

Published in Reflexões sobre os  
Fundamentos da Física Moderna,

A. F. Siqueira and J. B. Bastos Filho (eds.),  
(Edufal, Maceió, 1997), pp. 49-61.

## A EXPERIÊNCIA DO BALDE DE NEWTON

A. K. T. Assis<sup>1</sup>

Instituto de Física "Gleb Wataghin"  
Universidade Estadual de Campinas, Unicamp  
13083-970 Campinas, SP<sup>2</sup>

### I. A EXPERIÊNCIA DO BALDE DE NEWTON.

Apresentamos a experiência do balde de Newton e a crítica da interpretação desta experiência feita por E. Mach. Em seguida discutimos esta experiência do ponto de vista da mecânica relacional. Mostramos que a mecânica relacional baseada numa lei de Weber para a gravitação implementa quantitativamente o princípio de Mach. Derivamos a igualdade entre as massas inerciais e gravitacionais. Mostramos que as forças centrífugas são forças reais de origem gravitacional que surgem quando há uma rotação do universo como um todo (estrelas fixas e galáxias distantes).

No início de seu livro principal cuja primeira edição é de 1687, *Principios Matemáticos de Filosofia Natural*, [1], Newton introduz os conceitos de tempo, espaço e movimento absolutos:

"I - O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e da sua própria natureza, flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa e é também chamado de duração; o tempo relativo, aparente e comum é alguma medida de duração perceptível e externa (seja ela exata ou não uniforme) que é obtida através do movimento e que é normalmente usada no lugar do tempo verdadeiro, tal como uma hora, um dia, um mês, um ano.

II - O espaço absoluto, em sua própria natureza, sem relação com qualquer coisa externa, permanece sempre similar e imóvel. Espaço relativo é alguma dimensão ou medida móvel dos espaços absolutos, a qual nossos sentidos determinam por sua posição com relação aos

<sup>1</sup> Também professor colaborador do Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP, 13081-970 Campinas, SP.

<sup>2</sup> Internet: [assis@ifi.unicamp.br](mailto:assis@ifi.unicamp.br)

corpos, e é comumente tomado por espaço imóvel; assim é a dimensão de um espaço subterrâneo, aéreo ou celeste, determinado pela sua posição com relação à Terra (...)

III - Lugar é uma parte do espaço que um corpo ocupa, e de acordo com o espaço, é ou absoluto ou relativo. (...)

IV - Movimento absoluto é a translação de um corpo de um lugar absoluto para outro; e movimento relativo, a translação de um lugar relativo para outro. (...)"

Então Newton apresenta a experiência do balde, mesmo antes de apresentar as suas três leis do movimento:

“As causas pelas quais movimentos verdadeiros e relativos são diferenciados um do outro, são as forças imprimidas sobre os corpos para gerar movimento. O movimento verdadeiro não é nem gerado nem alterado, a não ser por alguma força imprimida sobre o corpo movido; mas o movimento relativo pode ser gerado ou alterado sem qualquer força imprimida sobre o corpo. (...)

Os efeitos que distinguem movimento absoluto de relativo são as forças que agem no sentido de provocar um afastamento a partir do eixo do movimento circular. Pois não há tais forças em um movimento circular puramente relativo; mas em um movimento circular verdadeiro e absoluto elas são maiores ou menores, dependendo da quantidade do movimento. Se um recipiente, suspenso por uma longa corda, é tantas vezes girado, a ponto de a corda ficar fortemente torcida, e então enchido com água e suspenso em repouso junto com a água; a seguir, pela ação repentina de outra força, é girado para o lado contrário e, enquanto a corda desenrola-se, o recipiente continua no seu movimento por algum tempo; a superfície da água, de início, será plana, como antes de o recipiente começar a se mover; mas depois disso, o recipiente, por comunicar gradualmente o seu movimento à água, fará com que ela comece nitidamente a girar e a afastar-se pouco a pouco do meio e a subir pelos lados do recipiente, transformando-se em uma figura côncava (conforme eu mesmo experimentei), e quanto mais rápido se torna o movimento, mais a água vai subir, até que, finalmente, realizando suas rotações nos mesmos tempos que o recipiente, ela fica em repouso relativo nele. Essa subida da água mostra sua tendência a se afastar do eixo de seu movimento; e o movimento circular verdadeiro e absoluto da água, que aqui é diretamente contrário ao relativo, torna-se conhecido e

