

Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica

Aluno: João Paulo Martins de Castro Chaib
E-mail: jopachaib@yahoo.com.br

Orientador: Prof. Dr. André Koch Torres de Assis
Homepage: www.ifi.unicamp.br/~assis

Tese apresentada ao Instituto de Física ‘Gleb Wataghin’
da Universidade Estadual de Campinas — UNICAMP,
para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Campinas, Janeiro de 2009

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IFGW - UNICAMP**

C347a Chaib, João Paulo Martins de Castro
Análise do significado e da evolução do conceito de força de Ampère, juntamente com a tradução comentada de sua principal obra sobre eletrodinâmica / João Paulo Martins de Castro Chaib. – Campinas, SP : [s.n.], 2009.

Orientador: André Koch Torres de Assis.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Física "Gleb Wataghin".

1 1. Ampère, André-Marie, 1775-1836. 2. Ampère, Força de.
2 3. Eletrodinâmica. 4. Ciência – História. I. Assis, André
3 Koch Torres de. II. Universidade Estadual de Campinas.
4 Instituto de Física "Gleb Wataghin". III. Título.

5 (vsv/ifgw)

- **Título em inglês:** Analysis of the meaning and evolution of Ampère's force concept, together with a commented translation of his main work on electrodynamics
- **Palavras-chave em inglês (Keywords):**
 - 1. Ampère, André-Marie, 1775-1836
 - 2. Ampère's force
 - 3. Electrodynamics
 - 4. Science - History
- **Área de Concentração:** Física
- **Titulação:** Doutor em Ciências
- **Banca examinadora:**
 - Prof. André Koch Torres de Assis
 - Prof. Marcos César Danhoni Neves
 - Prof. João José Caluzi
 - Prof. Edmundo Capelas de Oliveira
 - Prof. Antonio Vidiella Barranco
- **Data da Defesa:** 16/01/2009
- **Programa de Pós-Graduação em:** Física



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA TESE DE DOUTORADO DE **JOÃO PAULO MARTINS DE CASTRO CHAIB – RA 049307** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 16 / 01 / 2009.

COMISSÃO JULGADORA:

André Koch Torres de Assis

Prof. Dr. André Koch Torres de Assis - Presidente da Comissão Julgadora
DRCC/IFGW/UNICAMP

Marcos Cesar Danhoni Neves

Prof. Dr. Marcos Cesar Danhoni Neves – DF/UEM

João José Caluzi

Prof. Dr. João José Caluzi - DF/UNESP-BAURU

Edmundo Capelas de Oliveira

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira – IMECC/UNICAMP

Antonio Vidiella Barranco

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco – DEQ/IFGW/UNICAMP

“Depuis que j’ai entendu parler pour la première fois de la belle découverte de M. Oersted, professeur à Copenhague, sur l’action des courants galvaniques sur l’aiguille aimantée, j’y ai pensé continuellement, je n’ai fait qu’écrire une grande théorie sur ces phénomènes et tous ceux déjà connus de l’aimant, et tenter des expériences indiquées par cette théorie, qui toutes on réussi et m’ont fait connaitre autant de faits nouveaux.” Carta de Ampère a seu filho, de setembro de 1820, [Ampl] e [Lau36, págs. 561-562].

“[Ampère] published his collected results in one of the most celebrated memoirs in the history of natural philosophy.” Whittaker, [Whi73, pág. 83].

“At the beginning of the year 1820 nothing was known of the magnetic action of an electric current. By 1826 the theory for steady currents had been completely worked out. Since then, though newer methods may have made the handling of the mathematical apparatus simpler and more concise, nothing fundamental has been changed.” Tricker, [Tri65, pág. vii].

“The experimental investigation by which Ampère established the laws of the mechanical action between electric currents is one of the most brilliant achievements in science. The whole, theory and experiment, seems as if it had leaped, full grown and full armed, from the brain of the ‘Newton of electricity.’ It is perfect in form, and unassailable in accuracy, and it is summed up in a formula from which all the phenomena may be deduced, and which must always remain the cardinal formula of electro-dynamics.” Maxwell, [Max54, Vol. 2, artigo 528, pág. 175].

Agradecimentos

À minha mãe Rosana e ao meu pai Homero. Sem o apoio deles minha vinda para Campinas seria improvável.

Aos meus irmãos Danilo e Fernando e à minha irmã Adalgisa, pelo carinho que me dá força.

Ao meu orientador, André Koch Torres de Assis, pela oportunidade, pela paciência, pela amizade, pelas broncas e, principalmente, pela confiança.

Aos funcionários, em particular, Dona Cida, Sandra da Biblioteca, Sandra do DRCC, Nivaldo, João, Júlia, Clotilde, Cássia, Armando, Maria Ignez pelo sorriso do dia a dia.

À PRPG da UNICAMP pela bolsa de doutorado.

Aos meus novos amigos que fiz em Campinas. Em casa, na física, no Projeto Educacional Machado de Assis e na vida. Sem eles a estadia dificilmente seria suportável.

Agradeço a diversas pessoas por sugestões, auxílio na realização de algumas experiências, no preparo de algumas ilustrações, obtenção de referências, idéias etc.: João José Caluzi, José Rafael Boesso Perez, Moacir Pereira de Souza Filho, Sérgio Luiz Bragatto Boss, Hector Munera, Fabio Miguel de Matos Ravanelli, Roberto Antônio Clemente, Mário Noboru Tamashiro, Varlei Rodrigues, Abner de Siervo, Edmundo Capelas de Oliveira, Marcos César Danhoni Neves, Antonio Vidiella Barranco, Daniel Robson Pinto, James R. Hofmann e Christine Blondel.

Resumo

Apresentamos a força de Ampère entre elementos de corrente e discutimos detalhadamente as grandezas que aparecem nesta lei. Analisamos o caminho percorrido por Ampère para chegar na sua força entre elementos de corrente. Mostramos suas primeiras experiências, as formulações iniciais de sua força, as experiências de Biot e Savart, assim como a influência da experiência da rotação contínua de Faraday na determinação do valor final da força entre elementos de corrente de Ampère. Apresentamos os diversos casos de equilíbrio introduzidos por Ampère e sua relevância metodológica na obtenção de leis quantitativas na física. Mostramos as contribuições de Savary na elaboração das conseqüências quantitativas da força de Ampère e o impacto que elas tiveram sobre Biot, Savart e Ampère. Discutimos alguns dos principais trabalhos, cartas e manuscritos de Ampère, desde 1820 até sua obra máxima de 1826, o *Théorie des Phénomènes Électro-dynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience*. Apresentamos uma tradução completa desta obra e das notas que a acompanham.

Abstract

We present Ampère's force between current elements and discuss in detail the magnitudes which appear in this law. We analyze the trajectory followed by Ampère in order to obtain his force between current elements. We show his first experiments, the initial formulations of his force, the experiments of Biot and Savart, and the influence of Faraday's experiment of uninterrupted rotation in the determination of the final value of Ampère's force between current elements. We present the several cases of equilibrium introduced by Ampère and their methodological relevance in order to obtain quantitative laws in physics. We show the contributions of Savary for the elaboration of the quantitative consequences of Ampère's force and the impact they had upon Biot, Savart and Ampère. We discuss some of the main works, letters and manuscripts of Ampère, from 1820 until his masterpiece of 1826, the *Théorie des Phénomènes Électro-dynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience*. We present a complete translation of this work and of the notes which follow it.

Sumário

Ficha Catalográfica	2
Folha de Aprovação da Comissão Julgadora	3
Agradecimentos	6
Resumo	7
Abstract	8
Sumário	9

I Ampère e o Significado de sua Força entre Elementos de Corrente 15

1 Introdução	16
1.1 Vida de Ampère	16
1.2 Obra de Ampère	20
1.3 A Experiência de Ørsted e seu Impacto sobre Ampère	23
2 A Força de Ampère e o Significado de Seus Termos	28
2.1 A Força de Ampère entre Elementos de Corrente	28
2.2 A Concepção de Corrente Elétrica para Ampère	29
2.3 O Sentido da Corrente em Termos do Movimento das Cargas	31
2.4 Os Significados da Expressão “Sentido da Corrente”	35
2.5 A Direção da Força e Seu Sinal Algébrico	39
2.6 A Intensidade da Corrente e o Tamanho do Elemento de Corrente	40
2.7 A Distância entre os Dois Elementos	42
2.8 Os Ângulos que Aparecem na Força de Ampère	43
2.8.1 O Ângulo entre os Dois Elementos de Corrente	43
2.8.2 O Ângulo entre os Planos Formados por Cada Elemento e a Reta que os Une	44
2.8.3 Os Ângulos entre os Elementos e a Reta que os Une	45

II A Evolução da Força de Ampère 51

3 As Primeiras Experiências de Ampère	53
--	-----------

3.1	Orientação de uma Bússola por um Fio com Corrente	53
3.2	Atração e Repulsão entre uma Agulha Imantada e um Fio com Corrente	56
3.3	Descoberta das Correntes Fechadas	56
3.4	Reproduzindo a Atração e Repulsão entre Dois Ímãs Alinhados	58
3.5	Interação entre Fios com Corrente	59
3.5.1	Interação entre Espirais	59
3.5.2	Interação entre Fios Retos e Paralelos	61
3.6	Reprodução da Ação Diretriz da Terra sobre uma Bússola	63
3.7	A Experiência de Ørsted Eletrodinâmica	67
3.8	A Experiência Inversa de Ørsted	68
3.9	Resumo das Primeiras Experiências de Ampère	69
4	Formulações Iniciais da Força entre Elementos de Corrente	71
4.1	Tentativa Inicial	71
4.2	A Primeira Publicação Contendo uma Expressão da Força entre Dois Elementos de Corrente	78
4.2.1	A Lei da Adição	78
4.2.2	Princípio da Não Existência de Interação entre Elementos Ortogonais	84
4.2.3	O Artigo de Dezembro de 1820	85
4.2.4	O Princípio de Simetria	88
4.3	Casos de Equilíbrio	89
4.3.1	Métodos para Obter a Força entre Elementos Infinitesimais	89
4.3.2	Espiras Astáticas	90
4.3.3	Caso de Equilíbrio do Fio Sinuoso	92
4.3.4	Caso de Equilíbrio das Correntes Anti-Paralelas	94
5	As Contribuições de Biot e Savart	98
5.1	A Experiência do Fio Retilíneo	98
5.2	A Experiência do Fio Oblíquo	101
5.3	Um Resultado Inesperado para Ampère: O Caso de Equilíbrio das Correntes Ortogonais	103
6	A Obtenção da Força entre Elementos de Corrente com seu Valor Final	106
6.1	A Rotação Contínua de Faraday	106
6.2	Experiências Iniciais de Ampère sobre a Rotação Contínua	107
6.2.1	Reprodução da Experiência de Faraday	107
6.2.2	Obtendo a Rotação Contínua Apenas com o Magnetismo Terrestre	108
6.2.3	Rotação de um Ímã ao Redor de Seu Eixo	110
6.2.4	Obtendo a Rotação Contínua Apenas com Correntes Elétricas	113
6.3	A Experiência Crucial de Ampère	115
6.3.1	Previsão Errada de Ampère	115
6.3.2	Uma Anomalia Experimental: O Caso de Equilíbrio da Não Existência de Rotação Contínua	117
6.4	Transformações da Força entre Elementos de Corrente	118
6.4.1	Força em Função do Ângulo entre os Elementos	119
6.4.2	Força em Termos de Derivadas Parciais	121
6.5	A Obtenção de $k = -1/2$	123

III	A Última Fase das Pesquisas Eletrodinâmicas de Ampère	128
7	Novas Experiências de Ampère	129
7.1	O Caso de Equilíbrio das Correntes em Semi-Círculo	129
7.2	A Experiência da Ponte de Ampère	129
7.3	O Caso de Equilíbrio da Não Existência de Força Tangencial	131
7.4	A Experiência Mostrando que $n > 1$	134
8	As Contribuições de Savary	136
8.1	Obtenção de uma Nova Relação entre n e k	136
8.2	O Análogo Eletrodinâmico de um Pólo Magnético	139
8.3	Torque de um Fio Reto sobre um Cilindro Eletrodinâmico	142
8.4	Explicação para o Caso de Equilíbrio das Correntes Ortogonais	143
8.5	Ação Mútua entre Dois Cilindros Eletrodinâmicos	143
8.6	O Caso do Fio Oblíquo Eletrodinâmico	144
8.7	Reações de Biot e Savart ao Trabalho de Savary	146
8.8	Reações de Ampère ao Trabalho de Savary	148
9	Alguns Desenvolvimentos Posteriores	150
9.1	O Caso de Equilíbrio da Lei da Semelhança	150
9.2	Os Casos de Equilíbrio Apresentados no <i>Théorie</i>	153
IV	A Principal Obra de Ampère	155
10	Introdução ao <i>Théorie</i>	156
11	Comparação entre o <i>Théorie</i> de 1826 e o de 1827	157
11.1	Semelhanças e Diferenças	157
11.2	A Palavra Final de Ampère	158
12	Observações sobre a Tradução	163
13	Conclusão	166
V	Tradução Comentada da Principal Obra de Ampère	168
14	Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência	169
14.1	Exposição do Caminho a ser Seguido na Pesquisa sobre as Leis dos Fenômenos Naturais e sobre as Forças que os Produzem	172
14.2	Descrição das Experiências pelas Quais se Constatam Quatro Casos de Equilíbrio que Fornecem a Quantidade de Leis de Ação à qual são Devidos os Fenômenos Eletrodinâmicos	180
14.3	Pesquisa da Fórmula que Exprime a Ação Mútua entre Dois Elementos de Condutores Voltaicos	191
14.4	Relação Fornecida pelo Terceiro Caso de Equilíbrio entre as Duas Constantes Desconhecidas que Entram nesta Fórmula	197

14.5	Fórmulas Gerais que Representam a Ação de um Circuito Voltaico Fechado, ou de um Sistema de Circuitos Fechados, sobre um Elemento de Corrente Elétrica . . .	202
14.6	Experiência pela Qual se Verifica uma Conseqüência destas Fórmulas	206
14.7	Aplicação das Fórmulas Precedentes a um Circuito Circular	211
14.8	Simplificação destas Fórmulas quando o Diâmetro do Circuito Circular é Muito Pequeno	213
14.9	Aplicação a um Circuito Plano Formando uma Curva Fechada Qualquer, Inicialmente no Caso em que Todas as Suas Dimensões são Muito Pequenas, e em Seguida para Qualquer que Seja o Seu Tamanho	214
14.10	Ação Mútua entre Dois Circuitos Fechados Situados em um Mesmo Plano, Inicialmente Supondo que Todas as Dimensões São Muito Pequenas, e em Seguida no Caso para o Qual estes Dois Circuitos Possuem uma Forma e um Tamanho Arbitrários	218
14.11	Determinação das Duas Constantes Desconhecidas que Entram na Fórmula Fundamental	220
14.12	Ação de um Fio Condutor Formando um Setor de Círculo sobre um Condutor Retilíneo Passando pelo Centro do Setor	221
14.13	Descrição de um Instrumento Destinado a Verificar os Resultados da Teoria sobre os Condutores desta Forma	223
14.14	Ação Mútua entre Dois Condutores Retilíneos	227
14.15	Ação Exercida sobre um Elemento de Fio Condutor pelo Conjunto de Circuitos Fechados de Dimensões Muito Pequenas, que Recebeu o Nome de <i>Solenóide Eletrodinâmico</i>	250
14.16	Ação Exercida sobre um Solenóide por um Elemento ou por uma Porção Finita de Fio Condutor, por um Circuito Fechado ou por um Sistema de Circuitos Fechados	254
14.17	Ação Mútua entre Dois Solenóides	259
14.18	Identidade entre Solenóides e Ímãs, no que diz Respeito à Ação Exercida sobre Eles, seja pelos Fios Condutores, seja por Outros Solenóides ou por Outros Ímãs. Discussão sobre as Conseqüências que se Pode Tirar desta Identidade, em Relação à Natureza dos Ímãs e em Relação à Ação que se Observa entre o Globo Terrestre e um Ímã ou um Fio Condutor	261
14.19	Identidade das Ações Exercidas, seja sobre o Pólo de um Ímã, seja sobre a Extremidade de um Solenóide, por um Circuito Voltaico Fechado e por um Conjunto de Duas Superfícies Muito Próximas que Delimitam este Circuito, e sobre as Quais são Espalhados e Fixados Dois Fluidos tais como se Supõem os Dois Fluidos Magnéticos, Austral e Boreal, de Maneira que a Intensidade Magnética seja a Mesma em Todas as Partes	277
14.20	Exame das Três Hipóteses sobre a Natureza da Ação Mútua entre um Elemento de Fio Condutor e Aquilo que se Denomina de <i>Uma Molécula Magnética</i>	291
14.21	Impossibilidade de Produzir um Movimento Indefinidamente Acelerado pela Ação Mútua entre um Circuito Rígido Fechado e um Ímã, ou [entre um Circuito Rígido Fechado] e um Solenóide Eletrodinâmico	294
14.22	Exame dos Diferentes Casos nos Quais um Movimento Indefinidamente Acelerado Pode Resultar da Ação que um Circuito Voltaico, no Qual uma Parte é Móvel Separadamente do Restante deste Circuito, Exerce sobre um Ímã ou sobre um Solenóide Eletrodinâmico	295

14.23	Identidade da Ação Mútua entre Dois Circuitos Voltaicos Fechados e da [Ação Mútua] entre Dois Conjuntos Compostos Cada Um de Duas Superfícies Muito Próximas Delimitadas pelo Circuito Correspondente a Cada Conjunto, e sobre as Quais são Espalhados e Fixados os Dois Fluidos Magnéticos, Austral e Boreal, de Maneira que a Intensidade Magnética Seja a Mesma por Toda Parte	312
14.24	Impossibilidade de Produzir um Movimento Indefinidamente Acelerado pela Ação Mútua entre Dois Circuitos Voltaicos Rígidos e Fechados e, Conseqüentemente, pela [Ação Mútua] entre Dois Conjuntos Quaisquer de Circuitos deste Tipo	316
14.25	Experiência que Acaba de Confirmar a Teoria na Qual se Atribui as Propriedades dos Ímãs [como Sendo Devidas] a Correntes Elétricas, ao se Provar que um Fio Condutor Curvado em Espiral ou em Hélice e Percorrido pela Corrente Voltaica Sofre, da Parte de um Disco Metálico em Movimento, uma Ação em Tudo Similar Àquela que o Sr. Arago Descobriu entre este Disco e um Ímã	318
14.26	Conseqüências Gerais das Experiências e dos Cálculos Relativos aos Fenômenos Eletrodinâmicos	319
15	Notas [do <i>Théorie</i> Publicado em 1826] Contendo Alguns Novos Desenvolvimentos sobre os Assuntos Tratados nesta Obra	322
15.1	Sobre a maneira de demonstrar pelos quatro casos de equilíbrio expostos no começo desta Memória, que o valor da ação mútua entre dois elementos de fios condutores é $-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'}$	322
15.2	Sobre uma transformação apropriada para simplificar o cálculo da ação mútua entre dois condutores retilíneos	325
15.3	Aplicação desta transformação para a determinação da constante m que entra na fórmula pela qual se exprime a força exercida entre dois elementos de fios condutores, e para a [determinação] do valor desta força que convém empregar quando se quer calcular os efeitos produzidos pela ação mútua entre dois elementos retilíneos	327
15.4	Sobre a situação da reta que designei sob o nome de <i>diretriz da ação eletrodinâmica a um ponto dado</i> , quando esta ação é a de um circuito fechado e plano no qual todas as dimensões são muito pequenas	332
15.5	Sobre o valor da força que um condutor angular indefinido exerce sobre o pólo de um pequeno ímã, e sobre [o valor da força] que imprime a este pólo um condutor que possui a forma de um paralelogramo situado no mesmo plano [em que o pólo está localizado]	334
16	Notas [do <i>Théorie</i> Publicado em 1827] Contendo Alguns Novos Desenvolvimentos sobre os Assuntos Tratados na Memória Precedente	341
16.1	Sobre a maneira de demonstrar pelos quatro casos de equilíbrio expostos no começo desta Memória, que o valor da ação mútua entre dois elementos de fios condutores é $-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'}$	341
16.2	Sobre uma transformação apropriada para simplificar o cálculo da ação mútua entre dois condutores retilíneos	344
16.3	Sobre a direção da reta designada nesta Memória sob o nome de <i>diretriz da ação eletrodinâmica a um ponto dado</i> , quando esta ação é a de um circuito fechado e plano no qual todas as dimensões são muito pequenas	345

16.4 Sobre o valor da força que um condutor angular indefinido exerce sobre o pólo de um pequeno ímã	348
Apêndice A Figuras do <i>Théorie</i> Refeitas e Vetorizadas com um Software Gráfico	354
Referências Bibliográficas	374

Parte I

Ampère e o Significado de sua Força entre Elementos de Corrente

Capítulo 1

Introdução

1.1 Vida de Ampère



Figura 1.1: Retrato de Ampère (1775-1836) na época de seu casamento em 1799, quando estava com 24 anos, [Hof96, pág. 12].

Apresentamos aqui alguns dados relevantes sobre a vida de Ampère. As principais fontes consultadas foram as obras de Launay, [Lau25], Poudensan, [Pou64], Williams, [Wil81] e Hofmann, [Hof96]. Também analisamos a auto-biografia de Ampère, [Amp82]. Ela foi redigida na terceira pessoa em 1824, com o manuscrito autografado encontrando-se nos Arquivos da Academia de Ciências da França, [Ampd].

Ao longo da tese todos os trechos entre colchetes nas citações são nossos. Eles foram colocados para facilitar a compreensão de alguns trechos ou para clarificar o significado de certos termos.

André-Marie Ampère nasceu em Lyon, na França, em 20 de janeiro de 1775. O segundo nome “Marie” lhe foi dado pela sua mãe Jeanne-Antoinette Desutières-Sarcey no momento de seu batismo dois dias depois. Tanto sua mãe como seu pai Jean-Jacques Ampère tinham origens burguesas, sendo o Sr. Ampère negociante de seda em Lyon.

Pouco antes do nascimento do pequeno Ampère, seu pai havia comprado uma propriedade rural em um pequeno vilarejo chamado Poleymieux, próximo a Lyon, para onde se retirou com sua família. Naquela época, a população do vilarejo era de 400 a 500 pessoas, não havendo escolas até o ano de 1833.

O pai de Ampère foi muito influenciado pelas teorias educacionais de J.-J. Rousseau (1712-1778) e resolveu educar seu filho seguindo as orientações do livro *Émile*, de Rousseau. O método consistia essencialmente em dar-lhe acesso a uma vasta biblioteca, deixando-o livre para educar-se a si mesmo, de acordo com seus próprios interesses, [Wil81, pág. 139]. Ampère nunca freqüentou como aluno uma escola ou uma Universidade, sendo sempre auto-didata. Como mencionou o próprio Ampère em sua auto-biografia, seu pai “jamais lhe exigiu que estudasse o que quer que fosse,” [Amp82, pág. 171].

Seu pai soube lhe atizar a curiosidade de tal maneira que se encantava em escutar passagens do livro de história natural de Buffon, decorando o nome de todos animais ali contidos e se divertindo em ver as figuras. Devido a liberdade de estudar somente quando desejasse, aprendeu a ler tardiamente. Porém aprendeu a fazê-lo correntemente ao exercitar a leitura para entender a história dos pássaros que lhe encantavam.

O tempo livre, o isolamento das influências de uma vida atribulada na cidade, a distância dos problemas que a França passava e a vasta biblioteca na casa de seu pai, foram algumas das condições em que o pequeno Ampère encontrou que lhe permitiram ler tudo o quanto podia e queria.

Depois das ciências naturais, Ampère se encantou com o teatro e a história. Em sua autobiografia Ampère diz que “tinha um prazer singular em aprender cenas inteiras das tragédias de Racine e de Voltaire e de as recitar ao passear sozinho,” [Amp82, pág. 171]. O futuro cientista também acompanhou as notícias da guerra de independência dos EUA (1775-1783) que contou com a aliança francesa em 1778.

Ainda jovem descobriu e aperfeiçoou sozinho seus talentos matemáticos. Estudou os livros iniciais de *Os Elementos* de Euclides por conta própria. Se interessou pelos trabalhos de Euler (1707-1783) e Lagrange (1736-1813). Ao ser informado pela biblioteca de Lyon que os trabalhos destes autores que queria estavam em latim, resolveu aprender este idioma com seu pai. Conseguiu então ler os livros nos quais estava interessado. Continuou seus estudos de latim ao ponto de chegar e escrever versos neste idioma. Lia em latim a *Eneida* de Virgílio e recitava seus poemas de cor.

Aos treze anos, quando começou a ler *Os Elementos de Matemáticas* de Rivard e de Mazéare, deixou de lado todos seus afazeres para se ocupar somente destes livros, seguidos depois pela *Álgebra* de Clairaut e das obras de la Chapelle e do marquês de l’Hôpital.

Ampère não só lia, como também exercitava continuamente o conhecimento que ia adquirindo.

Complementando suas leituras matemáticas, ele se pôs a escrever um tratado de seções cônicas fazendo demonstrações que, em suas próprias palavras, imaginava e acreditava serem novas, [Amp82, pág. 171]. Aos treze anos apresentou para a Academia de Ciências de Lyon uma pequena memória sobre a retificação de um arco de círculo.

Aos quatorze anos ele leu e estudou os vinte e dois volumes da *Encyclopédie* de d'Alembert e Diderot. Trinta anos mais tarde ainda podia recitar muitos dos artigos desta famosa enciclopédia de cor. Ao ler o artigo sobre “Língua,” teve a ideia de fazer um idioma universal com o qual compôs um poema.

Durante toda sua vida ficou dividido entre uma profunda religiosidade católica, influência de sua mãe, e as dúvidas levantadas pelos Enciclopedistas.

Seus estudos matemáticos foram barrados por uma dificuldade não tão incomum até hoje. Ele se deparou com o cálculo diferencial e não conseguia entender o conceito por detrás do símbolo d que acompanhava as equações. Um amigo de seu pai, o abade Daburon, lhe tirou desta dificuldade. Após isto, teve encontros freqüentes com este religioso, que lhe guiava no seus estudos matemáticos. No final da juventude estudou o livro *Mecânica Analítica*, de Lagrange. Refez todos os cálculos deste livro por conta própria.

Este idílio terminou com duas tragédias pessoais para Ampère aos 17 e 18 anos de idade. A sua irmã e companheira Antoinette morreu aos 20 anos, em 2 de março de 1792. A revolução francesa havia tido início em 1789. Em agosto de 1793 o Sr. Ampère, representando os monarquistas, foi nomeado juiz de paz em Lyon. Tendo os monarquistas o poder da cidade, estes se opuseram às diretrizes instituídas pela Convenção Nacional (poder executivo provisório republicano). Dada a tensão revolucionária e anti-revolucionária instalada, Joseph Chalier – líder dos Jacobinos em Lyon e ex-membro do tribunal distrital – iniciou um confronto com os monarquistas e foi preso sob as ordens de Jean-Jacques Ampère, sendo guillotinado em 17 de julho de 1793. Em seguida, setembro do mesmo ano, a Convenção Nacional manda uma armada para a cidade que permanece sitiada até 9 de outubro. Após a queda de Lyon, o Sr. Ampère é preso, sendo guillotinado em 23 de novembro de 1793. Com a morte de seu pai, Ampère entra em uma depressão profunda iniciando sua recuperação após um ano de inatividade, sob a leitura das *Cartas sobre a Botânica* de Rousseau. Em sua auto-biografia descreve este período de um ano após a morte do pai de duas formas diferentes: “Por mais de um ano, entregue a uma dor que o absorvia completamente, nenhum estudo lhe interessava mais.” Ou então: “Ele passava dias inteiros a contemplar tristemente o bosque, as colinas e o céu,” [Amp82, pág. 172].

Aos 21 anos Ampère conhece Julie Caron. Apesar de sua timidez, cortejou a moça por três anos enviando poemas. Casou-se com ela em 2 de abril de 1799. Os quatro anos deste casamento foram os mais felizes da vida de Ampère.

Tendo seu pai morrido, os rendimentos que antes lhe sustentavam diminuíram consideravelmente, de maneira que Ampère teve que procurar trabalho para se sustentar. A facilidade que tinha com matemática lhe permitiu ser primeiramente professor particular. Em 1802, dado o reconhecimento que obteve como professor, foi aceito na *Bourg École Centrale* na cidade de Ain, ensinando matemática, química e física.

Este emprego foi de grande valia já que em 12 de agosto de 1800 tinha nascido seu filho, Jean-Jacques-Antoine. Sua esposa tinha ficado bastante doente após o nascimento do filho. Ela faleceu em 13 de julho de 1803 e Ampère ficou completamente amargurado.

A estadia em Lyon se torna bastante penosa para ele e decide se mudar. Em 1802 havia publicado um trabalho sobre probabilidades no qual mostrou que um jogador individual perderá inevitavelmente em um jogo de azar se jogar contra um grupo com recursos financeiros muito maiores que os deste jogador. Isto levou a uma amizade com Delambre (1749-1822), matemático

e astrônomo francês. Por esta amizade e por outras que faz com Lagrange e Arago (1786-1853), consegue o cargo de *répétiteur* na *École Polytechnique* em Paris.

Em 1806 tornou-se membro e secretário do escritório consultivo de Artes e Manufaturas. Em primeiro de agosto do mesmo ano se casa com Jeanne-Françoise Potot. Este casamento foi catastrófico desde o início. Apesar desta vida conjugal atribulada, tem uma filha de nome Joséphine-Albine em 6 de julho de 1807. Separa-se de Jeanne em julho de 1808, ficando com a custódia da filha.

Também em 1808 Ampère torna-se inspetor geral dos estudos da *Université Imperiale* fundada por Napoleão. Obtém também o cargo de professor da Escola Politécnica.

Em 1814 ele ocupa a cadeira de geometria na Academia de Ciências de Paris. Em 1819 ele torna-se professor de filosofia na Faculdade de Letras de Paris.

No período de 1820 a 1826 realiza suas principais pesquisas eletrodinâmicas, assunto principal desta tese.

Já em 1824 torna-se professor de física no *Collège de France*.

Depois de 1827 a atividade científica de Ampère declinou rapidamente. Estes anos coincidem com os problemas que sua filha tem no casamento e a piora da saúde de Ampère. A partir desta data ele se concentra em escrever seu ensaio sobre a filosofia e classificação das ciências. O primeiro volume foi publicado em 1834 e o segundo volume foi publicado postumamente em 1843.

Ampère falece em uma viagem como inspetor em 10 de junho de 1836, com 61 anos de idade, na cidade de Marseille.

A vida de André-Marie Ampère foi um pequeno reflexo da nova França que subitamente se viu no meio das atribulações e mudanças radicais que aconteciam na história. Sua vida foi cheia de contradições, mas realizou um trabalho brilhante que influencia o mundo até os dias de hoje.

1.2 Obra de Ampère



André-Marie AMPÈRE
1775-1836

Figura 1.2: André-Marie Ampère, [Amp90].

Esta tese é toda dedicada à eletrodinâmica de Ampère, trabalho que realizou entre 1820 e 1826. Vamos nos concentrar nesta Seção em apresentar suas principais contribuições científicas que realizou nos outros ramos do saber.

A obra de Ampère é muito grande, comportando os mais variados tipos de conhecimento. Até os dias atuais, vários de seus manuscritos inéditos ainda estão sendo publicados. Neles se encontram tanto assuntos de seu cotidiano – suas cartas – como suas idéias contribuindo para a melhoria da cultura francesa e mundial. Por exemplo, o livro intitulado *Les Moments Poétiques d'André Marie Ampère*, foi publicado pela Sociedade para o Desenvolvimento de Aplicações da Eletricidade (SODEL) em 1986, 150 anos depois de seu falecimento. Outro exemplo, foi a publicação no portal eletrônico destinado a documentos relacionados com Ampère,¹ da transcrição de seu *Projeto para uma Língua Universal*.

Observa-se que Ampère, desde pequeno, sempre fazia questão de exercitar e aplicar o conhecimento que ia adquirindo. Comparava a flora e a fauna que rodeava sua vida no campo com as leituras e figuras de ciência natural que lhe encantaram primeiramente. Da mesma forma, exercitava as leituras de teatro e poesia decorando as passagens e recitando-as enquanto passeava. Ao estudar a linguagem, tenta reconstruir uma linguagem primitiva e imaginar como as línguas existentes saíram dela. E como não poderia ser diferente, exercitava a matemática demonstrando teoremas e fazendo as contas.

Talvez por ter encontrado na matemática uma liberdade de criação maior, é nela que se debruçará para montar um Tratado de Seções Cônicas ainda aos treze anos. E é com essa idade, usando de cálculo diferencial, que apresentará sua primeira Memória intitulada *Sobre a retificação de um arco qualquer de círculo menor que a semi-circunferência*. Ela foi apresentada à Academia de Ciências de Lyon em 8 de julho de 1788. Foi publicada pela primeira vez por Launay, [Lau43, págs. 827-831]. Somente este fato já demonstra que foi uma criança prodígio. No período de 1788 a 1814 ele dedicou-se principalmente à matemática.

E por ter mais experiência nesta área – e talvez por ser a matéria mais assustadora da escola desde sempre – garantirá sua sobrevivência, após a morte de seu pai, como professor particular de matemática. E será enquanto professor da *École Centrale du Département de l'Ain* que em 1802 publicará o trabalho intitulado *Considerações sobre a teoria matemática do jogo*. Este foi o seu primeiro artigo que chamou a atenção de outros cientistas.

Embora seus trabalhos matemáticos fossem reconhecidos, não eram a prioridade de Ampère. Seu real interesse estava na física, na química e, principalmente, na filosofia. Entretanto, isso não impediu que publicasse em 1815 o trabalho *Considerações gerais sobre as integrais das equações diferenciais parciais* e seu nome ficasse imortalizado em um tipo especial de equações diferenciais parciais de segunda ordem, as chamadas equações de Monge-Ampère.

Dedicou-se à química principalmente no período de 1808 a 1815. Sua preocupação por problemas de química é explicitada em 1811 quando publica o trabalho *Sobre uma combinação particular do gás oximuriático com o oxigênio pelo Sr. Humphry Davy*. Este interesse pela química já vem de antes quando em 1809 soube “das belas descobertas do Sr. Gay-Lussac e Thénard sobre as diversas substâncias que contêm o corpo simples que se considerava então como composto, e que se denominava *ácido muriático oxigenado*,” [Amp82, pág. 173]. Ampère concluiu que este *corpo simples* era um elemento ao qual denominou *cloro*, que vem do grego e significa “esverdeado.” Mas não teve tempo nem os recursos suficientes para provar sua conjectura, com o crédito da descoberta indo para H. Davy (1778-1829). Ampère também teve as mesmas considerações sobre o elemento no ácido fluorídrico, o qual chamou de *phlore*, do grego

¹O portal foi desenvolvido pelo Centro Nacional de Pesquisas da França (CNRS) sob a coordenação da Profa. Christine Blondel, <http://www.ampere.cnrs.fr>.

“corrupção.” Porém o nome que ficou foi *fluor*, do latim “fluxo,” batizado por Davy. Ampère também tem participação na descoberta do *iodo*, do grego “cor violeta.” Novamente foi Davy quem insistiu publicamente que este era um elemento químico, ficando com o crédito principal por esta descoberta.

Na química também escreveu em 1814 o trabalho desenvolvido desde 1809 com o título *Carta do Sr. Ampère ao Sr. Conde Berthollet sobre a determinação das proporções nas quais os corpos se combinam de acordo com o número e a respectiva disposição das moléculas cujas partículas integrantes são compostas*. A seqüência foi publicada em 1815, *Demonstração da relação descoberta por Mariotte entre os volumes dos gases e as pressões que eles sofrem a uma mesma temperatura*. Nestes trabalhos Ampère obtém de maneira independente a lei de Avogrado. Avogrado foi um físico italiano nascido em 1776 e falecido em 1856. Avogrado chegou na relação entre o número de partículas contidas de dois volumes de gases diferentes com mesmo peso, mesma temperatura e pressão em 1811. Na França a lei é conhecida hoje em dia como *lei de Avogrado-Ampère*.

Depois da publicação de seus trabalhos sobre eletrodinâmica no período de 1820 a 1826, diminuiu a freqüência de suas obras científicas. Concentrou-se em escrever uma obra filosófica sobre a classificação das ciências. O primeiro volume foi publicado em 1834, [Amp34], sendo a segunda parte publicada postumamente por seu filho – o famoso historiador francês Jean-Jacques Ampère – em 1843, [Amp43], 7 anos após seu falecimento.

Ampère via a matemática, física, química e filosofia inseridas no conhecimento humano como um todo. Não tinha a filosofia como aspecto contemplativo. Pelo contrário, se preocupava “na sua aplicação às outras ciências.” E mais, “ele gostava de ver nesta aplicação uma fonte de novos progressos para estas ciências e para a própria filosofia,” [Amp82, pág. 172].

Ampère, observando esta aplicação, contribuiu enormemente para expandir as fronteiras do conhecimento humano.

Passamos agora às suas pesquisas sobre eletrodinâmica. Como disse Williams, [Wil81, pág. 143]:

Ao redor de 1820 Ampère tinha alcançado uma certa reputação como um matemático e como um químico de certa forma heterodoxo. Se ele tivesse morrido antes de setembro deste ano, seria uma figura menor na história da ciência. Foi a descoberta do eletromagnetismo por Hans Christian Oersted na primavera de 1820 que abriu um novo mundo para Ampère e lhe deu a oportunidade de mostrar toda a potência de seu método de descoberta.

1.3 A Experiência de Ørsted e seu Impacto sobre Ampère

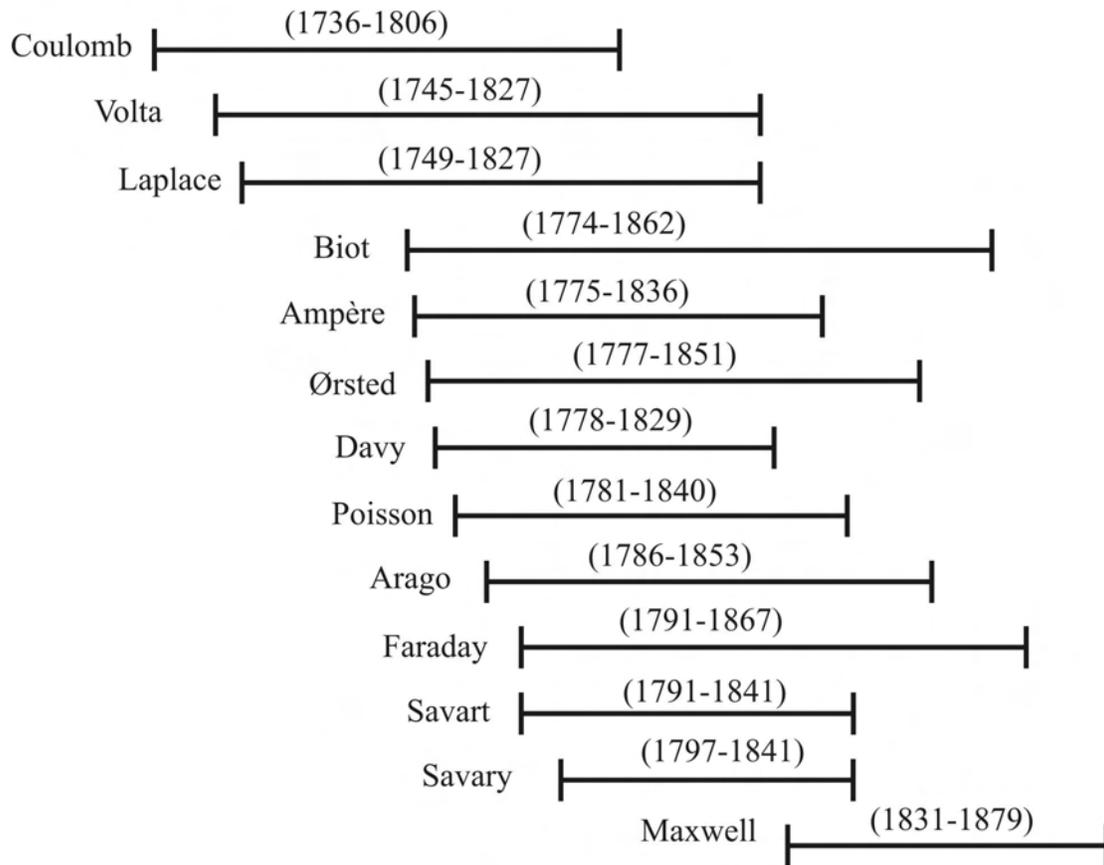


Figura 1.3: Períodos de vida de alguns dos principais cientistas mencionados nesta tese.

Em 1800 A. Volta (1745-1827) publicou um trabalho descrevendo sua invenção da pilha elétrica,² [Vol00]. Com este instrumento e com os aparelhos melhorados a partir dele passou-se a ter pela primeira vez na história uma fonte de corrente constante. Isto criou uma revolução na tecnologia, assim como no estudo teórico e experimental da eletricidade em movimento.

Em 1820 H. C. Ørsted³ (1777-1851) descobriu a deflexão de uma agulha imantada causada por um fio conduzindo uma corrente constante,⁴ [Ørs86]. Esta descoberta marca o início do *eletromagnetismo*, ou seja, do estudo sistemático da relação entre os fenômenos elétricos e magnéticos. Esta palavra foi criada por Ørsted em 1820, [Ørs98], [GG90, pág. 920] e [GG91].

Entre outras coisas Ørsted observou o seguinte, [Ørs86]:

Os terminais opostos do aparelho galvânico são unidos por um fio metálico, que, por concisão, chamaremos de *condutor de conexão* ou *fio de conexão*. Atribuiremos o nome de *conflito elétrico* ao efeito que se manifesta nesse condutor e no espaço que o cerca. A parte retilínea desse fio é colocada em posição horizontal, suspensa acima da agulha magnética, e paralela a ela. Se for necessário, o fio de conexão pode ser dobrado para que uma parte dele assuma a posição correta necessária à experiência. Nessa situação, a agulha magnética será movida, e a sua extremidade que está sob a parte do fio de conexão mais próxima ao terminal negativo do aparelho galvânico será desviada para oeste. Se a distância entre o fio de conexão e a agulha magnética não exceder 3/4 de polegada, o desvio da agulha fará um ângulo de cerca de 45°. Se a distância variar, o ângulo diminuirá à medida que a distância cresça. Além disso, o desvio depende da eficácia do aparelho. [...] Se o fio de conexão é colocado em um plano horizontal sob a agulha magnética, todos os efeitos são como no plano acima da agulha, mas em direção inversa. Pois o pólo da agulha magnética sob o qual está a parte do fio de conexão que está próximo ao terminal negativo do aparelho galvânico, desvia-se para leste. Para tornar mais fácil a memorização disso, pode-se usar a fórmula: O pólo sobre o qual entra a eletricidade negativa gira para oeste, ou para leste se entra abaixo.

Podemos ilustrar esta experiência com a Figura 1.4.

Na Figura 1.5 temos a representação da experiência com o fio sob a agulha.

Ørsted não publicou seu trabalho em nenhum periódico científico, mas redigiu-o em latim e o enviou na forma de um folheto a vários cientistas famosos em 21 de julho de 1820. Ele foi então traduzido e publicado por alguns editores de revistas científicas. Arago (1786-1853) descreveu o trabalho de Ørsted perante a Academia de Ciências de Paris em 4 de setembro de 1820. Diante da descrença generalizada, repetiu a experiência de Ørsted perante a Academia em 11 de setembro.

O motivo da descrença generalizada é que a experiência de Ørsted ia contra as idéias de simetria da época. Vamos pensar no caso em que a bússola está inicialmente em repouso apontando aproximadamente na direção Norte-Sul geográfica terrestre. Um fio retilíneo paralelo à agulha da bússola é colocado verticalmente sobre ela. Inicialmente não passa corrente no fio. O fio e a agulha definem um plano vertical. Em princípio não tem nada que privilegie um lado deste plano

²Este artigo já se encontra traduzido para o português, [MA08].

