.unicamp.br/~assis. Traduzida por Elisabeth Becker-Schmollmann e editada por A. K. T. Assis.

[Web21a] W. Weber. Electrodynamic measurements, fifth memoir, relating specially to electric oscillations. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 267–383, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21b] W. Weber. Electrodynamic measurements, first memoir, relating specially to a general fundamental law of electric action. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 33–203, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21c] W. Weber. Electrodynamic measurements, second memoir, relating specially to measures of resistance. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 291–441, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21d] W. Weber. Electrodynamic measurements, sixth memoir, relating specially to the principle of the conservation of energy. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume IV: Conservation of Energy, Weber's Planetary Model of the Atom and the Unification of

Electromagnetism and Gravitation, pages 67–111, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21e] W. Weber. Foreword to the submission of the treatise: electrodynamic measurements, specially attributing mechanical units to measures of current intensity. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 125–129, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21f] W. Weber. Measurement of strong galvanic currents with low resistance according to absolute measure. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 187–193, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21g] W. Weber. Observations on the arrangement and use of the bifilar magnetometer. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 135–149, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21h] W. Weber. On a transportable magnetometer. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 151–182, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21i] W. Weber. On the electrochemical equivalent of water. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 195–200, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21j] W. Weber. On the excitation and action of diamagnetism according to the laws of induced currents. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 249–257, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21k] W. Weber. On the measurement of electric resistance according to an absolute standard. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 267–286, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21l] W. Weber. On the measurement of electro-dynamic forces. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume II: Weber's Fundamental Force and the Unification of the Laws of Coulomb, Ampère and Faraday, pages 207–247, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Web21m] W. Weber. Remarks on the arrangement of magnetical observatories, and description of the instruments to be placed in them. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 85–101, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[Whe34] C. Wheatstone. An account of some experiments to measure the velocity of electricity and the duration of electric light. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 124:583–591, 1834.

[Whi73] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 1: *The Classical Theories*. Humanities Press, New York, 1973.

[Wie60] K. H. Wiederkehr. Wilhelm Webers Stellung in der Entwicklung der Elektrizitätslehre. Dissertation, Universität Hamburg, 1960.

[Wie67] K. H. Wiederkehr. *Wilhelm Eduard Weber — Erforscher der Wellenbewegung und der Elektrizität (1804-1891)*, volume 32 of *Grosse Naturforscher,* H. Degen (ed.). Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1967.

[WK56] W. Weber and R. Kohlrausch. Über die Elektricitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fliesst. *Annalen der Physik und Chemie,* J. C. Poggendoff (ed.), 99:10–25, 1856. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 597-608.

[WK68] W. Weber and R. Kohlrausch. Über die Einführung absoluter elektrischer Maße. In S. Balke, H. Gericke, W. Hartner, G. Kerstein, F. Klemm, A. Portmann, H. Schimank, and K. Vogel, editors, *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften,* new series, Vol. 5. Friedrich-Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1968. Comentado por F. Kohlrausch e K. H. Wiederkehr.

[WK03] W. Weber and R. Kohlrausch. On the amount of electricity which flows through the cross-section of the circuit in galvanic currents. In F. Bevilacqua and E. A. Giannetto, editors, *Volta and the History of Electricity*, pages 287–297. Università degli Studi di Pavia and Editore Ulrico Hoepli, Milano, 2003. Traduzido por S. P. Johnson e editado por L. Hecht. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[WK08] W. Weber and R. Kohlrausch. Sobre a quantidade de eletricidade que flui através da seção reta do circuito em correntes galvânicas. *Revista Brasileira de História da Ciência*, 1:94–102, 2008. Traduzido por A. K. T. Assis.

[WK21] W. Weber and R. Kohlrausch. On the amount of electricity which flows through the cross-section of the circuit in galvanic currents. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume III: Measurement of Weber's Constant c, Diamagnetism, the Telegraph Equation and the Propagation of Electric Waves at Light Velocity, pages 131–140, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

[WW41a] F. Wöhler and W. Weber. Neue galvanische Säule. *Journal für praktische Chemie*, 23:313–316, 1841.

[WW41b] F. Wöhler and W. Weber. Ueber eine neue Construction der Grove'schen Säulen. *Annalen der Chemie und Pharmacie*, 38:307–311, 1841. Reimpresso em *Polytechnisches Journal*, Vol. 81, págs. 273-275 (1841).

[WW41c] F. Wöhler and W. Weber. Zusammensetzung galvanischer Säulen. *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 1:801–804, 1841. 81. Stuck der *Göttingische gelehrte Anzeigen*, den 24. May 1841. Reimpresso em *Wilhelm Weber's Werke*, Vol. 3, H. Weber (ed.), (Springer, Berlin, 1893), págs. 3-5.