pode ser medido por essa tendência. De início, quando o movimento relativo da água no recipiente era máximo, não havia nenhum esforço para afastar-se do eixo; a água não mostrava nenhuma tendência à circunferência, nem nenhuma subida na direção dos lados do recipiente, mas mantinha uma superfície plana, e, portanto, seu movimento circular verdadeiro ainda não havia começado. Mas, posteriormente, quando o movimento relativo da água havia diminuído, a subida em direção aos lados do recipiente mostrou o esforço dessa para se afastar do eixo; e esse esforço mostrou o movimento circular real da água aumentando continuamente, até ter adquirido sua maior quantidade, quando a água ficou em repouso relativo no recipiente. E, portanto, esse esforço não depende de qualquer translação da água com relação aos corpos do ambiente, nem pode o movimento circular verdadeiro ser definido por tal translação. (...)”

Vamos tentar analisar esta experiência de acordo com os pontos de vista de Newton. Nos concentraremos em duas situações. Na primeira o balde e a água estão em repouso em relação à terra, e a superfície da água é plana. Na segunda situação a água e o balde estão girando juntos com uma velocidade angular constante em relação à terra, e a superfície da água é côncava (ela é um parabolóide de revolução). As perguntas principais a responder são: Porque a superfície da água é plana em uma situação e côncava em outra? O que causa este comportamento diferente da superfície da água? É a rotação da água em relação a que?

Há três suspeitos naturais principais: O balde, a terra e as estrelas fixas (para simplificar a análise chamaremos o restante do universo compreendendo a via láctea e as outras galáxias pelo nome de “estrelas fixas”). Vamos analisar se a superfície côncava da água é devida a sua rotação em relação a algum destes suspeitos.

Que o balde não é o responsável pelo comportamento diferente da água nestas duas situações pode ser compreendido imediatamente observando que não há movimento relativo entre a água e o balde nestes dois casos. Assim, qualquer que seja a força exercida pelo balde sobre cada molécula da água na primeira situação, vai continuar sendo a mesma na segunda situação já que o balde também está em repouso em relação à água neste caso.

O segundo suspeito é a terra. Na primeira situação a água está em repouso em relação a terra e sua superfície é plana. Na segunda situação a água está girando em relação à terra e sua superfície é côncava. Assim, poderia ser esta rotação relativa entre a água e a terra a responsável pela concavidade da água. Para Newton este não era o caso, ou seja, não era esta rotação relativa entre a água e a terra que causava a concavidade da água. Podemos explicar e justificar seus pontos de vista e

argumentação utilizando dois resultados que ele apresentou em outras Seções dos *Principia*. O primeiro resultado está no Livro III onde ele apresentou sua famosa lei de gravitação universal. Em notação vetorial esta lei afirma que a força exercida por uma partícula de massa gravitacional  $m_{g2}$  localizada em  $\vec{r}_2$  sobre uma outra partícula de massa gravitacional  $m_{g1}$  localizada em  $\vec{r}_1$  é dada por:

$$\vec{F} = -Gm_{g1}m_{g2} \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad (1)$$

onde  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$  é a constante gravitacional,  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  é a distância entre as partículas e  $\hat{r} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/r$  é o vetor unitário apontando da partícula 2 para a partícula 1.

O segundo resultado se encontra na Seção XII (As Forças Atrativas de Corpos Esféricos) do Livro I. Aqui ele provou dois teoremas extremamente importantes:

“Proposição LXX. Teorema XXX

Se para cada ponto de uma superfície esférica tenderem forças centrípetas iguais, que diminuem com o quadrado das distâncias a partir desses pontos, afirmo que um corpúsculo localizado dentro daquela superfície não será atraído de maneira alguma por aquelas forças. (...)