³O nome de Ørsted, em dinamarquês, é Hans Christian Ørsted, [Ørs86, Nota 2]. Depois de latinizado seu sobrenome tem aparecido de várias formas, dependendo de onde está sendo citado: Ørsted, OErsted, Oersted ou OErstedt. Neste trabalho utilizaremos a forma Ørsted, exceto quando estivermos fazendo alguma citação, quando então utilizaremos a forma como foi impressa.

⁴Recentemente fizemos uma reprodução das experiências de Ørsted com materiais de baixo custo, [CA07c].

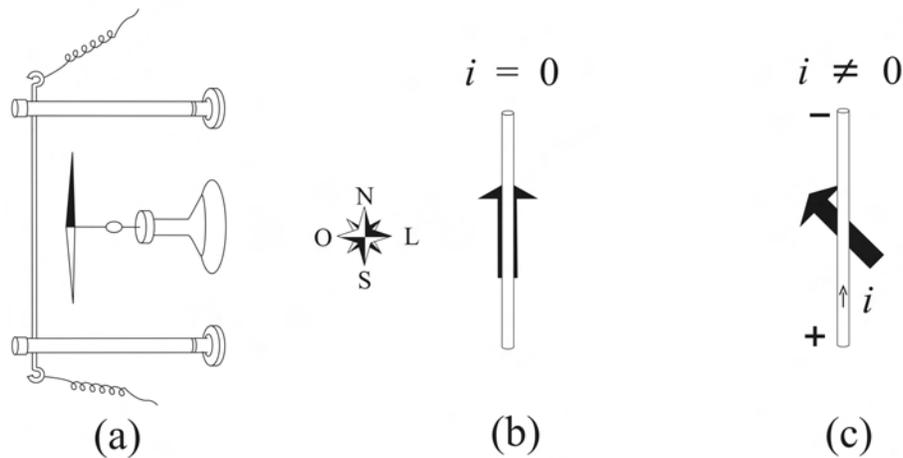


Figura 1.4: Representação da experiência de Ørsted com o fio sobre a agulha imantada. Em (a) e (b) a agulha aponta ao longo do meridiano magnético, sendo que não há corrente no fio. Em (c) temos o desvio da agulha com seu pólo Norte desviando-se para Oeste quando flui uma corrente no fio do Sul para o Norte.

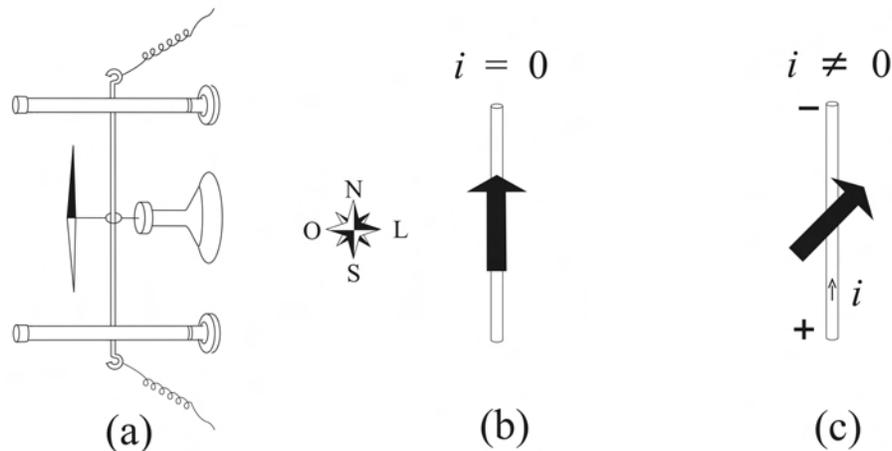


Figura 1.5: Representação da experiência de Ørsted com o fio sob a agulha imantada. Em (a) e (b) a agulha aponta ao longo do meridiano magnético, sendo que não há corrente no fio. Em (c) temos o desvio da agulha com seu pólo Norte desviando-se para Leste quando flui uma corrente no fio do Sul para o Norte.

em relação ao outro lado. Contudo, a experiência de Ørsted mostra que ao fluir uma corrente pelo fio indo do Sul para o Norte geográfico da Terra, o pólo Norte da agulha imantada deixa o plano vertical inicial, ficando inclinado para Oeste em relação a ele. Ou seja, a agulha vai apontar para algum lugar entre o Norte e o Oeste da Terra, dependendo da distância do centro da agulha ao fio retilíneo, com o pólo Sul da agulha imantada indo para o lado oposto. Aparentemente há uma quebra de simetria aqui. Seria mais natural se o pólo Norte da agulha fosse atraído ou repelido pelo fio, mantendo-se no mesmo plano vertical. Já este desvio privilegiado para um dos lados do plano não é tão natural, sendo que foi isto que chamou a atenção dos cientistas da época. Se o fio estiver abaixo da agulha, os pólos da agulha vão para lados opostos em relação aos lados para onde iam no caso do fio estar acima dela.

É a partir da apresentação por Arago da experiência de Ørsted em 4 e 11 de setembro de

1820 que André-Marie Ampère (1775-1836) passa a trabalhar intensamente sobre este tema. Ele supõe a existência de correntes elétricas no interior dos ímãs e da Terra. Interpreta a experiência de Ørsted e todos os fenômenos magnéticos já conhecidos em termos de uma interação entre elementos de corrente. Se este fosse o caso, ele poderia explicar a partir de um único princípio (ou seja, a força entre condutores com corrente) tanto os fenômenos já conhecidos há séculos de interação entre ímãs, quanto o fenômeno descoberto por Ørsted do torque exercido por um fio com corrente sobre um ímã. E mais, a partir desta hipótese previu um fenômeno novo ainda não observado por ninguém antes dele, a saber, a interação direta entre dois condutores com corrente. Ele realizou diversas experiências mostrando a existência desta interação entre fios com corrente elétrica. Para distinguir este novo conjunto de fenômenos daqueles designados por Ørsted de eletromagnéticos, Ampère criou dois nomes novos, fenômenos *eletrostáticos* e *eletrodinâmicos*. Na eletrostática devem-se incluir as atrações e repulsões usuais entre cargas elétricas em repouso relativo, enquanto que na eletrodinâmica devem-se incluir especialmente as atrações e repulsões entre fios com corrente, sem que haja necessariamente a existência de qualquer ímã nas redondezas, [Amp22d] e [Blo82, pág. 78]:

O nome de *eletromagnético*, dado aos fenômenos produzidos pelos fios condutores da pilha de Volta, só podia descrever convenientemente estes fenômenos na época em que apenas se conheciam entre estes fenômenos aqueles que o Sr. Ørsted descobriu entre uma corrente elétrica e um ímã. Creio que devo utilizar a denominação de *eletrodinâmico*, para combinar em um único nome comum todos estes fenômenos e, especialmente, para designar os fenômenos que observei entre dois condutores voltaicos. Este nome expressa a propriedade característica destes fenômenos, a saber, de serem produzidos pela eletricidade em movimento; enquanto que as atrações e repulsões conhecidas há muito tempo são os fenômenos *eletrostáticos* produzidos pela distribuição desigual da eletricidade em repouso sobre os corpos nos quais são observados estes fenômenos.

Em 1822 Ampère chegou a uma expressão matemática descrevendo uma força entre dois elementos de corrente com a qual conseguia explicar todas as suas observações, [Amp22i]. Em novembro de 1826 publicou seu trabalho de revisão mais conhecido sobre o tema, o *Théorie des Phénomènes Électro-dynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience*, [Amp26c]: *Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência*. Este trabalho também saiu publicado em 1827 nas Memórias da Academia Real de Ciências da França, [Amp23b]. Vamos chamá-la aqui simplesmente de *Théorie*. Em todas as nossas citações vamos apresentar as páginas das edições publicadas em 1826 e em 1827. A paginação desta última edição coincide com a reimpressão desta obra ocorrida em 1990, [Amp90]).

Apresentamos inicialmente o significado dos termos que aparecem na força de Ampère entre elementos de corrente. Depois analisamos detalhadamente o caminho percorrido por Ampère até chegar nesta expressão matemática. Citaremos alguns de seus artigos publicados a partir de 1820. Entre estes artigos vamos citar também a coletânea *Recueil d'observations électro-dynamiques, contenant divers mémoires, notices, extraits de lettres ou d'ouvrages périodiques sur les sciences, relatifs à l'action mutuelle de deux courans électriques, à celle qui existe entre un courant électrique et un aimant ou le globe terrestre, et à celle de deux aimans l'un sur l'autre*, que vamos chamar aqui simplesmente de *Recueil*. Esta Coletânea foi publicada originalmente em 1822. No ano seguinte Ampère reeditou este trabalho, sendo que todas as nossas citações serão desta edição de 1823, [Amp22n]. Ela inclui um trabalho de Savary que foi lido na Academia de Ciências em 3 de fevereiro de 1823, [Sav22], além de uma carta de Ampère para Faraday datada

de 18 de abril de 1823, [Amp22h], que não consta da Tabela de Conteúdo ao final da obra. Nesta edição do *Recueil* de 1823 ainda consta na capa que o ano de publicação é 1822.

Também vamos citar algumas de suas correspondências, assim como parte do material manuscrito que se encontra em 40 caixas nos Arquivos da Academia Francesa de Ciências, [Blo78]. Existem várias pastas nestas caixas, sendo elas referenciadas pelo número da caixa e pasta. Por exemplo, a *chemise* 158 do *carton* 8 se refere à pasta 158 da caixa 8, [Ampf]. Uma outra observação relevante é que alguns artigos de Ampère apareceram sem nome do autor, algumas vezes escritos na terceira pessoa. Mas sabe-se que são de Ampère por existirem manuscritos seus com o conteúdo exato destes artigos, escritos na terceira pessoa, mas com sua caligrafia. Existem até mesmo alguns de seus manuscritos que não chegaram a ser publicados mas que estão na terceira pessoa. Um exemplo é a *chemise* 156, [Ampe].

Todos os trechos entre colchetes nas citações são nossos. Eles foram colocados para facilitar a compreensão de alguns trechos ou para clarificar o significado de certos termos usados por Ampère.

Capítulo 2

A Força de Ampère e o Significado de Seus Termos

2.1 A Força de Ampère entre Elementos de Corrente

Até o início do século XIX haviam alguns ramos separados da física. Entre eles podemos citar a gravitação, a eletricidade e o magnetismo. Eles eram descritos por forças centrais que diminuía com o quadrado da distância r entre os corpos interagentes. A força gravitacional é proporcional ao produto das duas massas, m_1 e m_2 , sendo sempre atrativa. Ela é devida a Isaac Newton (1642-1727), sendo descrita em palavras em sua obra principal, o *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, conhecido também por seu primeiro nome em latim, *Principia*, de 1687. As principais obras de Newton, o *Óptica* e o *Principia*, já se encontram totalmente traduzidas para o português, [New96], [New90] e [New08]. A proporcionalidade da força gravitacional pode ser expressa matematicamente como:

$$\frac{m_1 m_2}{r^2} . \quad (2.1)$$

A lei de força entre duas cargas pontuais foi descrita por Coulomb (1736-1806) em 1785. Ela é proporcional ao produto das duas cargas, q_1 e q_2 , podendo ser atrativa (cargas de sinais opostos) ou repulsiva (cargas de mesmo sinal). Ampère costumava considerar uma força atrativa como sendo positiva e uma força repulsiva como sendo negativa. Fazendo esta suposição vem que esta proporcionalidade pode ser representada matematicamente da seguinte maneira:

$$-\frac{q_1 q_2}{r^2} . \quad (2.2)$$

A força entre pólos magnéticos foi obtida por Coulomb em 1785. Ela é proporcional ao produto das intensidades dos dois pólos magnéticos, p_1 e p_2 , podendo ser atrativa (pólos de tipos opostos) ou repulsiva (pólos de mesmo tipo). Representando o pólo Norte como positivo e o pólo Sul como negativo, esta proporcionalidade pode ser expressa como:

$$-\frac{p_1 p_2}{r^2} . \quad (2.3)$$

Já a força de Ampère entre elementos de corrente, obtida pela primeira vez com o valor final de todos os seus coeficientes em 1822, [Amp22i], apresenta uma estrutura muito mais complexa:

$$\frac{ii' ds ds'}{r^n} (\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \cos \gamma + k \cos \alpha \cos \beta) . \quad (2.4)$$

No *Théorie* esta força aparece nas seguintes formas, [Amp26c, pág. 32] e [Amp23b, Amp90, pág. 204]:

$$\frac{ii' ds ds'}{r^n} (\text{sen } \theta \text{ sen } \theta' \cos \omega + k \cos \theta \cos \theta') , \quad (2.5)$$

e

$$\frac{ii' ds ds'}{r^n} (\cos \varepsilon + h \cos \theta \cos \theta') . \quad (2.6)$$

Nestas equações as letras n , k e h são constantes cujos valores determinados por Ampère são dados por, [Amp22i], [Amp26c, págs. 32, 50, 55 e 202] e [Amp23b, Amp90, págs. 204, 232, 237 e 374]: $n = 2$, $k = -1/2$ e $h = k - 1 = -3/2$. Já as grandezas α , β e γ (ou θ , θ' e ω , respectivamente), assim como ε , são ângulos cujos significados serão discutidos a seguir. Ampère não explica em seus trabalhos o motivo de ter usado letras diferentes para designar os mesmos ângulos, como α e θ , mas sempre lhes atribui o mesmo significado.

A admiração de James Clerk Maxwell (1831-1879) pelo trabalho de Ampère e por sua força entre elementos de corrente foram expressas nestas palavras (nossa ênfase), [Max54, Vol. 2, artigo 528, pág. 175]:

A investigação experimental pela qual Ampère estabeleceu as leis da ação mecânica entre correntes elétricas é um dos feitos mais brilhantes na ciência. O conjunto de teoria e experiência parece como que se tivesse pulado, crescido e armado, do cérebro do ‘Newton da eletricidade’. Ele é perfeito na forma, e de precisão irrefutável, e *está resumido em uma fórmula a partir da qual todos os fenômenos podem ser deduzidos, e que tem de sempre permanecer como a fórmula cardeal [mais importante] da eletrodinâmica.*

Antes de mostrar o possível caminho que Ampère percorreu até chegar a esta expressão, vamos apresentar os elementos principais da sua força entre elementos de corrente. Isto vai auxiliar na compreensão da trajetória seguida por Ampère para obter esta lei e na explicação dos fenômenos magnéticos em termos da interação entre correntes elétricas.

2.2 A Concepção de Corrente Elétrica para Ampère

Logo que tomou conhecimento do trabalho fundamental de Ørsted a partir da apresentação de Arago na Academia Francesa de Ciências em 4 e 11 de setembro de 1820, Ampère passa a se dedicar integralmente a este tema. Sua excitação com as novas descobertas e sua dedicação ao assunto estão bem descritas em uma carta escrita para seu filho entre 19 e 25 de setembro de 1820, [Ampl] e [Lau36, págs. 561-562]:

[...] me arrependo muito de não ter enviado esta carta há três dias [...], mas todo o meu tempo tem sido tomado por uma circunstância importante da minha vida. Desde que escutei falar pela primeira vez da bela descoberta do Sr. Oersted, professor em Copenhagen, sobre a ação das correntes galvânicas sobre a agulha imantada, tenho pensado sobre isso continuamente, não tenho feito outra coisa que não escrever uma teoria abrangente sobre estes fenômenos e sobre todos aqueles já conhecidos sobre o ímã, e realizar as experiências indicadas por esta teoria, sendo que todas tiveram êxito e me fizeram conhecer vários fatos novos.

Esta carta é importante por diversos aspectos. Em primeiro lugar por mostrar o envolvimento total de Ampère com este tema após tomar conhecimento da experiência de Ørsted. Em segundo lugar mostra sua preocupação inicial de apresentar uma nova teoria sobre os fenômenos magnéticos e eletromagnéticos. Como veremos depois, esta teoria é toda baseada na interação entre correntes elétricas. Em terceiro lugar ela indica que o termo usado inicialmente por Ampère para descrever o que ocorre em um fio ao ligá-lo aos terminais de uma pilha voltaica é “corrente galvânica,” expressão comum na época. Ampère chega a utilizar esta expressão em outras ocasiões, [Amp20a]. Ørsted havia criado um outro nome, “conflito elétrico,” [Ørs86]. Um terceiro nome que às vezes se utilizava era o de “corrente voltaica.” O próprio Ampère utiliza o termo “voltaico” em seu primeiro artigo publicado sobre eletrodinâmica, [Amp20c], ao se referir à distinção entre as atrações e repulsões eletrostáticas usuais e às novas atrações e repulsões que estava descrevendo pela primeira vez entre condutores com corrente constante.¹ Citamos agora o trecho relevante deste artigo:

Vejamos agora a que se deve a diferença destas duas ordens de fenômenos inteiramente distintos, em que um [tipo de fenômeno] consiste na tensão e nas atrações ou repulsões conhecidas há muito tempo, e o outro [tipo de fenômeno consiste] na decomposição da água e de um grande número de outras substâncias, nas mudanças de direção da agulha [imantada] e em uma espécie de atrações e repulsões muito diferentes das atrações e repulsões elétricas comuns, as quais creio ter sido o primeiro a reconhecer e que nomearei *atrações e repulsões voltaicas*, para distinguí-las destas últimas.

Em uma errata que aparece na página 223 dos *Annales de Chimie et de Physique* de 1820 está escrito para substituir o termo “voltaicas” na frase anterior, por “das correntes elétricas.” A expressão “corrente voltaica” ainda sobrevive em alguns trechos do *Théorie*, [Amp26c, págs. 27 e 172] e [Amp23b, Amp90, págs. 199 e 344].

A partir desta época Ampère passa a usar sistematicamente a expressão “corrente elétrica” em vez de “corrente galvânica” em todas as suas publicações sobre o tema, [Amp20f]: “[...] corrente galvânica, denominação que creio que deve ser alterada para a de corrente elétrica.” Ele não foi o primeiro a usar a expressão “corrente elétrica,” já que ela aparece, por exemplo, no artigo de Volta de 1800 no qual descreve sua invenção da pilha elétrica, [Vol00] e [MA08]. Provavelmente Volta utilizou este termo por se opor à idéia de Galvani (1737-1798) de uma “eletricidade animal.” Para Volta os fenômenos observados nas experiências de Galvani e em sua pilha eram similares aos ocorridos com a descarga das garrafas de Leiden (exceto por serem constantes e duradouros, em vez de momentâneos ou de curta duração), que armazenava cargas elétricas usuais geradas por atrito. Na *chemise* 156 Ampère admite que esta expressão já era utilizada por outros pesquisadores, [Ampe]:

A própria pilha age nestas experiências como qualquer outra parte do circuito voltaico [isto é, desvia uma agulha imantada como na experiência de Ørsted], com esta única diferença, que a disposição [ou o movimento] da eletricidade que ocorre no condutor do pólo zinco [pólo positivo] ao pólo cobre [pólo negativo], existe ao contrário no interior da pilha do pólo cobre ao pólo zinco, é esta disposição que o Sr. Ampère denominou de *corrente elétrica*, conforme o uso estabelecido por outros físicos, mas sem pretender se pronunciar, ao adotar esta expressão, sobre o modo de ação da eletricidade sobre o circuito voltaico. Estando o sentido da corrente elétrica assim definido [...]

¹Este artigo já se encontra traduzido para o português, [CA07d].

Em seu primeiro artigo sobre eletrodinâmica Ampère indica o que entende por corrente elétrica. Ele começa distinguindo os fenômenos que classifica como devidos a uma “tensão elétrica,” daqueles que classifica como devidos a uma “corrente elétrica.” Na primeira categoria coloca os fenômenos usuais da eletrostática que ocorrem quando separamos cargas positivas e negativas por um meio isolante (como a atração de corpos leves por corpos carregados ou as atrações entre corpos eletrizados com cargas opostas, estando estes corpos separados pelo ar ou por algum outro meio isolante). Na segunda categoria coloca aquilo que acontece quando unimos estes corpos eletrizados com cargas opostas por um meio condutor (decomposição de substâncias químicas, deflexão de uma agulha imantada em relação ao meridiano magnético quando nas proximidades de um fio com corrente, atrações e repulsões entre condutores com corrente etc.) Afirma então o seguinte, [Amp20c] e [CA07d]:

Mas quando os dois corpos ou os dois sistemas de corpos entre os quais a ação eletromotriz se estabelece estão em comunicação através de corpos condutores entre os quais não haja outra ação eletromotriz igual e oposta à primeira, a qual manteria o estado de equilíbrio elétrico e, por conseguinte, as tensões daí resultantes, estas tensões desaparecem, ou pelo menos se tornam muito pequenas, produzindo-se os fenômenos indicados acima, que caracterizam este segundo caso. Porém, como não se alterou nada no arranjo dos corpos entre os quais se desenvolvia a ação eletromotriz, não se pode duvidar de que ela continue a agir, e, como a atração mútua de duas eletricidades, medida pela diferença das tensões elétricas que se tornou nula ou diminuiu consideravelmente, não pode mais equilibrar esta ação, geralmente se está de acordo que ela continua a levar as duas eletricidades nos dois sentidos para onde as levava anteriormente. De modo que resulta uma dupla corrente, uma de eletricidade positiva, outra de eletricidade negativa, partindo em sentidos opostos dos pontos onde a ação eletromotriz se estabelece, e indo reunir-se na parte do circuito oposta a estes pontos.

O modelo de corrente elétrica no interior de um fio adotado por Ampère é de certa forma similar ao defendido por Ørsted em seu artigo de 1820. Mas em vez da denominação “corrente elétrica,” Ørsted utilizava a expressão “conflito elétrico,” [Ørs86], [Mar86] e [Fra81, págs. 28-30: Why “Conflictus”]. Ou seja, na concepção de Ampère em cada ponto no interior de um fio com corrente existiriam dois fluxos de cargas elétricas, um de cargas positivas e outro de cargas negativas, circulando com velocidades contrárias em relação ao condutor, Figura 2.1 (a). Apesar da analogia da concepção destes dois pesquisadores, Ørsted defendia que o “conflito elétrico” também existiria fora do condutor, enquanto que para Ampère a corrente elétrica estaria confinada no interior dos fios.

2.3 O Sentido da Corrente em Termos do Movimento das Cargas

Embora Ampère tivesse suposto que em cada ponto de um condutor com corrente houvessem cargas positivas e negativas movendo-se em relação ao fio com velocidades opostas, definiu que, ao se referir ao *sentido da corrente*, estaria sempre se referindo às cargas positivas, [Amp20c] e [CA07d]:

E como mencionarei freqüentemente os dois sentidos opostos em que se movem as duas eletricidades, subentenderei a cada vez que aparecer esta questão, para evitar

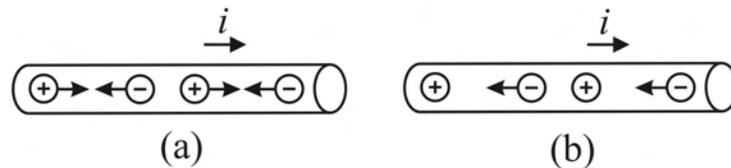


Figura 2.1: (a) Para Ampère em um fio com corrente existiriam cargas positivas e negativas deslocando-se em sentidos contrários em relação ao fio. (b) Concepção moderna da corrente no interior de um fio metálico com os íons positivos parados em relação à rede cristalina e apenas com os elétrons negativos deslocando-se em relação ao fio.

uma repetição fastidiosa, que vinculada às palavras *sentido da corrente elétrica* tem-se [o sentido de movimento da] *eletricidade positiva*.

Este sentido da corrente elétrica para Ampère está representado na Figura 2.1 (a).

Na época não se conhecia a existência dos elétrons e também não se supunha como hoje que em uma corrente metálica usualmente apenas as cargas negativas se deslocam em relação ao condutor. De qualquer forma é esta convenção empregada pela primeira vez por Ampère que é adotada até os dias atuais. Isto é, mesmo hoje em dia o sentido da corrente é entendido como sendo o sentido oposto ao movimento das cargas negativas, assim como na Figura 2.1 (b).

Ampère estabeleceu uma regra para obter o sentido da corrente elétrica utilizando uma bússola colocada em suas proximidades, como na experiência de Ørsted. Sua regra é a seguinte, [Amp20c] e [CA07d]:

O eletrômetro corriqueiro indica quando há tensão e a intensidade desta tensão. Fal-tava um instrumento que indicasse a presença da corrente elétrica em uma pilha ou em um condutor, assim como sua energia e direção. Este instrumento existe hoje; é sufi-ciente que a pilha ou uma porção qualquer do condutor seja colocada horizontalmente perto da direção do meridiano magnético [terrestre], e que um aparelho semelhante a uma bússola, que difere apenas pelo uso que lhe destinamos, seja posto sobre a pilha, ou mesmo abaixo ou acima desta porção do condutor. Enquanto existir qualquer interrupção no circuito, a agulha imantada permanece na sua situação ordinária [ao longo do meridiano magnético]; mas ela se afasta desta situação logo que a corrente se estabelece, tanto mais quanto maior for a energia [da pilha], e ela nos fornece a direção [da corrente] de acordo com este fato geral: se nos imaginarmos dispostos na direção da corrente, de modo que a corrente esteja dirigida dos pés à cabeça do observador, e que este tenha a face voltada para a agulha; é constantemente para a sua esquerda que a ação da corrente afastará de sua posição original a extremidade [da agulha] que se dirige para o Norte [geográfico terrestre], e que chamarei sempre de *pólo austral da agulha imantada* [pólo Norte da agulha], porque é o pólo homólogo ao pólo [magnético] austral da Terra. É isto que exprimirei mais resumidamente, dizendo que o pólo austral da agulha é levado para a esquerda da corrente que age sobre a agulha. Penso que, para distinguir este instrumento do eletrômetro usual, deve-se lhe dar o nome de *galvanômetro*,² e que convém empregá-lo em todas as ex-periências sobre correntes elétricas, da mesma forma que se adapta habitualmente

²Embora a palavra “galvanômetro” tenha sido criada por Ampère em seu artigo de 1820, [Amp20c] e [CA07d], ele não chegou a construir nenhum aparelho que de fato indicasse quantitativamente a intensidade da corrente elétrica utilizando a deflexão de uma bússola. Os primeiros galvanômetros só foram construídos por Nobili (1784-

um eletrômetro às máquinas elétricas, a fim de ver a cada instante se existe corrente e qual é a sua energia.

Este pequeno observador imaginado por Ampère (colocado ao longo do fio e olhando para a bússola, com a corrente entrando por seus pés e saindo por sua cabeça) foi chamado algumas vezes de “observador de Ampère,” ou “homenzinho de Ampère.”

Para entender esta regra devemos nos lembrar inicialmente da experiência de Ørsted. Quando a agulha estava sob o fio, Figura 1.4, o pólo Norte da agulha girava para Oeste com a corrente no fio fluindo no sentido indicado nesta Figura. Quando a agulha estava sobre o fio, Figura 1.5, o pólo Norte da agulha girava para Leste. Ørsted havia dado a seguinte regra para saber a direção de desvio da agulha: “O pólo sobre o qual entra a eletricidade negativa gira para oeste, ou para leste se entra abaixo,” [Ørs86]. Já Ampère introduz seu observador colocado entre o fio e a agulha, de costas para o fio e olhando para a agulha, com a corrente entrando por seus pés e saindo por sua cabeça. Na Figura 2.2 (a) temos este observador acima da agulha e abaixo do fio, enquanto que em (b) o observador está sobre o fio e abaixo da agulha.

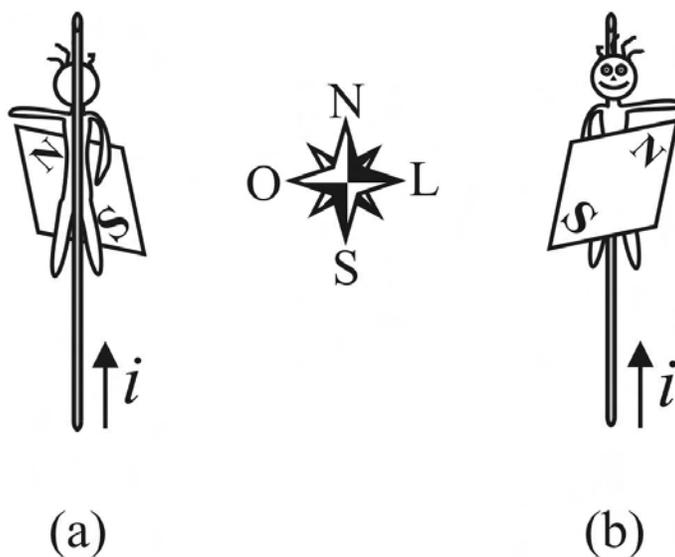


Figura 2.2: Representação do observador de Ampère na experiência de Ørsted. Nos dois casos o observador está entre o fio e a agulha. Em (a) a agulha está abaixo do fio, situação análoga à da Fig. 1.4, enquanto que em (b) ela está acima do fio, situação análoga à da Fig. 1.5. A agulha aponta na direção Norte-Sul quando não passa corrente pelo fio colocado paralelo a ela. Quando passa corrente no fio vem nos dois casos que o pólo Norte da agulha se desvia para o lado esquerdo do observador.

Quando não flui corrente no fio a agulha se orienta ao longo do meridiano magnético devido à influência da Terra. O pólo Norte da agulha aponta aproximadamente para o pólo Norte geográfico terrestre. Ao passar corrente pelo fio vem que a agulha se desvia desta direção original.

1835) em 1825-1830 seguindo uma sugestão de Ampère, e por Pouillet (1790-1868) em 1837 utilizando uma bússola de tangentes, [Whi34], [Blo82, pág. 73] e [LA98]. Antes de utilizar esta palavra Ampère havia empregado a expressão “galvanoscópio,” [Amp20a].

Nos dois casos o pólo Norte da agulha imantada se desvia para o lado esquerdo do observador de Ampère quando a corrente flui pelo fio indo dos pés à cabeça do observador. Esta é a regra mnemônica que Ampère vai utilizar em todos os seus trabalhos.

Este observador aparece na *chemise* 156, [Ampe], Fig. 2.3. Acreditamos que esta seja a primeira representação deste observador por Ampère.

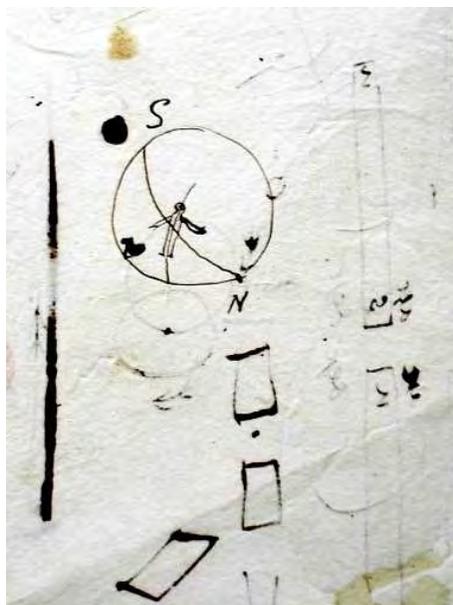


Figura 2.3: Representação do observador de Ampère, [Ampe].

Para entender esta representação de Ampère fizemos a Fig. 2.4. A agulha imantada de uma bússola comum pode girar livremente ao redor de seu eixo vertical passando pelo centro da agulha. Ao ser colocada em uma orientação arbitrária em relação à Terra e solta do repouso, ela é orientada pelo magnetismo terrestre. Ao atingir o equilíbrio o pólo Norte da bússola (ou seu pólo austral, na denominação utilizada por Ampère) aponta aproximadamente para o Norte geográfico terrestre, 2.4.

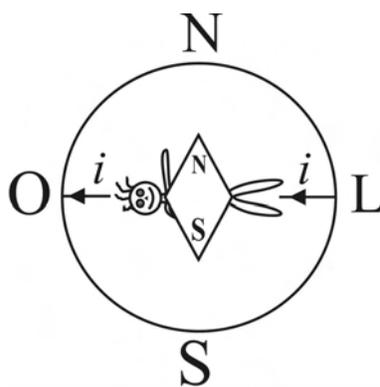


Figura 2.4: No equilíbrio o pólo Norte de uma bússola aponta aproximadamente para o pólo Norte geográfico terrestre. Observador de Ampère deitado de costas sobre a Terra e vendo a agulha imantada acima dele.

A experiência de Ørsted mostrou a orientação de uma agulha imantada por um fio com corrente. Ampère passa então a interpretar a orientação usual de uma bússola devido ao mag-

netismo terrestre como sendo devida a correntes elétricas fluindo no interior e na superfície da Terra. Apresenta então a regra que acabamos de mencionar para encontrar o sentido das supostas correntes elétricas terrestres. Elas iriam de Leste para Oeste. Com isto se um observador estivesse deitado de costas sobre a Terra, olhando para uma bússola colocada acima dele, veria que no equilíbrio o pólo Norte da agulha apontaria ao longo de seu braço esquerdo, ou seja, para o pólo Norte geográfico terrestre. Nesta posição as correntes elétricas terrestres entrariam por seus pés e sairiam por sua cabeça, Fig. 2.4.

Esta regra de Ampère é a precursora da regra da mão direita ou da regra do parafuso utilizadas hoje em dia nos livros didáticos de eletromagnetismo para indicar a direção do campo magnético criado por um condutor com corrente. Ampère utilizava esta regra para estabelecer o sentido das correntes que supunha existirem no interior dos ímãs e na Terra. Descrição de Ampère de seu observador, [Amp20f, págs. 202-203]:

A primeira reflexão que fiz quando desejei procurar as causas dos novos fenômenos descobertos pelo Sr. OErsted, foi que a ordem pela qual se descobrem dois fatos não interfere em quaisquer conclusões a que se possa chegar a partir das analogias que eles apresentam. Podíamos supor que antes de saber que a agulha imantada assume uma direção constante do Sul ao Norte [devido à presença do magnetismo terrestre], tivéssemos conhecido inicialmente a propriedade de que a agulha é girada por uma corrente elétrica [retilínea] em uma situação [em que o eixo desta agulha fica] perpendicular à esta corrente, de modo que o pólo austral [Norte] da agulha fosse levado à esquerda da corrente [em relação a um homem paralelo à corrente que entra pelos seus pés e sai por sua cabeça, de costas para a corrente e olhando a agulha da bússola à sua frente], e que se descobrisse posteriormente a propriedade que ela tem de girar constantemente em direção ao Norte [geográfico terrestre, devido ao magnetismo terrestre] a sua extremidade que era levada para o lado esquerdo da corrente. [Se esta fosse a seqüência histórica das descobertas,] a idéia mais simples e que se apresentaria imediatamente a quem quisesse explicar a direção constante do Sul ao Norte, não seria supor [a existência] na Terra uma corrente elétrica, [fluindo] em uma direção tal que o Norte [geográfico terrestre] se encontrasse à esquerda de um homem que, deitado sobre a superfície da Terra de modo a ter a face voltada para a agulha, recebesse esta corrente indo na direção dos seus pés à sua cabeça, concluindo disto que [esta corrente terrestre] ocorre de Leste para Oeste, em uma direção perpendicular ao meridiano magnético?

2.4 Os Significados da Expressão “Sentido da Corrente”

Na Seção 2.3 foi visto que Ampère estabeleceu uma convenção clara para o *sentido* de uma corrente elétrica em termos da direção de movimento das cargas positivas que supunha se deslocarem em relação ao fio com corrente. Apesar disto, Ampère utilizava esta palavra com quatro significados distintos, o mesmo ocorrendo com outros pesquisadores da época e até nos dias de hoje. O significado adotado dependia do contexto. Podemos ilustrar estes quatro significados com a Figura 2.5.

Temos uma corrente constante ao longo de um fio metálico ligado aos terminais positivo e negativo de uma bateria. Os pontos A até I estão no interior do fio, enquanto que o ponto J está no interior da bateria. As setas indicam a direção da corrente ou do movimento das cargas positivas que Ampère supunha se deslocarem em condutores. Isto é, a parte traseira de cada

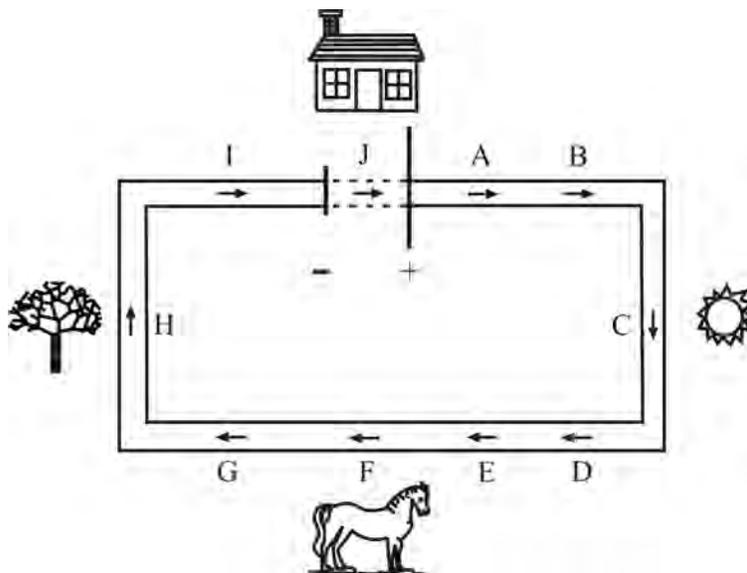


Figura 2.5: Uma corrente constante ao longo de um fio metálico resistivo ligado a uma bateria.

seta indica a posição de uma suposta carga positiva em um tempo t_0 , enquanto que a ponta de cada seta indica a posição da mesma carga um pouco depois, em $t_0 + \Delta t$. Uma figura como esta, mas sem os corpos externos ao circuito, aparece em uma obra de Ampère e Babinet (1794-1872), com setas apenas nos pontos J e F , Fig. 2.6, [AB22, pág. 4]. O pólo positivo da bateria é indicado nesta obra de Ampère e Babinet pelo símbolo Z do zinco, enquanto que o pólo negativo é indicado pelo símbolo C do cobre.

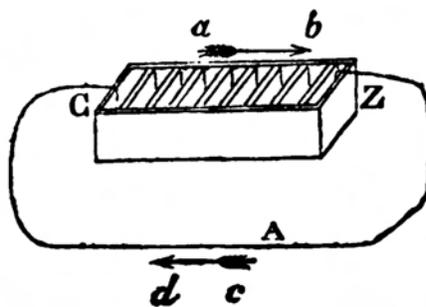


Figura 2.6: Experiência com a qual Ampère concluiu que a corrente flui em circuitos fechados. Isto é, não apenas ao longo do fio condutor mas também no interior das pilhas e baterias, [AB22, pág. 169].

O significado mais freqüente da expressão “sentido da corrente elétrica,” ou “sentido do movimento da eletricidade positiva,” que Ampère utilizava, se referia implicitamente a corpos externos como a árvore e o Sol da Fig. 2.5. Pode-se dizer, por exemplo, que as correntes nos pontos I , J , A e B fluem no mesmo sentido, já que vão da árvore para o Sol, enquanto que as correntes em D , E , F e G fluem em sentido contrário, do Sol para a árvore. Com esta interpretação as correntes em C e H estariam em direções ortogonais às anteriores, com o sentido da corrente em C indo da casa para o cavalo, sendo o oposto do sentido da corrente em H , indo do cavalo para a casa. Ampère se refere a este significado ao dizer, por exemplo, que um elemento de corrente em A repele um elemento de corrente em E pelo fato das correntes fluírem em sentidos contrários.

Um exemplo desta utilização aparece em seu primeiro artigo publicado, [Amp20c] e [CA07d]:

Observei, então, que, passando ao mesmo tempo uma corrente elétrica em cada uma destas partes, elas se atraíam mutuamente quando as duas correntes estavam no mesmo sentido e que se repeliam quando fluíam em direções opostas.

Outro significado que Ampère dava à expressão “sentido da corrente elétrica,” ou “sentido do movimento da eletricidade positiva,” era se a carga positiva ia do terminal positivo para o terminal negativo da bateria, ou se fazia o caminho contrário. Uma das primeiras experiências importantes de Ampère realizada no início de setembro de 1820 foi para estabelecer o sentido da corrente não apenas em um condutor ligado às extremidades de uma pilha voltaica, mas também no interior da própria pilha, [Amp20c] e [CA07d]:

O primeiro uso que fiz deste instrumento [bússolas perto de um condutor ligado a uma pilha voltaica] foi o de constatar que a corrente que existe dentro da pilha voltaica, da extremidade negativa para a extremidade positiva, tinha sobre a agulha imantada a mesma influência que possui a corrente do condutor, que vai, ao contrário, da extremidade positiva para a negativa.

É bom ter para isso duas agulhas imantadas, uma disposta sobre a pilha e outra acima ou abaixo do condutor. Vê-se o pólo austral de cada agulha desviar-se para a esquerda da corrente junto da qual está colocada a agulha; de modo que quando a segunda agulha está acima do condutor, ela é desviada do lado oposto daquele que tende a agulha posta sobre a pilha, porque as correntes têm direções opostas nestas duas porções do circuito. As duas agulhas são, ao contrário, levadas para o mesmo lado, permanecendo aproximadamente paralelas entre elas, quando uma está acima da pilha e a outra abaixo do condutor. Logo que se interromper o circuito, elas retornam imediatamente, nos dois casos, às suas posições originais.

Ou seja, no caso da Figura 2.5 teríamos então com esta interpretação que as correntes de A até I fluem no mesmo sentido, do terminal positivo para o terminal negativo da bateria, enquanto que a corrente em J no interior da bateria fluiria em sentido contrário, do terminal negativo para o terminal positivo.

Esta experiência de Ampère é muito importante. Para entendê-la deve-se lembrar que a bateria que ele estava utilizando é do tipo das pilhas de calha ou de tina (“trough battery” em inglês, ou “pile à auges” em francês), Fig. 2.7. Estas baterias resultaram de um desenvolvimento da pilha de Volta realizado por William Cruickshank (falecido ao redor de 1811) em julho e setembro de 1800, [Nei96]. Enquanto que as pilhas originais de Volta eram verticais e secavam rapidamente, as de Cruickshank eram horizontais. Eram baterias muito poderosas nas quais as placas de cobre e de zinco de mesmo tamanho eram soldadas entre si. Estas placas bi-metálicas eram colocadas verticalmente em um recipiente horizontal de madeira coberto com uma resina isolante, com os espaços entre as placas preenchidos por uma solução diluída de ácido sulfúrico, [Mey72, págs. 41-2, Evolution of the battery and discoveries with electric currents]. A seção reta de uma bateria destas podia ter, por exemplo, uns 20 cm por 20 cm, com o comprimento podendo ser de uns 60 cm. É então simples colocar uma pequena bússola ou agulha imantada sobre esta bateria para verificar seu desvio em relação ao meridiano magnético terrestre quando flui uma corrente pelo interior da bateria. Com esta experiência de Ampère se obtém o sentido da corrente não apenas no condutor externo ligando os pólos da bateria, mas também no interior da bateria. Com isto se conclui que ao longo do condutor ela flui do terminal positivo da bateria

para o terminal negativo, enquanto que dentro da pilha ela flui do terminal negativo para o terminal positivo. Esta não é uma conclusão trivial. Vamos supor que a bateria fosse substituída por um capacitor carregado composto de duas placas paralelas, por exemplo. Ao ligarmos estas placas por um condutor de grande resistência ligando as faces internas do capacitor enquanto que, simultaneamente, as faces externas do capacitor são ligadas por um outro condutor de grande resistência, viria que as correntes nos dois condutores fluiriam da placa positiva para a placa negativa. Ou seja, no condutor interno deste exemplo a corrente fluiria no sentido contrário ao da corrente no interior da pilha. A conclusão que se tira então da descoberta de Ampère que no interior de uma bateria ligada a um circuito a corrente flui do pólo negativo para o positivo é de que estão atuando forças de origem não eletrostática no interior da bateria, ver [VF80].