[WW21] F. Wöhler and W. Weber. Composition of galvanic piles. In A. K. T. Assis, editor, *Wilhelm Weber's Main Works on Electrodynamics Translated into English*, volume I: Gauss and Weber's Absolute System of Units, pages 183–185, Montreal, 2021. Apeiron. Disponível em www.ifi.unicamp.br/~assis.

Esse é o segundo de 4 volumes do livro "Obras de Weber sobre Eletrodinâmica Traduzidas e Comentadas".

Este segundo Volume inicia com o texto da correspondência entre Gauss e Weber de 1845 que se relaciona à força de Ampère entre elementos de corrente e às ideias de Weber sobre a unificação das leis eletrostáticas e eletrodinâmicas. Segue-se um artigo de Fechner publicado em 1845, no qual ele apresentou algumas ideias qualitativas na mesma direção. Ou seja, unificar a força de Ampère e a lei da indução de Faraday com a eletrostática. Para tanto, ele sugeriu uma força dependente não apenas da distância entre as partículas eletrizadas em interação, mas também de suas velocidades. Ao final de seu artigo, Fechner mencionou que seu trabalho poderia ser visto como um precursor das investigações de Weber.

Em seguida, vem o primeiro grande trabalho de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas, publicado em 1846. Esse trabalho é provavelmente sua publicação mais importante. Ele apresentou seu eletrodinamômetro bifilar com o qual podia medir correntes com alta precisão. Inicialmente, ele utilizou esse instrumento para provar a força de Ampère. Em seguida, utilizou a força de Ampère entre elementos de corrente para deduzir sua própria lei de força entre partículas eletrizadas. A força de Weber entre duas partículas depende não apenas da distância, mas também da velocidade relativa e da aceleração relativa entre elas. Ele mostrou que era possível unificar as leis de Coulomb, Ampère e Faraday com sua lei de força.

Este Volume também contém o artigo de Weber de 1848, no qual ele apresentou sua energia potencial dependente da velocidade. Segue-se o artigo de Kirchhoff de 1849 sobre uma dedução da lei de Ohm em conexão com a teoria da eletrostática.

Este Volume termina com o segundo grande trabalho de Weber sobre Medições Eletrodinâmicas, publicado em 1852. O foco principal desse artigo foi a medida absoluta de resistência. O trabalho de Weber também contém seu cálculo pioneiro da distribuição de cargas ao longo das superfícies de condutores resistivos que transportam correntes constantes. Em particular, ele considerou um condutor cilíndrico reto e um anel resistivo.

Sobre o Autor: **O Prof. André Koch Torres Assis** nasceu em 1962. Concluiu o bacharelado e o doutorado no Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP (1983 e 1987, respectivamente). Realizou um pós-doutorado no Laboratório Culham (Oxfordshire, Inglaterra, United Kingdom Atomic Energy Authority, 1988) e outro no Centro de Pesquisas Eletromagnéticas da Northeastern University (Boston, EUA, 1991-1992). Trabalhou por quatro períodos na Alemanha: (a) de agosto de 2001 até novembro de 2002, assim como (b) de fevereiro a maio de 2009, nessas duas vezes no Instituto para a História das Ciências Naturais da Universidade de Hamburgo; (c) de abril a junho de 2014 na Universidade Técnica de Dresden; e (d) de setembro a dezembro de 2023 na Universidade de Augsburg. Essas quatro estadias foram apoiadas por bolsas de pesquisa concedidas pela Fundação Alexander von Humboldt, da Alemanha. Suas obras "*Eletrodinâmica de Weber*" e "*Eletrodinâmica de Ampère*" receberam os Prêmios Jabuti 1996 e 2012 concedidos pela Câmara Brasileira do Livro como livros do ano na área de ciências exatas. É professor do Instituto de Física da UNICAMP desde 1989, onde orienta estudantes de graduação e de pós-graduação, realizando pesquisas sobre os fundamentos do eletromagnetismo, da gravitação e da cosmologia. Em particular trabalha sobre a Mecânica Relacional, o princípio de Mach, a origem da inércia, a força de Ampère entre elementos de corrente, e a eletrodinâmica de Weber. É o autor de diversos livros de física e de várias traduções de trabalhos científicos clássicos (obras de Arquimedes, Newton, Coulomb, Ampère, Weber etc.) disponíveis gratuitamente em sua homepage: https://www.ifi.unicamp.br/~assis

9781987980394

9 781987 980394