Proposição LXXI. Teorema XXXI

Supondo-se o mesmo que acima, afirmo que um corpúsculo localizado fora da superfície esférica é atraído em direção ao centro da esfera com uma força inversamente proporcional ao quadrado de sua distância até este centro.”

Hoje em dia se provam estes resultados de maneira simples utilizando o teorema de Gauss. O primeiro resultado é análogo a dizer que o potencial gravitacional é constante dentro de uma casca esférica tal que nenhuma força age sobre uma partícula em qualquer posição de seu interior. O segundo resultado afirma que uma casca esférica atrai uma partícula externa como se toda a casca estivesse concentrada no centro da esfera.

Com isto podemos voltar a analisar a experiência do balde sob o ponto de vista Newtoniano. Na primeira situação a água está em repouso em relação à terra. A única força relevante exercida pela terra sobre cada molécula da água tem origem

gravitacional. Seu valor pode ser encontrado utilizando a força gravitacional de Newton e seu 31º teorema apresentado acima. Esta força será exatamente o peso do corpo apontando verticalmente para baixo (desprezando o pequeno valor devido à não esfericidade da terra e devido a rotação da terra em relação às estrelas fixas), ou seja:

$$\vec{P} = m_{g1} \vec{g}, \quad (2)$$

onde  $\vec{g} = -g\hat{r}$  e  $g = |\vec{g}| = GM_{g1} / R_t^2 = 9,8\text{ms}^{-2}$  é o valor do campo gravitacional típico na superfície da terra, ou seja, o valor da aceleração de queda livre no vácuo ( $\hat{r}$  apontando radialmente a partir do centro da terra,  $M_{g1}$  sendo a massa gravitacional da terra e  $R_t$  seu raio). Já na segunda situação a água está girando em relação à terra, mas a força gravitacional exercida pela terra sobre cada molécula de água ainda é dada por (2) Isto é devido ao fato de que a lei de gravitação de Newton, (1), não depende da velocidade ou aceleração entre os corpos interagentes. Isto significa que na mecânica Newtoniana a terra não pode ser responsável pela concavidade da água. Estando a água girando ou em repouso em relação à terra, ela sentirá sempre a mesma força gravitacional exercida pela terra, (2). Ou seja, a força sempre aponta para baixo, sem qualquer componente normal ao eixo da rotação dependendo da velocidade da água.

A mesma coisa pode ser vista no referencial que gira com a água e o balde. Neste referencial no qual o balde está em repouso, a terra seria vista girando oposta daquela em que o balde gira na segunda situação no referencial anterior, enquanto que a superfície da água é côncava embora a água esteja em repouso neste novo referencial. Devido ao fato de que (1) não depende da velocidade ou aceleração, o teorema 31 de Newton vai permanecer válido mesmo para uma terra girando. A força gravitacional exercida pela terra sobre qualquer molécula da água ainda vai ser dado por (2). Isto é, mesmo neste referencial a terra não vai exercer qualquer força normal ao eixo de rotação pressionando a água contra as paredes do balde.

O terceiro suspeito para a concavidade da superfície é a rotação da água em relação ao restante do universo. Chamamos aqui de “estrelas fixas” a este restante do universo, para simplificar. Na primeira situação a água está essencialmente em repouso em relação ao referencial das estrelas fixas (estamos desprezando aqui a rotação diurna e anual da terra em relação as estrelas fixas já que estas velocidades angulares são muito menores do que a velocidade angular do balde na experiência de Newton). Na segunda situação a água está girando com relação as estrelas fixas e poderia ser esta rotação relativa a responsável pela concavidade da água. Mais uma vez Newton argumentou que este não é o caso (“E, portanto, esse esforço [da água se afastar do eixo circular de seu movimento] não depende de qualquer