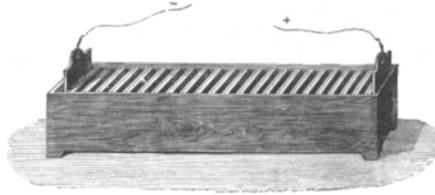


Figura 2.7: Pilha de tina ou de calha.

O terceiro significado que às vezes ele utilizava para a palavra “sentido” tem a ver com a corrente fluir em um circuito fechado. Podemos dizer que estão no mesmo sentido todas as correntes que fluem no sentido horário (ou indo da árvore para a casa, depois para o Sol, para o cavalo e novamente para a árvore na Figura 2.5), e em sentido contrário as correntes que fluem na direção oposta, isto é, no sentido anti-horário. Com esta interpretação temos que a corrente em todos os pontos da Figura 2.5 fluem no mesmo sentido. Ampère utilizava este significado, por exemplo, ao se referir ao movimento circular contínuo de um fio com corrente ao redor de um pólo de um ímã, ou do pólo de um ímã ao redor de um fio com corrente, fenômenos descobertos por Faraday (1791-1867), [Amp22f, 203-205] ou [Amp85d, págs. 241-243]. Em particular, [Amp26b, págs. 434-435]: “Se supomos o fio fixo e o ímã móvel, o mesmo raciocínio prova que o ímã deve sempre girar no mesmo sentido ao redor do fio, desde que a corrente elétrica não forme um circuito fechado de forma invariável.” Também utilizava este significado ao possível movimento circular de um arco de círculo ao redor do eixo deste círculo, [Amp26c, pág. 24] e [Amp23b, Amp90, pág. 196], ou no movimento de uma lâmina ao redor de um arco de círculo quase completo *CBA*, [Amp26c, pág. 48] e [Amp23b, Amp90, pág. 220]: “Vê-se então esta lâmina girar no sentido *CBA*.” No que se refere especificamente ao sentido da corrente elétrica, Ampère utiliza este significado ao falar da atração ou da repulsão entre duas espiras circulares que estão lado a lado no mesmo plano, com esta força dependendo dos sentidos das correntes, [Amp85k, pág. 223]:

Com efeito, é fácil de ver de acordo com as leis da ação mútua entre duas correntes elétricas, tais como as [leis] que estabeleci, as correntes circulares que giram no mesmo sentido tendem a se repelir e a mudar mutuamente suas direções quando elas estão em um mesmo plano [...]

O quarto significado da expressão “sentido da corrente” se refere a ela estar se aproximando ou se afastando de um ponto, de uma reta ou de um plano. Vamos pensar no ponto J da Figura 2.5 como sendo um ponto fixo no interior da bateria. Podemos dizer que as correntes em A e B estão no mesmo sentido, se afastando de J , enquanto que a corrente em I estaria em sentido contrário, se aproximando de J . Neste caso a corrente que está exatamente sobre J não estaria

se afastando nem se aproximando deste ponto. Podemos também pensar em uma reta ligando dois pontos fixos J e F , um no interior da bateria e outro no interior do fio, ou então em um plano perpendicular ao circuito e passando por J e F . Neste caso as correntes em A , B e G estariam no mesmo sentido, se afastando da reta JF , enquanto que as correntes em I , D e E estariam em sentido contrário, se aproximando da reta JF . Já as correntes em J , C , F e H não estariam se aproximando nem se afastando desta reta JF . Ampère utiliza este significado ao se referir a um princípio de simetria para estabelecer se a força entre dois elementos de corrente em uma certa configuração específica é de atração, de repulsão ou nula. Exemplo de como Ampère utiliza este significado, [Amp22], pág. 210]:

Considerando então duas pequenas porções de correntes elétricas, uma no plano, e a outra dirigida perpendicularmente a este plano, me foi fácil de ver que, em primeiro lugar, quando esta última porção está acima e abaixo do plano, os dois sentidos nos quais ela pode ser percorrida pela corrente elétrica são distintos entre si por esta circunstância que, em um caso, esta corrente se aproxima do plano e, no outro caso, ela se afasta do plano; [...]

2.5 A Direção da Força e Seu Sinal Algébrico

Do início ao fim de suas pesquisas eletrodinâmicas Ampère sempre assumiu que a força entre dois elementos de corrente se dá ao longo da reta que une seus centros, seguindo o princípio de ação e reação. Em um artigo de 1820, por exemplo, afirma o seguinte, [Hof87, pág. 326, nota 47], [Hof96, págs. 253, 386 e 397] e [Amp20d, 546]:

O fim a que se propõe o Sr. Ampère nesta memória, é o de mostrar que todos os fatos relativos seja à ação mútua entre dois ímãs, seja à ação mútua entre um condutor voltaico e um ímã, descoberta pelo Sr. OErstedt, seja à ação mútua entre dois condutores que ele foi o primeiro a observar, podem ser deduzidos de uma única causa, que consiste em uma força algumas vezes atrativa, algumas vezes repulsiva entre as porções infinitamente pequenas daquilo que ele chamou de correntes elétricas, mas agindo sempre ao longo da linha que liga seus centros; [sendo esta] a única direção na qual o autor pensa que se pode supor que se exerce uma força atrativa ou repulsiva, de qualquer natureza que ela seja. [...] Mas, como nota o Sr. Ampère em sua memória, a maneira com a qual ele explica a ação dos condutores voltaicos sobre os ímãs, oferece a vantagem dupla, [...] 2º. De admitir apenas forças atrativas ou repulsivas entre dois pontos ao longo da linha que liga estes dois pontos.

Uma afirmação análoga encontra-se na *chemise 162*, publicada pela primeira vez por Joubert em 1885, [Ampg] e [Amp85f, págs. 134-135].

Na época ainda não existia notação vetorial, que só passa a existir de maneira mais completa por volta de meados do século XIX, [Cro85]. Para caracterizar uma força atrativa Ampère a considerava como sendo positiva, enquanto que uma força repulsiva era considerada como negativa. As primeiras tentativas de Ampère para obter uma expressão matemática descrevendo a interação entre dois elementos de corrente encontram-se na pasta 158 da caixa 8 nos Arquivos da Academia de Ciências de Paris, [Ampf]. Blondel considera que este manuscrito não datado foi redigido provavelmente na segunda quinzena de outubro de 1820, [Blo78]. Contudo, ele não foi publicado na época nem comunicado aos membros da Academia. Sua primeira publicação

parcial ocorreu apenas no Apêndice III deste artigo de Blondel. Neste manuscrito ele afirma: “A repulsão deve ser considerada como uma atração negativa.” Afirmações no mesmo sentido aparecem no *Théorie*: “Tomaremos [a expressão da força entre dois elementos de corrente] com o sinal + quando as duas correntes, indo no mesmo sentido, se atraem, e com o sinal – no caso contrário,” [Amp26c, pág. 28] e [Amp23b, Amp90, pág. 200]; “É isto que expressa o sinal – que se encontra diante da expressão geral [...] desta força, de acordo com o uso segundo o qual se consideram as atrações como forças positivas e as repulsões como forças negativas,” [Amp26c, pág. 131] e [Amp23b, Amp90, pág. 303].

2.6 A Intensidade da Corrente e o Tamanho do Elemento de Corrente

Como vimos nas Eqs. (2.5) e (2.6), no *Théorie* Ampère apresentou sua força entre dois elementos de corrente como sendo proporcional ao produto ids com $i'ds'$. Estas grandezas são definidas claramente da seguinte maneira, [Amp26c, págs. 27-28] e [Amp23b, Amp90, págs. 199-200]:

Agora vou explicar como se deduz rigorosamente destes casos de equilíbrio a fórmula pela qual representei a ação mútua de dois elementos de corrente voltaica, mostrando que esta é a única força que age seguindo a linha reta que une os centros [destes elementos] que pode concordar com os dados empíricos. Inicialmente é evidente que a ação mútua de dois elementos de correntes elétricas é proporcional aos seus comprimentos. Pois, ao supor [os elementos de corrente] divididos em partes infinitamente pequenas iguais à sua medida comum, todas as atrações e repulsões destas partes, podendo ser consideradas como direcionadas ao longo de uma mesma linha reta, necessariamente se somam. Esta mesma ação também deve ser proporcional às intensidades das duas correntes. Para exprimir numericamente a intensidade de uma corrente qualquer, suponha que se escolheu uma outra corrente arbitrária para termo de comparação, que se tomou dois elementos iguais em cada uma destas correntes, que se procurou a razão das ações que [estes elementos] exercem à mesma distância sobre um mesmo elemento de uma outra corrente qualquer, na situação em que ele [o terceiro elemento] é paralelo a eles [isto é, paralelo aos dois primeiros elementos], e [na situação] em que sua direção [do terceiro elemento] é perpendicular às linhas retas que unem seu centro com os centros dos outros dois elementos. Esta razão será a medida de uma das intensidades [de corrente], considerando a outra como unidade [isto é, considerando a outra corrente como tendo intensidade igual a um].

Designemos então por i e i' as razões das intensidades das duas correntes dadas em relação à intensidade da corrente assumida como unidade, e por ds e ds' os comprimentos dos elementos que consideramos em cada um destes [elementos de corrente]. A ação mútua entre eles — quando estiverem perpendiculares à linha que une seus centros, paralelos entre si e situados a uma distância unitária um do outro — será expressa por $ii'dsds'$. Tomaremos [esta expressão] com o sinal + quando as duas correntes, indo no mesmo sentido, se atraem, e com o sinal – no caso contrário.

Se quisermos relacionar a ação destes dois elementos de correntes com o peso, consideraríamos como unidade de força o peso da unidade de volume de uma matéria conveniente. Mas neste caso a corrente assumida como unidade não será mais arbitrária. Ela deverá ser tal que a atração entre dois de seus elementos ds e ds' ,

situados como acabamos de dizer, possa sustentar um peso que esteja para a unidade de peso assim como $dsds'$ está para 1. Uma vez determinada esta corrente, o produto $ii'dsds'$ designará a razão da atração de dois elementos de intensidades quaisquer, sempre na mesma posição, pelo peso que tivermos escolhido como unidade de força.

Ampère parece ter sido o primeiro a expressar em palavras a idéia de que a corrente em um fio é proporcional à quantidade de carga que atravessa a seção reta do fio por unidade de tempo, ou de que ela é proporcional ao produto entre o valor da carga elétrica que está sendo transportada e a velocidade com que esta carga se desloca em relação ao fio. Hoje em dia é comum expressar-se estas duas relações matematicamente por $i = dq/dt$ e com ids sendo substituída por qv , respectivamente, onde v é a velocidade da carga q em relação ao fio. Em um manuscrito relacionado a uma apresentação que fez perante a Academia de Ciências em 4 de dezembro de 1820, Ampère afirma o seguinte, [Ampg]:

g e h dependem apenas da [quantidade de] eletricidade que passa [através da seção reta do condutor] em tempos iguais, a quantidade compensando a velocidade. É a quantidade de movimento desde que a passagem esteja completamente livre, isto é, que o condutor seja suficientemente grande [em seção reta].

Já em seu primeiro artigo publicado Ampère menciona, [Amp20c] e [CA07d]:

As correntes das quais falo vão acelerando-se até que a inércia dos fluidos elétricos e a resistência que sofrem pela imperfeição [presente] mesmo nos melhores condutores, equilibrem-se com a força eletromotriz, após isto elas continuam indefinidamente com uma velocidade constante enquanto esta força conservar a mesma intensidade; mas cessam sempre no momento em que o circuito é interrompido.

Nem sempre Ampère foi tão claro. Inicialmente chamava ids de g e $i'ds'$ de h , mas muitas vezes se expressava de maneira confusa. Em particular, confundia nos seus textos o comprimento do elemento de corrente com a intensidade da corrente, [Hof96, págs. 249-253]. Em uma de suas primeiras publicações afirma o seguinte, [Amp20f]:

Para se ter uma idéia nítida desta lei, é necessário conceber no espaço uma linha que representa em grandeza e direção a resultante de duas forças que são representadas similarmente por duas outras linhas, e supor, nas direções destas três linhas, três porções infinitamente pequenas de correntes elétricas, cujas intensidades sejam proporcionais aos seus comprimentos. Esta lei consiste em que a pequena porção de corrente elétrica, direcionada de acordo com a resultante, exerce, em qualquer direção que seja, sobre uma outra corrente ou sobre um ímã, uma ação atrativa ou repulsiva igual à que resultaria, na mesma direção, da união das duas porções de correntes direcionadas de acordo com as componentes.

Seria difícil para alguém da época compreender claramente o que Ampère queria dizer com a intensidade da corrente elétrica ser proporcional ao seu comprimento. Gillet de Laumont (1747-1834) foi um dos que tentou esclarecer este ponto. Em um artigo publicado em 1820, ao fazer um resumo das pesquisas de Ampère, Laumont substituiu a expressão anterior por, [Lau20]:

Quando se quer ter uma idéia nítida da lei que o Sr. Ampère expôs em seu trabalho, é necessário conceber no espaço uma linha representando, em grandeza e direção, a resultante de duas forças que são representadas similarmente por duas outras linhas, e supor, nas direções destas três linhas, três correntes elétricas cujas forças atrativas ou repulsivas são proporcionais aos seus comprimentos.

Ou seja, Laumont esclarece que as forças entre os elementos de corrente é que são proporcionais aos seus comprimentos, mas não as intensidades das correntes. O próprio Ampère passa a utilizar uma frase similar em 1823. Ele substitui a expressão “cujas intensidades sejam proporcionais aos seus comprimentos,” por “cujas forças atrativas ou repulsivas são proporcionais aos seus comprimentos,” [Amp22j, págs. 212-213] e [Amp85i, pág. 248-249].

A substituição das grandezas g e h por ids e $i'ds'$ ocorre pela primeira vez no artigo fundamental de Ampère no qual obtém o valor final da força entre dois elementos de corrente, [Amp22i]: “[...] as intensidades de ação de duas porções pequenas de condutores que chamei de g e h na nota do *Journal de Physique*, serão representadas aqui, devido a seus comprimentos serem ds e ds' , por ids e $i'ds'$, [...]” Como vimos há pouco, no *Théorie* Ampère designa “por i e i' as razões das intensidades das duas correntes dadas em relação à intensidade da corrente assumida como unidade,” [Amp26c, pág. 131] e [Amp23b, Amp90, pág. 303]. Vemos duas possibilidades na escolha da letra i para representar a intensidade da corrente elétrica. A primeira é que esta é a letra inicial da palavra “intensidade.” A outra possibilidade é que anteriormente ele chamava as intensidades das correntes por g e h , embora ainda confundindo ou misturando a intensidade dos elementos de corrente com seus comprimentos. Como a próxima letra do alfabeto depois de g e h é a letra i , Ampère pode ter escolhido esta letra para representar a intensidade da corrente, representando por ds seu comprimento infinitesimal. De qualquer forma esta escolha de Ampère do símbolo i como representando a intensidade da corrente elétrica é adotada até hoje em quase todos os livros que tratam do eletromagnetismo.

Vale ainda mencionar que tanto para Ampère quanto nos dias de hoje a grandeza i é sempre positiva ou nula, mas nunca negativa. O mesmo já não ocorre com as cargas elétricas ou com os pólos magnéticos, que são tratados como grandezas positivas ou negativas. Mesmo hoje em dia quando se assume que a corrente nos condutores metálicos usuais é devida apenas ao movimento dos elétrons de condução, que são cargas negativas, ainda se adota a convenção de que $i > 0$.

2.7 A Distância entre os Dois Elementos

Em todos os seus trabalhos Ampère representava a distância entre dois elementos de corrente infinitesimais por r . Como estes elementos não são pontuais mas possuem um certo comprimento, mesmo que infinitesimal, ele precisava especificar como entendia esta distância. No *Théorie* isto é feito da seguinte forma, [Amp26c, pág. 28] e [Amp23b, Amp90, pág. 200]:

Posto isto, ao considerar-se dois elementos dispostos de uma maneira qualquer, sua ação mútua dependerá de seus comprimentos, das intensidades das correntes das quais eles fazem parte, e de suas respectivas posições. Pode-se determinar esta posição por meio do comprimento r da linha reta que une seus centros, [...].

Afirmações análogas aparecem em seus trabalhos anteriores.

2.8 Os Ângulos que Aparecem na Força de Ampère

Um ponto importante a ser enfatizado aqui é que para Ampère as grandezas i , i' , ds , ds' e r que aparecem em sua força, Eqs. (2.4) até (2.6), são sempre positivas. Logo o que faz a força passar de um valor positivo para um valor negativo, ou seja, passar de atração para repulsão, é apenas a parte angular da força.

A principal diferença entre a força de Ampère e as forças gravitacional, elétrica e magnética conhecidas até sua época estava na dependência angular. A expressão de Ampère, Eqs. (2.4) até (2.6), é muito mais complexa do que as Eqs. (2.1), (2.2) e (2.3). Podemos ilustrar uma característica importante que distingue a força de Ampère das outras forças conhecidas até então ao considerar um caso simples no qual dois elementos de corrente ids e $i'ds'$ estão interagindo entre si separados por uma distância r fixa. Alterando apenas as orientações dos dois elementos podemos fazer com que a força entre eles passe de atrativa a repulsiva, mesmo mantendo inalteradas as intensidades de corrente i e i' . Não existe nada análogo na força gravitacional, na força eletrostática, nem na força entre dois pólos magnéticos.

Analisamos aqui detalhadamente o significado de cada um dos ângulos que aparecem na força de Ampère, já que esta é uma parte fundamental desta expressão e que tem recebido pouca atenção na literatura. Além disso, Ampère escreveu sobre estes ângulos mas não encontramos em suas publicações figuras nas quais estes ângulos estejam diretamente representados.

2.8.1 O Ângulo entre os Dois Elementos de Corrente

No *Théorie* Ampère chama o ângulo entre os dois elementos de ε , [Amp26c, pág. 32] e [Amp23b, Amp90, pág. 204]: “Simplifica-se esta fórmula introduzindo o ângulo ε entre os dois elementos.” A primeira vez em que Ampère discutiu publicamente sua fórmula foi em uma seção da Academia de Ciências de Paris em 4 de dezembro de 1820. Ele redigiu um trabalho sobre o que leu nesta seção mas que só foi publicado em 1885 por Joubert. Neste trabalho Ampère considera a interação entre duas pequenas linhas com corrente e chama de “ h ao ângulo das direções das duas linhas,” [Amp85f, pág. 134]. Este último h é diferente da constante h que aparece na Eq. (2.6). Como raramente ele utiliza a denominação h para o ângulo entre os dois elementos de corrente, sendo que na maior parte das vezes utiliza ε para representar este ângulo, vamos usar esta denominação aqui.

Existem várias maneiras de conceber o ângulo entre dois elementos de corrente. Vamos considerar dois elementos de corrente de comprimentos ds e ds' direcionados no sentido das correntes elétricas e separados espacialmente. Para entender o ângulo entre eles vamos sobrepor estes elementos de corrente tal que seus centros coincidam. Eles formam então um plano que vamos considerar como sendo o plano do papel na Figura 2.8 (a). Existem dois ângulos ligando os elementos, ε_1 e $\varepsilon_2 = \pi - \varepsilon_1$. Ampère sempre considerava os ângulos a partir das direções das correntes. No *Théorie*, por exemplo, menciona “as direções dos dois elementos consideradas no sentido de suas correntes respectivas,” [Amp26c, pág. 28] e [Amp23b, Amp90, pág. 200]. Logo o que ele considera o ângulo entre os dois elementos seria o ε_1 da Figura 2.8 (a) e não o ε_2 . Nesta Figura consideramos o plano do papel como sendo o plano definido pelos dois elementos de corrente quando os deslocamos espacialmente tal que seus centros coincidam.

Mesmo assim ainda pode surgir uma dúvida representada pela Figura 2.8 (b). Nela temos os ângulos ε_1 e ε_3 entre as direções dos elementos no sentido de suas correntes, onde $\varepsilon_3 = 2\pi - \varepsilon_1$. O manuscrito mais antigo de Ampère lidando com a força entre elementos de corrente é de outubro de 1820, tendo sido parcialmente publicado por Blondel, [Ampf] e [Blo78]. Lá ele

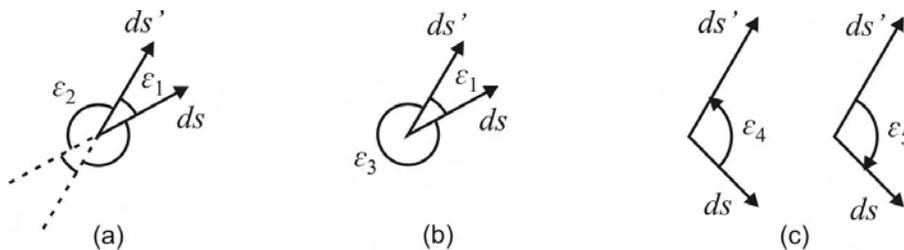


Figura 2.8: As várias formas de definir o ângulo entre dois elementos de corrente ds e ds' .

afirma:

Quando em vez de estarem dirigidas ao longo de linhas paralelas, seja no mesmo sentido, seja em sentidos opostos, as duas correntes estão dirigidas ao longo de duas linhas que não se encontram mas cujas direções formam um ângulo, existe atração quando ao considerar estas linhas no sentido das correntes que as percorrem, o ângulo que elas formam é agudo; mas esta atração é sempre menor do que a atração que ocorre no caso em que as correntes são paralelas e dirigidas no mesmo sentido, e esta atração vai sempre diminuindo na medida em que este ângulo aumenta até que ela se anula quando as duas correntes estão em direções retangulares [isto é, perpendiculares entre si]. Quando o mesmo ângulo é obtuso, a atração se transforma em repulsão; esta repulsão [...] (atinge) seu máximo quando este ângulo torna-se igual a dois [ângulos] retos, isto é, quando as duas correntes estão dirigidas em sentidos contrários ao longo de duas linhas paralelas.

Vemos então que para Ampère o ângulo entre as direções das correntes está entre 0 rad e π rad. Por esta descrição vemos que ele considera o ângulo entre os dois elementos como sendo o ε_1 da Figura 2.8 (b) e não o ε_3 .

Uma terceira dúvida que surge é se devemos ou não considerar ângulos orientados. Por exemplo, considerar positivo um ângulo no sentido horário e negativo no sentido anti-horário. Poderia-se pensar no ângulo ε_4 que vai de ds para ds' na Figura 2.8 (c) como positivo e no ângulo $\varepsilon_5 = -\varepsilon_4$ que vai de ds' para ds como negativo. Como Ampère nunca mencionou ângulos orientados nem ângulos negativos, concluímos que para ele eram iguais o ângulo que vai de ds para ds' e o que vai de ds' para ds . Logo em nossas figuras não utilizaremos ângulos orientados, embora Hofmann tenha representado os ângulos de Ampère como sendo orientados, [Hof87] e [Hof96, pág. 241, Fig. 5]. Hofmann não justifica esta utilização de ângulos orientados e não tira qualquer consequência desta suposição.

Concluímos então que o ângulo entre dois elementos ds e ds' orientados ao longo dos sentidos das correntes é como dado na Figura 2.9, com $0 \text{ rad} \leq \varepsilon \leq \pi \text{ rad}$. Estas mesmas propriedades gerais vão valer no caso dos outros ângulos α , β e γ (ou θ , θ' e ω).

2.8.2 O Ângulo entre os Planos Formados por Cada Elemento e a Reta que os Une

Embora o elemento de corrente de Ampère seja infinitesimal, ainda assim ele é orientado e pode-se pensar na linha reta que passa por ele. Logo a reta que une os centros de dois elementos de corrente forma um plano com a linha passando por cada elemento (este plano não vai existir ou não vai ser definido univocamente caso o elemento esteja orientado ao longo da reta que o une

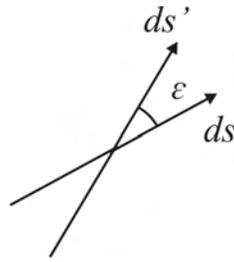


Figura 2.9: O ângulo entre dois elementos de corrente ds e ds' como utilizado por Ampère.

ao outro elemento). Na força de Ampère aparece também o ângulo entre os planos formados pelos dois elementos e a reta que os une. Neste caso não há ambigüidade desde que se considere o menor ângulo entre dois semi-planos, sendo cada semi-plano formado pelo sentido positivo do elemento de corrente respectivo e a reta que une os dois elementos. Estes semi-planos só deixarão de existir ou de serem especificados univocamente se os elementos de corrente estiverem ao longo da reta que une os elementos. A única coisa que se deve chamar atenção aqui é para a notação utilizada por Ampère. Nos trabalhos de 1820 a 1822 este ângulo é chamado de γ . Apenas no *Théorie* Ampère adota a denominação ω para o mesmo ângulo. Este ângulo está representado na Figura 2.10. Ele é um ângulo não orientado tal que $0 \text{ rad} \leq \gamma \leq \pi \text{ rad}$.

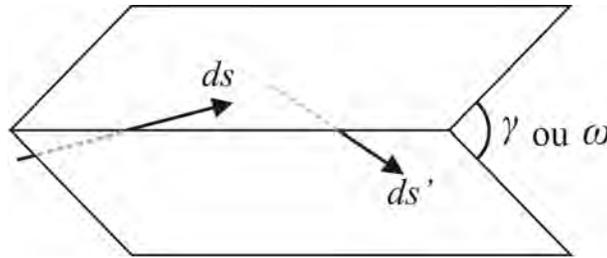


Figura 2.10: O ângulo entre os planos formados pelos dois elementos e a reta que os une.

2.8.3 Os Ângulos entre os Elementos e a Reta que os Une

Os ângulos que necessitam uma atenção maior são aqueles entre cada um dos elementos e a reta que os une.

No *Théorie* Ampère introduz os ângulos entre os elementos de corrente e a reta que os une da seguinte maneira, [Amp26c, pág. 28] e [Amp23b, Amp90, pág. 200], nossa ênfase em itálico:

Posto isto, ao considerar-se dois elementos dispostos de uma maneira qualquer, sua ação mútua dependerá de seus comprimentos, das intensidades das correntes das quais eles fazem parte, e de suas respectivas posições. Pode-se determinar esta posição por meio do comprimento r da linha reta que une seus centros, [por meio] dos ângulos θ e θ' que as direções dos dois elementos consideradas no sentido de suas correntes respectivas fazem *com um mesmo prolongamento desta reta* e, enfim, [por meio] do ângulo ω que fazem entre si os planos que passam por cada uma destas direções [dos dois elementos de corrente considerados no sentido de suas correntes] e pela linha reta que une os centros dos elementos.

De acordo com esta definição existem duas maneiras de representar os ângulos θ e θ' , Figura 2.11. Isto é, se consideramos o prolongamento que vai de ds' para ds temos θ_1 e θ'_1 . Por outro lado, se considerarmos o prolongamento que vai de ds para ds' temos θ_2 e θ'_2 .

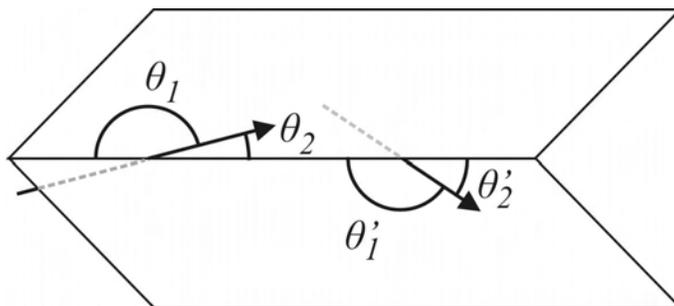


Figura 2.11: Os ângulos entre os elementos de corrente e a reta que os une.

Desta Figura temos que $\theta_2 = \pi - \theta_1$ e $\theta'_2 = \pi - \theta'_1$. Logo

$$\cos \theta_2 = -\cos \theta_1, \quad (2.7)$$

$$\sin \theta_2 = \sin \theta_1, \quad (2.8)$$

$$\cos \theta'_2 = -\cos \theta'_1, \quad (2.9)$$

e

$$\sin \theta'_2 = \sin \theta'_1. \quad (2.10)$$

Na força de Ampère, Eq. (2.5), aparecem apenas os produtos $\sin \theta \sin \theta'$ e $\cos \theta \cos \theta'$. Como $\cos \theta_2 \cos \theta'_2 = \cos \theta_1 \cos \theta'_1$ e $\sin \theta_2 \sin \theta'_2 = \sin \theta_1 \sin \theta'_1$, vem que tanto faz considerar os ângulos entre os elementos e a reta que os une como sendo θ_1 e θ'_1 , ou então como sendo θ_2 e θ'_2 .

A representação θ e θ' aparece apenas no *Théorie*. Nos primeiros trabalhos de Ampère ele chamava estes ângulos de α e β , [Ampf], [Amp22i] e [Amp85f] (trabalho apresentado por Ampère à Academia de Ciências da França em dezembro de 1820, mas publicado apenas em 1885 na *Coleção de Memórias Relativas à Física* editada por Joubert). Já em 1823 ele designou estes ângulos por α e por um outro símbolo que vamos representar neste trabalho por ϱ , [Amp22j, pág. 229] e [Amp85i, pág. 262].³

Concluimos então que podemos representar os três ângulos α , β e γ (ou θ , θ' e ω) de Ampère como na Figura 2.12. Assim como no caso do ângulo ε entre os dois elementos de corrente, também aqui valem as relações $0 \text{ rad} \leq \alpha \leq \pi \text{ rad}$, $0 \text{ rad} \leq \beta \leq \pi \text{ rad}$ e $0 \text{ rad} \leq \gamma \leq \pi \text{ rad}$.

Uma figura como esta aparece na tese de doutorado de Hofmann, [Hof82, pág. 264, Fig. 2], e no livro de Darrigol, [Dar00, pág. 9, Fig. 1.3]. Não aparecem figuras apresentando estes ângulos de forma genérica em alguns dos principais livros e artigos de autores que analisaram a obra de Ampère: Maxwell, [Max54, Vol. 2, Cap. II: Ampère's investigation of the mutual action of electric currents, artigos 502-527, págs. 158-174], Whittaker, [Whi73], Tricker, [Tri65] e Williams, [Wil81], [Wil83] e [Wil85].

³Não apresentamos nas fórmulas deste trabalho o símbolo original utilizado por Ampère pois ele é desconhecido para nós. Não conseguimos encontrá-lo nas fontes do LaTeX nem nas fontes do Word, a saber:

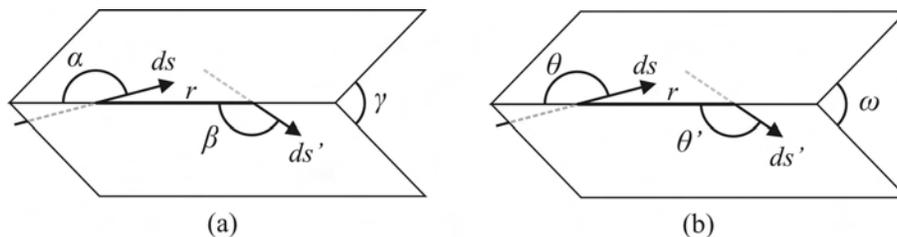


Figura 2.12: (a) Representação dos ângulos α , β e γ de acordo com as especificações de Ampère. (b) O mesmo para os ângulos θ , θ' e ω .

Por outro lado, alguns dos autores que melhor estudaram a obra de Ampère como Tricker, Blondel e Hofmann, utilizam figuras próprias nas quais representam estes ângulos como sendo os ângulos que os elementos de corrente fazem com o segmento de reta que os une: [Tri62], nossa Figura 2.13; [Blo82, pág. 84, Fig. 22], nossa Figura 2.14; assim como [Hof87] e [Hof96, pág. 241, Fig. 5], nossa Figura 2.15.

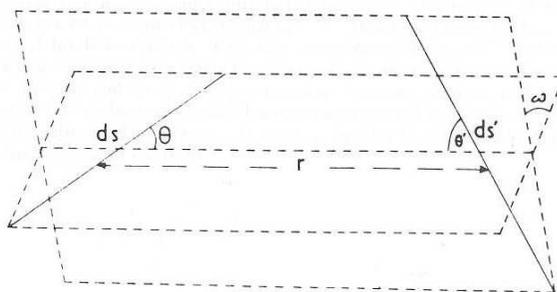


Figura 2.13: Representação dos ângulos θ , θ' e ω de acordo com Tricker, [Tri62].

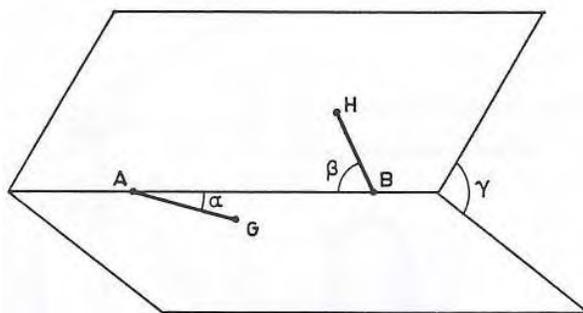


Figura 2.14: Representação dos ângulos α , β e γ de acordo com Blondel, [Blo82, pág. 84, Fig. 22].

Ou seja, em vez de considerarem os ângulos que os elementos fazem *com um mesmo prolongamento da reta que os une*, como especificado por Ampère, eles consideram os ângulos que os elementos fazem com o próprio segmento de reta finito que os une. Em particular, representam o ângulo α ou θ como sendo o ângulo θ_2 da Figura 2.11, e representam o ângulo β ou θ' como sendo o ângulo θ'_1 da Figura 2.11. Neste caso a parte angular da força de Ampère, Eq. (2.5), ficaria na forma (utilizando as Eqs. (2.7) até (2.10)):

$$(\sin \theta \sin \theta' \cos \omega + k \cos \theta \cos \theta') = (\sin \theta_2 \sin \theta'_1 \cos \omega + k \cos \theta_2 \cos \theta'_1)$$

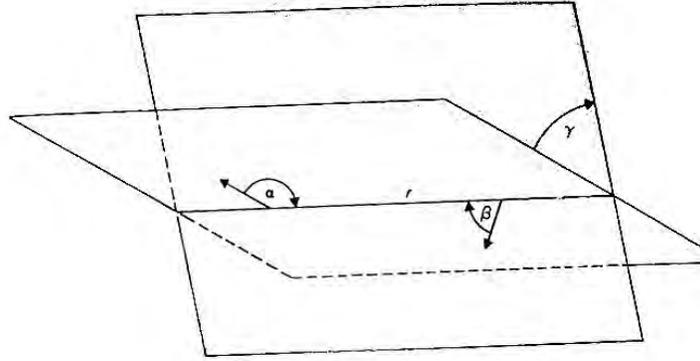


Figura 2.15: Representação dos ângulos α , β e γ de acordo com Hofmann, [Hof96, pág. 241, Fig. 5].

$$= (\sin \theta_1 \sin \theta'_1 \cos \omega - k \cos \theta_1 \cos \theta'_1) \neq (\sin \theta_1 \sin \theta'_1 \cos \omega + k \cos \theta_1 \cos \theta'_1) . \quad (2.11)$$

Isto indica que estas representações de α e β feitas por Tricker, Blondel e Hofmann não levam à forma correta da lei de Ampère. Portanto, estas representações não estão de acordo com seu pensamento.

O motivo destes autores terem chegado a esta representação errônea dos ângulos de Ampère pode ter sido devido à falta de clareza inicial do próprio Ampère. Em seus primeiros manuscritos de outubro de 1820 ele afirmou, [Ampf]:

[...] eu havia anunciado também que este valor [da força entre dois elementos de corrente] deveria depender da posição respectiva das duas pequenas porções de corrente que se considera. Esta posição, no caso mais geral, é determinada por três ângulos, os dois primeiros são aqueles que suas direções [das correntes] fazem com a linha que une os seus pontos médios, o terceiro é o ângulo dos dois planos que passam por esta última linha e pelas duas pequenas porções de correntes elétricas.

Ao se representar por r a distância entre elas [as duas pequenas porções de corrente], por g e h as intensidades das correntes das quais fazem parte, por dx e dz seus comprimentos, enfim por α e β os ângulos que elas fazem com a linha que une seus centros, e por γ o ângulo entre os dois planos, [...]

Já em dezembro de 1820 temos a seguinte citação, [Amp85f, págs. 133-134]:

[...] me limitarei aqui a indicar como encontrei a expressão matemática da ação entre duas correntes ou, de preferência, a maneira com a qual entram nesta expressão os ângulos que determinam, em geral, a posição respectiva de duas pequenas linhas no espaço. [...] Os ângulos a que se refere aqui são, em geral, em número de três. Chamemos de α ao ângulo formado por uma destas linhas com aquela [linha reta] que une o centro [da primeira linha] ao centro da outra [linha], de β ao ângulo correspondente relativamente a esta última [linha], e de γ ao ângulo formado pelos dois planos que passam por cada uma das pequenas linhas e pela reta que une seus centros.

Por estes trechos tem-se de fato a impressão que Ampère está se referindo aos ângulos entre cada elemento de corrente e o segmento de reta finito que une seus centros. É apenas em 1822 que ele especifica que estes ângulos, ainda chamados de α e β , devem ser considerados entre cada elemento e *um mesmo prolongamento da reta que os une*, [Amp22i, págs. 406 e 408]:

[...] se chamamos de ρ a uma função de três ângulos que determinam a situação respectiva de duas porções infinitamente pequenas de correntes elétricas, proporcional à força que elas exercem uma sobre a outra em uma distância determinada quando se faz variar esta situação, e que se chamamos estes três ângulos por α , β e γ ; com α e β sendo os ângulos que as direções das duas pequenas porções formam com a reta que liga seus centros, e γ a inclinação mútua dos planos destes dois ângulos [...]. Sejam $Mm = ds$ e $M'm' = ds'$ duas porções infinitamente pequenas destes condutores, e sejam suas direções determinadas pelas duas tangentes MT e $M'T'$: chamando de r à distância MM' , [...] e se consideramos os ângulos α e β de maneira que eles tenham suas aberturas viradas para o mesmo lado, como o supus no cálculo do valor de ρ , o ângulo α sendo considerado, por exemplo, entre a direção MT de Mm e o prolongamento MK de $M'M$, o ângulo β deverá estar entre a direção $M'T'$ de $M'm'$ e a própria linha $M'M$, [...].

A Figura 14 deste artigo de Ampère na qual aparecem as letras K , M , m , T , M' , m' e T' é a nossa Figura 2.16.

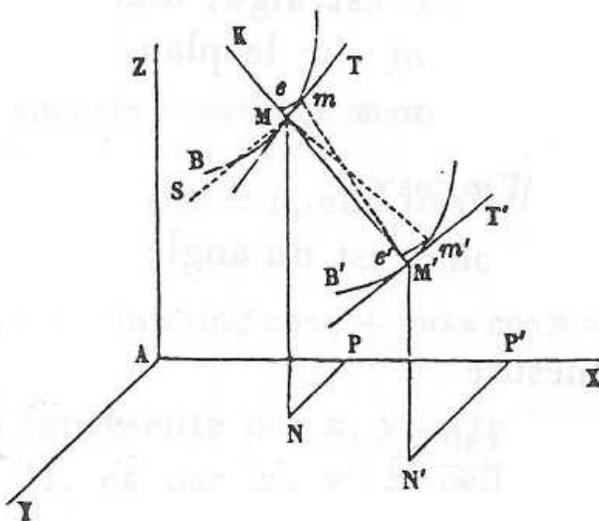


Figura 2.16: Figura original de Ampère, [Amp22i].

Na Figura 2.17 simplificamos a Figura 2.16, colocando apenas seus elementos principais, assim como introduzimos os ângulos α e β de acordo com a especificação de Ampère. Vemos então que estes ângulos α e β coincidem com os ângulos θ_1 e θ'_1 da Figura 2.11.

Ampère apresenta orientações semelhantes para considerar os ângulos entre cada elemento e um mesmo prolongamento da reta que os une em 1823. Neste caso representa os ângulos por α e por um outro símbolo que estamos designando aqui por ϱ pelo motivo discutido na Nota de rodapé 3, página 46, [Amp22j, págs. 229-232] e [Amp85i, págs. 262-265]. Discutiremos este trabalho na Subseção 4.2.1, Figuras 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14. Esta orientação também aparece no *Théorie* usando θ e θ' , [Amp26c, pág. 28] e [Amp23b, Amp90, pág. 200].

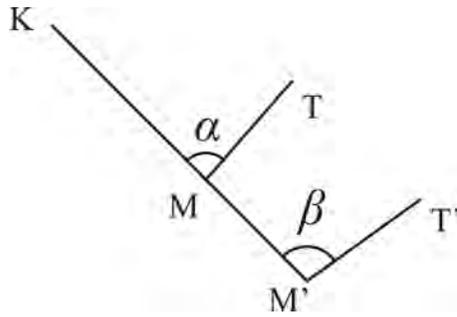


Figura 2.17: Representação dos ângulos α e β de acordo com as especificações de Ampère.

Além das orientações textuais de Ampère que acabamos de citar, podemos ver uma Figura na qual representa os ângulos θ e θ' na *chemise 173, carton 9*, [Ampk, pág. 62 frente], Figura 2.18. Esta Figura manuscrita de Ampère é análoga à nossa Figura 2.12 (b).

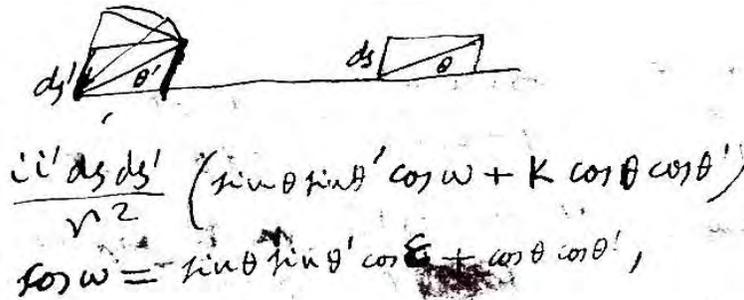


Figura 2.18: Representação de Ampère dos ângulos θ e θ' , [Ampk, pág. 62 frente]. Esta Figura é análoga à nossa Figura 2.12 (b).

De tudo isto vem então que a Figura 2.12 pode ser considerada a maneira correta de representar os ângulos de Ampère de acordo com suas próprias especificações que aparecem em seus trabalhos mais importantes a partir de 1822.

Parte II

A Evolução da Força de Ampère

Vamos discutir aqui algumas das principais experiências, idéias e suposições teóricas feitas por Ampère que o levaram ao valor final de sua lei de força entre dois elementos de corrente. A motivação para este capítulo é a seguinte afirmação de Maxwell relativa a como Ampère apresentou a dedução de sua fórmula em sua obra principal, o *Théorie* de 1826, baseado apenas em quatro casos de equilíbrio, [Max54, Vol. 2, artigo 528, págs. 175-6]:

Contudo, o método de Ampère, embora moldado em uma forma indutiva, não nos permite traçar a formação das idéias que o guiaram. Dificilmente podemos acreditar que Ampère realmente descobriu a lei de ação [entre dois elementos de corrente] por meio das experiências que ele descreve. Somos levados a suspeitar que, de fato, como ele próprio nos diz,⁴ descobriu a lei por algum processo que ele não nos mostrou e que, quando construiu depois disto uma demonstração perfeita, removeu todos os traços do andaime através do qual ele a havia levantado.

⁴[Nota do Maxwell:] *Théorie des phénomènes Électrodynamiques*, p. 9.

Capítulo 3

As Primeiras Experiências de Ampère

3.1 Orientação de uma Bússola por um Fio com Corrente

Ampère participou das reuniões da Academia de Ciências de 4 e de 11 de setembro de 1820 nas quais Arago apresentou e repetiu a experiência de Ørsted da deflexão da agulha imantada devido a um longo fio com corrente. Foi a partir destas datas que todos os trabalhos eletrodinâmicos de Ampère tiveram início. Como vimos na carta que enviou a seu filho neste mesmo mês, ver a Seção 2.2, Ampère ficou impressionado com este fato e passou a se dedicar integralmente a este assunto.

Os diversos instrumentos que serão apresentados aqui não foram construídos diretamente por Ampère. Eles foram feitos pelo construtor de instrumentos científicos Hippolyte Pixii (1808-1835). Ele foi um engenheiro francês que morreu cedo, aos 27 anos. Ampère pagava do seu próprio bolso por estas montagens, chegando a dever dinheiro a Pixii pois Ampère sempre teve dificuldades financeiras, [Blo82, págs. 103, 131, 145 e 165].

O magnetismo apresenta dois efeitos gerais que Ampère chama de ação diretriz e de ação atrativa e repulsiva, [Amp20f] e [Amp20a]. Na ação diretriz uma bússola ou agulha imantada tende a girar e adquirir uma direção fixa devido à influência do magnetismo terrestre ou de outras barras imantadas. O outro efeito é o de atração e repulsão. Um exemplo é o caso de duas barras imantadas alinhadas longitudinalmente. Vamos supor que seus pólos homólogos estejam apontando no mesmo sentido, como na Figura 3.1. Se as barras forem soltas do repouso nesta orientação, elas tenderão a se atrair. Se os pólos homólogos das duas barras ainda estivessem alinhados, mas orientados em sentidos opostos, as barras tenderiam a se repelir ao serem soltas do repouso.

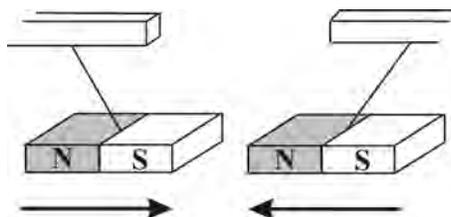


Figura 3.1: Duas barras imantadas alinhadas se atraindo.

Já na reunião de 18 de setembro Ampère apresenta um resultado novo muito importante. Se temos uma primeira bússola horizontal e soltamos sua agulha em uma orientação arbitrária em relação à Terra, livre para girar em relação ao eixo vertical da bússola, observa-se que em geral

ela não fica parada nesta direção mas vai para uma direção bem específica devido à influência do magnetismo terrestre. Esta direção é chamada de eixo Norte-Sul magnético local e o plano vertical que passa pela agulha nesta orientação de equilíbrio é chamado de meridiano magnético local. O ângulo que o meridiano magnético faz com a direção Norte-Sul geográfica é chamado de declinação magnética. Se colocamos uma segunda bússola em um plano vertical ao longo do meridiano magnético, com sua agulha livre para girar em relação a um eixo horizontal, observa-se que ela adquire uma orientação específica. O ângulo entre o plano horizontal e a direção desta segunda agulha é chamado de inclinação magnética. Ampère cria um novo instrumento que chamou de *agulha imantada astática*, [Amp20f] e [Amp20a]. É como se fosse uma terceira bússola com seu eixo de rotação paralelo localmente à agulha imantada de uma bússola de inclinação. Se fixarmos um raio sobre esta terceira bússola, por exemplo um raio horizontal, e soltarmos sua agulha imantada fazendo um ângulo ξ qualquer em relação a este raio horizontal, será observado que ela permanecerá em repouso qualquer que seja este ângulo, já que o magnetismo terrestre não vai ter nenhuma influência sobre ela. Nas palavras de Ampère, [Amp20a]:

Ora, se colocamos o eixo da agulha astática paralelamente às resultantes das ações do globo, a agulha somente poderá se mover no plano perpendicular a estas resultantes. Assim a ação do globo será destruída e a agulha permanecerá indiferente em todas as suas posições, isto é, ela será perfeitamente astática.

A origem da palavra astática é a de equilíbrio indiferente. O instrumento construído por Ampère encontra-se na Figura 3.2.

Na Figura 3.3 (a) apresentamos um detalhe deste instrumento mostrando o disco graduado. Em (b) indicamos a primeira agulha imantada mencionada acima que aponta aproximadamente na direção Norte-Sul geográfica terrestre. Em cima dela, no mesmo plano vertical, aparece a segunda agulha imantada que indica a inclinação magnética local. A terceira agulha imantada é a agulha AB do instrumento de Ampère. O plano em que esta terceira agulha pode girar é ortogonal à direção da segunda agulha imantada. Em termos modernos pode-se dizer que o plano no qual a agulha astática de Ampère pode girar é ortogonal à direção do campo magnético terrestre neste local. Devido a isto esta agulha astática é indiferente ao magnetismo terrestre, ficando parada em qualquer orientação inicial em que for solta do repouso.

A experiência de Ørsted mostrou que um fio com corrente também possui a ação diretriz, já que ele afeta a direção de uma bússola colocada em suas proximidades. Na Seção 1.3 vimos que Ørsted obteve uma deflexão da agulha em relação ao meridiano magnético cujo valor diminuía com o aumento da distância do centro da agulha ao fio. Caso esta distância fosse de $3/4$ de polegada o desvio que obteve foi de 45° . Ørsted não considerou que este ângulo fosse devido a uma influência conjunta da Terra e do fio com corrente, achando que esta deflexão era totalmente devida à influência do fio. Já Ampère levou em consideração a influência magnética da Terra sobre a agulha, juntamente com a influência do fio com corrente sobre a agulha. Para evitar a influência diretriz do magnetismo terrestre sobre a agulha imantada, tal que pudesse observar apenas o efeito diretriz do fio com corrente sobre a agulha, repetiu a experiência de Ørsted com uma bússola astática. Na reunião de 18 de setembro da Academia mostrou os resultados de sua experiência, [Amp20a]:

Então, caso se aproxime [de uma agulha astática] uma corrente galvânica, sua ação diretriz será a única que se fará sentir sobre a agulha, e a experiência mostra que ela fica sempre exatamente perpendicular à direção da corrente.

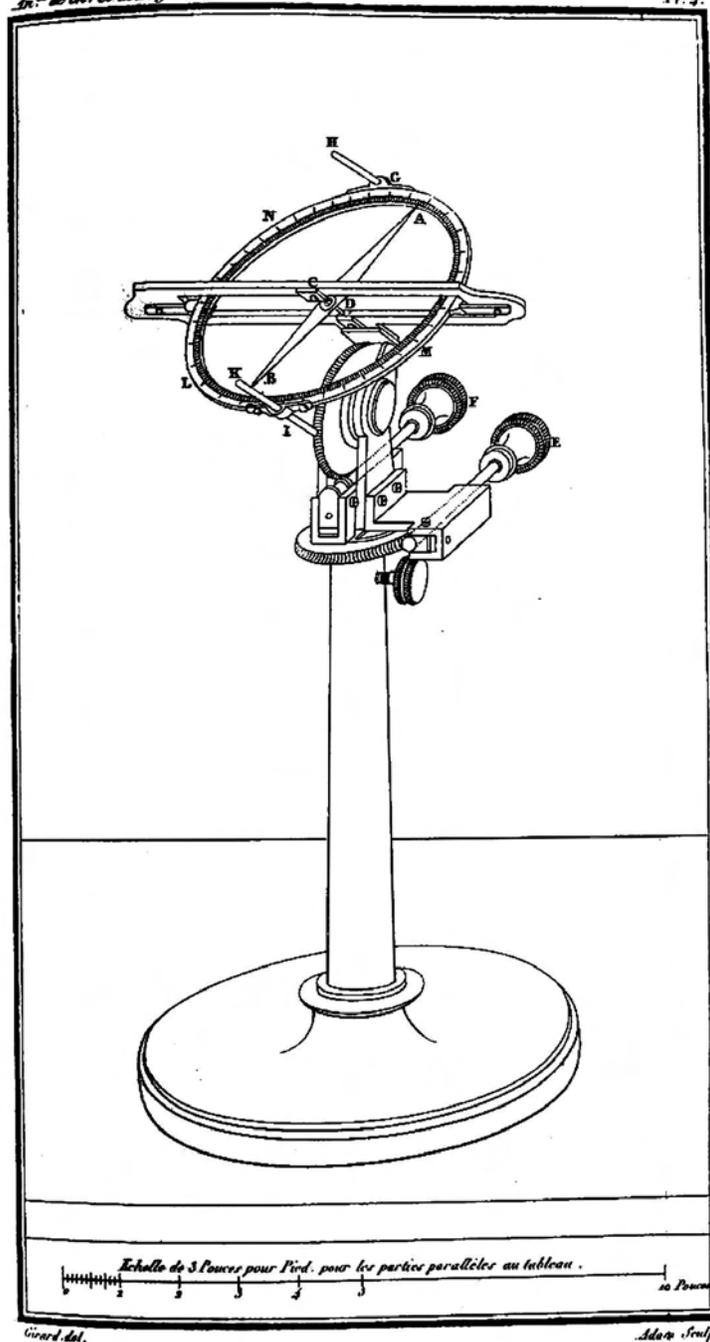


Figura 3.2: A agulha imantada astática de Ampère, [Amp20f].

Ou seja, Ampère foi o primeiro a mostrar que uma agulha imantada fica perpendicular a um longo fio com corrente quando apenas o fio está exercendo um torque sobre ela. A regra de Ampère para determinar o lado para o qual se desvia a agulha é o de supor uma pequena pessoa imaginária ao longo do fio, entre o fio e a agulha imantada. O fio está às suas costas e o observador está olhando para a agulha imantada, que inicialmente pode ser suposta paralela ao homem. Ao passar corrente pelo fio, entrando pelos pés do homem e saindo por sua cabeça, ele vai observar o pólo austral (Norte) da agulha imantada se desviar para seu lado esquerdo. Isto pode ser imaginado nas Figuras 1.4 e 1.5, tanto com a agulha abaixo do fio quanto acima dele.

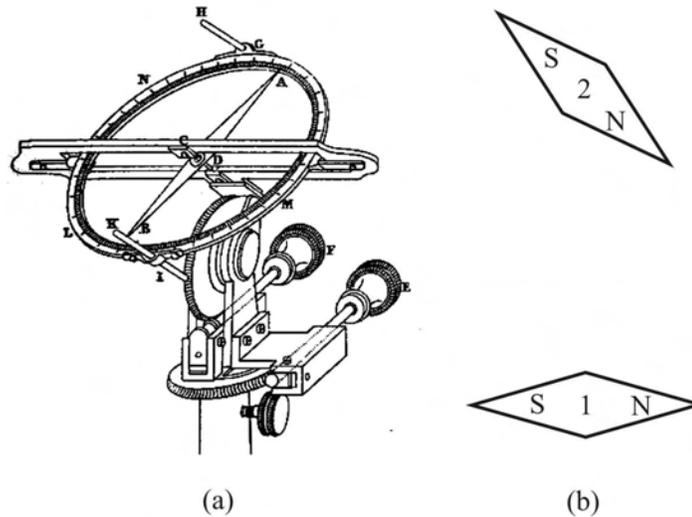


Figura 3.3: (a) Detalhe da agulha astática de Ampère. (b) A agulha 1 pode girar em um plano horizontal e no equilíbrio aponta na direção Norte-Sul. A agulha 2 está acima da agulha 1 e indica o ângulo de inclinação em relação à horizontal. A agulha astática gira em um plano ortogonal à direção indicada pela agulha 2.

3.2 Atração e Repulsão entre uma Agulha Imantada e um Fio com Corrente

Em 18 de setembro de 1820 Ampère mostrou que um fio retilíneo com corrente também possui a ação atrativa e repulsiva sobre uma pequena agulha imantada. Para isto suspendeu a agulha verticalmente por um de seus pólos, como se estivesse fazendo um pêndulo. Colocou um fio horizontal perpendicular à agulha, tal que o centro do fio estivesse à mesma altura que o centro da agulha, estando estes centros a uma pequena distância entre si. Ao passar uma corrente no fio observou que a agulha era atraída por ele quando a corrente fluía em um sentido, sendo repelida quando invertia o sentido da corrente. Esta atração e repulsão é um fato novo. Ele não havia sido observado por Ørsted, que viu apenas que o fio com corrente alterava a orientação natural da agulha imantada, mas sem que seu centro fosse atraído ou repelido pelo fio. A Figura original de Ampère aparece na Figura 3.4, [Amp20f].

Na Figura 3.5 (a) apresentamos uma versão simplificada desta experiência vista de lado. Na Figura 3.5 (b) temos a mesma situação vista de cima, sendo que agora mostramos a direção da força F exercida pelo fio com corrente sobre a agulha imantada. Quando invertemos a polaridade da agulha, ou o sentido da corrente, a força passa de repulsiva a atrativa. Se invertermos simultaneamente a polaridade da agulha e o sentido da corrente, a força continua sendo repulsiva.

3.3 Descoberta das Correntes Fechadas

Outra experiência muito importante que Ampère demonstrou nestas reuniões de 18 e 25 de setembro de 1820 foi mencionada na Seção 2.3. Neste caso ele utilizou o galvanômetro, sendo esta experiência descrita em seu primeiro artigo publicado sobre eletrodinâmica, [Amp20c] e [CA07d]. Com esta experiência Ampère descobriu que a corrente elétrica flui ao longo de um

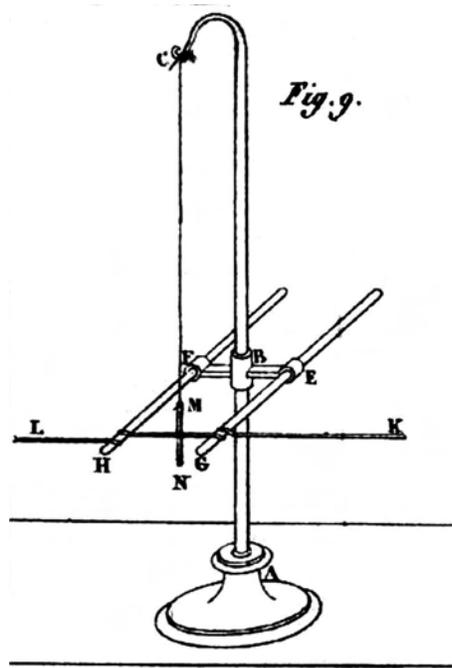


Figura 3.4: Uma agulha imantada vertical sendo atraída ou repelida por um longo fio horizontal com corrente, [Amp20f].

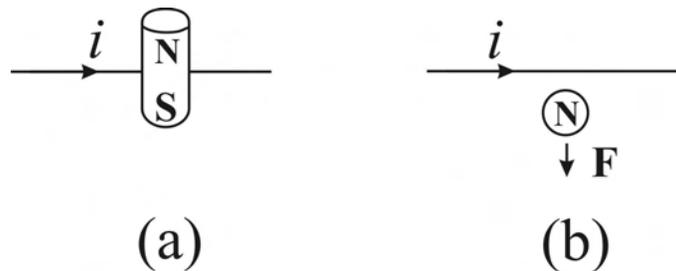


Figura 3.5: (a) Representação simplificada da Fig. 3.4 vista de lado. (b) Mesma situação vista de cima, com a força F exercida pelo fio com corrente sobre o ímã vertical.

circuito fechado quando temos os terminais da bateria ligados a um fio condutor, como no caso da experiência de Volta. Ou seja, ela flui não apenas ao longo do fio metálico, mas também no interior da bateria. Para concluir isto colocou seu galvanômetro sobre a pilha de calha que estava usando. Ao fechar o circuito observou a deflexão da agulha imantada colocada sobre a bateria, indicando assim que também no interior da bateria existe uma corrente elétrica. A corrente flui então em uma trajetória fechada em todo o circuito composto pelo condutor metálico e pela bateria. Embora esta possa parecer uma experiência trivial, deve-se levar em conta que até esta época não se sabia que a corrente elétrica também fluía no interior da pilha. Biot (1774-1862), por exemplo, havia negado explicitamente esta possibilidade em 1816, [GG90, pág. 920]. Em seu primeiro artigo Ampère não apresenta uma figura com esta experiência. Mas ela aparece na obra de Babinet e Ampère, de onde podemos ver a pilha de calhas, Fig. 2.6, [AB22, pág. 4].

3.4 Reproduzindo a Atração e Repulsão entre Dois Ímãs Alinhados

Da carta de Ampère para seu filho de setembro de 1820 vem que sua motivação inicial era a de explicar os fenômenos magnéticos conhecidos até então, juntamente com a nova descoberta de Ørsted, a partir de um único princípio. Em particular supôs que no interior dos ímãs e da própria Terra deveriam existir correntes elétricas. Interpretou então a experiência de Ørsted como sendo devida a uma interação direta entre a corrente que fluía no condutor e as supostas correntes que existiriam na agulha imantada. Para testar suas idéias de que existiriam correntes no interior dos ímãs e da Terra, Ampère tenta reproduzir os efeitos magnéticos já conhecidos utilizando circuitos elétricos. Duas barras imantadas alinhadas se atraem (se repelem) quando os pólos homólogos das duas barras estão alinhados e apontam no mesmo sentido (em sentidos opostos), Figura 3.1. Em outras palavras, as barras alinhadas se atraem caso os pólos mais próximos sejam de tipos opostos (um pólo Norte de uma barra próximo de um pólo Sul da outra barra). Caso os pólos mais próximos sejam de mesmo tipo, as barras alinhadas tenderão a se repelir.

Ampère tenta reproduzir este efeito utilizando correntes elétricas. Para isto simula um pólo magnético utilizando um circuito elétrico de formato espiral, Figura 3.6. Suspende então esta espiral em um plano vertical, como se fosse um pêndulo, com seu eixo horizontal alinhado com o eixo Norte-Sul de uma barra imantada. Ao passar uma corrente constante na espiral observa que ela é atraída ou repelida pela barra, dependendo de qual pólo da barra está mais próximo da espiral e dependendo também do sentido da corrente na espiral.



Figura 3.6: Fio em formato espiral.

Palavras de Ampère, [Amp20f]:

Agora, se as correntes elétricas são a causa da ação diretriz da Terra, as correntes elétricas serão também a causa da ação diretriz de um ímã sobre um outro ímã. Segue que um ímã deve ser considerado como um conjunto de correntes elétricas que ocorrem no plano perpendicular ao seu eixo, direcionadas de modo que o pólo austral [Norte] do ímã, que se vira para o Norte [geográfico devido à ação magnética da Terra], se encontra à direita destas correntes, dado que ele está sempre à esquerda de uma corrente disposta fora do ímã, e que lhe faz face em uma direção paralela. Ou melhor, estas correntes se estabelecem primeiramente no ímã, seguindo as curvas fechadas mais curtas, seja da esquerda para a direita, seja da direita para a esquerda, e então a linha perpendicular aos planos destas correntes torna-se o eixo do ímã, e suas extremidades formam os dois pólos. Assim, em cada um dos pólos de um ímã, as correntes elétricas em que se compõem [estes pólos] são dirigidas ao longo de

curvas fechadas concêntricas. Imitai esta disposição tanto quanto era possível com uma corrente elétrica, curvando o fio condutor em espiral. Esta espiral era formada com um fio de latão e terminada por duas porções retilíneas deste mesmo fio, que eram envolvidas dentro de dois tubos de vidro para que não entrassem em contato entre elas, e pudessem ser unidas às duas extremidades da pilha. De acordo com o sentido no qual faz-se passar a corrente em tal espiral, ela é fortemente atraída ou repelida pelo pólo de um ímã que é colocado [diante da espiral] de modo que a direção do seu eixo seja perpendicular ao plano da espiral, conforme as correntes elétricas da espiral e do pólo do ímã estejam no mesmo sentido ou em sentido contrário.

Isto pode ser ilustrado na Figura 3.7. Enquanto que Ørsted havia observado uma ação diretriz do fio com corrente atuando sobre uma agulha imantada, aqui Ampère está observando uma ação atrativa e repulsiva de uma barra imantada atuando sobre uma espiral com corrente.

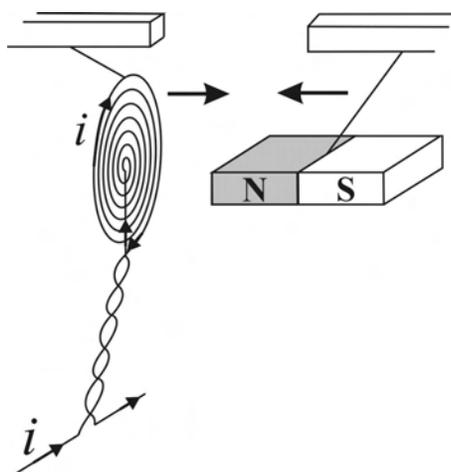


Figura 3.7: Atração entre uma espiral com corrente e uma barra imantada. Não é mostrado o restante do circuito fechado da espiral. O fio que prende a espiral ao suporte superior é isolante.

3.5 Interação entre Fios com Corrente

3.5.1 Interação entre Espirais

Então vem uma experiência fundamental para Ampère. Ele agora substitui a barra imantada por uma segunda espiral. Fica então com duas espirais em planos paralelos e verticais, com seus centros à mesma altura. Ao passar uma corrente constante nas espirais Ampère observa uma atração ou repulsão entre elas dependendo dos sentidos das correntes nestas espirais, Figura 3.8.

Ou seja, Ampère conseguiu reproduzir a atração e repulsão entre duas barras imantadas alinhadas, como na Figura 3.1, utilizando duas espirais paralelas e concêntricas, Figura 3.9.

Ampère descreve esta observação nos seguintes termos, [Amp20f]:

Substituindo o ímã por outra espiral, cuja corrente esteja no mesmo sentido que o seu [ou seja, no mesmo sentido que a corrente do ímã], tem-se as mesmas atrações e repulsões. Foi assim que descobri que duas correntes elétricas atraíam-se quando fluíam no mesmo sentido, e repeliam-se no caso contrário.

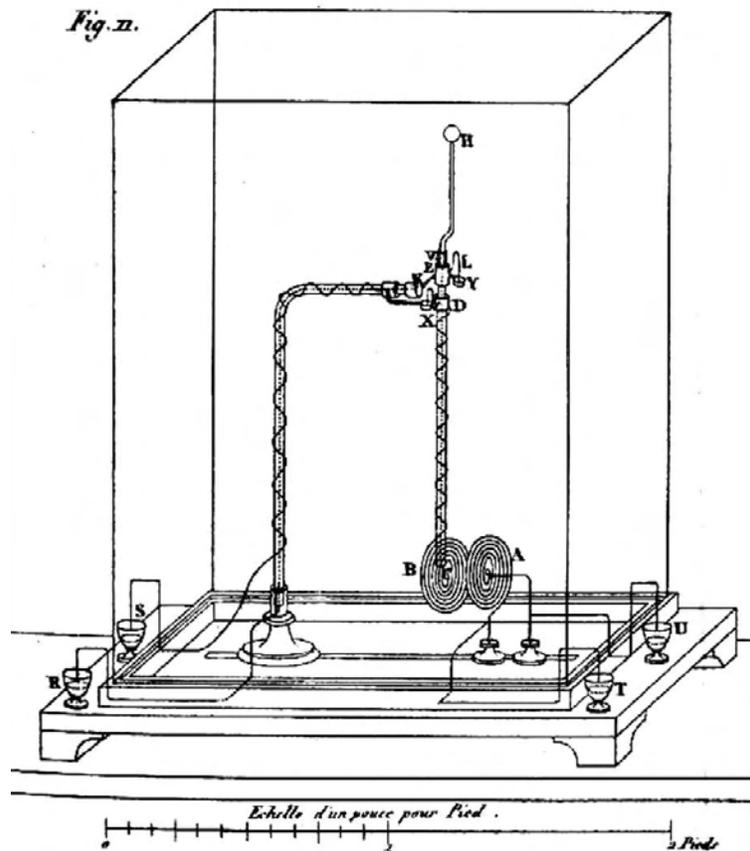


Figura 3.8: Primeira observação de Ampère da atração e repulsão entre dois condutores com corrente, [Amp20f]. A espiral A fica fixa no laboratório, enquanto que B é a espiral móvel, podendo se aproximar ou se afastar de A.

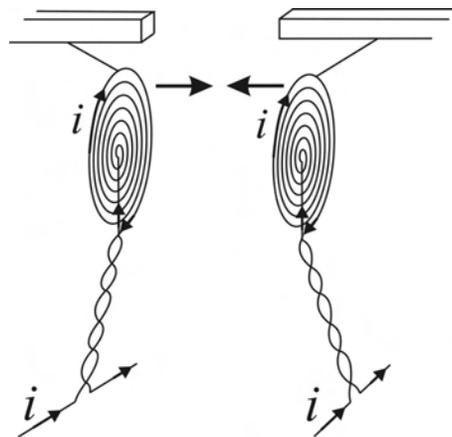


Figura 3.9: Atração entre duas espirais com corrente.

Esta é uma das experiências mais importantes em toda a história da eletricidade, já que foi a primeira vez que alguém observou a atração e repulsão entre dois fios com corrente. Isto abriu um novo ramo da física, a interação entre correntes elétricas, sem haver necessariamente a influência magnética da Terra ou de outros ímãs. Mais tarde Ampère denominou de *eletrodinâmica* esta ciência cuja origem experimental é exatamente esta interação entre espirais observada pela

primeira vez por ele, [Amp22d]. Além disso, foi esta experiência que sugeriu a Ampère que correntes paralelas se atraem quando fluem no mesmo sentido e se repelem quando fluem em sentidos contrários, como se pode perceber pela última frase de Ampère que acabamos de citar. Estas experiências com as espirais foram apresentadas por Ampère à Academia de Ciências em 25 de setembro de 1820,¹ sendo publicadas em [Amp20f].

Poderia-se pensar que esta observação extremamente importante de Ampère seria uma consequência necessária da experiência de Ørsted. Arago mostrou que este não é o caso, [Ara54, págs. 59-60]:

O meio infalível de reduzir ao silêncio esta oposição apaixonada, de minar suas objeções pela base, seria a de citar um exemplo no qual dois corpos que, separadamente, agissem sobre um terceiro [corpo], não exerceriam, todavia, qualquer ação um sobre o outro. Um amigo de Ampère [a saber, o próprio Arago], observou que o magnetismo oferece um fenômeno deste tipo. Ele diz aos complacentes antagonistas do grande geômetra: “Eis aqui duas chaves de ferro doce. Cada uma delas atrai esta bússola. Se vocês não me provarem que, colocadas em presença uma da outra, estas chaves se atraem ou se repelem, será falso o ponto de partida de todas as suas objeções.”

Este contra-exemplo mostrado por Arago foi expresso por Ampère nas seguintes palavras, [Amp26c, págs. 113-114] e [Amp23b, Amp90, págs. 285-286]:

Quando o Sr. Ørsted descobriu a ação que o fio condutor exerce sobre um ímã, se devia, na verdade, ser levado a supor que poderia haver uma ação mútua entre dois fios condutores. Porém, esta não seria uma consequência necessária da descoberta deste célebre físico, já que uma barra de ferro doce age também sobre uma agulha imantada e, contudo, não existe qualquer ação mútua entre duas barras de ferro doce. Enquanto que somente se conhecia o fato da deflexão da agulha imantada pelo fio condutor, não se poderia supor que a corrente elétrica somente comunicava a este fio a propriedade de ser influenciado pela agulha, de uma maneira análoga à maneira em que o ferro doce é [influenciado] por esta mesma agulha — o que seria suficiente para que ele agisse sobre ela — sem que, para isso, resultasse alguma ação entre dois fios condutores quando eles se encontrassem fora de influência de qualquer corpo imantado? Somente a experiência podia decidir esta questão. Realizei-a no mês de setembro de 1820 e foi demonstrada a ação mútua entre os condutores voltaicos.

3.5.2 Interação entre Fios Retos e Paralelos

Em 2 de outubro de 1820 Ampère apresenta à Academia de Ciências seu primeiro trabalho a ser publicado sobre o tema, [Amp20c] e [CA07d]. Em 9 de outubro demonstra perante a Academia uma experiência na qual dois longos fios paralelos se atraem quando as correntes fluem no mesmo sentido e se repelem quando fluem em sentidos opostos, Figura 3.10 (a).

O condutor AB é fixo no laboratório enquanto que o condutor $ECDF$ pode girar ao redor do eixo horizontal EF , aproximando-se ou afastando-se de AB . Inicialmente AB e CD estão no mesmo plano horizontal. Quando a corrente flui de A para B e de C para D observa-se que CD é atraído em direção a AB . Se invertemos o sentido da corrente em apenas um destes condutores

¹Fizemos uma reprodução desta experiência com materiais de baixo custo, [ASCC07] e [SCCA07].

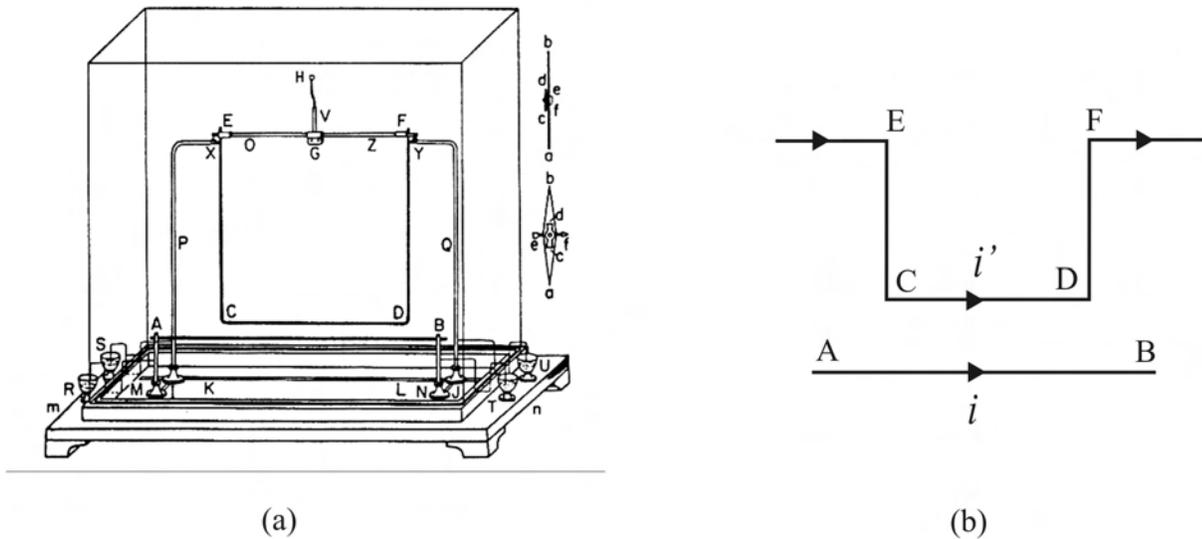


Figura 3.10: (a) Demonstração de Ampère que correntes paralelas fluindo no mesmo sentido se atraem e fluindo em sentidos opostos se repelem, [Amp20c] e [CA07d]. O condutor AB está fixo no laboratório, enquanto que o condutor móvel CD pode girar ao redor do eixo EF , se aproximando ou se afastando de AB . Os segmentos AB e CD estão inicialmente no mesmo plano horizontal, com EF verticalmente acima de CD . (b) Nossa reprodução desta Figura indicando os sentidos das correntes.

observa-se que CD é repellido por AB , enquanto que se invertemos o sentido da corrente nos dois condutores observa-se novamente que CD é atraído em direção a AB .

Esta é uma das experiências mais famosas de Ampère por diversos motivos: É a única Figura de seu primeiro artigo publicado. A experiência indica uma interação que Ampère considera fundamental, a saber, a força de atração e repulsão entre condutores retilíneos paralelos. Ela é também a base de funcionamento das balanças de corrente que se encontram em grande parte dos laboratórios de física.

Palavras de Ampère, [Amp20c] e [CA07d]:

Mas as diferenças que acabo de descrever não são as únicas que distinguem estes dois estados da eletricidade [de tensão e de corrente, ou entre a eletricidade em repouso e em movimento]. Descobri diferenças mais notáveis ainda dispendo, em direções paralelas, duas partes retilíneas de dois fios condutores que se ligam às extremidades de duas pilhas voltaicas. Uma parte era fixa, e a outra, suspensa sobre as pontas e tornada altamente móvel por um contrapeso, podia se aproximar ou se afastar [da primeira parte] conservando o seu paralelismo em relação à primeira parte. Observei, então, que, passando ao mesmo tempo uma corrente elétrica em cada uma destas partes, elas se atraíam mutuamente quando as duas correntes estavam no mesmo sentido e que se repeliam quando fluíam em direções opostas.

3.6 Reprodução da Ação Diretriz da Terra sobre uma Bússola

Como vimos na Seção 3.4, com uma corrente em espiral Ampère conseguiu reproduzir a ação atrativa e repulsiva entre pólos magnéticos alinhados. Em seguida Ampère tentou reproduzir a ação diretriz sobre uma agulha imantada. Há muito tempo se sabia que a Terra orientava uma bússola ao longo do meridiano magnético e que uma barra imantada também pode orientar uma bússola. Para tentar reproduzir este comportamento com correntes elétricas, Ampère tenta simular uma agulha ou barra imantada utilizando “uma hélice enrolada ao redor de um tubo de vidro suspenso pelo meio sobre uma ponta muito fina como a agulha de uma bússola,” [Amp20f]. Ao aproximar uma barra imantada desta hélice horizontal com corrente, Ampère consegue orientá-la, simulando assim a ação diretriz entre dois ímãs. Isto foi no final de setembro ou começo de outubro de 1820. Mas não consegue fazer com que o magnetismo terrestre oriente esta hélice. O efeito que queria observar era o de orientação da hélice ao longo do meridiano magnético local, sendo que isto não ocorreu. Suspeitou que isto podia ser devido ao atrito no ponto de suspensão do tubo de vidro e criou então uma suspensão com maior mobilidade ilustrada na Figura 3.11 (a).

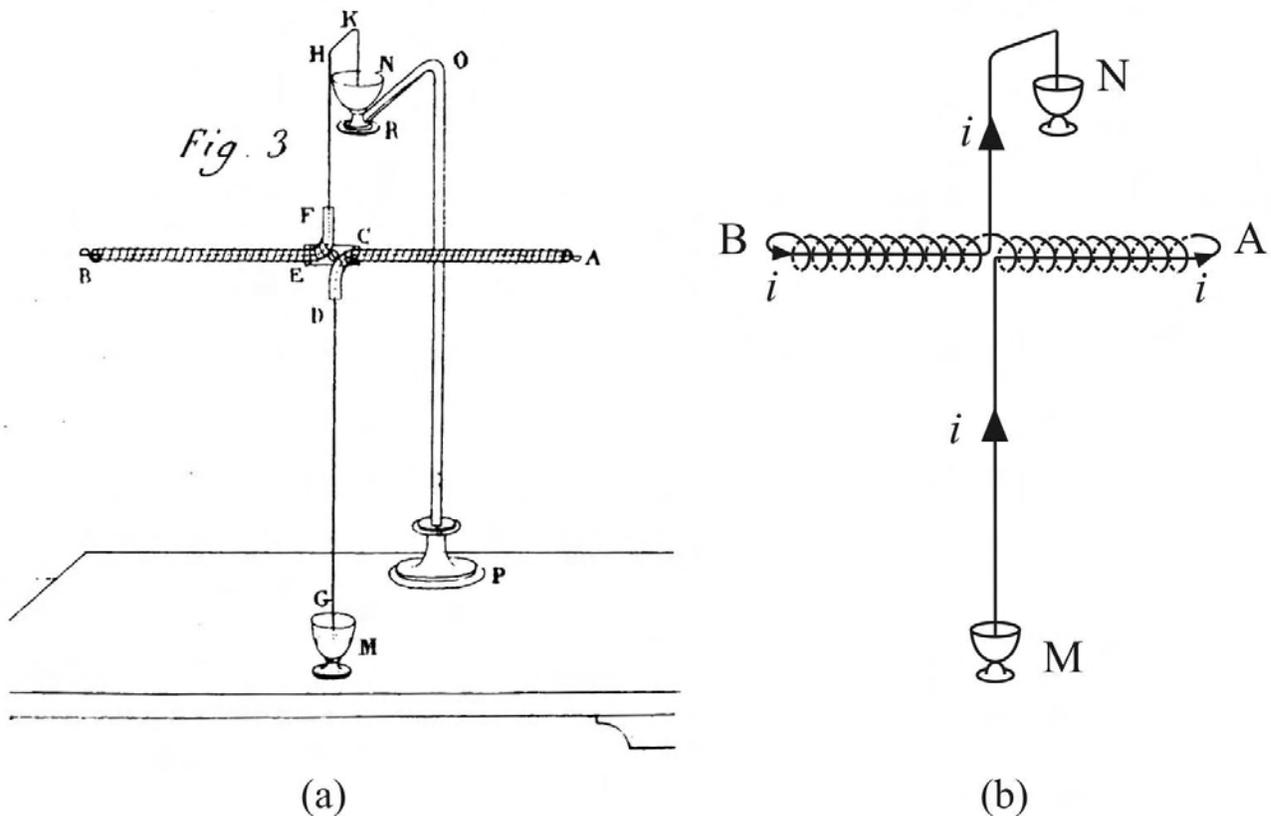


Figura 3.11: (a) Hélice de Ampère, [Amp20f]. (b) Nossa reprodução desta Figura indicando o sentido da corrente nesta experiência.

A hélice é enrolada ao redor de dois tubos ocios de vidro (material isolante), ACD e BEF . Um fio vertical HF entra no tubo FEB em F , saindo em B . Em seguida é enrolado em hélice ao redor dos dois tubos ao longo de $BECA$, entra no outro tubo em A , saindo em D e descendo

verticalmente por DG . A hélice enrolada em torno dos tubos de vidro pode girar ao redor do eixo vertical HG . Mais uma vez Ampère consegue observar a orientação desta hélice ao aproximar de uma de suas extremidades uma barra imantada. Contudo, novamente não tem sucesso em orientá-la pelo magnetismo terrestre, apesar do atrito ser muito pequeno nesta montagem. Esta anomalia fugiu às expectativas de Ampère e ele inicialmente não conseguiu entender este fato.

Em 17 de outubro de 1820 Ampère mostrou a Biot e Gay-Lussac (1778-1850) uma versão simplificada do aparelho mostrado na Figura 3.12, [Amp20f, Figura 6].

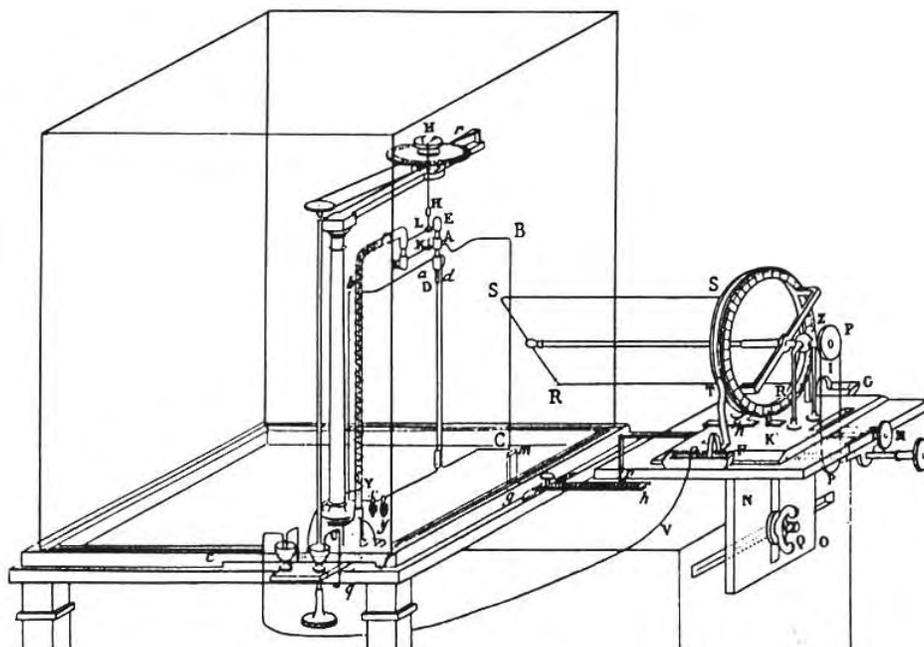


Figura 3.12: Instrumento para verificar a interação entre dois condutores com orientações variáveis, [Amp20f, Figura 6]. O condutor SR é fixo, com inclinação angular ajustável em relação à vertical. O condutor BC é móvel ao redor do eixo vertical que passa por D , podendo se aproximar ou se afastar de SR .

O condutor SR é fixo em relação ao laboratório e pode-se variar sua inclinação em relação à vertical, assim como sua distância em relação ao condutor BC que pode girar ao redor de um eixo vertical passando por D . Ampère descreve este instrumento da seguinte maneira, [Amp20f, pág. 182]:

Fiz ser construído para estas experiências, um instrumento que mostrei no último dia 17 de outubro aos Srs. Biot e Gay-Lussac, e que só difere do [instrumento] representado na Figura 1 [nossa Figura 3.10 (a)] no fato de que o condutor fixo deste último foi substituído por um condutor preso a um círculo que podia girar em torno de um eixo horizontal perpendicular à direção do condutor móvel, por meio de uma polia de reenvio, e graduada de modo que se veja sobre sua borda o ângulo formado pelas direções das duas correntes, nas diferentes posições que se pode dar sucessivamente para o condutor sustentado pelo círculo graduado.

A intenção de Ampère ao construir um instrumento tão complexo parece ter sido a de fazer uma série de medidas detalhadas da força ou do torque sobre o condutor móvel em função de

sua inclinação e distância em relação ao condutor fixo. Mas aparentemente estas medidas nunca foram realizadas. De qualquer forma, foi com este instrumento simplificado que Ampère observou pela primeira vez, de maneira casual e não esperada por ele, a ação diretriz do magnetismo terrestre sobre um condutor móvel com corrente, [Amp20f, págs. 172-173 e 182-183]. Percebeu isto vendo a deflexão do condutor móvel BC ao redor do eixo vertical D quando uma corrente fluía por este condutor, independente de haver ou não corrente no condutor fixo SR . Concluiu que este torque era devido à ação magnética da Terra sobre o condutor móvel. Percebe então que seu fracasso anterior em mostrar a orientação da hélice representada na Figura 3.11 (a) pelo magnetismo terrestre não era devido ao atrito, mas sim devido ao pequeno diâmetro das hélices enroladas no vidro. Ao aumentar este diâmetro aumenta também o torque sobre elas. Esta foi a primeira prova de que o torque sobre uma espira com corrente aumenta quanto maior for a área da espira, mesmo que a corrente permaneça constante. Mais tarde Ampère construiu uma grande espira circular quase fechada com um raio de 20 cm, suspensa livremente em um plano vertical por dois fios verticais partindo de suas extremidades superiores. Esta espira tinha liberdade para girar ao redor de um eixo vertical passando por seu centro. Ao passar uma corrente nesta espira observava sua orientação devido ao magnetismo terrestre, com o plano vertical da espira ficando perpendicular ao plano vertical do meridiano magnético, Figura 3.13, [Amp20f, Figura 7] e [Amp20a].