translação da água em relação aos corpos do ambiente, nem pode o movimento circular verdadeiro ser definido pela translação”). Podemos reforçar a argumentação de Newton observando que deixando de lado as pequenas anisotropias na distribuição da matéria no espaço (como a anisotropia devida ao sol, ao centro de nossa galáxia, ao grupo local de galáxias, etc.), o universo é essencialmente isotrópico em grande escala. A única interação relevante da água com o restante do universo é gravitacional. Utilizando este fato observacional da isotropia em larga escala, utilizando também a lei de gravitação de Newton e seu 30º teorema apresentado acima, obtemos que a força resultante exercida pelas estrelas fixas (ou seja, pelo restante do universo) sobre cada molécula de água é essencialmente zero. Este é o motivo pelo qual as estrelas fixas ou o restante do universo nunca é levado em conta na mecânica Newtoniana (isto é, quando estudamos a colisão de duas bolas de bilhar, ou o movimento parabólico de um projétil, a força gravitacional das estrelas não é considerada já que a força resultante exercida por elas é essencialmente nula). E isto continua válido não apenas quando a água está em repouso em relação às estrelas fixas, mas também quando ela está girando com relação a elas já que a lei de Newton da gravitação não depende da velocidade ou da aceleração entre os corpos. Ou seja, a força gravitacional resultante agindo sobre uma partícula no interior de uma ou de várias cascas esféricas é nula, não interessando a posição da partícula nem sua velocidade ou aceleração em relação às cascas. Com isto podemos desprezar para todos os fins práticos a força gravitacional exercida pelo restante do universo como um todo. Newton estava perfeitamente ciente desta implicação cosmológica de seu 30º teorema (Proposição LXX). Por exemplo, na Proposição XIV, Teorema XIV do livro III do Principia ele afirmou: “E como estas estrelas não estão sujeitas a nenhuma paralaxe perceptível devido ao movimento anual da terra, elas não podem ter nenhuma força, devido a sua imensa distância, para produzir qualquer efeito perceptível em nosso sistema. Sem mencionar que as estrelas fixas, dispersas em todo lugar no céu de forma desordenada, destroem suas ações mútuas devido a suas atrações contrárias, pela Prop. LXX, Livro I.”

O mesmo acontece no referencial que gira com o balde. Neste referencial vemos a água côncava mas em repouso, enquanto as estrelas fixas estão girando na direção oposta. O 30º teorema de Newton ainda permanece válido já que sua lei da gravitação depende apenas da distância instantânea entre os corpos. Assim o conjunto das estrelas fixas não exerce qualquer força centrífuga sobre a água e não pode ser o responsável pela concavidade da superfície.

Isto mostra que na mecânica Newtoniana a superfície côncava da água não pode ser explicada pela rotação entre a água e o balde, nem entre a água e a terra, e nem entre a água e o restante do universo. Como a diferença entre a primeira e a segunda situações é real (num caso a superfície está plana e no outro côncava,

podendo mesmo entornar do balde se a rotação for alta), Newton precisava achar um outro responsável pelo efeito, ou uma outra causa. Para ele esta causa era a rotação da água em relação ao espaço absoluto. Supondo a validade da sua lei da gravitação, não havia outra alternativa para ele além desta afirmação. Para Newton, como vimos, este espaço absoluto, “em sua própria natureza, **sem relação com qualquer coisa externa**, permanece sempre similar e imóvel.” Ou seja, na primeira situação a água estaria essencialmente em repouso em relação ao espaço absoluto (desprezando mais uma vez a rotação diurna da terra ao redor de seu eixo e sua translação anual ao redor do sol), enquanto que a água estaria girando em relação ao espaço absoluto na segunda situação. Para Newton esta é a causa real da concavidade da superfície da água.

## II. MACH E A EXPERIÊNCIA DO BALDE

Ernst Mach argumentou fortemente contra os conceitos de espaço e tempo absolutos de Newton. Em seu livro *A Ciência da Mecânica*, [2], cuja primeira edição é de 1883, afirmou (p. 279, nossa ênfase):

“Se num sistema material, há massas com velocidades diferentes, que podem entrar em relações mútuas umas com as outras, estas massas nos apresentam forças. Só podemos decidir quão grandes são estas forças quando sabemos as velocidades a que são trazidas estas massas. Massas em repouso também são forças se todas as massas não estão em repouso. Pense, por exemplo, na experiência do balde girante de Newton na qual a água ainda não está girando. Se a massa  $m$  tem a velocidade  $v_1$  e é para ser trazida até velocidade  $v_2$ , a força que é para ser exercida sobre ela é  $p = m(v_1 - v_2)/t$ , ou o trabalho que é para ser realizado é  $ps = m(v_1^2 - v_2^2)$ . Todas as massas e todas as velocidades, e conseqüentemente todas as forças, são relativas. Não há decisão sobre relativo ou absoluto que podemos possivelmente encontrar, a qual sejamos forçados, ou da qual possamos obter qualquer vantagem intelectual ou de outra natureza. Quando autores bem modernos se deixam induzir em erro pelos argumentos Newtonianos que são derivados do balde de água, a distinguir entre o movimento relativo e absoluto, eles não pensam que o sistema do mundo só nos é dado uma vez, e que as visões Ptolomaica e Copernicana são nossa interpretação, mas ambas são igualmente reais. **“Tente fixar o balde de Newton e girar o céu de estrelas fixas e então prove a ausência de forças centrífugas.”**”

Desta última frase podemos ver que para Mach o principal responsável pela concavidade da água é a rotação relativa da água em relação as estrelas fixas. As forças centrífugas são então vistas como forças reais que existem em qualquer sistema de referências no qual o céu de estrelas fixas está girando.

Isto é ainda mais evidente em outra seção do livro de Mach onde ele discute a experiência do balde em mais detalhes, [2, págs. 283-4, nossa ênfase]:

“5. Vamos examinar agora o ponto sobre o qual Newton, aparentemente com motivos razoáveis, baseia sua distinção entre movimento absoluto e relativo. Se a terra está com uma rotação absoluta ao redor de seu eixo, as forças centrífugas aparecem na terra: ela fica com uma forma oblata, a aceleração da gravidade é diminuída no equador, o plano do pêndulo de Foucault gira, e assim por diante. Todos estes fenômenos desaparecem se a terra está em repouso e os outros corpos celestes se movem com um movimento absoluto ao seu redor, tal que a mesma rotação relativa seja produzida. Este é o caso, de fato, se começarmos *ab initio* [desde o início] com a idéia de espaço absoluto. Mas se nossa posição for baseada nos fatos, encontraremos que temos apenas conhecimento de espaços e movimentos relativos. Relativamente, sem considerar o meio desconhecido e desprezado do espaço, os movimentos do universo são os mesmos quer adotemos o ponto de vista Ptolomaico ou Copernicano. Ambos pontos de vista são, na verdade, igualmente corretos; apenas o último é mais simples e prático. O universo não é dado duas vezes, com uma terra em repouso e com uma terra em movimento; mas apenas uma vez, com seus movimentos relativos, que são os únicos determináveis. Portanto não nos é permitido dizer como seriam as coisas se a terra não girasse. Podemos interpretar o único caso que nos é dado de maneiras diferentes. Se, contudo, interpretarmos este caso de forma que fiquemos em conflito com a experiência, nossa interpretação está simplesmente errada. **Os princípios da mecânica podem, na verdade, ser concebidos de tal forma, que mesmo para rotações relativas surgem as forças centrífugas.**

A experiência de Newton com o balde girante de água nos informa simplesmente que a rotação relativa da água em relação aos lados do balde não produz forças centrífugas perceptíveis, mas que tais forças são produzidas pela rotação relativa da água em relação às massas da terra e de outros corpos celestes. Ninguém é competente para dizer como seria o resultado da experiência se os lados do balde aumentassem em espessura e massa até que eles tivessem uma espessura de várias léguas. Há apenas uma única experiência diante de nós, e a nossa função



é colocá-la de acordo com outros fatos conhecidos por nós, e não de acordo com ficções arbitrárias de nossa imaginação.”