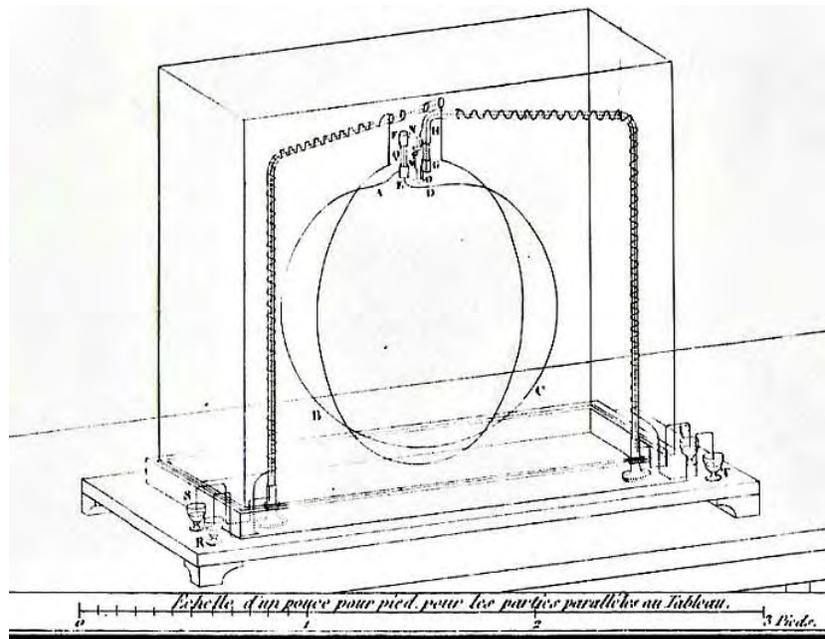


Figura 3.13: Espira circular com corrente que é orientada pelo magnetismo terrestre, [Amp20f, Figura 7]. O circuito circular é móvel ao redor do eixo vertical que passa por seu centro.

Ou seja, com o instrumento da Figura 3.13 Ampère conseguiu simular apenas com correntes elétricas o comportamento de uma bússola usual que se orienta ao longo do meridiano magnético terrestre. No equilíbrio vem que a espira circular de Ampère fica em um plano ortogonal à direção de uma bússola usual. Faltava agora reproduzir o comportamento de uma agulha de inclinação.

Na página 193 da segunda parte de seu primeiro artigo Ampère menciona um aparelho com corrente com o qual reproduziu a orientação de uma agulha imantada de inclinação. Provavelmente este aparelho é aquele representado na Figura 5 deste artigo, que embora esteja incluída no trabalho, não é citada em nenhum momento. Ela é reproduzida aqui na Figura 3.14 (a).

Teríamos então uma espira retangular de lados $BC = 30$ cm e $CD = 60$ cm que pode girar livremente ao redor do eixo horizontal GH . Pode-se imaginar que a pilha seria ligada às taças U e T . Supondo que a corrente entre em U , ela seguiria o trajeto $USABCDEF GQ$, saindo em T e se ligando ao terminal negativo da bateria. Caso a espira retangular $ABCDEF$ esteja inicialmente em repouso em um plano horizontal, ao passar uma corrente constante no circuito vem que ela se inclinaria em relação à horizontal devido a sua interação com o magnetismo terrestre, até atingir uma nova posição de equilíbrio. Nesta nova posição de equilíbrio o plano da espira retangular ficaria ortogonal ao eixo de uma agulha imantada de inclinação. Isto é, o plano $ABCDEF$ ficaria paralelo ao plano do equador da agulha de inclinação. Com esta experiência Ampère estaria reproduzindo de maneira eletrodinâmica (isto é, utilizando apenas uma espira com corrente, sem nenhum ímã) o comportamento magnético de uma agulha imantada de inclinação.

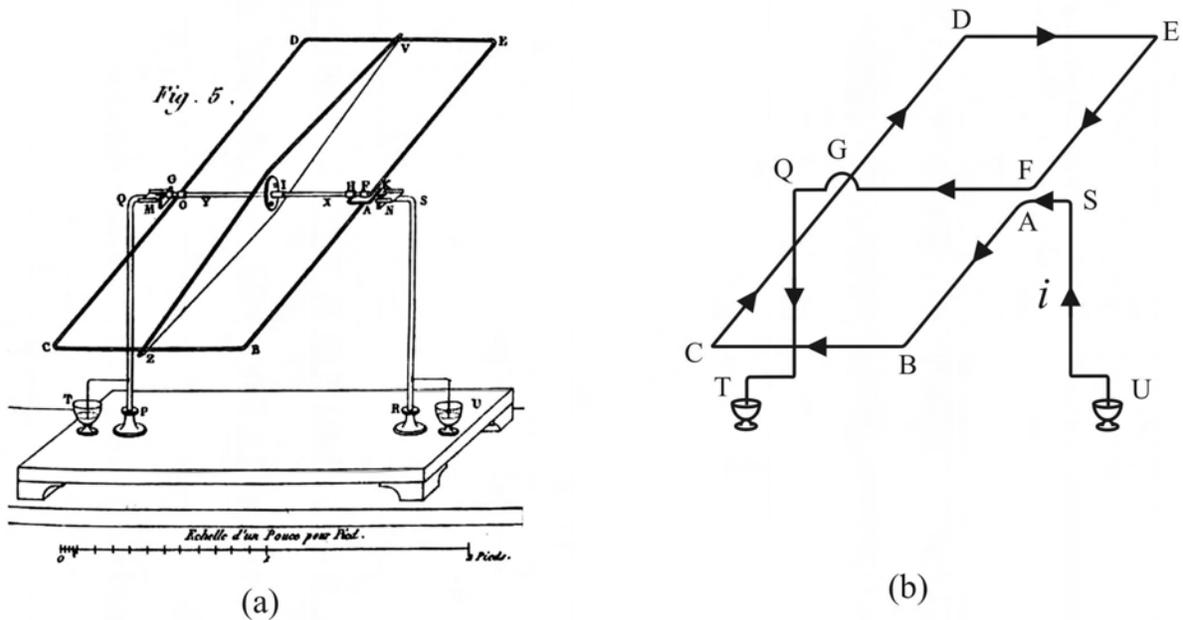


Figura 3.14: (a) Espira retangular com corrente que é orientada pelo magnetismo terrestre em analogia a uma agulha de inclinação, [Amp20f, Figura 5]. (b) Nossa Figura indicando o sentido da corrente nesta experiência.

Não encontramos nenhum autor discutindo esta experiência de Ampère, talvez por ele não identificar esta Figura em seu artigo. Isto é, ela aparece no trabalho mas não é citada especificamente por Ampère em nenhum parágrafo. Poudensan, por exemplo, publicou um resumo das duas partes deste trabalho de Ampère de 1820, [Amp20c] e [Amp20f]. Ele reproduziu as quatro primeiras Figuras de Ampère, mas pulou a quinta Figura original de Ampère substituindo-a pela Figura 6 original de Ampère, mas a denominou de Figura 5, sem chamar a atenção do leitor para este fato, [Amp64, pág. 39]. O mesmo ocorre em uma reprodução deste primeiro artigo feita em 1921, [Amp21].

Ampère apresentou estes resultados à Academia de Ciências em 30 de outubro de 1820. Com isto conseguiu reproduzir os principais fenômenos magnéticos já conhecidos há muito tempo, mas agora utilizando condutores com corrente.

3.7 A Experiência de Ørsted Eletrodinâmica

Ampère também teve sucesso em reproduzir a experiência de Ørsted utilizando apenas condutores com corrente. Vamos chamá-la de *experiência de Ørsted eletrodinâmica*. Ela é representada na Figura 3.15 e está reproduzida na segunda parte do primeiro artigo de Ampère, [Amp20f].

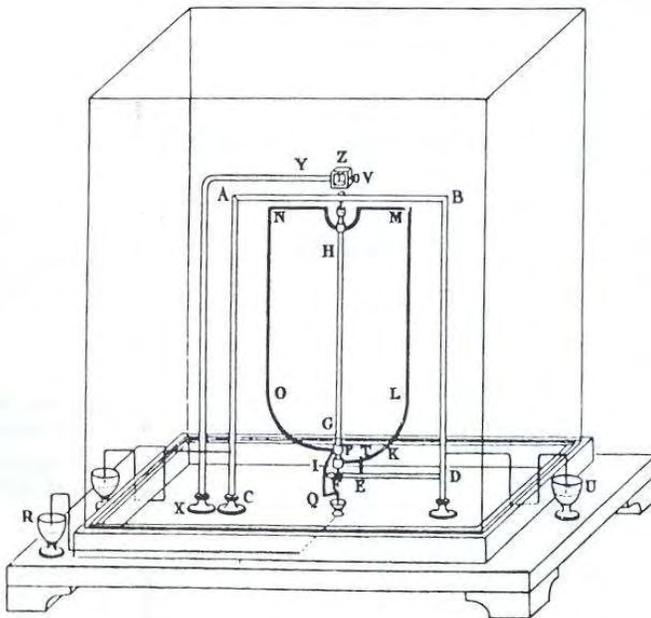


Figura 3.15: Ampère reproduziu a experiência de Ørsted utilizando apenas condutores com corrente, [Amp20f, Figura 2]. Na Figura original não constam as letras *G* e *H* ao longo do eixo central vertical. Como elas são mencionadas no texto de Ampère, as incluímos nesta imagem para facilitar a compreensão. O condutor *AB* é fixo, enquanto que o condutor *MN* é móvel, podendo girar ao redor do eixo vertical *ZP*.

Descrição de Ampère desta experiência, [Amp20f]:

A corrente elétrica, chegando neste instrumento pelo apoio *CA* (Figura 2 [nossa Figura 3.15]), percorre primeiramente o condutor *AB*, retornando pelo apoio *BDE*; deste apoio — pela pequena taça de aço *F*, onde se coloca uma gota de mercúrio, e no qual gira o pivô de aço do eixo de vidro *GH* — a corrente comunica-se ao encaixe de cobre *I* e ao condutor *KLMNOPQ*, cuja extremidade *Q* mergulha no mercúrio que está em contato com a outra extremidade da pilha. Com as coisas assim dispostas, fica claro que, na situação em que este condutor está representado em que o punha primeiramente apoiando-o contra o apêndice *T* do primeiro condutor, a corrente da parte *MN* estava [fluía] no sentido contrário ao de *AB*, enquanto que quando a fazíamos descrever uma semi-circunferência *KLMNOPQ*, as duas correntes encontravam-se [fluíam] no mesmo sentido.

Vi então ser produzido o efeito que esperava. No instante em que o circuito foi fechado, a parte móvel do aparelho girou pela ação mútua entre esta parte e o condutor fixo *AB*, até [o ponto em que] as correntes, que estavam inicialmente em sentido contrário, se colocassem de maneira a ficarem paralelas e [fluindo] no mesmo sentido. A velocidade adquirida [pela parte móvel do aparelho] fazia-lhe exceder desta

última posição; mas ela voltava, passava ligeiramente além [do ponto de equilíbrio], e terminava por fixar-se após algumas oscilações.

O condutor móvel $KLMNOPQ$ pode girar em relação ao eixo vertical GH . O condutor fixo AB e o segmento MN do condutor móvel são sempre ortogonais à reta vertical que une os centros destes condutores. Pode-se variar o ângulo entre o condutor MN e o condutor fixo AB . Neste caso pode-se representar por γ o ângulo entre o plano formado por cada um destes condutores, AB e MN , com a reta que une seus centros, sendo $0 \text{ rad} \leq \gamma \leq \pi \text{ rad}$, Figura 3.16.

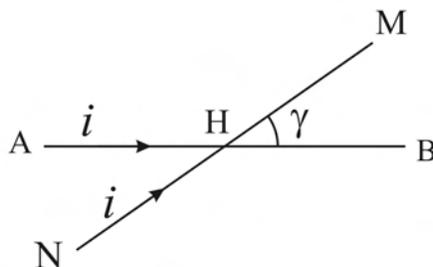


Figura 3.16: Figura 3.15 vista de cima. O condutor AB é fixo no laboratório, enquanto que o condutor MN é móvel, podendo girar ao redor do eixo vertical que passa por H .

Temos $\gamma = 0 \text{ rad}$ quando as duas correntes fluem no mesmo sentido, por exemplo, as duas para a direita na Figura 3.16, com AB sobreposto sobre o segmento MN . Já $\gamma = \pi/2 \text{ rad}$ quando MN é ortogonal em relação a AB . E ocorre $\gamma = \pi \text{ rad}$ quando as correntes fluem em sentidos contrários, por exemplo, em AB a corrente fluindo para a direita e em MN a corrente fluindo para a esquerda, com AB sobreposto sobre o segmento MN . Com esta experiência de Ørsted eletrodinâmica Ampère observou que a posição final de equilíbrio é aquela para a qual $\gamma = 0 \text{ rad}$, qualquer que seja o valor inicial do ângulo γ com o qual a espira $KLMNOPQ$ seja solta do repouso. Isto é, o torque de AB sobre a espira móvel sempre tende a diminuir o ângulo γ .

Na Figura 3.17 representamos de forma qualitativa o torque sobre o condutor móvel em função do ângulo γ , levando em conta os resultados da experiência de Ørsted eletrodinâmica, Figura 3.15. Esta experiência é de certa forma análoga à experiência da Figura 3.12, só que agora observando-se o torque entre os circuitos em vez da força entre eles. Ou seja, temos torque nulo para $\gamma = 0 \text{ rad}$ e para $\gamma = \pi \text{ rad}$, com o torque máximo ocorrendo para $\gamma = \pi/2 \text{ rad}$. A situação com $\gamma = 0 \text{ rad}$ é de equilíbrio estável, enquanto que a situação com $\gamma = \pi \text{ rad}$ é de equilíbrio instável. Estamos utilizando a convenção de que um torque que tende a diminuir o ângulo γ entre os condutores é positivo, assim como uma força que tende a diminuir a distância r entre os condutores é considerada positiva.

3.8 A Experiência Inversa de Ørsted

Em sua experiência original enviada a vários cientistas em julho de 1820, Ørsted havia alterado a orientação natural de uma agulha imantada ao passar uma corrente constante em um longo fio retilíneo colocado próximo à agulha, [Ørs86]. Dois meses depois ele publicou um outro trabalho no qual observou o efeito inverso. Utiliza a lei de ação e reação na interação entre um ímã e um condutor com corrente. Prevê que um ímã fixo em relação ao laboratório pode fazer uma espira com corrente girar em relação ao laboratório. Faz a experiência e observa o efeito desejado, [Ørs98, pág. 423].

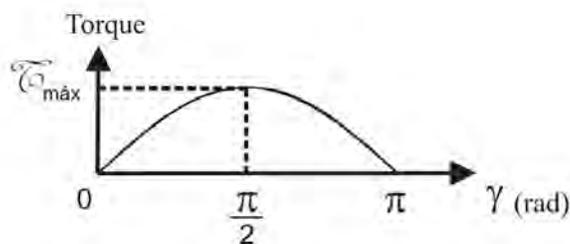


Figura 3.17: Comportamento do torque sobre o circuito móvel MN em função do ângulo γ na experiência da Fig. 3.15.

Na segunda parte de seu primeiro artigo de 1820 Ampère também obtém este efeito inverso utilizando o mesmo aparelho da Figura 3.15, [Amp20f]:

Ao substituir o condutor fixo AB por uma barra imantada situada horizontalmente em um direção perpendicular à deste condutor, e de modo que as correntes deste ímã estejam no mesmo sentido que a corrente elétrica estabelecida de início no condutor fixo, então se passa corrente somente no condutor móvel, e observa-se que este [condutor móvel] gira pela ação do ímã precisamente como o fazia na experiência em que a corrente fluía nos dois condutores, e onde não havia a barra imantada. Foi para prender esta barra que fiz com que fosse ligado a este aparelho o suporte XY — terminando em Y pelo encaixe Z aberto nas duas extremidades — onde se fixa o ímã na posição que acabo de explicar através do parafuso de pressão V .

3.9 Resumo das Primeiras Experiências de Ampère

Ampère consegue então obter diversos fenômenos novos que ainda não haviam sido observados antes dele:

1. Força de atração e repulsão exercida por um fio retilíneo com corrente sobre um ímã.
2. Atração e repulsão entre espirais com corrente ou entre condutores retilíneos com corrente.
3. Torque exercido por uma espira com corrente sobre uma outra espira com corrente.
4. Torque exercido pela Terra sobre uma espira com corrente.

Além disso, consegue reproduzir os torques e forças entre ímãs substituindo-os por hélices ou por espirais com correntes constantes. Reproduz também a orientação de uma agulha imantada devida ao magnetismo terrestre ao substituir a agulha por uma grande espira com corrente constante. Reproduz ainda a experiência de Ørsted de maneira eletrodinâmica, substituindo a agulha imantada por uma espira móvel com corrente.

Os itens (2) e (3), em particular, abrem todo um novo campo de pesquisas, a saber, a interação entre condutores com corrente constante. Ampère passa a ter dois objetivos bem claros em mente. Seu primeiro objetivo é o de encontrar uma expressão matemática que explique quantitativamente a interação entre correntes elétricas. O segundo é o de explicar quantitativamente todos os fenômenos magnéticos, assim como todos os fenômenos eletromagnéticos, apenas em termos da interação entre correntes. Para isto precisa supor a existência de correntes elétricas no interior

dos ímãs e da Terra. Precisa também saber como estas correntes se distribuem nos ímãs e na Terra. Veremos o caminho que ele percorreu até alcançar seu objetivo final.

Capítulo 4

Formulações Iniciais da Força entre Elementos de Corrente

4.1 Tentativa Inicial

Desde o início de suas pesquisas sobre a força entre dois condutores finitos transportando correntes constantes Ampère assume alguns princípios ou hipóteses: (A) Um deles é o de que a força entre os dois condutores pode ser obtida pela integração em cada circuito da suposta força infinitesimal entre dois de seus elementos de corrente. (B) Esta força infinitesimal é sempre suposta ao longo da reta que une os elementos, seguindo ainda o princípio de ação e reação. (C) Além disso, ele inicialmente supõe por analogia com as outras leis de força conhecidas na gravitação, eletrostática e magnetostática, que esta força infinitesimal diminui com o quadrado da distância entre os elementos de corrente. (D) Ele também supõe que ela é proporcional à intensidade das correntes e aos seus comprimentos infinitesimais, embora inicialmente não seja claro ao expor a distinção entre estes dois últimos conceitos.

Como vimos na Seção 3.5, com o aparelho da Figura 3.10 (a) Ampère mostrou em setembro de 1820 que dois condutores retilíneos e paralelos se atraem quando a corrente flui no mesmo sentido nos dois fios. Se as correntes fluírem em sentidos opostos, os fios irão se repelir. Este é um outro princípio extremamente importante que Ampère vai utilizar para chegar na força entre elementos de corrente.

Para considerar o caso em que as correntes não são paralelas, construiu em outubro de 1820 o instrumento da Figura 3.12. Há um condutor fixo SR que tem um ângulo ajustável em relação à vertical. O condutor vertical BC pode girar em relação a um eixo vertical que passa por D , se aproximando ou se afastando de SR . Os condutores SR e BC são sempre ortogonais à reta que une os centros destes condutores. Pode-se variar o ângulo entre o condutor SR e a vertical. Neste caso pode-se representar por γ o ângulo entre o plano formado por cada um destes condutores, SR e BC , com a reta que une seus centros, sendo $0 \text{ rad} \leq \gamma \leq \pi \text{ rad}$, Fig. 4.1.

Esta situação é análoga à das Figuras 3.15 e 3.16, mas agora observando-se uma atração entre os condutores em vez de um torque entre eles, com o condutor fixo SR fazendo o papel do condutor fixo AB , enquanto que o condutor móvel BC faz o papel do condutor móvel MN . Neste caso este ângulo coincide com o ângulo ε entre os próprios condutores SR e BC . Temos $\gamma = 0 \text{ rad}$ quando as duas correntes fluem no mesmo sentido, por exemplo, verticalmente para cima; $\gamma = \pi/2 \text{ rad}$ quando SR é horizontal e BC vertical; e $\gamma = \pi \text{ rad}$ quando as correntes fluem em sentidos contrários, por exemplo, em BC verticalmente para cima e em SR verticalmente para baixo. Com uma experiência realizada de modo qualitativo (sem dados numéricos), Ampère

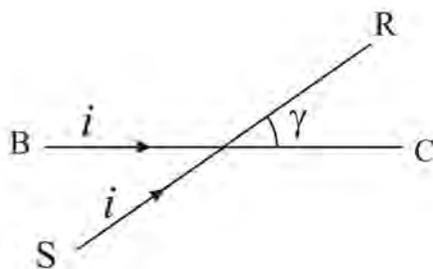


Figura 4.1: Figura 3.12 vista ao longo da reta que une os centros dos condutores SR e BC . O condutor SR é fixo no laboratório, enquanto que o condutor BC é móvel, podendo se aproximar ou se afastar de SR .

observou que havia uma atração de intensidade máxima sobre BC quando $\gamma = 0$ rad, uma atração de intensidade menor quando $0 \text{ rad} < \gamma < \pi/2$ rad, força nula quando $\gamma = \pi/2$ rad, uma repulsão quando $\pi/2 \text{ rad} < \gamma < \pi$ rad, e uma repulsão máxima, com intensidade igual à intensidade da atração máxima, quando $\gamma = \pi$ rad. Na Figura 4.2 representamos de forma qualitativa a força sobre o condutor móvel em função do ângulo γ , lembrando da convenção de que uma força atrativa é positiva e uma força repulsiva é negativa.

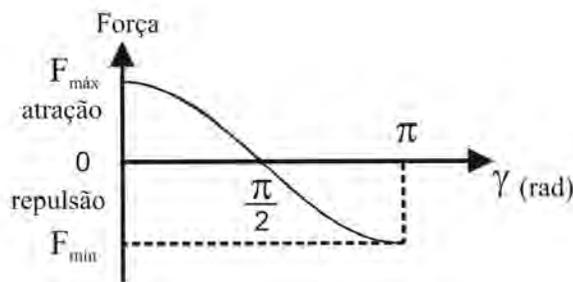


Figura 4.2: Comportamento da força sobre o circuito móvel BC em função do ângulo γ na experiência da Fig. 3.12.

As experiências descritas nas Figs. 3.12 e 3.15, têm como resultados qualitativos os gráficos da força e do torque representados nas Figs. 4.2 e 3.17. Estes resultados qualitativos não são conclusivos por diversos motivos. Em primeiro lugar, Ampère não apresentou medidas quantitativas precisas, apenas ordens de grandeza. Além disso, as ações observadas sobre BC são devidas não apenas ao condutor SR mas também devidas aos restantes dos dois circuitos e à própria ação magnética da Terra. Outra dificuldade destas experiências é que na época de Ampère ainda era difícil manter uma bateria fornecendo uma corrente constante, já que a energia das baterias decaíam rapidamente. Por último vale ressaltar os atritos que sempre existem em experiências deste tipo. Ampère não chegou a estimar suas ordens de grandeza ou a comparar a intensidade das forças de atrito com a intensidade da força eletrodinâmica entre as correntes.

De qualquer forma na *chemise* 158 redigida ao redor da segunda semana de outubro de 1820 Ampère começou a esboçar sua força entre dois elementos de corrente ao utilizar estes resultados experimentais. Uma página deste documento é ilustrada na Figura 4.3.

Devido a este ser o documento mais antigo de Ampère discutindo detalhes matemáticos de sua força, nos parece relevante citar os trechos mais importantes, [Ampf]:

Antes de me ocupar da ação mútua entre uma corrente elétrica e um ímã, devo

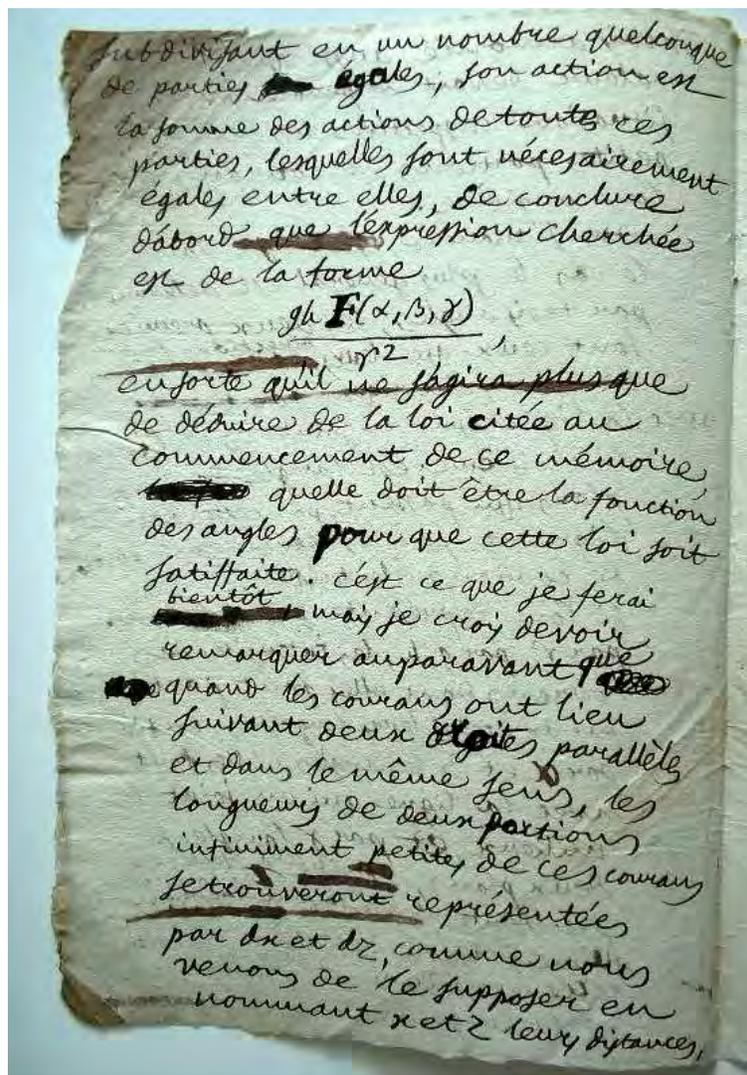


Figura 4.3: Uma página da *chemise* 158 de Ampère mostrando sua primeira formulação matemática da força entre dois elementos de corrente, [Ampf].

acrescentar ao que já disse sobre a ação entre duas correntes a seguinte observação.

Quando em vez de estarem dirigidas ao longo de linhas paralelas, seja no mesmo sentido, seja em sentidos opostos, as duas correntes estão dirigidas ao longo de duas linhas que não se encontram mas cujas direções formam um ângulo, existe atração quando ao considerar estas linhas no sentido das correntes que as percorrem, o ângulo que elas formam é agudo; mas esta atração é sempre menor do que a atração que ocorre no caso em que as correntes são paralelas e dirigidas no mesmo sentido, e esta atração vai sempre diminuindo na medida em que este ângulo aumenta até que ela se anula quando as duas correntes estão em direções retangulares [isto é, perpendiculares entre si e perpendiculares à reta que une seus centros].

Quando o mesmo ângulo é obtuso, a atração se transforma em repulsão; esta repulsão [...] (atinge) seu máximo quando este ângulo torna-se igual a dois [ângulos] retos, isto é, quando as duas correntes estão dirigidas em sentidos contrários ao longo de duas linhas paralelas.

Devendo a repulsão ser considerada como uma atração negativa, vê-se por esta experiência que a atração diminui com o co-seno do ângulo das duas correntes, torna-se nula em seguida e muda de sinal com ele [isto é, muda de sinal juntamente com a mudança de sinal do co-seno do ângulo das duas correntes], ela deve então, quando a intensidade e os comprimentos das duas correntes permanecem constantes, assim como [permanece constante] a distância mais curta de suas direções, ser expressa por uma função de grau ímpar do co-seno deste ângulo.

Suponho aqui que esta distância mais curta passa constantemente pelos pontos médios das duas correntes a fim de que exista apenas o ângulo das direções destas correntes que varia entre todas as grandezas de que possa depender a ação mútua entre elas.

Além disso, esta função do co-seno do ângulo da direção das duas correntes elétricas só pode ter uma forma simples quando se consideram porções infinitamente pequenas destas correntes. Portanto, é provável que ela se reduza à primeira potência deste co-seno, e pelo menos esta é a primeira suposição que se deve tentar na comparação de uma hipótese sobre a lei das atrações e repulsões com os resultados da experiência. É necessário acrescentar a isto a diminuição das atrações e repulsões na medida em que a distância aumenta, na razão do inverso do quadrado desta distância, em conformidade ao que se observa para todos os tipos de ações mais ou menos análogas a esta; e além disso, quando a linha que liga os centros das duas porções de corrente, supostas infinitamente pequenas, não é perpendicular às suas direções, a ação mútua entre elas deve ainda depender dos ângulos que a linha da qual falamos forma com estas direções. Além disso, neste último caso parece que o co-seno do ângulo formado pelas direções das duas correntes quando a linha que liga seus centros é perpendicular a elas, deve ser substituído pelo co-seno do ângulo formado pelos dois planos que passam por esta linha e pelas direções das duas correntes. Este co-seno é sempre igual à unidade, já que este ângulo é sempre nulo, quando as duas correntes estão em um mesmo plano [e apontando para o mesmo lado da reta que os une, caso contrário este ângulo será de π rad].

Foi sobre estas considerações que construí uma expressão da atração de duas correntes infinitamente pequenas que era na verdade apenas uma hipótese, mas a mais simples que se pode adotar, e aquela que, conseqüentemente, se deve tentar inicialmente.

Tentei obter os efeitos que deveriam resultar disto, tanto para correntes elétricas retilíneas mas de um comprimento finito, quanto para correntes circulares como aquelas que mostrei existir nos ímãs cilíndricos, e para as correntes que ocorrem nos fios de cobre curvados em hélice, devido às experiências variadas que fiz sobre este último tipo de correntes.

Me propus a comparar os resultados destes cálculos com as experiências nas quais se pode medir a intensidade da ação entre duas correntes retilíneas de um comprimento finito e cujo ângulo [entre elas] pudesse ser variado à vontade; pois é impossível de submeter à experiência correntes infinitamente pequenas, e quando se emprega um ímã, não interessa quão pequeno ele seja, a ação é ainda mais complicada pois ela ocorre sobre correntes que formam curvas fechadas determinadas pelas seções feitas no ímã perpendicularmente à linha que liga seus dois pólos.

Fiz ser construído para estas medidas um aparelho que mostrei em 17 de outubro [de 1820] aos Srs. Biot e Gay-Lussac, arranjei um outro para observar a ação de duas

correntes curvadas em hélice.

As experiências que realizei com estes dois instrumentos me fizeram descobrir dois fatos novos [discutiremos estes “fatos novos” na Subseção 4.2.1] que complicaram os resultados e, conseqüentemente, me obrigaram a suspender as verificações que me havia proposto fazer, com a ajuda destes aparelhos, dos resultados de meus cálculos.

Foi com este instrumento que observei pela primeira vez o efeito da ação que o globo terrestre exerce sobre as correntes elétricas, que havia tentado produzir antes inutilmente com os instrumentos menos apropriados ao sucesso desta experiência, devido a que a força resultante desta ação somente tendia a deslocar a parte móvel do aparelho por um braço de alavanca muito curto.

[...] Eu havia anunciado também que este valor [da força entre dois elementos de corrente] deveria depender da posição respectiva das duas pequenas porções de corrente que se considera. Esta posição, no caso mais geral, é determinada por três ângulos, os dois primeiros são aqueles que suas direções [das correntes] fazem com a linha que une os seus pontos médios, o terceiro é o ângulo dos dois planos que passam por esta última linha e pelas duas pequenas porções de correntes elétricas.

Ao se representar por r a distância entre elas [as duas pequenas porções de corrente], por g e h as intensidades das correntes das quais fazem parte, por dx e dz seus comprimentos, enfim por α e β os ângulos que elas fazem com a linha que une seus centros, e por γ o ângulo entre os dois planos, será fácil depois das considerações precedentes e notando que uma porção infinitamente pequena exerce necessariamente uma ação proporcional ao comprimento, pois ao subdividi-la em um número qualquer de partes iguais, sua ação é a soma das ações de todas estas partes, que são necessariamente iguais entre elas, de concluir então que a expressão procurada é da forma

$$\frac{ghF(\alpha, \beta, \gamma)}{r^2}, \quad (4.1)$$

de modo que se tratará apenas de deduzir da lei citada no começo desta memória, qual deve ser a função dos ângulos para que esta lei seja satisfeita.

Existem várias coisas importantes neste trecho. Em primeiro lugar, a Eq. (4.1) é a expressão matemática mais antiga de Ampère sobre sua força entre elementos de corrente. Inicialmente Ampère está considerando as duas correntes ao longo de retas que não se cruzam e para as quais a linha que liga os centros das duas porções de corrente é perpendicular às suas direções. Pela experiência e por um princípio de simplicidade matemática conclui que a força entre as duas correntes finitas deve ser proporcional ao co-seno do ângulo entre as retas, que pode ser representado por $\cos \varepsilon$. Neste caso o ângulo ε é igual ao ângulo γ entre os planos formados por esta linha e pelas direções das correntes. No caso em que o segmento de reta que liga os centros dos dois elementos de corrente não é mais perpendicular às suas direções, Ampère afirma que $\cos \varepsilon$ deve ser substituído por $\cos \gamma$, sem justificar esta passagem. A intenção de Ampère de integrar a força entre dois elementos de corrente para chegar na força entre dois segmentos de comprimentos finitos está implícita pela utilização de elementos possuindo comprimentos infinitesimais dx e dz .

Se considerarmos rigorosamente a situação vem que qualquer soma de termos com potências ímpares de $\cos \gamma$ estaria de acordo com os resultados desta experiência qualitativa. O argumento de simplicidade que ele utiliza para ficar apenas com a primeira potência pode ser facilmente

questionado, mas não deixa de ser razoável começar o tratamento matemático com esta hipótese simplificadora.

Embora esta *chemise* nunca tenha sido publicada, em um artigo de 1820 Ampère afirma o seguinte, [Amp20a]:

[...] além disso deve entrar na expressão [da força entre duas corrente retilíneas] uma função ímpar do co-seno do ângulo da direção entre elas, pois a atração se transforma em repulsão quando este co-seno muda de sinal. É bem provável que esta função seja apenas a primeira potência deste co-seno, esta é pelo menos a função mais simples, e aquela que se deve tentar em primeiro lugar.

Como vimos na Seção 2.5, Ampère sempre supôs desde o início de suas pesquisas que as forças entre dois elementos de corrente eram atrativas ou repulsivas ao longo da reta que une seus centros. Vemos aqui que ele supõe, além disso, que esta força devia cair com o quadrado da distância entre os elementos. Das experiências que realizou com o aparelho da Figura 3.12 e supondo a lei mais simples que podia imaginar que satisfizesse a estes resultados, vemos que até o momento ele concluiu que quando os condutores retilíneos eram ortogonais à reta que unia seus centros, a força deveria ser proporcional a

$$\frac{gh \cos \gamma}{r^2}, \quad (4.2)$$

onde gh indicava tanto a intensidade das correntes quanto o tamanho dos elementos de corrente.

Faltava agora determinar a dependência da força em relação aos ângulos α e β . Blondel, Hofmann e Darrigol sugerem que Ampère deve ter chegado por esta época a uma expressão do tipo, [Blo82, pág. 84], [Hof82, pág. 266], [Hof96, págs. 240-241] e [Dar00, pág. 9]:

$$\frac{\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \cos \gamma}{r^2}. \quad (4.3)$$

Podemos ilustrar como Ampère chegou na dependência em $\cos \gamma$ com a Figura 4.4. Aqui trabalhamos com elementos de corrente em vez de trabalhar com segmentos finitos de reta. O elemento ds está no plano do papel e é ortogonal à reta que o une ao elemento ds' , com $\alpha = \pi/2$ rad. O elemento ds' também é ortogonal à reta que o une ao elemento ds , com $\beta = \pi/2$ rad. O plano de ds com a reta que une os elementos faz um ângulo γ com o plano de ds' com a reta que une os elementos. Ampère partiu de dois elementos paralelos se atraindo, com correntes no mesmo sentido, ou seja, com $\gamma = 0$ rad. Foi aumentando o ângulo γ . Quando $\gamma = \pi/2$ rad a força entre eles se anula. Aumenta-se γ ainda mais até chegar em dois elementos se repelindo, com correntes em sentidos opostos, com $\gamma = \pi$ rad.

Ilustramos agora com a Figura 4.5 o raciocínio que Blondel e Hofmann apresentam para se chegar na Eq. (4.3).

Temos dois elementos de corrente ds e ds' no mesmo plano. Eles fazem ângulos α e β com o mesmo prolongamento da reta que une seus centros, sendo r a distância constante entre seus centros. Também pode-se partir do mesmo estado inicial da Figura 4.4, isto é, $\gamma = 0$ rad, e chegar ao mesmo estado final, $\gamma = \pi$ rad, mantendo estes elementos sempre no mesmo plano. Temos ds e ds' se atraindo na situação A da Figura 4.5, com $\alpha = \beta = \pi/2$ rad e $\gamma = 0$ rad, e se repelindo com a mesma intensidade em E , com $\alpha = \beta = \pi/2$ rad e $\gamma = \pi$ rad. Seria natural esperar que em B ainda houvesse atração, mas com intensidade menor do que em A . Em B temos $\alpha = \pi/2$ rad, $0 \text{ rad} < \beta < \pi/2 \text{ rad}$ e $\gamma = 0$ rad. Em C não deve haver atração nem repulsão. Neste caso temos $\alpha = \pi/2$ rad, $\beta = 0$ rad e γ não existe ou é indefinido, já que ds' não forma um plano

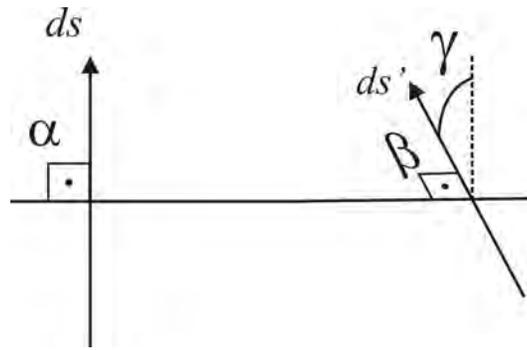


Figura 4.4: O elemento ds está no plano do papel, sendo ortogonal à reta que o une a ds' , com $\alpha = \pi/2$ rad. O elemento ds' também é ortogonal à reta que os une, fazendo com ela um ângulo $\beta = \pi/2$ rad. O ângulo entre os planos dos dois elementos com a reta que os une é γ .

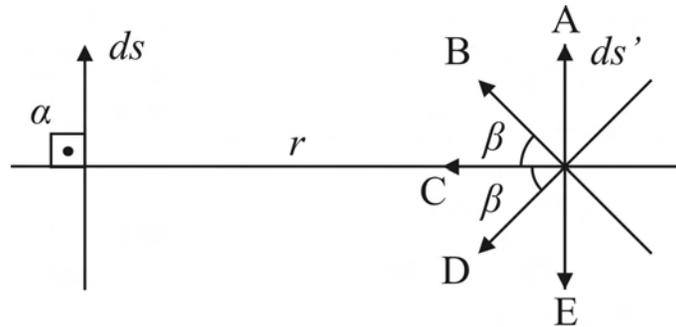


Figura 4.5: Interação entre dois elementos de corrente no mesmo plano.

com a reta que une os centros dos dois elementos. Em D deve haver uma repulsão mas com uma intensidade menor do que em E . Em D temos $\alpha = \pi/2$ rad, $0 \text{ rad} < \beta < \pi/2$ rad e $\gamma = \pi$ rad. Finalmente chegamos em E com $\alpha = \beta = \pi/2$ rad e $\gamma = \pi$ rad. Usando o mesmo argumento de simplicidade que Ampère utilizou no caso de $\cos \gamma$, se poderia supor para representar este caso que a dependência em β fosse do tipo $\sin \beta$. O mesmo vai continuar valendo se ds' partir de A e chegar em E ao girar no sentido horário.

Supondo agora ds' fixo e girando ds no sentido horário ou anti-horário, se chegaria analogamente a $\sin \alpha$. Com isto se poderia chegar na dependência suposta por Blondel e Hofmann.

Não existe nenhum artigo ou manuscrito desta época no qual Ampère apresente algo assim. Mas dois fatos mostram que esta possibilidade apresentada por Blondel e Hofmann é razoável. Como vamos ver em seguida, quando Ampère apresentou pela primeira vez sua expressão matemática da força entre dois elementos de corrente, análoga à Eq. (2.4), ele sempre supunha que o segundo termo era muito menor do que o primeiro termo, ou até mesmo achava que o segundo termo deveria ser exatamente nulo. Ele manteve esta idéia até o meio de 1822, quando obteve que $k = -1/2$. Ou seja, sua crença inicial era de que a força entre dois elementos de corrente deveria ser do tipo da Eq. (4.3).

O segundo fato é que existe uma seção escrita por um amigo de Ampère, Babinet, em um trabalho conjunto que editaram em 1822, que apresenta um raciocínio similar ao argumento de Blondel e Hofmann que apresentamos nesta Seção, [AB22, Seções 14 a 17, págs. 17-21]. Babinet havia escrito a maior parte deste trabalho em julho de 1821. Babinet não apresenta a parte matemática em $\sin \alpha \sin \beta$, nem discute que é o $\cos \gamma$ que faz a atração mudar em repulsão. Apesar disto, ele comenta qualitativamente em uma Figura análoga à 4.5 que a atração deve

diminuir quando o ângulo de ds' com a reta que o une a ds é menor ou maior do que $\pi/2$ rad. Menciona também que esta atração vai a zero quando ds' está ao longo da reta ligando ds a ds' , e que a atração se transforma em repulsão quando as correntes nos dois elementos estão em sentidos contrários em relação a esta reta.

4.2 A Primeira Publicação Contendo uma Expressão da Força entre Dois Elementos de Corrente

4.2.1 A Lei da Adição

No trecho da *chemise* 158 citada na Seção 4.1, Ampère menciona que desistiu de tentar uma verificação quantitativa de sua lei utilizando o aparelho da Figura 3.12. O motivo para a desistência foram “dois fatos novos” que complicaram os resultados que esperava obter. Como mencionamos na Seção 3.6, Ampère não havia obtido a orientação esperada da hélice da Figura 3.11 (a) devido ao magnetismo terrestre. Foi com o aparelho da Figura 3.12 que ele observou este fenômeno pela primeira vez, de maneira inesperada.

Este é o primeiro “fato novo” mencionado na *chemise* 158. Ampère entendeu então que o motivo de ter falhado anteriormente era por ter usado hélices com áreas de seção reta muito pequenas. Em suas palavras, [Amp20f]:

em relação à ação diretriz da Terra, o aparelho [da nossa Figura 3.11 (a)] não tinha mobilidade suficiente — e esta força agia por um braço de alavanca demasiado curto para produzir o efeito desejado.

Ao aumentar o braço da alavanca, ou a área da espira, conseguiu reproduzir de maneira controlada a orientação de um ímã devido ao magnetismo terrestre, só que agora utilizando uma espira circular tendo um grande raio e na qual fluía uma corrente constante, em vez de utilizar a agulha imantada de uma bússola, Figura 3.13.

O segundo “fato novo” teve uma importância crucial em todas as pesquisas posteriores de Ampère que o levaram ao valor final da força entre dois elementos de corrente. Vimos que Ampère conseguiu reproduzir as atrações e repulsões entre duas barras imantadas alinhadas ao longo de seus comprimentos, como na Figura 3.1. Para isto utilizou duas espirais com corrente colocadas frontalmente em planos paralelos e verticais, como nas Figuras 3.8 e 3.9. Existe uma outra situação na qual duas barras imantadas mostram atração e repulsão, a saber, quando estão lado a lado. Se os pólos de mesmo tipo apontam para o mesmo lado, as barras se repelem, como na Figura 4.6. Caso os pólos apontem para lados opostos, as barras se atraem.

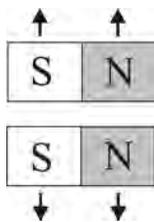


Figura 4.6: Duas barras imantadas se repelindo.

Ainda com o objetivo de reproduzir todos os efeitos magnéticos já conhecidos utilizando correntes elétricas, Ampère tentou simular esta situação enrolando duas hélices em um instrumento

parecido com o da Figura 3.10 (a). A configuração é a mesma, mas agora as correntes descrevem trajetórias em hélice em vez de trajetórias retilíneas. Ele não deixou reproduções deste instrumento mas por suas descrições podemos representá-lo como na Figura 4.7.