Concordamos fortemente com Mach nestes aspectos, e não com Newton.

Apesar disto, Mach não mostrou como a rotação do céu de estrelas fixas pode gerar forças centrífugas. Como vimos, o 3º teorema de Newton mostra que com uma força central que cai com o quadrado da distância como (1), o céu de estrelas fixas não vai exercer qualquer força gravitacional perceptível em qualquer molécula da água no balde, estando o céu de estrelas fixas em repouso ou girando ao redor da água.

Na próxima Seção apresentamos um modelo matemático que implementa quantitativamente as idéias de Mach.

### III. A MECÂNICA RELACIONAL

Para implementar quantitativamente o princípio de Mach precisamos modificar a lei de gravitação de Newton, (1), incluindo termos que dependem da velocidade e aceleração entre os corpos interagentes. Isto nunca foi feito por Mach. Em nossa opinião o melhor modelo nesta direção é o de uma lei de Weber para a gravitação. Para uma discussão detalhada da força e energia de Weber aplicadas ao eletromagnetismo e gravitação, com referências detalhadas, ver [3] e [4].

Nossa idéia básica é começar com uma energia potencial gravitacional entre duas massas gravitacionais dada por:

$$U = -G \frac{m_{B1} m_{B2}}{r} \left( 1 - \frac{\xi}{2} \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) e^{-\alpha r} \quad (3)$$

Nesta expressão  $\xi$  é uma constante adimensional e  $1/\alpha$  dá o comprimento característico da interação gravitacional. A energia potencial gravitacional da mecânica clássica é esta expressão com  $\xi = 0$  e  $\alpha = 0$ .

Neste trabalho vamos considerar  $\alpha$  como sendo uma constante independente do meio entre as partículas 1 e 2. Seu valor vai ser tomado como  $\alpha = H_0 / c$ , onde  $H_0$  é a constante de Hubble. Vamos também tomar  $\xi = 6$  como em nossos trabalhos anteriores.

A força exercida por 2 em 1 pode ser obtida utilizando  $\vec{F} = -\hat{r}dU/dr$ , ou seja:

$$\vec{F} = -G \frac{m_{g1} m_{g2}}{r^2} \hat{r} \left[ 1 - \frac{\xi}{2} \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \xi \frac{r \ddot{r}}{c^2} + \frac{H_0}{c} \left( 1 - \frac{\xi}{2} \frac{\dot{r}^2}{c^2} \right) \right] e^{H_0 r/c}. \quad (4)$$

Integramos agora esta expressão para uma partícula de massa gravitacional  $m_{g1}$  interagindo com a parte isotrópica, homogênea e infinita do universo. Sua densidade gravitacional média é representada por  $\rho_o$ . Para integrar utilizamos coordenadas esféricas e substituímos  $m_{g2}$  por  $\rho_o r_2^2 \sin\theta_2 dr_2 d\theta_2 d\vartheta_2$ .

Integramos de  $\vartheta_2 = 0$  até  $2\pi$ , de  $\theta_2 = 0$  até  $\pi$ , e de  $r_2 = 0$  até o infinito. Fazemos esta integração num sistema de referência relativo ao qual o universo como um todo (o conjunto de galáxias distantes) tem uma aceleração translacional  $\vec{a}_u$  e está girando com uma velocidade angular  $\vec{\omega}_u$ . Com relação a este sistema de referência a partícula 1 está localizada em  $\vec{r}_1$ , tem uma velocidade  $\vec{v}_1 = d\vec{r}_1/dt$  e uma aceleração  $\vec{a}_1 = d^2\vec{r}_1/dt^2$ . O resultado final da integração é:

$$\vec{F}_1 = -Am_{g1} \left[ \vec{a}_1 + \vec{\omega}_u \times (\vec{\omega}_u \times \vec{r}_1) - 2\vec{\omega}_u \times \vec{v}_1 - \frac{d\vec{\omega}_u}{dt} \times \vec{r}_1 - \vec{a}_u \right], \quad (5)$$

onde  $A = 4\pi G\xi\rho_o/3H_0^2$ . Colocando os valores observados destas constantes obtemos que  $A$  é aproximadamente igual a 1. Daqui por diante vamos tomar  $A = 1$ . Deve ser lembrado que com a força gravitacional de Newton obteríamos um resultado nulo em vez de (5), devido ao 3º teorema apresentado acima.