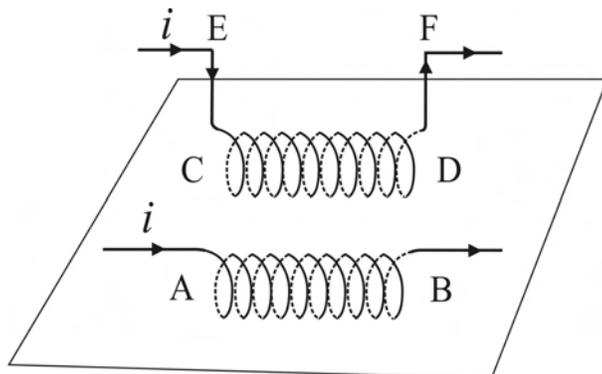


Figura 4.7: Interação entre duas hélices.

As hélices AB e CD estão em um mesmo plano horizontal. A hélice AB é fixa no laboratório enquanto que a hélice CD pode girar ao redor do eixo horizontal EF acima dela, se aproximando ou se afastando de AB . Com esta configuração e com os sentidos das correntes como indicado nesta Figura, Ampère esperava reproduzir a repulsão entre dois ímãs como mostrado na Figura 4.6. Ao realizar a experiência em outubro de 1820 Ampère observou que as hélices se atraíam em vez de se repelirem!

Este é o segundo “fato novo” mencionado anteriormente. Ele foi totalmente surpreendido por este fato inesperado. O resultado desta experiência foi frontalmente contrário às suas expectativas.

Ele então refletiu sobre o motivo pelo qual as hélices anteriores, como as hélices da Figura 3.11 (a), se comportavam como uma barra imantada comum, ao passo que as hélices da Figura 4.7 não apresentavam este comportamento. Concluiu que o motivo era que nas primeiras hélices o prolongamento das hélices retornava por dentro delas, fato que já não ocorria nas novas hélices. Ele havia inicialmente desprezado erroneamente as contribuições longitudinais das correntes nas hélices da Figura 4.7. Nos circuitos iniciais como o da Figura 3.11 (a), a corrente depois de percorrer a hélice voltava por dentro do tubo de vidro, cancelando assim o efeito longitudinal da corrente na própria hélice. Ele havia feito este arranjo nas primeiras hélices de maneira casual, apenas para facilitar suas rotações ao redor do eixo horizontal, sem prever esta contribuição longitudinal. Podemos compreender sua expectativa inicial em relação às hélices do segundo aparelho (Figura 4.7) observando a Figura 4.8 (a).

As correntes fluem no mesmo sentido em duas hélices paralelas. Se olharmos as hélices de frente, é como se tivéssemos correntes circulares fluindo no mesmo sentido (as duas no sentido horário ou as duas no sentido anti-horário), Figura 4.8 (b). Como correntes em sentidos opostos se repelem, enquanto que correntes em mesmo sentido se atraem, e como estas forças diminuem de intensidade com o aumento da distância entre os elementos, Ampère esperava que estas hélices se repelissem.

Ao observar que elas se atraíam, concluiu que não podia desprezar a componente longitudinal de cada hélice. Ou seja, cada hélice da Figura 4.7 deve ser considerada como a soma de uma corrente retilínea mais uma corrente puramente circular como a de um solenóide cilíndrico, sem componente longitudinal, Figura 4.9. Como curiosidade vale mencionar aqui que a própria palavra “solenóide” foi criada por Ampère, sendo derivada da palavra grega que significa “canal,”

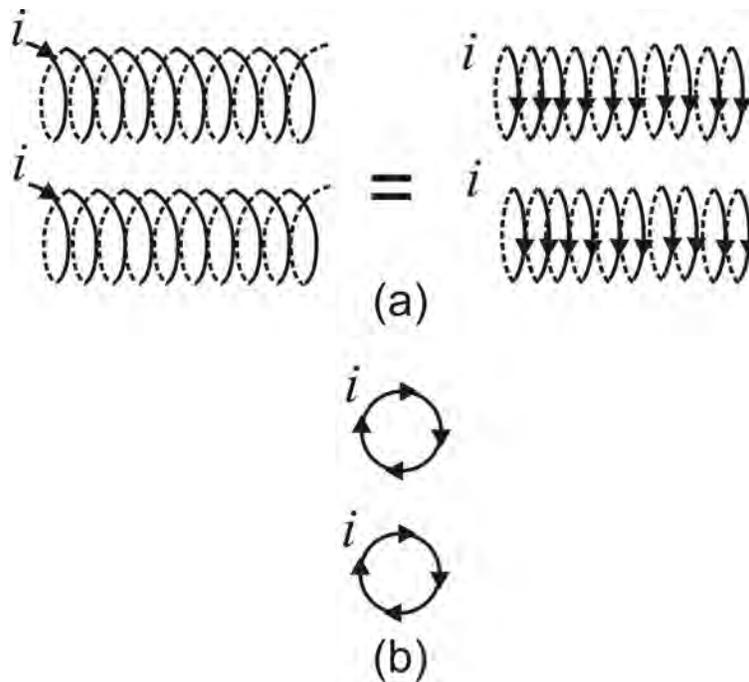


Figura 4.8: (a) Ampère esperava inicialmente que cada uma das hélices fosse equivalente a um solenóide cilíndrico. (b) Seções retas de dois solenóides cilíndricos lado a lado. As correntes mais próximas fluem em sentidos contrários. Portanto, a expectativa de Ampère era de que haveria uma repulsão entre as hélices.

[Amp24c]. A interação entre duas destas hélices deve então ser considerada como uma interação quádrupla. Isto é, (I) a corrente retilínea da primeira hélice interagindo com a corrente retilínea da segunda hélice; mais (II) a corrente retilínea da primeira hélice interagindo com a corrente em um solenóide da segunda hélice; mais (III) a corrente em um solenóide da primeira hélice interagindo com a corrente retilínea da segunda hélice; mais (IV) a corrente em um solenóide da primeira hélice interagindo com a corrente em um solenóide da segunda hélice. Correntes retilíneas de mesmo sentido se atraem, enquanto que correntes circulares de mesmo sentido em solenóides paralelos finitos se repelem. Qual destas forças vai sobressair vai depender do raio de cada hélice. No caso da experiência de Ampère descrita na Figura 4.7 foi a atração longitudinal que se sobrepôs à repulsão. Isto ocorreu devido ao pequeno raio das hélices. Esta atração contrariou totalmente suas expectativas iniciais.

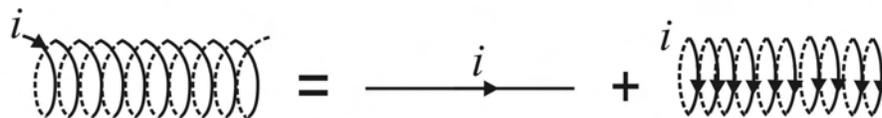


Figura 4.9: Uma hélice sem uma corrente de retorno é equivalente a uma corrente reta mais uma corrente puramente circular como em um solenóide cilíndrico.

Vai aqui um trecho bem interessante escrito por Ampère, [Amp20f], nossa ênfase em itálico:

Se o fio condutor retornar por este eixo que forma a hélice, ao passar dentro de um tubo de vidro colocado nesta hélice para isolá-lo das espiras que compõem a

hélice, a corrente desta parte retilínea do fio condutor estará em sentido contrário da corrente que equivaleria à parte da ação da hélice que ocorre paralelamente ao seu eixo, [o fio condutor retilíneo dentro do tubo] repelirá o que esta [parte retilínea equivalente da hélice] atrairia, e atrairá o que esta repeliria. Conseqüentemente, esta última ação será destruída pela porção retilínea do condutor. E somente resultará da união deste [fio retilíneo] com a hélice, apenas a ação das correntes circulares transversais, perfeitamente semelhantes à [ação] de um ímã. Esta união existia no instrumento representado na Figura 3 [nossa Figura 3.11 (a)], *sem que eu tenha previsto as vantagens*, e é por isso que [este instrumento] me apresentou exatamente os efeitos de um ímã, e que as hélices onde uma porção retilínea do condutor não retornava pelo eixo [como na Figura 4.7], me apresentaram, além disso, os efeitos de um condutor retilíneo igual ao eixo destas hélices. Como o raio das superfícies cilíndricas sobre as quais [a hélice] se encontra era bastante pequeno nas hélices que utilizei, eram os efeitos no sentido longitudinal que ficavam mais perceptíveis — *fenômeno que muito me surpreendeu antes que eu tivesse descoberto a causa*.

Ou seja, para cancelar o efeito longitudinal da corrente nas hélices da Figura 4.7, é necessário que a corrente retorne ao longo do eixo, como na hélice da Figura 3.11 (a). Na Figura 4.10 apresentamos a equivalência entre a hélice da Figura 3.11 (a) e um solenóide cilíndrico.

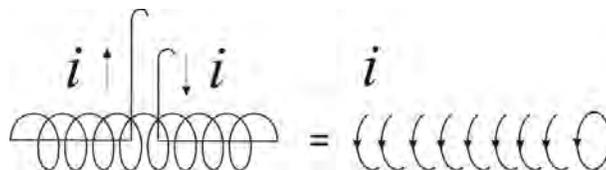


Figura 4.10: Uma hélice com uma corrente de retorno é equivalente a uma corrente puramente circular como em um solenóide cilíndrico.

Este fato levou Ampère a uma lei ou princípio que tem recebido vários nomes: “Lei das correntes sinuosas,” [Jou85, pág. 134, nota 1], “lei da adição geométrica dos elementos de corrente,” [Blo82, pág. 86], “princípio da adição vetorial dos elementos de corrente,” [Blo82, pág. 88], e “lei da adição,” [Blo82, págs. 88-96] e [Hof96, págs. 246-250]. Vamos chamá-la aqui de *lei da adição*. Ela afirma que a força exercida por um elemento de corrente com comprimento ds e intensidade i sobre um outro elemento de corrente com comprimento ds' e intensidade i' é igual à soma das forças exercidas sobre ds' pelas componentes de ds em duas ou mais direções, com cada uma destas componentes também sendo percorridas por uma corrente de intensidade i . Ampère se referia a isto como uma “lei” ou “princípio.” Ele apresentou-a pela primeira vez à Academia de Ciências em 6 de novembro de 1820. Expressou-a nos seguintes termos, [Amp20e]:

Esta lei consiste em que caso se considere uma porção infinitamente [pequena] de corrente elétrica, e que caso se considere no mesmo ponto do espaço outras porções infinitamente pequenas de correntes elétricas que sejam em relação à primeira [porção], em intensidade e em direção, o mesmo que as componentes de uma força são em grandeza e em direção relativamente a esta força, a reunião destas porções de correntes elétricas, correspondentes às forças componentes, exercerá, em todo caso, precisamente a mesma ação que corresponde à resultante destas porções.

Apresentou-a também da seguinte maneira, [Amp20f]:

Na Figura 4.12 apresentamos os ângulos α , β e γ sobrepostos na Figura 4.11. Para representar o ângulo γ juntamos os centros dos dois elementos de corrente e os colocamos no plano do papel. A situação das Figuras 4.11 e 4.12 é análoga à da Figura 4.4.

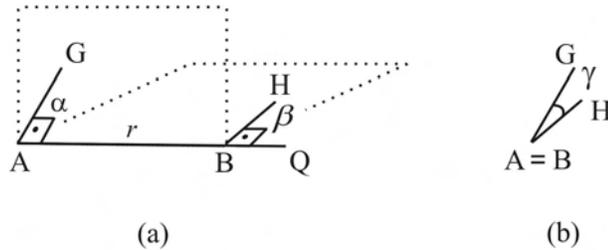


Figura 4.12: Os ângulos α , β e γ sobrepostos à Figura 4.11. (a) Temos $GAB = \alpha = \pi/2$ rad e $HBQ = \beta = \pi/2$ rad, onde o ponto Q está ao longo do prolongamento de AB . (b) Sobreposição de AG com BH , com A coincidindo com B , mostrando o ângulo $GAH = \gamma$.

Nas Figuras 4.11 e 4.12 os pontos A e B representam os centros de dois elementos de corrente. Ampère representa apenas metade de cada elemento. Os elementos AG e BH são perpendiculares ao segmento de reta AB que une seus centros. Ampère considera inicialmente dois planos $ACDB$ e $AEFB$ ortogonais entre si. Decompõe então AG em AM mais MG , enquanto que BH é decomposto em BP mais PH . É uma Figura como esta que Ampère tinha em mente ao afirmar que “é necessário conceber no espaço uma linha $[AG]$ que representa em grandeza e direção a resultante de duas forças que são representadas similarmente por duas outras linhas $[AM$ e $MG]$.” Ele vai usar a lei da adição substituindo a interação entre AG e BH pela soma de quatro interações, a saber: Entre AM e BP , entre AM e PH , entre MG e BP , e entre MG e PH .

A situação das Figuras 4.11 e 4.12 é um caso particular no qual $\alpha = \beta = \pi/2$ rad. Ampère considera também o caso geral com a Figura 4.13, [Amp22j, Fig. 22] e [Amp85i, pág. 265, Fig. 8].

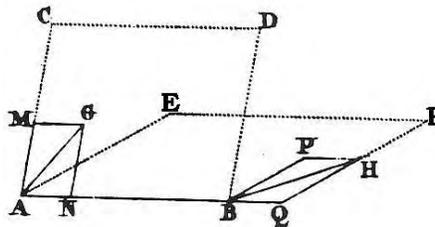


Figura 4.13: Figura de Ampère com a qual se pode ilustrar a lei da adição no caso geral. Os planos $ABDC$ e $AQFE$ fazem um ângulo γ entre si.

Na Figura 4.14 apresentamos os ângulos α , β e γ sobrepostos sobre a Figura 4.13 seguindo as especificações de Ampère.

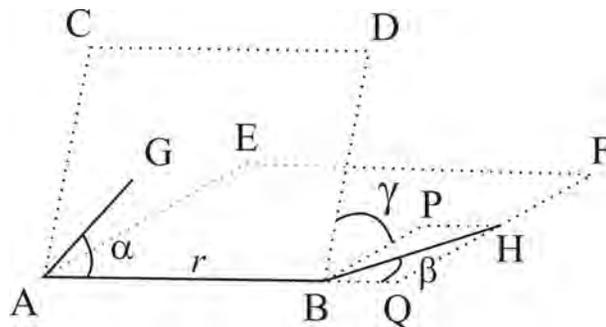


Figura 4.14: Os ângulos α , β e γ sobrepostos à Figura 4.13. Temos $GAB = \alpha$, $HBQ = \beta$ e $DBP = \gamma$.

Nas Figuras 4.13 e 4.14 temos o caso geral no qual os elementos AG e BH não são mais perpendiculares a esta reta AB . Neste caso Ampère vai considerar dois planos $ACDB$ e $AEFQ$ formados pela reta que une os centros dos elementos com a direção de cada um deles. O ângulo entre estes planos é dado por γ . Ele decompõe AG em AM mais MG , enquanto que BH é decomposto em BP mais PH . Novamente usa a lei da adição para substituir a interação entre AG e BH pela soma das quatro interações entre suas componentes respectivas.

4.2.2 Princípio da Não Existência de Interação entre Elementos Ortogonais

Para chegar à sua primeira versão publicada da interação entre dois elementos de corrente, Ampère usa ainda um outro princípio. Neste caso é um princípio de simetria, a saber, que não há interação entre elementos ortogonais, [Amp20e], [Ampg], [Blo82, págs. 92-94] e [Hof96, pág. 251]. Em particular, Ampère considera como nulas as interações entre os elementos ds e ds' mostrados na Figura 4.15 (a) e (b). Nesta Figura ds' é normal à reta que une os dois elementos, $\beta = \pi/2$ rad. Além disso, o centro de ds' está no plano formado por ds e pela reta que une os centros dos dois elementos, sendo este o plano do papel. Na Figura 4.15 (a) temos $\alpha = \pi/2$ rad, $\gamma = \pi/2$ rad, com ds ortogonal a ds' e à reta que une os dois elementos. Na Figura 4.15 (b) temos $\alpha = \pi$ rad, γ indefinido, com ds ao longo da reta que une os dois elementos. Já na Figura 4.15 (c) temos $0 \text{ rad} < \alpha < \pi \text{ rad}$ e $\gamma = \pi/2$ rad. Veremos depois que Ampère também vai considerar nula a força entre os dois elementos de corrente neste caso (c).

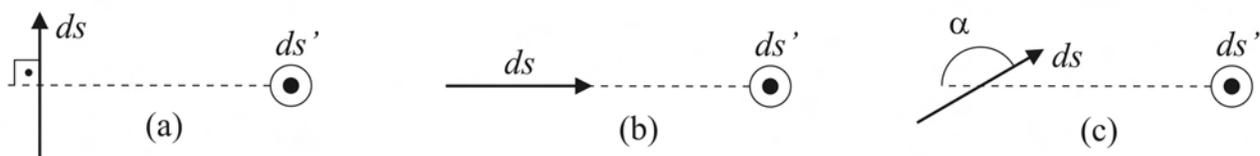


Figura 4.15: Ampère considera nulas as interações entre elementos ortogonais.

Este princípio da não existência de interação entre elementos ortogonais foi expresso da seguinte maneira na *chemise* 162 e no resumo que publicou de sua apresentação à Academia de Ciências em 4 de dezembro de 1820, [Ampg] e [Amp20e]:

Além da lei anunciada acima [lei da adição], o Sr. Ampère admite como um resultado necessário de todas as circunstâncias que apresentam os efeitos da ação [entre dois

elementos de corrente ds e ds'] que se quer exprimir analiticamente, que ela é nula em todos os casos em que uma das duas pequenas porções de correntes elétricas [por exemplo ds] se encontra no plano que passa pelo centro da outra perpendicularmente à sua direção [isto é, com ds perpendicular a ds']. De resto, isto [esta ausência de interação] não mais ocorrerá, como resulta da própria expressão à qual chegou, se o comprimento desta última porção de corrente elétrica não for mais infinitamente pequena.

Em termos da Figura 4.15, temos que Ampère está afirmando que é nula a interação nos casos (a) e (b). Neste primeiro trabalho Ampère não justifica este princípio de simetria. Veremos na Subseção 4.2.4 como ele justificou este princípio em um trabalho posterior.

4.2.3 O Artigo de Dezembro de 1820

Vamos ver agora como Ampère obteve sua primeira expressão pública da interação entre dois elementos de corrente utilizando a lei da adição e este princípio de simetria, [Ampg] e [Amp20e]. Ele se refere a g e h como sendo as “intensidades” das duas correntes elétricas, não estando claro se está se referindo ao que chamará futuramente de intensidades i e i' , aos comprimentos ds e ds' , ou aos produtos ids e $i'ds'$. Inicialmente vamos considerar o caso em que os dois elementos de corrente são ortogonais à reta que os une, como nas Figuras 4.11 e 4.12. Ampère chama o ângulo \widehat{GAE} de ζ , enquanto que o ângulo \widehat{HBF} é chamado de η . Utilizando a lei da adição, Ampère expressa as duas componentes de AG , AM e MG , como $g \sin \zeta$ e $g \cos \zeta$, enquanto que as duas componentes de BH , BP e PH , ficam sendo $h \sin \eta$ e $h \cos \eta$. Para que todas as componentes dos elementos tenham um mesmo centro, desloca MG para AN , enquanto que PH é deslocada para BQ . Justificou isto devido aos pequenos valores destes deslocamentos comparados à distância entre os elementos. Ficou então com quatro interações entre as componentes. Havia duas interações entre elementos ortogonais, a saber, entre AM e BQ , assim como entre AN e BP . Mas pelo princípio de simetria apresentado na Subseção 4.2.2, cada uma destas interações era nula, Figura 4.15 (a). Havia também duas atrações entre elementos paralelos, a saber, entre AM e BP , assim como entre AN e BQ . A soma destas interações foi representada da seguinte maneira:

$$\frac{gh (\cos \zeta \cos \eta + \sin \zeta \sin \eta)}{r^2} = \frac{gh \cos(\zeta - \eta)}{r^2} = \frac{gh \cos \gamma}{r^2}. \quad (4.4)$$

Nesta equação $\gamma = \zeta - \eta$ é o ângulo entre os planos formados por cada elemento com a reta que os une.

Este é um resultado extremamente interessante. Vimos na Seção 4.1 que Ampère havia chegado na proporcionalidade em $\cos \gamma$ ao considerar a experiência da Figura 3.12 entre condutores retilíneos de comprimento finito, além de utilizar um princípio de simplicidade matemática extremamente subjetivo. Agora está obtendo o mesmo resultado considerando diretamente a lei da adição para elementos de corrente e um princípio de simetria bem específico, a saber, que dois elementos não interagem quando são ortogonais entre si e também em relação à reta que os une. A força qualitativa observada na experiência da Figura 3.12 está representada na Figura 4.2. Esta observação experimental era compatível com qualquer potência ímpar de $\cos \gamma$, ou com uma soma qualquer de termos contendo estas potências ímpares. Por outro lado, utilizando agora sua lei da adição, Ampère está obtendo apenas a primeira potência de $\cos \gamma$. Ou seja, não precisa mais apelar para o princípio da simplicidade matemática para abandonar as outras potências, como havia feito anteriormente. Basta agora utilizar a lei da adição. Deve-se lembrar que ele

chegou à lei da adição pelo comportamento experimental distinto apresentado pelos dois tipos de hélice, a da Figura 3.11 (a) com compensação longitudinal, e a da Figura 4.7 sem compensação longitudinal. E é exatamente isto que Ampère afirma na continuação de seu trabalho, [Ampg] e [Amp20e]:

Tal é no primeiro caso o valor da ação procurada, ela é atrativa quando $\gamma < \pi/2$, nula com o co-seno de γ quando $\gamma = \pi/2$, como deve ser de acordo com o que foi dito mais acima, e ela muda para repulsão quando $\gamma > \pi/2$, já que então $\cos \gamma$ é negativo, o que está de acordo com a experiência. Enfim, quando $\gamma = \pi$, encontra-se que a ação exercida é expressa por $-gh/r^2$, isto é, uma repulsão igual à atração que ocorre quando se faz $\gamma = 0$. Toda potência ímpar de $\cos \gamma$, colocada no lugar de $\cos \gamma$, daria igualmente estes últimos resultados, mas não estaria de acordo com a lei [de adição] exposta na memória lida à Academia de Ciências na seção de 6 de novembro [de 1820], sendo que a fórmula precedente [dependendo apenas da primeira potência em $\cos \gamma$], como se vê, é uma consequência necessária desta lei.

Ampère considera então o caso geral representado pelas Figuras 4.13 e 4.14. Ele chama o ângulo GAN de α , o ângulo HBQ de β , e o ângulo entre os planos $ACDB$ e $AEFQ$ de γ . Neste caso substitui cada elemento por duas componentes, uma ao longo da reta que une os dois elementos e outra perpendicular a esta reta. Isto é, AG é decomposto em $AM = AG \sin \alpha$ e em $MG = AG \cos \alpha$, sendo MG deslocada para AN . Já o elemento BH é decomposto em $BP = BH \sin \beta$ e em $PH = BH \cos \beta$, sendo PH deslocada para BQ . Sendo as intensidades de corrente g e h , estas quatro componentes são expressas por Ampère como $g \sin \alpha$, $g \cos \alpha$, $h \sin \beta$ e $h \cos \beta$, respectivamente. Pelo princípio de simetria apresentado na Subseção 4.2.2, Figura 4.15 (b), Ampère considera nula a interação entre AN e BP , assim como considera nula a interação entre AM e BQ . A interação entre AM e BP se reduz ao caso anterior. Sendo γ o ângulo entre os planos $ACDB$ e $AEFQ$, esta interação se reduz a:

$$\frac{(g \sin \alpha)(h \sin \beta) \cos \gamma}{r^2} = \frac{gh \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma}{r^2}. \quad (4.5)$$

Resta ainda a interação entre os elementos colineares AN e BQ . Ampère então supõe que a ação entre estes elementos colineares é “uma parte representada pela fração n/m da parte que as mesmas porções pequenas de correntes exerceriam na situação mais favorável à ação mútua entre elas, isto é, quando elas são paralelas entre si e perpendiculares à linha que une seus centros,” [Ampg] e [Amp20e]. Ou seja, a interação entre os elementos colineares é dada por:

$$\frac{n}{m} \frac{(g \cos \alpha)(h \cos \beta)}{r^2}. \quad (4.6)$$

A força total entre os elementos AG e BH é então dada por:

$$\frac{gh}{r^2} \left(\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \frac{n}{m} \cos \alpha \cos \beta \right). \quad (4.7)$$

Inicialmente Ampère supôs que era nula a interação entre dois elementos colineares, sem explicar o motivo pelo qual pensava assim, [Ampg]:

Suporei também que a ação atrativa ou repulsiva de duas porções de corrente infinitamente pequenas é nula em uma outra circunstância, quando elas estão ao longo de uma mesma linha reta.

Esta situação é representada, por exemplo, pelos elementos de corrente A e B da Figura 2.5. No caso de elementos ortogonais entre si, ele havia justificado a suposição da falta de interação entre eles pelo princípio de simetria, como vimos na Subseção 4.2.2. Mas ele não apresenta nenhum motivo pelo qual tenha concluído pela falta de interação entre elementos colineares. De qualquer forma, ele vai manter sua crença de que $n/m = 0$ na Eq. (4.7), ou $k = 0$ nas Eqs. (2.4) e (2.5), até o meio de 1822, quando conclui pela primeira vez que $k = -1/2$.

Mas ao publicar esta lei não coloca explicitamente $n/m = 0$, deixando-a desta forma genérica. Diz ainda que esta é a fórmula mais geral que está de acordo com sua lei da adição. Mas não deixa de expressar sua crença ou ponto de vista em relação a este fator, [Ampg] e [Amp20e]:

Caso se queira supor $n = m$, se encontraria que o fator gh/r^2 torna-se igual ao cosseno do ângulo formado pelas direções das duas pequenas porções de correntes, de maneira que a ação seria nula mesmo entre duas correntes de comprimento finito quando suas direções formam um ângulo reto, o que é contrário à experiência, ela mostra evidentemente que n é bem menor do que m , e parece pouco provável que n não seja absolutamente nula. [...] Mas o Sr. Ampère pensa, entretanto, que se possa, sem inconveniente, reduzir esta fórmula à [Eq. (4.5)]. É sob esta forma que ele a havia comunicado a vários sábios antes da leitura de sua Memória à Academia.

O que o fez hesitar em relação a afirmar a inexistência de interação entre elementos colineares foi uma experiência realizada por Gay-Lussac (1778-1850) e Thénard (1777-1857). Eles tinham uma pilha potente com um fio ligado ao terminal positivo e com um outro fio ligado ao terminal negativo. Ao aproximarem as extremidades livres destes dois fios surgia uma descarga elétrica entre eles fechando o circuito. Observaram que no momento desta descarga, antes dos fios se tocarem, surgia uma forte atração entre os fios. Aparentemente Gay-Lussac e Thénard nunca publicaram os resultados de sua experiência, mas ela é mencionada diversas vezes por Ampère, [Ampg], [Ampb] e [Amp20e]. No caso de dois elementos colineares com corrente no mesmo sentido temos $\alpha = \beta = 0$ rad (ou $\alpha = \beta = \pi$ rad) e γ indefinido. Caso a atração observada por Gay-Lussac e Thénard fosse devida a uma interação direta entre elementos de corrente, a Eq. (4.7) indicaria $n/m > 0$. Mas Ampère encontrou uma explicação alternativa para esta experiência ao atribuir a atração observada entre os fios ao vácuo criado no ar pela passagem da eletricidade, [Blo82, pág. 94], [Hof82, págs. 294-5, 300 e 361] e [Hof96, págs. 237 e 261-3]. Na *chemise* 189 Ampère afirma o seguinte, [Ampb]:

Foi por não haver encontrado esta explicação para a experiência dos Srs. Gay-Lussac e Thénard, que adiei por 15 dias a publicação de meu primeiro trabalho no qual utilizava apenas o termo $\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$, e que me fez apresentar com dúvida que o outro termo fosse nulo na seção de 4 de dezembro [de 1820].

Ampère publicou suas reflexões sobre esta experiência no resumo da apresentação que fez à Academia de Ciências em 4 de dezembro de 1820. Ao se perguntar se existe alguma força entre dois elementos colineares, Ampère responde da seguinte forma, [Amp20e]:

O Sr. Ampère não acredita [nesta possível ação entre dois elementos colineares], de acordo com o conjunto dos fenômenos, especialmente depois que ele notou que uma observação dos Srs. Gay-Lussac e Thénard, que parecia indicar uma ação deste tipo entre as extremidades de dois fios condutores da grande pilha da *Ecole Polytechnique*, quando a corrente parece se estabelecer antes que haja um contato real entre

elas, pode ser explicada pela pressão da atmosfera, devido a um vácuo formado pela corrente passando de uma [extremidade de um fio] à outra [extremidade do outro fio], [...]

Ou seja, embora Ampère apresente publicamente sua força na forma da Eq. (4.7), não deixa de expressar seu ponto de vista de que o segundo termo é exatamente nulo, ou então de que ele possui uma intensidade muito menor do que o primeiro termo, caindo então na forma da Eq. (4.5). É esta última fórmula dada pela Eq. (4.5) que ele havia apresentado oralmente a alguns membros da Academia de Ciências antes de sua apresentação em 4 de dezembro de 1820. Passa a trabalhar com ela teoricamente a partir de então, integrando-a para explicar experiências já conhecidas e para fazer previsões de novos resultados experimentais. Vai utilizar esta fórmula simplificada em uma série de Memórias lidas para a Academia de Ciências em 11 e 26 de dezembro de 1820, assim como em 8 e 15 de janeiro de 1821, ver [Amp21a]. Embora não tenha publicado todas estas Memórias, os manuscritos do que apresentou ainda existem nos arquivos da Academia de Ciências.

4.2.4 O Princípio de Simetria

Apresentamos agora a maneira como Ampère justificou a inexistência de interação não apenas entre elementos ortogonais, como nas Figuras 4.15 (a) e (b), mas também no caso geral da Figura 4.15 (c) da Subseção 4.2.2. Para isto ele utilizou um princípio de simetria bem poderoso que expressou da seguinte maneira em um trabalho que publicou em 1823 no *Recueil*, [Amp22j, págs. 208-211] e [Amp85i, págs. 245-247]:

O primeiro fato geral que deduzi de minhas experiências sobre a ação mútua entre dois condutores voltaicos consiste em que, se duas porções de condutores voltaicos [com cada uma delas orientada de maneira arbitrária no espaço] agem uma sobre a outra, e caso se venha a mudar a direção da corrente elétrica em uma delas, sem fazer quaisquer mudanças em suas posições respectivas, a ação que antes se exercia entre elas, se era atrativa, transforma-se em uma ação repulsiva igual e, se a ação era repulsiva, [transforma-se] em uma atração de mesma intensidade. Apliquei este resultado, confirmado por todas as experiências que havia feito com correntes elétricas de um comprimento finito, a duas porções infinitamente pequenas destas correntes, que não podia submeter imediatamente à experiência, e tirei disto esta conclusão, que a ação mútua entre duas porções infinitamente pequenas de fios condutores é necessariamente nula em todas as vezes que não exista, em suas posições respectivas, qualquer circunstância que distinga um do outro os dois sentidos de acordo com os quais uma destas duas pequenas porções possa ser percorrida pela corrente elétrica; pois então, ao reverter o sentido desta corrente, a ação, se ela existisse, deveria permanecer a mesma; atrativa se ela fosse atrativa, e repulsiva se ela fosse repulsiva, enquanto que, de acordo com o fato geral do qual acabo de falar, a atração se transforma, ao contrário, neste caso, em repulsão e a repulsão [se transforma] em atração. Assim, é apenas quando a situação respectiva das duas pequenas porções de fios condutores apresenta circunstâncias que distingam, em cada uma destas porções, os dois sentidos de acordo com os quais a corrente elétrica possa os percorrer alternativamente, que é possível que seja exercido entre elas uma ação atrativa ou repulsiva segundo o sentido, determinado pelas circunstâncias, que seja dado à corrente elétrica.

Considerando então duas pequenas porções de corrente elétrica, uma em um plano e a outra dirigida perpendicularmente a este plano, me foi fácil de perceber em primeiro lugar que, quando esta última porção está acima ou abaixo do plano, os dois sentidos segundo os quais ela pode ser percorrida pela corrente elétrica são distintos um do outro por esta circunstância, a saber, que em um caso esta corrente está se aproximando do plano, e no outro caso está se afastando dele; conseqüentemente, nada se opõe a que exista uma ação, seja atrativa ou seja repulsiva, entre as duas pequenas porções [porções] que se considera, desde que o sentido da corrente da porção que está no plano também possa ser determinada pelas circunstâncias dependentes da situação respectiva destas duas pequenas porções, o que logo examinarei. Em segundo lugar [me foi fácil de perceber] que se, ao contrário, o centro da porção infinitamente pequena perpendicular ao plano se encontra neste plano, sendo tudo igual dos dois lados deste plano, não existe mais qualquer diferença entre os dois sentidos de acordo com os quais a corrente elétrica possa percorrer esta porção que dependa de sua situação relativamente àquela [porção] que está no plano, e as duas porções de fios condutores não podem mais exercer qualquer ação uma sobre a outra; resultado que se pode enunciar de forma geral da seguinte maneira: a ação atrativa ou repulsiva entre duas porções infinitamente pequenas de correntes elétricas torna-se necessariamente nula quando a situação relativa delas no espaço é tal que se passarmos pelo centro de uma delas um plano perpendicular à sua direção, a reta que representa a direção da outra porção se encontra totalmente neste plano.

Neste trecho Ampère está utilizando a expressão “sentido da corrente elétrica” com o quarto significado discutido na Seção 2.3. O que ele está concluindo com este princípio de simetria é que não existe interação entre os dois elementos de corrente ds e ds' mostrados na Figura 4.15 não apenas nos casos (a) e (b), mas também no caso geral (c).

É com este princípio de simetria, mais sua lei da adição, que fica então justificada a dedução apresentada na Subseção 4.2.3 da interação entre dois elementos de corrente na forma da Eq. (4.7).

4.3 Casos de Equilíbrio

4.3.1 Métodos para Obter a Força entre Elementos Infinitesimais

Uma das principais contribuições de Ampère para a ciência experimental foi sua criação do que chamou de “casos de equilíbrio” e das conseqüências teóricas que conseguiu obter destas experiências, [Amp26c, págs. 13-27] e [Amp23b, Amp90, págs. 185-199]. Estes casos de equilíbrio também receberam o nome de “método de zero,” [Max54, Vol. 2, artigo 503, pág. 159], [Blo82, págs. 101 e 127] e [Dar00, pág. 11], e de “experiências de zero,” [Tri65, pág. 217]. Os instrumentos que Ampère utilizou nestas experiências foram chamados de “aparelhos de equilíbrio,” [Hof96, págs. 252-261 e 293-302].

O objetivo de Ampère era o de determinar a força entre dois elementos de corrente. Em 1822 ele menciona que existem dois métodos para chegar na expressão matemática desta força, [Amp22i]. A primeira é medir diretamente a força e o torque entre condutores de tamanho finito, a distâncias e orientações diferentes. Em seguida a isto é feita uma hipótese inicial de como deve ser a força entre os elementos de corrente. Então integra-se esta interação infinitesimal para ver se concorda com os valores obtidos experimentalmente para a força e para o torque entre

condutores finitos. Caso isto não ocorra, altera-se a hipótese inicial até que ocorra a concordância entre o valor teórico integrado e o valor obtido experimentalmente. Este é um dos procedimentos usuais para se obter uma expressão matemática da força em diferentes situações físicas, sendo usado desde antes de Ampère até os dias de hoje. Foi adotado, por exemplo, por Biot em suas pesquisas eletromagnéticas.

Ampère então introduz um novo procedimento para obter a força infinitesimal entre dois elementos de corrente, [Amp22i]:

Mas existe uma outra maneira de alcançar mais diretamente o mesmo objetivo. Foi esta [maneira] que segui desde então e que me conduziu aos resultados que desejava. Ela consiste em constatar, pela experiência, que as partes móveis dos condutores permanecem, em certos casos, exatamente em equilíbrio entre forças iguais, ou entre torques iguais, qualquer que seja além disto a forma da parte móvel, e de procurar diretamente, com a ajuda do cálculo, qual que deve ser o valor da ação mútua entre duas porções infinitamente pequenas, para que o equilíbrio seja efetivamente independente da forma da parte móvel.

Ou seja, neste segundo método não se mede nem a força nem o torque sobre um circuito finito devido a outros circuitos finitos. Em vez disto, coloca-se um circuito móvel entre dois circuitos fixos em relação ao laboratório exercendo forças ou torques opostos sobre o circuito móvel. Encontram-se as condições e as simetrias apropriadas tal que o circuito móvel permaneça em equilíbrio sobre a ação destas duas forças opostas, ou destes dois torques opostos, apesar de o circuito do meio ter liberdade de movimento. Ou seja, nos casos de equilíbrio de Ampère a força resultante é exatamente nula sobre o circuito móvel, não se medindo nem se observando nenhuma força sobre ele (ou então o torque resultante é exatamente nulo sobre ele). Utiliza-se então um cálculo teórico para obter qual tem de ser a força entre os elementos de corrente para que ocorra este equilíbrio.

Para que o método funcione é necessário em primeiro lugar que o circuito central seja realmente móvel quando está sob a ação de forças ou torques pequenos. Ou seja, a falta de movimento do circuito móvel não pode ser devida à existência de forças de atrito agindo sobre ele. Isto pode ser garantido observando seu movimento ou seu giro quando apenas um dos circuitos fixos atua sobre ele. Outra maneira de garantir isto é observando seu movimento ou giro quando a simetria é quebrada (por exemplo, deformando um dos circuitos fixos, ou afastando um dos circuitos fixos da situação simétrica de equilíbrio). Supondo que ocorra o movimento do circuito móvel nestes casos, então pode-se garantir que a falta de movimento nos casos de equilíbrio simétricos é devida realmente a forças e torques opostos agindo sobre ele, e não devido à presença de forças resistivas como o atrito.

Foi utilizando dois destes casos de equilíbrio que Ampère apresentou uma justificativa mais geral para sua lei da adição e para seu princípio de simetria discutidos nas Subseções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.4. Com outros casos de equilíbrio obteve finalmente o valor $k = -1/2$ em sua força, Eq. (2.4). Em três dos casos de equilíbrio mais famosos ele utilizava um tipo especial de espiras retangulares que eram indiferentes ao magnetismo terrestre, chamadas de *espiras astáticas*. Começamos então descrevendo estas espiras.

4.3.2 Espiras Astáticas

As espiras astáticas são espiras móveis com corrente que são indiferentes ao magnetismo terrestre. Elas foram descritas por Ampère pela primeira vez em 1820, [Amp20f]. Como vimos na Seção 3.6,

foi com a versão simplificada do instrumento da Figura 3.12 que Ampère observou pela primeira vez a influência do magnetismo terrestre sobre um condutor com corrente, sem estar inicialmente esperando por isto neste instrumento. Em seguida a isto fez com que fosse construída uma espira circular vertical com 20 cm de diâmetro que se orientava devido ao magnetismo terrestre quando podia girar ao redor de um eixo vertical que passava pelo seu centro, Figura 3.13. Em particular, observou que quando passava uma corrente constante por esta espira vertical, tendo ela liberdade para girar ao redor de seu diâmetro vertical, [Amp21b, pág. 91]:

o plano do condutor circular gira e pára em um plano vertical perpendicular ao meridiano magnético, de maneira que a corrente elétrica, na parte inferior do condutor, fica direcionada de Leste para Oeste, ou da direita para a esquerda de um observador que olhe para o Norte magnético.

Ampère então prevê que pode juntar duas espiras verticais lado a lado, uma com corrente fluindo no sentido horário e outra de mesma área com corrente de mesma intensidade fluindo no sentido anti-horário, tal que o conjunto não irá girar devido ao magnetismo terrestre, mesmo que o conjunto tenha liberdade de rotação em relação a um eixo vertical comum. Confirma isto pela espira retangular mostrada na Figura 4.16 (a).

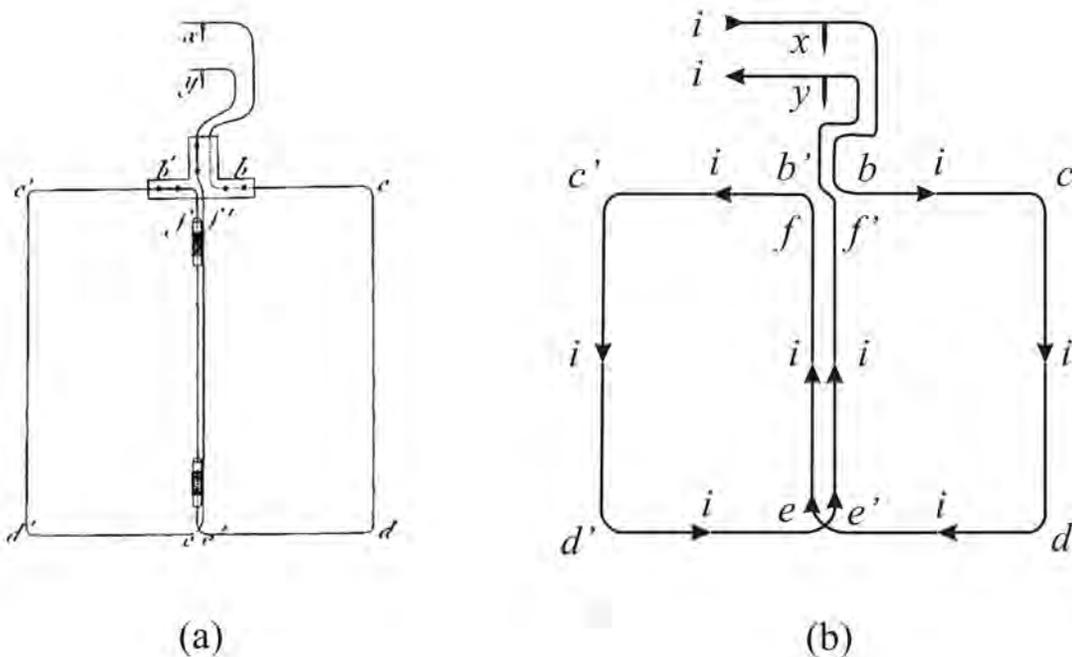


Figura 4.16: (a) Espira astática indiferente ao magnetismo terrestre, [Amp20f] e [Amp21b, Fig. 9]. Esta espira fica em um plano vertical, podendo girar ao redor do eixo de simetria vertical passando por x e por y . (b) Nossa representação do sentido da corrente ao longo de uma espira astática. Ela flui no sentido horário em $bcdef$ e no sentido anti-horário em $b'c'd'e'f'$.

Estas espiras ficam em um plano vertical tendo liberdade para girar ao redor do eixo vertical xy . A corrente flui, por exemplo, no sentido $xbcdefb'c'd'e'f'y$. Ou seja, no sentido horário em $bcdef$ e no sentido anti-horário em $b'c'd'e'f'$. Quando passa uma corrente constante por esta espira, Ampère observa que ela permanece imóvel qualquer que seja a direção primitiva do plano vertical da espira em relação ao meridiano magnético. Em analogia com sua agulha astática,

ver Seção 3.1, que era uma bússola que podia ficar parada indiferente ao magnetismo terrestre, Ampère afirma que desta maneira esta espira torna-se *astática*, [Amp22n, págs. 89-90]. Ou seja, é nulo o torque magnético exercido sobre ela pela Terra, qualquer que seja a orientação de seu plano vertical em relação ao meridiano magnético. Vamos então chamá-las de *espiras astáticas*. No artigo em que apresenta pela primeira vez uma espira astática móvel ele já afirma que ela é indiferente ao magnetismo terrestre, [Amp20f]:

Este último [condutor móvel, a espira astática] gira devido à ação do condutor fixo sem ser influenciado pela ação da Terra, porque existe a compensação entre as ações que ela exerce sobre as metades iguais e opostas do condutor móvel.

4.3.3 Caso de Equilíbrio do Fio Sinuoso

Ampère conseguiu justificar sua lei da adição em bases experimentais mais sólidas e convincentes utilizando um caso de equilíbrio. Até então ela era baseada apenas no comportamento de hélices com ou sem compensação longitudinal. Em 26 de dezembro de 1820 ele descreve para a Academia de Ciências um instrumento no qual uma pequena agulha imantada era suspensa horizontalmente por um fio vertical passando pelo seu centro, estando este fio a iguais distâncias de dois condutores verticais de mesmo comprimento, [Amph], [Amp21a] e [Hof96, págs. 254-6]. Em um destes condutores subia verticalmente uma corrente constante, enquanto que no outro condutor descia uma corrente de mesma intensidade. Para provar sua lei da adição Ampère afirma que a corrente no segundo condutor pode descer verticalmente, ou então descer fazendo pequenos ziguezagues ao redor da vertical, sem com isto alterar a ação resultante sobre a agulha. Então afirma que em vez de dois condutores igualmente distantes da agulha pode usar um único suporte com uma corrente retilínea vertical subindo pelo centro do suporte e outra de mesma intensidade descendo pelo suporte em ziguezague ao redor da primeira corrente. Neste caso afirma que não haveria ação resultante sobre a agulha imantada.

Este é seu primeiro exemplo de uma configuração de equilíbrio, sendo que no momento não dá muita importância a ele. Em 26 de dezembro de 1820 ainda não havia construído este instrumento, embora ele seja mencionado em algumas de suas publicações, [Amp20b] e [Amp21a]. Um outro instrumento análogo foi construído mais tarde, embora não se saiba exatamente quando. A Figura mais famosa deste instrumento é a que Ampère apresentou em 1823 em seu *Recueil*, [Amp22n, págs. 89 e 216], nossa Figura 4.17.

Vamos chamar esta experiência de *caso de equilíbrio do fio sinuoso*. Nesta época Ampère já havia percebido toda a importância destes casos de equilíbrio. Neste aparelho uma mesma corrente vai subir por dois condutores verticais fixos no laboratório, um fio reto QP e um fio sinuoso ou em ziguezague SR . Estes fios estão a iguais distâncias da parte vertical GH de uma espira astática $GCDHG$. A agulha imantada da descrição anterior é substituída nesta montagem por uma espira astática análoga à da Figura 4.16. Ou seja, esta espira é indiferente ao magnetismo terrestre, podendo girar ao redor do eixo vertical FI devido às influências dos condutores verticais QP e SR . A parte principal desta espira estudada por Ampère é o segmento vertical GH , no qual desce a mesma corrente que havia subido em QP e em SR . A parte GH é então repelida tanto por SR quanto por QP . Um esquema indicando os sentidos das correntes nesta experiência aparece na Figura 4.18 (a).

Na Figura 4.18 (b) temos uma visão de cima deste aparelho indicando as letras mais relevantes e as direções das correntes. A espira $GCDHG$ pode girar ao redor do eixo vertical passando por F . A corrente sobe de maneira sinuosa pelo condutor S e sobe verticalmente pelo condutor Q .

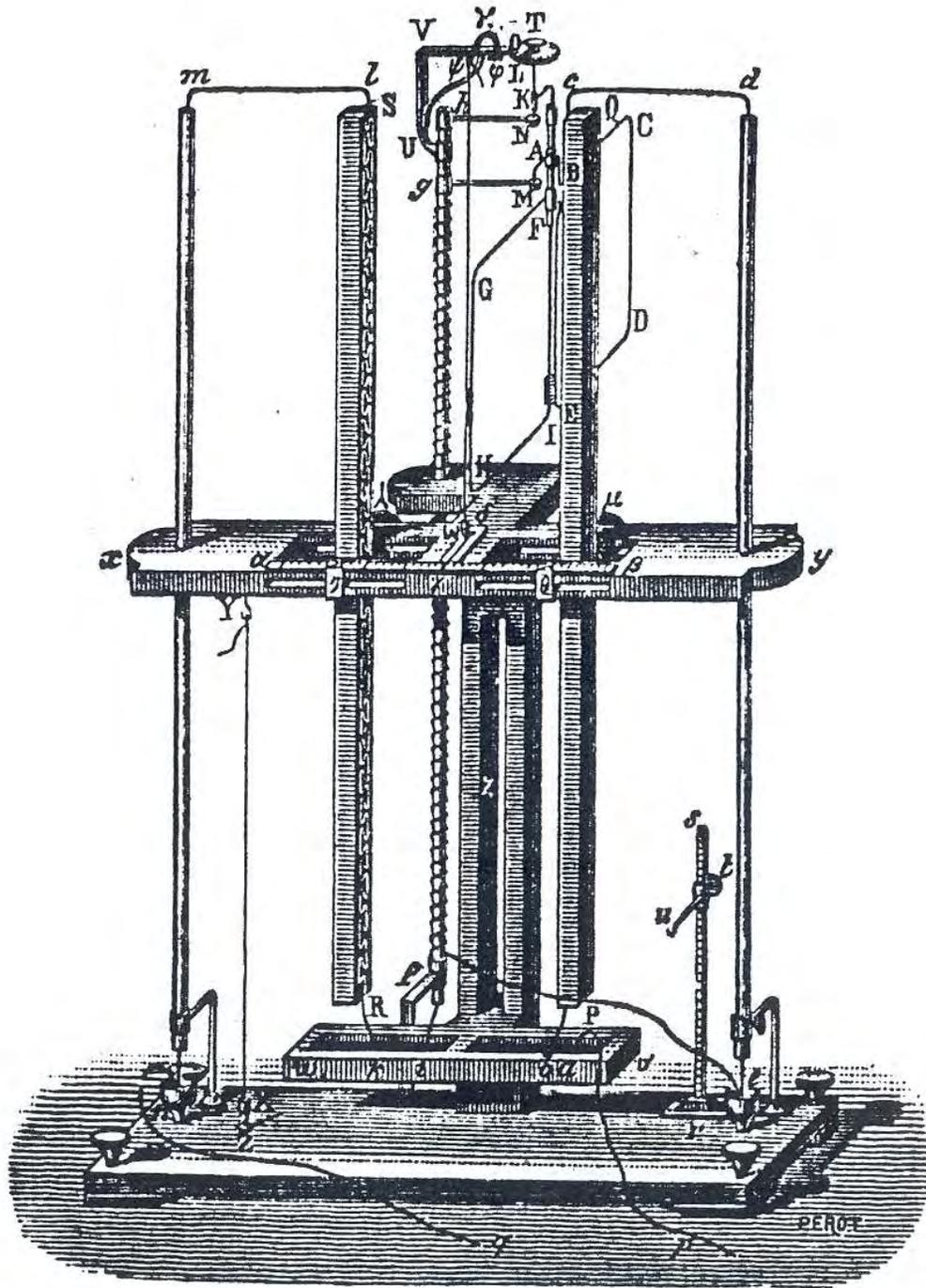


Figura 4.17: Caso de equilíbrio do fio sinuoso, [Amp22n, págs. 89 e 216]. O fio “sinuoso” fixo é SR e o fio retilíneo fixo é PQ . A espira astática $ABCDEFGHIIM$ pode girar ao redor do eixo vertical passando por FI , com a porção móvel vertical GH podendo se aproximar ou se afastar de RS ou de PQ .

O que Ampère observa é que o torque sobre a espira retangular $GCDHG$ é nulo quando a parte GH está a distâncias iguais dos condutores SR e QP , sendo todos eles percorridos pela mesma corrente. É com esta observação experimental que justifica de maneira mais completa

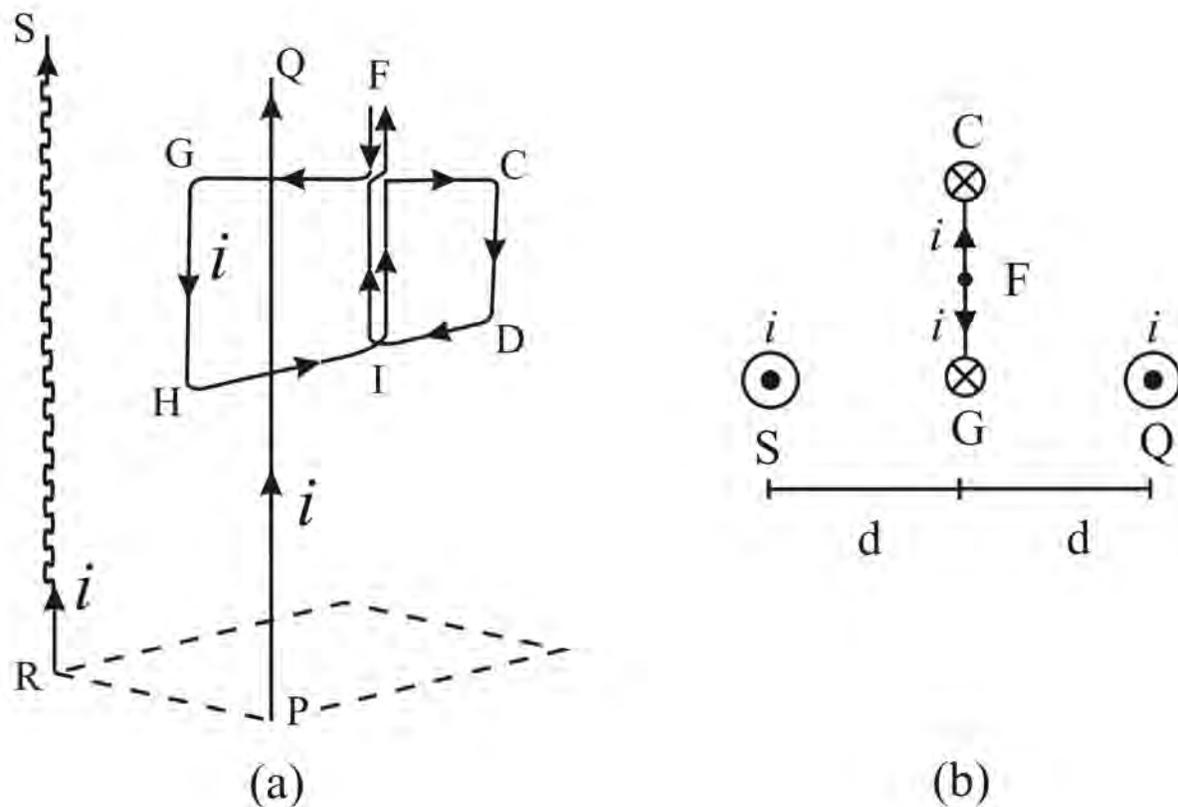


Figura 4.18: (a) Esquema com os sentidos das correntes da Figura 4.17. (b) Caso de equilíbrio do fio sinuoso visto de cima.

sua lei da adição. Palavras de Ampère no *Recueil*, [Amp22n, pág. 90]:

Estabelece-se as comunicações de maneira que a corrente que ocorre nas duas metades do circuito [SR e QP], exerce sobre o condutor móvel ações que tendem a se destruir mutuamente. Como estas duas metades do circuito diferem apenas no fato de que uma parte retilínea de uma metade corresponde a uma parte da outra metade, curvada e circundada como acabamos de dizer, é evidente que, no caso em que as dobras e os contornos desta última metade tornassem sua ação maior ou menor que a ação da parte retilínea da outra metade do circuito, o condutor móvel seria desviado por uma força igual à diferença destas duas ações, enquanto que se é exata a lei enunciada mais acima [isto é, a lei da adição], este condutor [móvel] permanece na situação em que o havíamos colocado antes de estabelecer as comunicações, [a saber], em equilíbrio entre duas forças iguais. É ao constatar que de fato ocorre assim, que a experiência demonstra a exatidão desta lei.

Cronologicamente este foi o primeiro caso de equilíbrio obtido por Ampère utilizando condutores com corrente. No *Théorie* este caso aparece em segundo lugar, [Amp26c, pág. 16 e Fig. 2] e [Amp23b, Amp90, pág. 188 e Fig. 2].

4.3.4 Caso de Equilíbrio das Correntes Anti-Paralelas

O primeiro caso de equilíbrio discutido no *Théorie*, [Amp26c, pág. 14 e Fig. 1] e [Amp23b, Amp90, pág. 186 e Fig. 1], foi apresentado pela primeira vez por Ampère em 1823 no *Recueil*,

[Amp22p, pág. 301] e [Amp85l, pág. 275], nossa Figura 4.19. Vamos chamá-lo de *caso de equilíbrio das correntes anti-paralelas*.

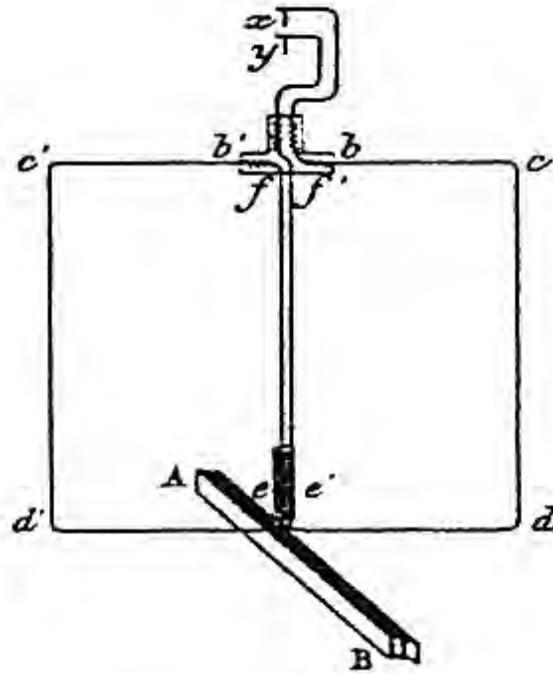


Figura 4.19: Caso de equilíbrio das correntes anti-paralelas, [Amp22p, pág. 301], [Amp85l, pág. 275], [Amp26c, pág. 16 e Fig. 2] e [Amp23b, Amp90, pág. 188 e Fig. 2].

Como vimos na Subseção 4.2.2, para chegar na sua primeira fórmula publicada, Eq. (4.7), Ampère utilizou não apenas sua lei da adição mas também o princípio de simetria para eliminar as interações entre elementos de corrente ortogonais. Baseou este princípio de simetria em algo mais básico, a saber, que a força entre dois elementos se transforma de atrativa em repulsiva, com mesma intensidade, quando altera o sentido da corrente em apenas um dos elementos, ver a Subseção 4.2.4 e o trabalho que publicou em 1823 no *Recueil*, [Amp22j, págs. 208-211] e [Amp85i, págs. 245-247]:

O primeiro fato geral que deduzi de minhas experiências sobre a ação mútua entre dois condutores voltaicos consiste em que, se duas porções de condutores voltaicos [com cada uma delas orientada de maneira arbitrária no espaço] agem uma sobre a outra, e caso se venha a mudar a direção da corrente elétrica em uma delas, sem fazer quaisquer mudanças em suas posições respectivas, a ação que antes se exercia entre elas, se era atrativa, transforma-se em uma ação repulsiva igual, e, se a ação era repulsiva, [transforma-se] em uma atração de mesma intensidade. Apliquei este resultado, confirmado por todas as experiências que havia feito com correntes elétricas de um comprimento finito, [...].

Apesar desta afirmação genérica, foi no próprio *Recueil* que apresentou um caso de equilíbrio específico para justificar esta suposição fundamental. Novamente ele utiliza a espira astática vertical representada na Figura 4.16, colocando agora um condutor retilíneo horizontal *AB* abaixo dela. Em princípio este condutor retilíneo horizontal poderia exercer um torque sobre ela, Figura

4.19. Ampère não observa torque resultante algum sobre a espira astática, qualquer que seja o ângulo que AB faz com o plano da espira astática. Esta é a sua prova experimental do princípio fundamental mencionado anteriormente, [Amp22p, págs. 300-302] e [Amp85l, págs. 275-276]:

Portanto, é pela observação de casos de equilíbrio independentes da forma dos condutores que se convém determinar a força cujo valor procuramos. Já reconheci três [destes casos de equilíbrio]. O primeiro consiste na igualdade dos valores absolutos da atração e da repulsão que se produz ao passar alternadamente, em dois sentidos opostos, a mesma corrente em um condutor fixo no qual não se modifica nem a situação, nem a distância ao corpo sobre o qual ele age. Esta igualdade resulta da observação simples que duas porções iguais de um mesmo fio condutor recoberto de seda para evitar a comunicação [isto é, para evitar seu contato elétrico], bem torcido de maneira a formar, uma ao redor da outra, duas hélices nas quais todas as partes são iguais, e percorridas por uma mesma corrente elétrica, uma em um sentido e a outra em sentido contrário, não exercem qualquer ação, seja sobre um condutor móvel, seja sobre um ímã; pode-se constatar isto com o auxílio do condutor móvel que se vê na Figura 9 da Gravura I do Volume XVIII dos *Annales de Chimie et de Physique* [ver a Figura 4.16], relativa à descrição de um de meus aparelhos eletrodinâmicos, e que está representada aqui (Figura 1 [nossa Figura 4.19]).

Para isto coloca-se um pouco abaixo da parte inferior $dee'd'$ deste condutor, e em uma direção qualquer, um condutor retilíneo horizontal, várias vezes redobrado AB , de maneira que o centro de seu comprimento e de sua largura esteja sob a vertical que passa pelo ponto x e ao redor da qual gira livremente o condutor móvel. Vê-se então que este condutor [móvel] permanece na situação em que é colocado; o que prova que ele está em equilíbrio entre as ações exercidas pelo condutor fixo sobre as duas partes iguais e opostas do circuito voltaico bcd e $b'c'd'e'$, que diferem apenas no aspecto de que em uma parte a corrente elétrica vai se aproximando do condutor fixo AB e, na outra parte, vai se afastando dele, qualquer que seja além disso o ângulo formado pela direção deste último condutor [AB] com o plano do condutor móvel. Ora, caso se considere de início as duas ações exercidas entre cada uma destas porções de circuito voltaico e a metade do condutor AB da qual ela está mais próxima e, em seguida, as duas ações entre cada uma destas porções e a metade do mesmo condutor da qual ela está mais afastada, vê-se facilmente que, em primeiro lugar, o equilíbrio do qual acabamos de falar só pode ocorrer para todos os valores deste ângulo, desde que haja separadamente equilíbrio entre as duas primeiras ações e as duas últimas. Em segundo lugar, [vê-se facilmente] que se uma das duas primeiras [ações] é atrativa devido ao fato que os lados do ângulo agudo formado pelas porções do condutor entre as quais ela ocorre são percorridas no mesmo sentido pela corrente elétrica, a outra [ação] será repulsiva, pois ela ocorrerá entre os dois lados do ângulo igual oposto ao vértice, que são percorridos em sentidos contrários pela mesma corrente, de maneira que de início, para que exista equilíbrio entre estas ações, é necessário que esta atração e que esta repulsão, que tendem a girar o condutor móvel, uma em um sentido e outra no sentido oposto, sejam iguais entre si; e em seguida [é necessário] que as duas últimas ações, uma atrativa e a outra repulsiva, que são exercidas entre os lados dos dois ângulos obtusos opostos ao vértice que são os [ângulos] suplementares aos primeiros, sejam também iguais entre si. É inútil enfatizar que estas ações [torques] são realmente as somas dos produtos das forças que agem sobre cada porção infinitamente pequena do

condutor móvel, multiplicadas por sua distância à vertical ao redor da qual ele pode girar livremente; mas, como as distâncias a esta vertical das porções infinitamente pequenas correspondentes aos dois ramos bcd e $b'c'd'e'$ são sempre iguais entre si, a igualdade dos torques torna necessária a igualdade das forças.

Com estes dois casos experimentais de equilíbrio Ampère justificou então sua lei da adição e seu princípio de simetria. Com isto podia assumir que a Eq. (4.7) era a única compatível com o comportamento da natureza. Só faltava agora determinar experimentalmente o valor da constante $n/m = k$.

Capítulo 5

As Contribuições de Biot e Savart

5.1 A Experiência do Fio Retilíneo

Jean-Baptist Biot (1774-1862) também passou a trabalhar intensamente com os efeitos de um fio com corrente sobre uma agulha imantada após as experiências de Ørsted em 1820. Trabalhou neste tema juntamente com Félix Savart (1791-1841), com quem colaborava desde 1819. Em 30 de outubro de 1820 fizeram uma primeira comunicação oral à Academia de Ciências sobre a ação de um fio retilíneo. Em 18 de dezembro de 1820 apresentaram um outro trabalho sobre a ação de um fio oblíquo. As Memórias lidas nestas ocasiões nunca foram publicadas.

No mesmo ano publicaram seu primeiro artigo sobre o tema,¹ [BS20]. Uma dissertação apresentada à Academia de Ciências em 2 de abril de 1821 foi publicada por Biot no mesmo ano, [Bio21]. Biot publicou ainda um resumo destas pesquisas, sem detalhes das experiências, na segunda edição de seu livro *Précis élémentaire de Physique*, de 1821. A exposição detalhada aparece apenas na terceira edição deste livro que é de 1824, [Bio24] e [BS85].

No primeiro trabalho de 30 de outubro de 1820 sobre a ação de um fio retilíneo, Biot e Savart suspenderam uma pequena agulha imantada horizontal AB por um fio de seda vertical cuja projeção passava sobre o centro de gravidade da agulha. Para cancelar a ação magnética da Terra sobre a agulha imantada colocaram um outro ímã grande e potente $A'B'$ horizontalmente na mesma altura da pequena agulha. O grande ímã foi colocado em uma orientação e distância apropriadas da agulha para com isto cancelar o efeito magnético terrestre. Com isto a agulha podia ficar parada em qualquer orientação (com seu eixo AB fazendo um ângulo qualquer com a direção Leste-Oeste, por exemplo). Então colocaram um longo fio vertical CM próximo da agulha. No primeiro artigo publicado eles não apresentam nenhuma Figura descrevendo a montagem experimental. Mas ela aparece, por exemplo, no livro de Biot de 1824, [Bio24, Figura 7, Gravura II, pág. 707] e [Tri65, pág. 120], Figura 5.1.

A primeira conclusão que obtiveram ao passar uma corrente no fio foi a seguinte, [BS20] e [AC06]:

Com o auxílio destes procedimentos os Srs. Biot e Savart foram conduzidos ao resultado seguinte que exprime rigorosamente a ação experimentada por uma molécula de magnetismo austral ou boreal [isto é, por um pólo magnético Norte ou Sul] colocada a uma distância qualquer de um fio cilíndrico muito fino e indefinido, tornado magnético pela corrente voltaica. Trace uma perpendicular ao eixo do fio pelo ponto

¹Este trabalho já se encontra traduzido para o português, [AC06].

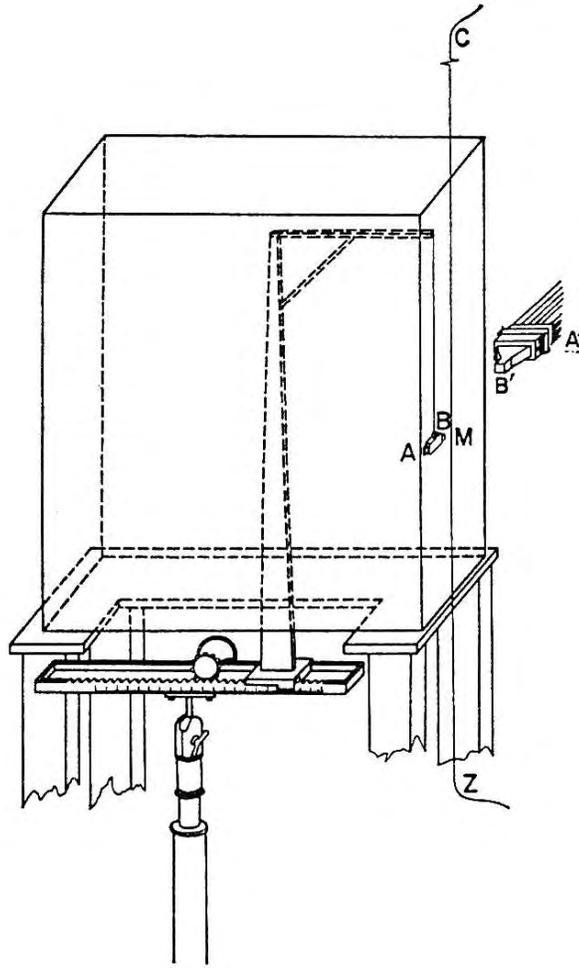


Figura 5.1: Experiência de Biot e Savart com um fio retilíneo vertical, [Bio24, Figura 7, Gravura II, pág. 707] e [Tri65, pág. 120]. A corrente elétrica sobe de Z para C. A pequena agulha imantada AB pode oscilar em um plano horizontal ao redor do fio de sustentação vertical.

onde se localiza esta molécula. A força que atua sobre a molécula é perpendicular a esta linha e ao eixo do fio.

De fato eles não observaram a força que atua sobre uma molécula magnética. O que observaram foi que a agulha fica ortogonal ao fio com corrente quando o magnetismo da Terra é cancelado pelo ímã auxiliar $A'B'$. Este resultado já havia sido apresentado anteriormente por Ampère em 18 de setembro de 1820 utilizando sua agulha imantada astática, ver a Seção 3.1, Figura 3.2.

Biot e Savart obtiveram também que o sentido da força exercida por um longo fio retilíneo sobre um fluido magnético pontual é ortogonal ao plano formado pelo fio e pelo fluido, apontando em sentidos opostos se o fluido é austral ou boreal (isto é, se é um pólo Norte ou um pólo Sul). Isto pode ser ilustrado com a Figura 5.2. Supondo que a corrente flui ao longo do sentido da seta, vem que a força sobre a partícula magnética m (uma partícula de fluido austral ou boreal, na denominação de Biot, ou seja, um pólo magnético Norte ou Sul) será perpendicular ao plano do papel. Caso tenhamos um fluido magnético austral (um pólo Norte), a força estará furando o papel. Caso tenhamos um fluido magnético boreal (um pólo Sul), a força estará saindo do papel.

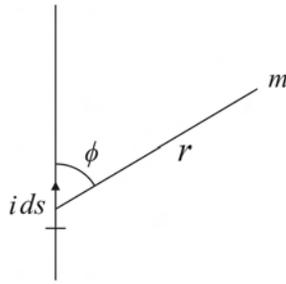


Figura 5.2: A letra m indica uma partícula de fluido austral ou boreal (um pólo Norte ou Sul).

Descreveram isto utilizando um observador análogo ao de Ampère (que já havia publicado sua regra desde 1820), ver a Seção 2.3. Esta descrição aparece, por exemplo, em um trabalho de 1824. Biot e Savart utilizavam uma pilha em que a corrente fluía pelo fio indo do terminal ligado ao zinco até o terminal ligado ao cobre. Citamos agora o observador de Biot e Savart, [BS85, pág. 102]:

Se concebemos um observador colocado no próprio fio, tendo sua cabeça situada na extremidade cobre, os pés [situados] na extremidade zinco e o rosto virado em direção à agulha [imantada], a força que emana do fio solicitará os elementos de magnetismo austral [o pólo Norte da agulha] da direita para a esquerda deste observador, e [solicitará] os elementos de magnetismo boreal [o pólo Sul da agulha] de sua esquerda para a direita, perpendicularmente à distância mais curta destes elementos ao fio.

No caso da Figura 5.2 o terminal de zinco estaria na extremidade inferior do fio e o terminal de cobre na extremidade superior, com a seta indicando o sentido da corrente. Um observador de costas para o fio e voltado para a partícula magnética austral m perceberia ela sendo forçada da direita para a esquerda, isto é, com a força furando o plano do papel. O inverso ocorreria sobre um fluido magnético boreal. A orientação de equilíbrio do eixo horizontal da agulha imantada é então perpendicular ao plano formado pelo fio reto vertical e pelo centro da agulha.

Biot e Savart também fizeram a agulha descrever pequenas oscilações ao redor desta orientação de equilíbrio. Mediram as durações destas oscilações a várias distâncias do centro da agulha em relação ao fio vertical com corrente. A partir daí concluíram que a intensidade da suposta força que atuaria sobre um pólo magnético da agulha “é inversamente proporcional à distância [do pólo ao fio com corrente],” [BS20] e [AC06].

Em 1824 Biot comenta na terceira edição de seu livro que a partir deste resultado Laplace (1749-1827) obteve por um cálculo teórico que a intensidade da força elementar exercida por cada elemento do fio com corrente sobre cada molécula magnética cairia com o inverso do quadrado da distância, [BS85, págs. 113-114]:

A ação de um fio conjuntivo indefinido e retilíneo sobre um elemento magnético, tal como acabamos de obter pelas experiências precedentes, ainda é apenas um resultado composto. Pois, ao dividir pelo pensamento todo o comprimento do fio em uma infinidade de pedaços de uma altura muito pequena, vê-se que cada pedaço deve agir sobre a agulha com uma energia diferente, de acordo com sua distância e segundo a direção de acordo com a qual é exercida sua ação. Ora, estas forças elementares são precisamente o resultado simples que é especialmente importante conhecer, pois a força total exercida pelo fio é apenas a soma aritmética de seus efeitos. Mas basta

o cálculo para ir desta resultante à ação simples: é o que fez o Sr. Laplace. Ele deduziu matematicamente de nossas observações a força exercida individualmente por cada pedaço do fio sobre cada molécula magnética que é apresentada a ele. Esta força é dirigida, assim como a ação total, perpendicularmente ao plano formado pelo elemento longitudinal do fio, e pela distância mais curta entre este elemento e a molécula magnética solicitada. Sua intensidade, assim como em outras ações magnéticas, é a recíproca ao quadrado desta própria distância.

Biot não apresenta os detalhes desta conta de Laplace, que também não chegou a publicá-las. Deve-se lembrar que desde 4 de dezembro de 1820, Ampère já havia publicado a primeira versão de sua força entre elementos de corrente que também cai com o quadrado da distância, além de depender dos ângulos entre os elementos e a reta que os une, ver a Eq. (4.7).

Esta conclusão de Laplace e de Biot está errada. Não se pode *deduzir* a força elementar a partir da força integrada. A única coisa que se pode mostrar é que uma certa força elementar, após ser integrada, é ou não é compatível com o resultado experimental devido à influência de todo o fio. Mas podem haver duas ou mais forças elementares diferentes entre si, mas que levam ao mesmo resultado integrado. Para mostrar isto basta um contra-exemplo. Hofmann, por exemplo, supôs um fio infinito ao longo do eixo x , centrado na origem de coordenadas. Supôs uma partícula de fluido magnético ao longo do eixo y , a uma distância a do centro do fio. Um elemento do fio localizado à posição x tem um comprimento dx . Chamou de V ao ângulo entre o fio e a reta que une o elemento de corrente ao pólo magnético, sendo r a distância entre este elemento de corrente e o pólo magnético. Com isto temos $x = r \cos V$ e $a = r \sin V$. Ele então supôs uma força entre o elemento de corrente e o pólo magnético proporcional a, [Hof82, págs. 240-241]:

$$\begin{cases} e^{ax} dx = e^{r^2 \cos V \sin V} dx, & \text{para } -\infty < x < 0, \\ e^{-ax} dx = e^{-r^2 \cos V \sin V} dx, & \text{para } 0 < x < \infty. \end{cases} \quad (5.1)$$

Ao integrar esta expressão com x indo de $-\infty$ até ∞ , Hofmann obteve uma força proporcional a $1/a$, assim como é o resultado empírico de Biot e Savart. Apesar disto, a Eq. (5.1) não é proporcional a $1/r^2$. Isto prova que não se pode *deduzir* que a força elementar é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o elemento de corrente e o pólo magnético, partindo apenas do resultado que a força de um fio infinito sobre um pólo magnético é inversamente proporcional à distância entre este pólo magnético e o fio.

5.2 A Experiência do Fio Oblíquo

No trabalho lido à Academia de Ciências em 18 de dezembro de 1820 Biot e Savart descrevem uma nova experiência na qual mediram os períodos de oscilação da agulha horizontal ao redor de sua orientação de equilíbrio, agora na presença de um fio oblíquo. Uma Figura descrevendo esta experiência aparece em seu livro de 1824, Figura 5.3.

A pequena agulha imantada AB está novamente suspensa horizontalmente por um fio vertical cuja projeção passa pelo centro da agulha. O fio vertical $C'M'Z'$ faz o mesmo papel que o fio vertical CM da Figura 5.1. A inicial C indica que esta extremidade do fio está ligada ao pólo de cobre da pilha, enquanto que a inicial Z indica que esta extremidade está ligada ao pólo de zinco da pilha. As letras M e M' indicam os pontos médios dos fios. Estes pontos estão na mesma altura que o centro da agulha. O segmento HM é horizontal, na mesma altura que a agulha. As letras μ e μ' indicam pequenos comprimentos dos fios com corrente. A letra m uma

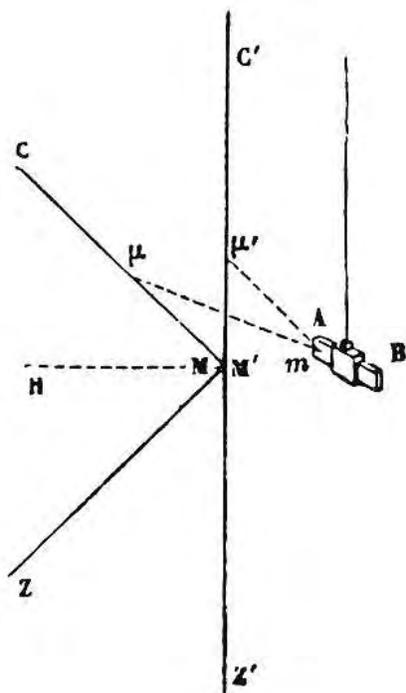


Figura 5.3: Experiência de Biot e Savart com um fio oblíquo, [BS85, pág. 93]. A corrente vai do zinco Z para o cobre C , ou seja, no sentido $Z'M'C'$ no fio reto vertical e no sentido ZMC no fio oblíquo (que está em um plano vertical). Os pontos M e M' estão isolados eletricamente entre si. A pequena agulha imantada AB pode oscilar em um plano horizontal que passa por HMM' ao redor do fio de sustentação vertical. A letra m representa um pólo magnético da agulha, enquanto que μ e μ' representam pequenos comprimentos dos fios com corrente.

molécula de magnetismo austral ou boreal, isto é, um pólo Norte ou um pólo Sul da agulha. Na nova experiência Biot e Savart utilizam um fio oblíquo CMZ que está em um plano vertical. Chamam o ângulo ZMH de a inclinação i em relação à horizontal, letra esta que não deve ser confundida com a intensidade de corrente de Ampère.

Inicialmente mantêm constante este ângulo e variam a distância c entre o centro do fio e o centro da agulha. Depois mantêm esta distância constante e variam o ângulo $ZMH = i$. Para cada valor da distância e deste ângulo medem o período para pequenas oscilações da agulha em relação à sua orientação de equilíbrio. A partir disto chegam à seguinte conclusão expressa nas seguintes palavras por Biot em 1821, na segunda edição de seu livro *Précis élémentaire de Physique*, [Bio85a]:

Encontrei assim que, tanto para o fio oblíquo quanto para o fio retilíneo, a ação era recíproca à distância; mas a intensidade absoluta era mais fraca para o fio oblíquo do que para o fio reto, na proporção do ângulo ZMH em relação à unidade. Este resultado, analisado pelo cálculo, me pareceu indicar que a ação de cada elemento μ do fio oblíquo sobre cada molécula m de magnetismo austral ou boreal é inversamente proporcional ao quadrado de sua distância μm a esta molécula, e proporcional ao seno do ângulo $m\mu M$ formado pela distância μm com o comprimento do fio.

Ou seja, a força exercida pelo fio oblíquo sobre o pólo magnético localizado a uma distância c do vértice do fio oblíquo seria proporcional a:

$$\frac{\hat{\text{ângulo}}(\text{ZMH})}{c} . \quad (5.2)$$

Já a força exercida pelo elemento de corrente μ sobre o pólo magnético m localizado a uma distância μm do elemento de corrente seria proporcional a:

$$\frac{\text{sen}(m\mu M)}{(\mu m)^2} . \quad (5.3)$$

Vamos considerar agora a Figura 5.2. Temos um fio reto indefinido com a seta indicando o sentido da corrente. A letra m indica um pólo magnético pontual. Vamos representar por ds ao comprimento de um elemento infinitesimal do fio que está a uma distância r deste pólo. O ângulo entre o fio e a reta unindo o elemento de corrente ao pólo é representado por ϕ . Esta notação é mais próxima da notação de Ampère e facilita a comparação entre as teorias. Com esta notação vem que se pode expressar matematicamente o resultado de Biot e Savart que acabamos de citar. De acordo com eles a força exercida pelo elemento de corrente sobre o pólo magnético é proporcional a:

$$\frac{\text{sen } \phi}{r^2} . \quad (5.4)$$

Implicitamente Biot e Savart assumiam que esta força também era proporcional à intensidade do pólo magnético m , à intensidade i da corrente no elemento, assim como ao comprimento infinitesimal ds do elemento. Vão precisar disto para integrar a força devida a um longo fio reto ou oblíquo. Com isto vem que se pode expressar o resultado que obtiveram de maneira mais completa na seguinte forma:

$$\frac{mids \text{sen } \phi}{r^2} . \quad (5.5)$$

Como veremos na Seção 8.7, Biot cometeu um erro experimental sobre qual é o resultado correto da força de um fio oblíquo sobre um pólo magnético. Cometeu também um erro teórico ao obter a força infinitesimal de um elemento de corrente sobre este pólo a partir do resultado integrado da força do fio oblíquo. Por hora não discutiremos estes aspectos.

5.3 Um Resultado Inesperado para Ampère: O Caso de Equilíbrio das Correntes Ortogonais

Na Seção 5.1 e 5.2 vimos que Biot e Savart apresentaram à Academia de Ciências suas experiências do fio retilíneo e do fio oblíquo em 30 de outubro e em 18 de dezembro de 1820, respectivamente. De acordo com seus resultados as forças exercidas por um longo fio retilíneo em um plano vertical atuando sobre uma partícula magnética que está neste mesmo plano vertical, mas não ao longo do fio, vão sempre estar em um plano horizontal. Vamos considerar o plano vertical formado pela partícula e pelo fio. Se a distância c entre a partícula e o fio é constante, esta força vai ser a mesma qualquer que seja a inclinação entre o fio e uma reta horizontal pertencente ao plano. Vamos chamar de b a este ângulo entre o fio e a horizontal. Agora supomos que temos uma pequena agulha imantada horizontal apontando ao longo do meridiano magnético local, suspensa por um fio vertical passando acima de seu centro de gravidade. A agulha está no mesmo plano vertical do fio. Se a distância c entre o fio e o centro da agulha é grande quando comparada com o

comprimento da agulha, a intensidade do torque exercido pelo fio sobre a agulha também não vai depender do ângulo b de acordo com as concepções de Biot e Savart, Figura 5.4. Isto é, mantendo c constante, vem que esta força não depende de b . Da mesma forma, o período de pequenas oscilações de um pequeno ímã no plano horizontal suspenso por um fio vertical não vai depender de b se considerarmos c como sendo a distância constante entre o centro do ímã e o fio.

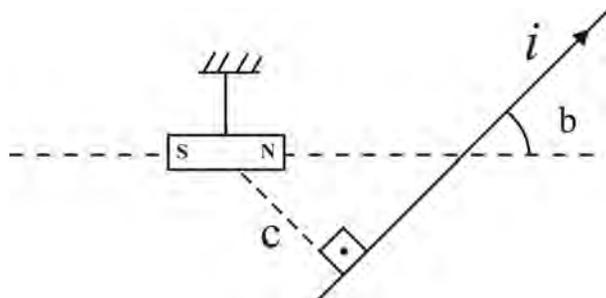


Figura 5.4: Um fio está no plano vertical do papel fazendo um ângulo b com a horizontal. Uma pequena agulha imantada horizontal tem seu centro a uma distância c do fio.

Ampère considerou suspeita esta conclusão baseada nas concepções de Biot e Savart. Nesta época ele achava que $n/m = 0$ na Eq. (4.7), ou $k = 0$ nas Eqs. (2.4) e (2.5). Ampère não trabalhava com pólos magnéticos e considerava todos os efeitos magnéticos dos ímãs como sendo devidos a correntes em seu interior. Inicialmente ele assumia que os circuitos magnéticos seguiam círculos concêntricos em planos normais ao eixo do pequeno ímã cilíndrico. Supôs então $n/m = k = 0$ em sua força entre elementos de corrente e calculou o torque exercido pelo fio da Figura 5.4 sobre o conjunto destes circuitos magnéticos. Obteve que a intensidade deste torque era proporcional a, [Amp π]:

$$\frac{1 + \operatorname{sen}^2 b}{c}. \quad (5.6)$$

Ou seja, para Ampère este torque deveria depender de b . Em particular, o torque deveria dobrar de intensidade, além de mudar de sentido, quando vamos de $b = 0$ rad para $b = \pi/2$ rad. Imagina então uma experiência com a qual poderia distinguir entre sua teoria e a de Biot e Savart. Nesta experiência dois longos fios retilíneos são colocados em um plano vertical, um deles na horizontal e outro na vertical, Figura 5.5. Supõe que este plano vertical coincide com o meridiano magnético local. Supõe então um pequeno ímã em um plano horizontal suspenso por um fio vertical, estando o ímã inicialmente ao longo do meridiano magnético terrestre. O centro do ímã está a iguais distâncias c dos dois fios. Modela o ímã eletrodinamicamente como um conjunto de círculos concêntricos em planos normais ao eixo do pequeno ímã cilíndrico. Supõe c muito maior do que o comprimento ℓ do pequeno ímã, $c \ll \ell$.

Prevê então o que aconteceria ao passar uma corrente de mesma intensidade nos dois fios, com elas fluindo em direção à junção entre eles ou a partir desta junção. De acordo com as conclusões de Biot e Savart os torques exercidos pelos dois fios teriam a mesma intensidade e sentidos opostos. Logo, o ímã deveria permanecer imóvel ao longo do meridiano magnético. Porém, de acordo com a Eq. (5.6), o ímã deveria sair de sua posição de equilíbrio ao longo do meridiano magnético. Ampère fez estas previsões em 15 de janeiro de 1821. Pretendia publicar seus resultados, já que há uma cópia passada a limpo de sua *chemise* 166, [Amp π].

Realizou a experiência juntamente com C. M. Despretz (1798-1863) cinco dias depois, na data em que completou 46 anos de idade, 20 de janeiro de 1821, [Amp π], [Amp23a, pág. 21] e

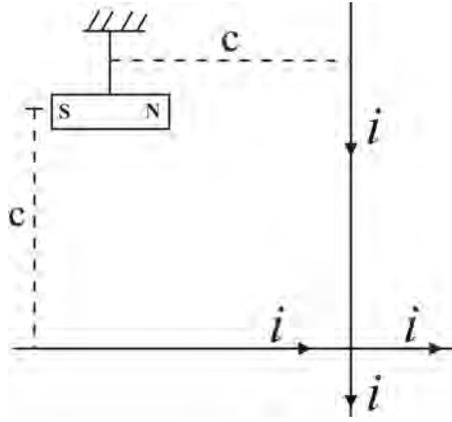


Figura 5.5: Um fio vertical e outro horizontal conduzem correntes de mesma intensidade, estando a iguais distâncias c do centro de um pequeno ímã cilíndrico em um plano horizontal, com o centro do ímã estando no mesmo plano vertical dos fios.

[Amp22e, pág. 343]. O ímã não se moveu! Vamos chamar esta experiência de *caso de equilíbrio das correntes ortogonais*.

Isto confirmou as previsões de acordo com os resultados de Biot e Savart. Por outro lado, foi totalmente contrário às previsões da força de Ampère, Eq. (5.6). Esta previsão errada foi baseada em sua crença de que $n/m = 0$ na Eq. (4.7), ou de que $k = 0$ nas Eqs. (2.4) e (2.5). Nesta época Ampère estava totalmente convencido de que $n/m = k = 0$ em sua força entre elementos de corrente. Apesar do resultado negativo desta experiência, não chegou a duvidar desta suposição.