Para completar a formulação de uma dinâmica relacional precisamos usar o princípio de equilíbrio dinâmico, [5]: "A soma de todas as forças, de qualquer natureza (gravitacional, eletromagnética, elástica, nuclear, etc.) agindo em qualquer corpo é sempre nula, em todos os sistemas de referência, mesmo quando o corpo está em movimento e acelerado."

Representamos por  $\sum_{j=2}^{N-1} \vec{F}_{j1}$  a força resultante agindo em 1 devido a  $N$

corpos locais  $j$  (como a força gravitacional devido a terra e ao sol, forças de contato, forças eletromagnéticas e de atrito, etc.). O princípio de equilíbrio dinâmico pode ser expresso como a soma das forças devido a distribuição

anisotrópica,  $\sum_{j=2}^{N+1} \vec{F}_{j1}$ , com as forças devido a distribuição isotrópica de massa,  $\vec{F}_1$ ,

atuando em 1 tem de ser nula:  $\sum_{j=2}^{N+1} \vec{F}_{j1} + \vec{F}_1 = 0$ . Com (5) vem, rearranjando um dos

termos:

$$\sum_{j=2}^{N+1} \vec{F}_{j1} - m_g \left[ \vec{\omega}_u \times (\vec{\omega}_u \times \vec{r}_1) - 2\vec{\omega}_u \times \vec{v}_1 - \frac{d\vec{\omega}_u}{dt} \times \vec{r}_1 - \vec{a}_u \right] = m_g \vec{a}_1. \quad (6)$$

E esta é essencialmente a segunda lei do movimento de Newton com as forças “fictícias.” Na mecânica relacional estas são forças gravitacionais reais que surgem em qualquer sistema de referência no qual o universo como um todo tem uma aceleração translacional  $\vec{a}_u$  e está girando com uma velocidade angular  $\vec{\omega}_u$ . A proporcionalidade entre as massas inerciais e gravitacionais da mecânica clássica (o princípio de equivalência) é derivado de maneira imediata neste modelo. Isto porque o lado direito de (6) surgiu da interação gravitacional (5) entre o corpo 1 e a distribuição isotrópica de matéria ao seu redor. A eq. (6) fica com sua forma mais simples num sistema de referência no qual o universo como um todo não está acelerado:  $\vec{a}_u = 0$ ,  $\vec{\omega}_u = 0$ ,  $d\vec{\omega}_u / dt = 0$ . Isto explica a coincidência na mecânica Newtoniana do fato de o referencial das “estrelas fixas” ser o melhor referencial inercial que temos. Ou seja, neste referencial podemos aplicar a segunda lei de Newton sem necessitar introduzir as “forças fictícias.”

#### IV. EXPLICAÇÃO DA EXPERIÊNCIA DO BALDE COM A MECÂNICA RELACIONAL

Na primeira situação descrita acima (água e balde em repouso com relação a terra, superfície plana) temos, no referencial da terra:  $\vec{v}_1 = 0$ ,  $\vec{a}_1 = 0$ ,  $\vec{\omega}_u = 0$ ,  $d\vec{\omega}_u / dt = 0$  (desprezando neste problema a rotação diurna ou anual das estrelas fixas ao redor da terra já que esta rotação é bem menor que a do balde na segunda situação). De (6) concluímos então que  $\sum_{j=2}^{N+1} \vec{F}_{j1} = 0$ . Isto

significa que o peso de um pequeno volume de água é contrabalançado pelo empuxo da água, ou seja, pelo gradiente de pressão na água, e a superfície fica plana (princípios de Arquimedes e Pascal).

Na segunda situação temos o balde girando junto com a água em relação a terra com uma velocidade angular constante  $\vec{\omega}_A$ , e a superfície é côncava agora.

No referencial da terra podemos desprezar  $\vec{a}_u$ ,  $\vec{\omega}_u$ , e  $d\vec{\omega}_u/dt$  comparados com  $\vec{\omega}_A$  já que  $\omega_A \gg \omega_u$ , onde  $\omega_u$  é a rotação vista pela terra das estrelas e das galáxias distantes ao redor da terra. Então voltamos a uma situação análoga à da mecânica Newtoniana com a água sendo acelerada num referencial inercial sem a presença de forças fictícias. A força gravitacional por unidade de volume exercida pela terra sobre um elemento de volume da água com densidade  $\rho_A$  é  $\rho_A \vec{g}_1$ . Esta força é contrabalançada pelo gradiente de pressão  $-\nabla P$  e neste caso é igual a  $\rho_A \vec{a}_1$ . A água descreve um movimento circular ao redor do eixo de rotação de tal forma que  $\vec{a}_1 = -\omega_A^2 \vec{\rho}_1$ , onde  $\vec{\rho}_1$  é o vetor posição do elemento de volume a partir do eixo de rotação ( $|\vec{\rho}_1|$  é a distância ao eixo). Podemos resolver facilmente esta equação em coordenadas cilíndricas e o resultado final é um parabolóide de revolução dado por:

$$z = \frac{\omega_A^2}{2g} \rho_1^2. \quad (7)$$

Nesta equação  $z$  é a distância vertical a partir do ponto mais baixo da água.

A discussão mais interessante da segunda situação é no referencial que gira junto com o balde e com a água. Neste caso temos  $\vec{v}_1 = 0$  e  $\vec{a}_1 = 0$  (água em repouso, apesar da superfície côncava). Também temos  $\vec{a}_u = 0$  (o universo como um todo sem aceleração translacional) e  $d\vec{\omega}_u/dt = 0$  (rotação constante). Mas neste referencial o universo como um todo está girando com uma velocidade angular constante  $\vec{\omega}_u = -\vec{\omega}_A$ , de tal forma que ele vai exercer uma força centrífuga real (de origem gravitacional) em cada molécula de água. Seu valor é dado por  $-m_g \vec{\omega}_u \times (\vec{\omega}_u \times \vec{r}_1) = m_g \omega_A^2 \vec{\rho}_1$ . Resolvendo a eq. (6) neste caso obtemos a mesma solução que antes, (7). Jogando com a citação anterior de Mach, aqui nós “fixamos o balde de Newton e giramos o céu de estrelas fixas junto com as galáxias distantes, e provamos a existência de forças centrífugas!”

Isto mostra que a mecânica relacional implementou quantitativamente a idéia de Mach de que os princípios da mecânica podem, de fato, ser concebidos tal que mesmo para rotações relativas surgem as forças centrífugas.

**AGRADECIMENTOS:** O autor deseja agradecer ao CNPq, à FAPESP e ao FAEP-UNICAMP pelo auxílio financeiro nos últimos anos.

**REFERÊNCIAS**

- [1] Newton, *Principia - Principios Matemáticos de Filosofia Natural* (Nova Stella/Edusp, São Paulo, 1990), Tradução de T. S. F. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Ghering e M. H. C. Celia.
- [2] E. Mach, *The Science of Mechanics - A Critical and Historical Account of Its Development* (Open Court, la Salle, 1960).
- [3] A. K. T. Assis, *Curso de Eletrodinâmica de Weber* (Setor de Publicações do Instituto de Física da UNICAMP, Campinas, 1992), Notas de Física IFGW N° 5.
- [4] A. K. T. Assis, *Weber's Electrodynamics* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994), Volume 66 da série Fundamental Theories of Physics.
- [5] A. K. T. Assis, *Foundations of Physics Letters*, Vol. 2, págs. 301-318 (1989), "On Mach's principle."