Por outro lado, caso tivesse feito os cálculos com a expressão geral, teria obtido que a intensidade do torque exercido por um único fio sobre o pequeno ímã, de acordo com sua lei de força com qualquer valor de k , seria dada por (detalhes destes cálculos encontram-se em [Hof82, Apêndice C, págs. 454-462]):

$$\frac{(1 - k) + (1 + 2k) \operatorname{sen}^2 b}{c} . \quad (5.7)$$

A intensidade do torque resultante exercido pelo fio horizontal ($b = 0$ rad) abaixo da agulha da Figura 5.5 seria então proporcional a $(1 - k)/c$. Já o torque exercido pelo fio vertical ($b = \pi/2$ rad) desta Figura teria sentido oposto e sua intensidade proporcional a $(2 + k)/c$. O torque resultante, levando em conta os sentidos opostos dos torques de cada fio, seria então proporcional a $(1 + 2k)/c$. Utilizando então esta expressão e o resultado negativo da experiência realizada com Despretz, Ampère poderia ter concluído que $k = -1/2$. Teria chegado a esta conclusão se tivesse feito estas contas.

Este também seria o valor de k ao observar que em uma experiência realizada com um único fio em vários ângulos de inclinação em relação à horizontal, a intensidade do torque é independente de b . Ou seja, pela Eq. (5.7) viria imediatamente que $k = -1/2$. Se tivesse realizado estas contas Ampère teria obtido o valor correto de k um ano antes do que de fato ocorreu.

Mas Ampère não fez nada disto. Esta experiência causou um profundo impacto sobre ele. Desistiu de publicar esta nova Memória e ficou em silêncio sobre esta experiência por 2 anos. Apenas em 1823 menciona esta experiência publicamente, depois que obteve o valor final de sua força entre elementos de corrente por outro caminho e depois que conseguiu explicar quantitativamente o resultado nulo desta experiência. Veremos isto na Seção 8.8.

Capítulo 6

A Obtenção da Força entre Elementos de Corrente com seu Valor Final

6.1 A Rotação Contínua de Faraday

A primeira fase das pesquisas eletrodinâmicas de Ampère começa em setembro de 1820 com o anúncio da descoberta de Ørsted, indo até janeiro de 1821. Interrompe então suas pesquisas por motivo de doença e cansaço, [Blo82, pág. 103]. Mas provavelmente o motivo principal tenha sido sua previsão de 15 de janeiro de 1821, com a comprovação experimental de que estava errado vindo em 20 de janeiro de 1820, como vimos na Seção 5.3.

O que o faz retornar a suas pesquisas é uma descoberta realizada por Faraday em setembro de 1821 da rotação contínua de um fio com corrente ao redor de um ímã fixo, ou de um ímã ao redor de um fio fixo com corrente, [Far52b]. Em um outro trabalho do mesmo ano Faraday apresentou uma Figura descrevendo seu instrumento, [Far52a], nossa Figura 6.1.

Na parte superior desta Figura temos duas taças de vidro preenchidas com mercúrio. No lado esquerdo o pólo superior do ímã gira ao redor do fio fixo vertical com corrente, enquanto que no lado direito o fio com corrente gira ao redor do pólo superior fixo do ímã vertical. Na parte inferior esquerda desta Figura temos um aparelho portátil que Faraday enviou para alguns pesquisadores, incluindo Ampère, no qual um fio pode girar ao redor de uma barra de ferro doce imantada quando a parte inferior do fio está flutuando no mercúrio e quando se passa uma corrente constante no fio. O sentido de rotação nestes instrumentos é alterado quando se inverte a polaridade do ímã, ou quando se inverte o sentido da corrente. Caso se inverta simultaneamente a polaridade do ímã e o sentido da corrente, vem que o sentido de rotação da parte móvel permanece o mesmo.

Faraday informou a Ampère de sua descoberta em 18 de outubro de 1821, enviando-lhe o instrumento portátil da Figura 6.1. Inicia-se então a segunda fase das pesquisas eletrodinâmicas de Ampère, que vai culminar com a obtenção do valor final $k = -1/2$ em sua força entre elementos de corrente, Eq. (2.4). Em uma carta de 10 de julho de 1822 Ampère escreve a Faraday afirmando que “suas descobertas enriquecendo a física de fatos novos são a principal causa do que pude acrescentar ao que havia feito há dois anos sobre os fenômenos eletrodinâmicos,” [Ampm].

Na Figura 6.2 apresentamos a situação em que o fio com corrente gira ao redor do ímã. Indicamos o sentido da corrente, os pólos do ímã, assim como o sentido de rotação do fio. Ou seja, nesta configuração vem que a força sobre o fio está saindo do papel. Para muitos autores este instrumento é considerado o primeiro motor elétrico da história.

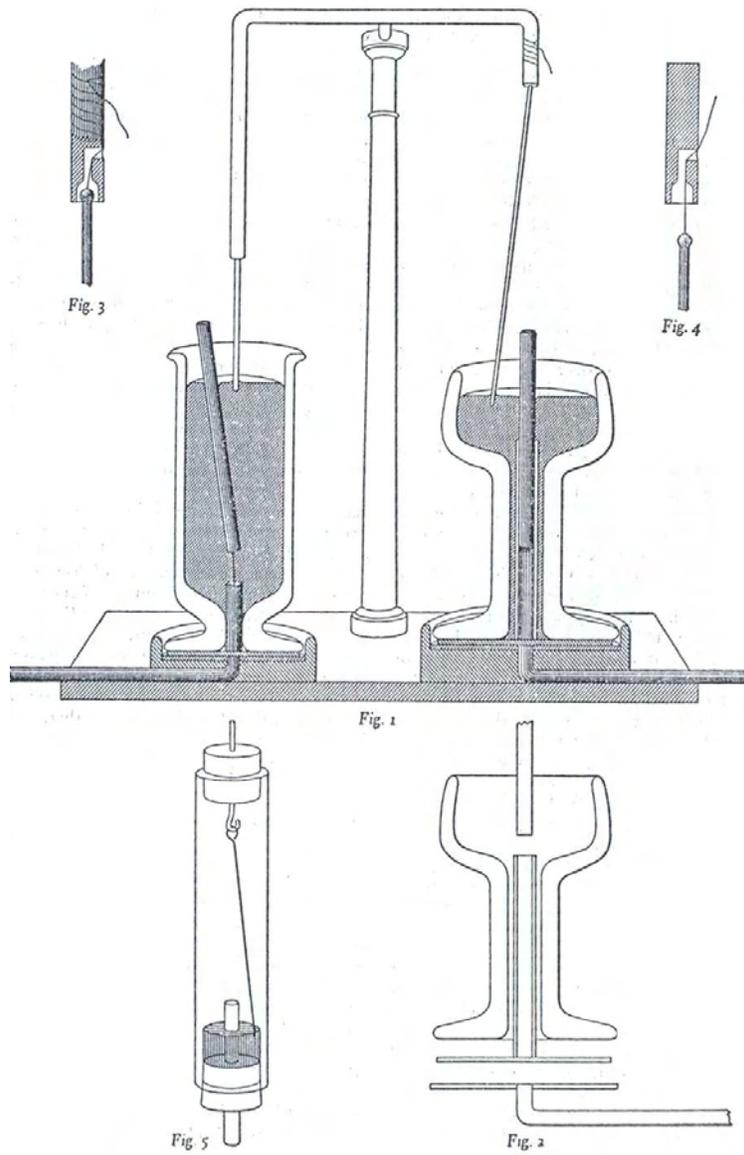


Figura 6.1: Aparelhos de Faraday demonstrando a rotação contínua de um fio com corrente ao redor de um ímã fixo, ou de um ímã ao redor de um fio fixo com corrente, [Far52a].

6.2 Experiências Iniciais de Ampère sobre a Rotação Contínua

6.2.1 Reprodução da Experiência de Faraday

Ampère fica extremamente interessado nesta descoberta de Faraday, um efeito que Ampère não havia previsto. Depois de reproduzir as experiências com o instrumento portátil que Faraday havia lhe enviado, Ampère começa a trabalhar sobre o tema e a desenvolver novos resultados ao fazer modificações na experiência de Faraday. Inicialmente substitui o condutor móvel por um outro no formato de uma ferradura, como a letra U invertida, ligado na parte de baixo

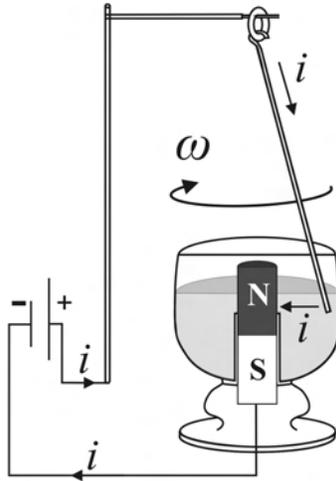


Figura 6.2: Ilustração dos elementos principais do aparelho de Faraday quando um fio com corrente i gira com uma velocidade angular ω ao redor de um ímã fixo NS .

a uma coroa ou aro circular, além de trocar o mercúrio por um ácido destilado, [Amp21c]. Com isto aumentou a mobilidade do sistema e conseguiu uma rotação mais rápida, Figura 6.3, apresentando seus resultados à Academia de Ciências em 3 de dezembro de 1821.

A parte móvel deste instrumento é o condutor LOM da Figura 6.4 feito de cobre. Ele flutua sobre o ácido destilado colocado no vaso $ABCD$ da Figura 6.3. Coloca-se um sistema de ímãs verticais abaixo do centro do vaso $ABCD$, com seus pólos homólogos apontando para o mesmo lado (isto é, todos os pólos Norte acima dos pólos Sul, ou todos os pólos S acima dos pólos Norte). O vaso $ABCD$ e a ferradura EF são de zinco, do mesmo material que é feito o aro circular inferior G soldado à ferradura EF . Quando se coloca um ácido destilado no vaso $ABCD$ fecha-se a corrente. A corrente sobe pelos braços LO e MO do condutor móvel, descendo pelo eixo vertical $OIHF$. Quando isto ocorre o condutor móvel LOM gira continuamente ao redor de seu eixo vertical central OI no sentido horário ou anti-horário, dependendo da polaridade mais próxima dos ímãs colocados abaixo do vaso $ABCD$.

Esta montagem de Ampère é extremamente interessante pois não é necessária uma fonte de energia externa ao sistema. Ou seja, o próprio aparelho já é uma bateria pois é feito de metais diferentes (cobre e zinco), ligados por um líquido condutor. Com isto também não são necessários fios de conexão etc.

6.2.2 Obtendo a Rotação Contínua Apenas com o Magnetismo Terrestre

Ampère foi o primeiro a conseguir a rotação contínua de um condutor com corrente sem utilizar ímãs, ou seja, somente com o magnetismo terrestre. Neste caso seu condutor móvel era composto de duas ferraduras ortogonais entre si soldadas ao aro circular na parte debaixo, Figura 6.5. Como o diâmetro era maior do que o condutor móvel de Faraday e ele flutuava sobre um ácido destilado que exerce menos atrito que o mercúrio, conseguiu a rotação contínua ao redor do eixo vertical central do sistema apenas sob a ação do magnetismo terrestre, [Amp21c, Fig. 23].

Ampère apresentou seus resultados à Academia de Ciências em 10 de dezembro de 1821 com

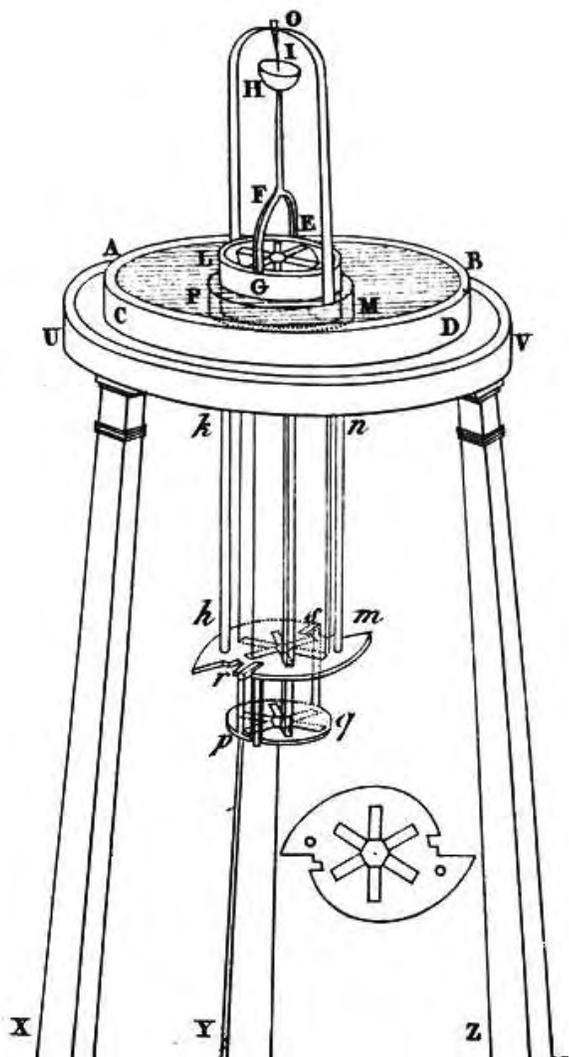


Figura 6.3: Primeiro instrumento de Ampère para obter a rotação contínua, [Amp21c].

Fig. 21 .

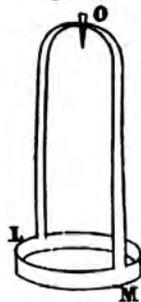


Figura 6.4: Condutor móvel do instrumento da Figura 6.3, [Amp21c, Fig. 21].

as seguintes palavras, [Amp21c]:

Ao suprimir os ímãs e substituir o condutor móvel por um outro condutor represen-

Fig. 23.

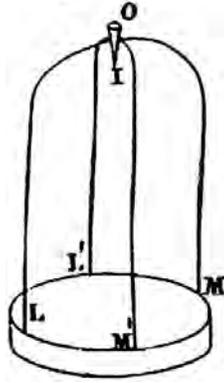


Figura 6.5: Com este instrumento Ampère obteve a rotação contínua utilizando somente o magnetismo terrestre, [Amp21c, Fig. 23].

tado na Figura 23 [nossa Figura 6.5], o Sr. Ampère viu, pela ação da Terra, este condutor girar lentamente mas constantemente, indo de Leste para Oeste pelo Sul. Quando se aproxima por baixo dele o pólo austral [Norte] de um ímã, o fazemos girar em sentido contrário; mas ele retoma seu movimento inicial quando se afasta o ímã.

6.2.3 Rotação de um Ímã ao Redor de Seu Eixo

Em seu artigo original descrevendo sua descoberta da rotação contínua de um fio com corrente ao redor de um ímã e vice-versa, Faraday mencionou o seguinte, [Far52b, pág. 798]:

Tendo tido sucesso até aqui, tentei fazer um fio e um ímã girarem ao redor de seus próprios eixos fazendo com que fosse evitada a rotação em um círculo ao redor deles, mas não fui capaz de obter as menores indicações de que isto ocorre; nem isto parece provável ao refletir sobre o assunto.

Ao contrário de Faraday, Ampère considera que este movimento deve ser possível e é o primeiro a mostrar experimentalmente sua existência. Comunica este resultado à Academia de Ciências em 7 de janeiro de 1822, publicando seu trabalho em seguida, [Amp22d]. Suas representações desta experiência aparecem na Figura 6.6.

Descrição de Ampère desta experiência, [Amp22d]:

De acordo com o que precede [onde Ampère reproduziu a experiência de rotação contínua de Faraday], o movimento de translação do ímã ocorrerá sempre que ele for atravessado apenas por correntes que entram, por um lado, dentro do ímã, e saem do outro [lado]; mas se fizermos com que todas [as correntes] entrem no ímã, ou que todas elas saiam dele, somente resultará um movimento de rotação do ímã ao redor dele mesmo. Para realizar este movimento, movimento este que obtive pela primeira vez, coloca-se mercúrio na cavidade superior da barra cilíndrica cc' (fig. 8 [nossa Figura 6.6, esta barra cilíndrica é imantada, com o pólo Norte em cima e o pólo Sul embaixo, é mantida flutuando na vertical por um contra-peso P]), e mergulhamos aí o fio Z [da fig. 7 original de Ampère, ver a Figura 6.6]. Neste caso todas as correntes divergem do eixo do ímã em direção ao anel de cobre [HI da fig. 7 original

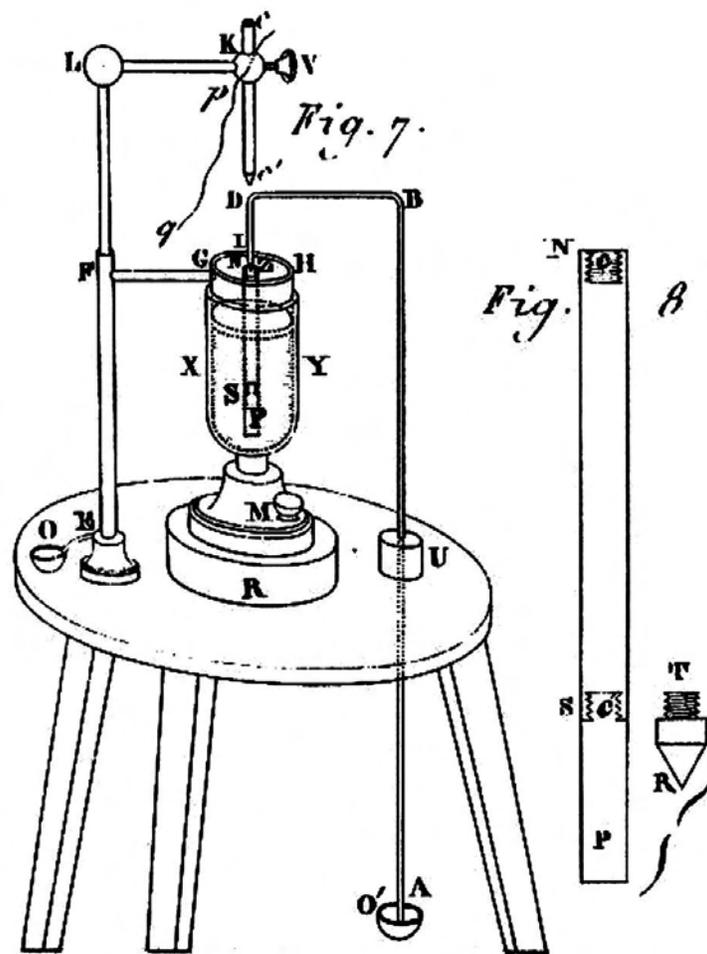


Figura 6.6: Com este instrumento Ampère obteve pela primeira vez a rotação de um ímã ao redor de seu eixo, fenômeno este que Faraday considerava improvável de existir, [Amp22d, Figs. 7 e 8].

de Ampère, ver a Figura 6.6]. Seja ZM (fig. 9 [nossa Figura 6.7 (a)]) uma destas correntes, a porção Zm não age, de acordo com o que foi dito anteriormente, sobre as correntes elétricas do ímã; a porção mM atrai mn' e repele mn . Estas duas forças reunidas tendem a fazer o ímã girar ao redor dele mesmo no sentido $n'mn$. Forças semelhantes são exercidas simultaneamente sobre todos os pontos do ímã, ele gira ao redor de si mesmo indefinidamente.

Ou seja, para obter a rotação de um ímã cilíndrico ao redor de seu eixo Ampère colocou-o flutuando verticalmente em mercúrio com um contrapeso em sua parte inferior. Quando a corrente entra verticalmente pela parte superior do ímã e sai lateralmente por sua parte inferior indo para o mercúrio, o ímã passa a girar ao redor de seu eixo.

No mesmo artigo Ampère também descreve como obteve a rotação de um fio com corrente ao redor de seu eixo.

Hoje em dia é fácil obter um fenômeno análogo utilizando uma pilha comum, um parafuso e um pequeno ímã potente na forma de uma pastilha, Figura 6.8. Toda a Figura está na vertical. Ao aproximar o parafuso do ímã ele gruda no ímã e fica imantado. O sistema parafuso-ímã funciona então como um único ímã de Ampère. Aproxima-se este sistema de uma pilha que está

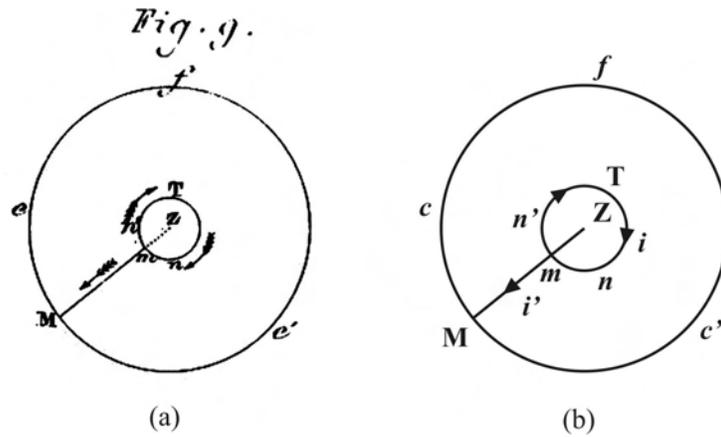


Figura 6.7: (a) Detalhe das correntes na Figura 6.6, [Amp22d, Fig. 9]. (b) Nossa reprodução desta Figura com as letras mais visíveis.

na vertical. O parafuso, juntamente com o ímã abaixo dele, é atraído pela parte metálica da pilha e fica dependurado pela sua ponta na extremidade negativa da pilha. Fecha-se o circuito elétrico ao ligar com um fio o pólo positivo da pilha à lateral do ímã com um contato deslizante. Com isto passa a fluir uma corrente i pelo circuito. Neste momento o sistema parafuso-ímã começa a girar ao redor da vertical que passa pelo eixo do ímã com uma grande velocidade angular ω . Isto é, pode-se prender a pilha e o fio com a mão que então apenas o sistema parafuso-ímã vai girar conjuntamente em relação ao laboratório. Como o atrito da ponta do parafuso com a base da pilha é bem pequeno, o movimento logo se estabiliza em uma rápida rotação constante.

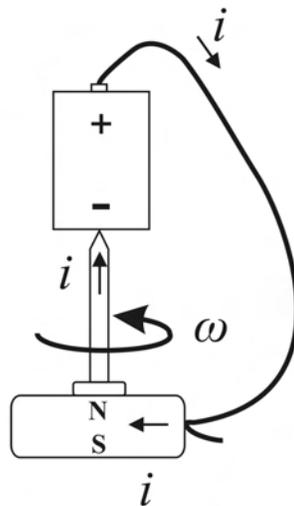


Figura 6.8: Um parafuso imantado gira com uma velocidade angular ω junto com um ímã ao redor do eixo da pilha quando se fecha o circuito com um contato deslizante entre o fio e o ímã. O plano da Figura é vertical.

6.2.4 Obtendo a Rotação Contínua Apenas com Correntes Elétricas

Dando prosseguimento ao seu projeto inicial de reproduzir todos os fenômenos magnéticos e eletromagnéticos em termos eletrodinâmicos (ou seja, utilizando apenas correntes elétricas), Ampère conseguiu obter a rotação contínua sem utilizar ímãs ou o magnetismo terrestre. De acordo com uma carta que enviou a Van Beek (1787-1856), [Amp22o, pág. 198], Ampère realizou a experiência com um novo instrumento em 27 de março de 1822. Neste caso obteve a rotação contínua de um condutor com corrente devido à ação de um outro condutor com corrente. Este segundo condutor com corrente substituiu o ímã vertical que ficava abaixo do aparelho de Faraday por um equivalente eletrodinâmico. Isto é, o ímã de Faraday era substituído por espiras horizontais concêntricas, Figura 6.9. Ampère publicou seus resultados em 1822, [Amp22d].

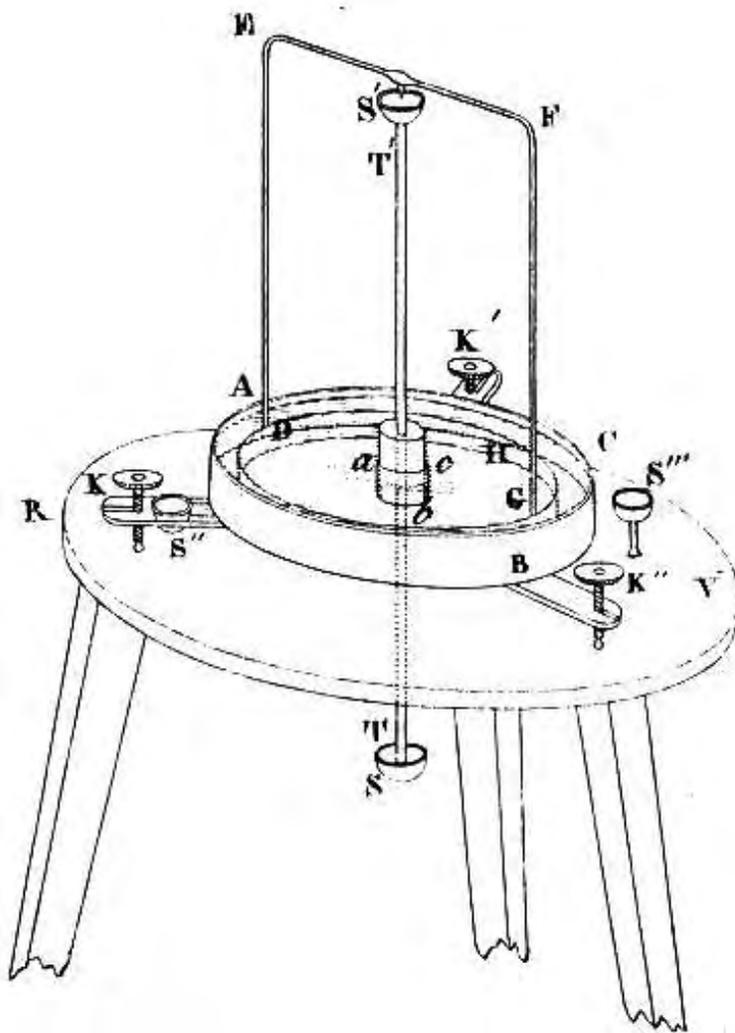


Figura 6.9: Instrumento de Ampère para obter a rotação contínua sem utilizar ímãs ou o magnetismo terrestre, mas apenas condutores com corrente, [Amp22d].

Neste caso a corrente sobe pelo eixo central SS' , segue radialmente para fora pelos condutores radiais horizontais $S'E$ e $S'F$, descendo pelos eixos laterais verticais EA e FG do condutor móvel $DEFGHD$ que flutua sobre o ácido diluído que está no recipiente ABC , podendo girar ao redor do eixo central. A corrente sai do ácido por meio de condutores ligados aos recipientes S'' e S''' . Fecha-se o circuito ao ligar estes recipientes S'' e S''' à bateria e ao recipiente S . Uma outra

corrente circula pelas espiras horizontais concêntricas fixas que estão na base do condutor móvel, ao redor de ABC . Ampère dá 10 ou 12 voltas circulares, formando então espirais de mesmo raio sobrepostas, mas com um isolamento de seda entre elas que evita o contato elétrico. O instrumento da Figura 6.9 é parecido com o instrumento da Figura 6.3. A diferença principal é que na Figura 6.9 temos um conjunto de espiras circulares com corrente ao redor de ABC , enquanto que na Figura 6.3 temos um conjunto de ímãs verticais colocados abaixo da parte central do recipiente $ABCD$.

Para explicar a rotação contínua utilizando sua força entre elementos de corrente, Ampère utiliza uma consequência de suas primeiras pesquisas eletrodinâmicas, a saber, [Amp22d, pág. 62]:

[...] que existe atração entre dois condutores voltaicos cujas direções formam um ângulo reto quando a corrente elétrica que os percorre vai nos dois [condutores] se afastando ou se aproximando da perpendicular comum que mede a distância mais curta entre eles, e ocorre repulsão quando uma das correntes vai se afastando desta perpendicular e a outra vai se aproximando, [...]

Ampère então apresenta a Figura 6.10 na qual D e G representam as projeções das correntes verticais que descem pelos condutores laterais móveis. Já LKl e $L'K'l'$ representam duas porções de uma mesma espira circular colocadas ao redor da base do condutor móvel. Esta espira circular é fixa em relação ao laboratório e flui uma corrente constante ao longo dela. De acordo com Ampère, a corrente descendo para G é atraída por lK e repelida por KL . A resultante destas duas ações é uma força sobre G atuando na direção de L para l . Já a corrente descendo para D é atraída por $l'K'$ e repelida por $K'L'$. A resultante destas duas ações é uma força sobre D atuando na direção de L' para l' . Vê-se então que quando a corrente nas espiras circulares horizontais flui no sentido horário $lKl'K'l'$, o condutor móvel vai sofrer um torque que vai fazê-lo girar no sentido anti-horário ao redor do eixo vertical passando pelo centro dos círculos. Ampère descreve o sentido de rotação do condutor móvel nas seguintes palavras, [Amp22d]:

Estas duas forças se combinam então em uma única que tende assim a fazer girar o fio [vertical] em sentido inverso da corrente da espiral [horizontal]. Esta nova força se junta então à precedente, e ações semelhantes se renovam em cada posição dos fios, todo o sistema do condutor móvel gira de uma maneira contínua, em sentido inverso da corrente da espiral, durante o tempo em que permanece estabelecida a comunicação [o contato elétrico].



Figura 6.10: Explicação de Ampère para a rotação contínua, [Amp22d].

Vemos então que Ampère em poucos meses não apenas reproduziu a experiência de rotação contínua de Faraday, mas também obteve diversos fenômenos novos de rotação contínua.

6.3 A Experiência Crucial de Ampère

6.3.1 Previsão Errada de Ampère

Dando prosseguimento às suas experiências, Ampère imagina que pode obter a rotação contínua utilizando agora uma espira astática, como aquelas descritas na Subseção 4.3.2. Esta previsão aparece em um manuscrito que nunca foi totalmente publicado, a *chemise* 206 bis, [Ampc], Figura 6.11.

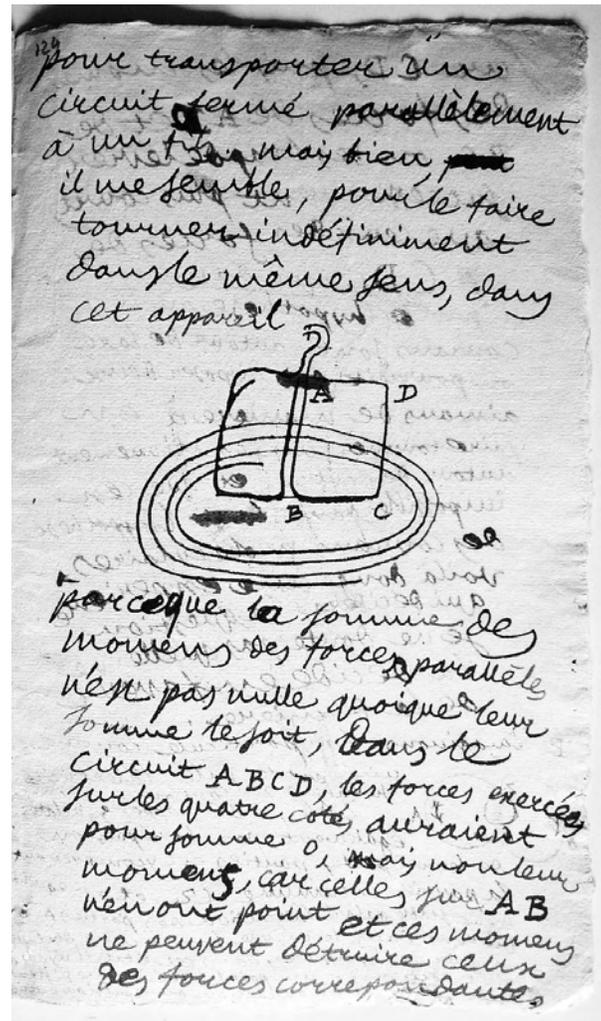


Figura 6.11: Ampère, *chemise* 206 bis, [Ampc].

Ampère não apresenta suas motivações para realizar esta experiência crucial.¹ Provavelmente estava apenas ampliando e refinando suas experiências descritas na Seção 6.2. Já havia reproduzido a rotação contínua de Faraday e obtido também rotações contínuas em diversas situações novas, a saber: Rotação devida apenas ao magnetismo terrestre; rotação de um ímã ao redor de seu eixo; rotação de um fio com corrente ao redor de seu eixo; e rotação de um condutor na forma da letra U invertida devida a uma espira circular na base do condutor. Na última experiência, em particular, havia obtido a rotação contínua de um condutor com corrente ao redor de um outro

¹Estamos utilizando a palavra “crucial” nesta Seção com o mesmo sentido adotado por Hofmann, [Hof82]: The Great Turning Point in André-Marie Ampère’s Research in Electrodynamics: A Truly “Crucial” Experiment.

condutor com corrente, sem a utilização de ímãs nem do magnetismo terrestre, ver a Subseção 6.2.4. Em todos estes casos havia um líquido condutor, seja o mercúrio ou um ácido diluído. Talvez tenha pensado em obter a rotação contínua sem a utilização de líquidos condutores, mas apenas fios com corrente. Pode ter pensado então em substituir o condutor móvel da Figura 6.9, análogo ao da Figura 6.5, por uma espira astática.

Vimos que com o instrumento da Figura 6.9 Ampère conseguiu obter em março de 1822 a rotação contínua de um condutor móvel devido à ação de uma espira circular. A corrente fluía de uma extremidade da bateria, subia pelo eixo central SS' do condutor móvel, afastava-se do eixo por dois condutores radiais horizontais $S'E$ e $S'F$, e então descia verticalmente por dois condutores laterais verticais EA e FG que flutuavam sobre o ácido diluído colocado no recipiente ABC . O circuito era fechado ligando este ácido à outra extremidade da bateria. Talvez para evitar a utilização do líquido condutor e para trabalhar apenas com condutores rígidos, Ampère tenha pensado em realizar uma experiência de rotação contínua análoga a esta, mas utilizando agora uma espira astática como a da Figura 4.16.

Ampère apresenta então uma previsão errada sobre o que esperar desta experiência. Esta previsão não aparece em nenhuma de suas publicações, mas apenas em um manuscrito que nunca foi totalmente publicado, [Ampc], Figura 6.11. Previsão de Ampère neste manuscrito:

Um circuito fechado nunca pode ser transportado paralelo a um fio [longo e retilíneo]. Contudo, me parece que ele pode girar indefinidamente no mesmo sentido neste aparelho [aqui Ampère apresenta nossa Figura 6.12]:

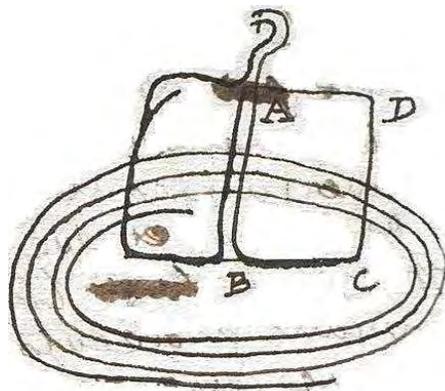


Figura 6.12: Previsão de Ampère de uma rotação contínua com uma espira astática, [Ampc].

Logo em seguida a esta Figura Ampère justifica sua previsão com as seguintes palavras, [Ampc]:

Isto porque a soma dos torques das forças paralelas não é nula, embora a soma [das forças] seja nula. No circuito $ABCD$, as forças exercidas sobre os quatro lados vão ter uma soma nula, mas seus torques não terão [uma soma nula]; isto porque [os torques] vão se anular sobre AB , e estes torques [nulos sobre AB] não serão capazes de cancelar os torques das forças correspondentes sobre CD , pois os torques das forças sobre AD e sobre BC possuem, respectivamente, braços de alavanca mais curtos do que os braços da alavanca da força sobre CD .

Ou seja, Ampère prevê uma rotação contínua neste caso. Até este momento Ampère ainda admitia que $k = 0$ nas Eqs. (2.4) e (2.5), ou então que $n/m = 0$ na Eq. (4.7). Caso estas constantes fossem nulas, o torque resultante sobre a espira astática da Figura 6.12 seria diferente de zero.

Uma representação dos sentidos das correntes nesta experiência aparece na Figura 6.13.

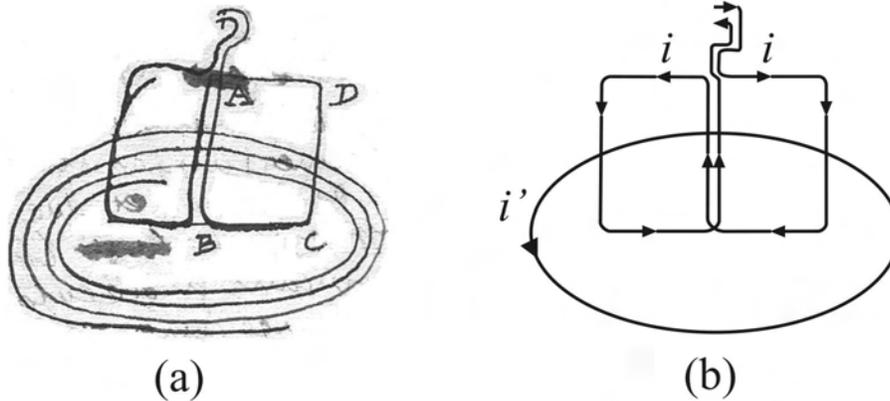


Figura 6.13: Sentidos das correntes na experiência crucial de Ampère.

6.3.2 Uma Anomalia Experimental: O Caso de Equilíbrio da Não Existência de Rotação Contínua

Porém, ao realizar a experiência em março de 1822, [Ampk], Ampère não obteve rotação alguma! Esta experiência foi apresentada pela primeira vez à Academia de Ciências em junho de 1822, aparecendo publicada na forma da Figura 6.14 (a). Ampère não menciona sua previsão errada, informando apenas que com esta experiência não obteve rotação contínua.

A espira circular que é colocada na base da espira astática da Figura 6.14 aparece na Figura 6.15. Esta espira circular fica fixa em um plano horizontal, com seu eixo de simetria coincidindo com o eixo de simetria vertical da espira astática.

Ampère descreve esta experiência crucial com as seguintes palavras, [Amp22i]:

[...], adapta-se à haste TT' (fig. 16 [nossa Figura 6.14 (a)]) uma taça anular O que está isolada da haste por um tubo de vidro Mm , e que se comunica com a taça S'' pela esquadria de cobre NnS'' .

A espiral representada na figura 2 [nossa Figura 6.15], mostrando as espiras circulares que vão ser colocadas abaixo da espira astática], com a ajuda da qual produz-se o movimento contínuo no aparelho da figura 1 [nossa Figura 6.9], mergulha por suas duas extremidades nas taças S'' e S''' . O condutor móvel [isto é, a espira astática $KEDBHGFK$] apoiado pelo ponto K na taça S' é composto de duas partes $KFGH$ e $KEDB$ iguais e semelhantes para que a Terra não atue sobre este condutor. Elas [estas duas partes] são reunidas por um círculo BH concêntrico à haste TT' . Conecta-se a este círculo uma ponta A que mergulha no mercúrio da taça O . Estabelece-se a comunicação [elétrica] ao mergulhar, por exemplo, o fio positivo em S e o fio negativo em S''' . Então a corrente divide-se entre as duas direções $STKEDBAONS''$ e $STKFGHAONS''$. Chega assim na taça S'' , percorre a espiral $LL'L''$ (figura 2

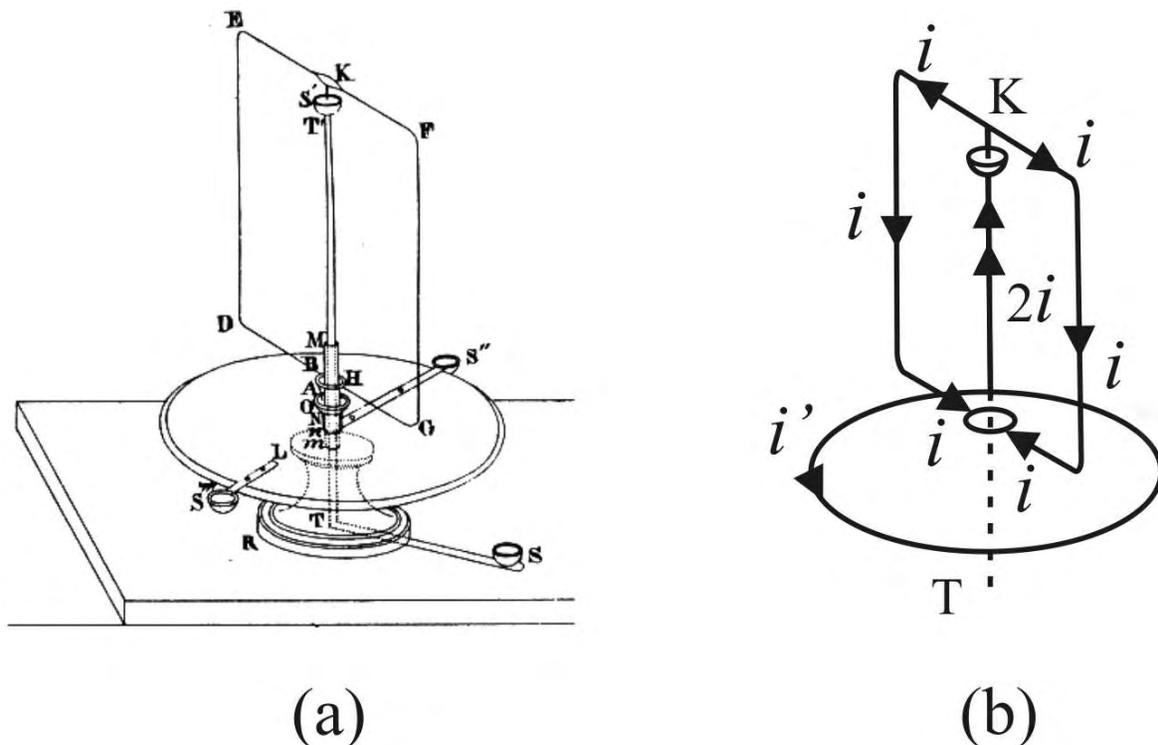


Figura 6.14: (a) Caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua, [Amp22i]. (b) Sentidos das correntes na experiência crucial de Ampère.

[nossa Figura 6.15]), e se entrega na taça S''' (figura 16 [nossa Figura 6.14 (a)]), onde mergulha-se o apêndice $L'''M'''$ (figura 2 [nossa Figura 6.15]), e que colocamos em comunicação com a extremidade negativa da pilha ao também mergulhar aí o fio condutor que vem desta extremidade. Estando tudo disposto desta maneira, o condutor móvel $BDEFGH$ não gira mais de uma maneira contínua, como acontecia com o condutor da fig. 1 [nossa Figura 6.9], ele não adquire nenhum movimento ou então ele oscila ao redor de uma posição de equilíbrio estável.

Esta experiência que fugiu às suas expectativas teve uma importância crucial em suas pesquisas. Ampère passou a considerá-la como um novo caso de equilíbrio, que vamos chamar aqui de *caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua*.

6.4 Transformações da Força entre Elementos de Corrente

Ampère utilizou o caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua para obter finalmente de maneira correta o valor da constante k . Entre março e junho de 1822 realizou uma análise teórica desta experiência levando em conta a expressão geral de sua força entre elementos de corrente obtida a partir da lei da adição, apresentando seus resultados finais para a Academia de Ciências em 10 de junho de 1822. Seu trabalho fundamental foi publicado no mesmo ano, [Amp22i]. Um resumo detalhado dos cálculos de Ampère encontra-se em [GG90, págs. 930-933].

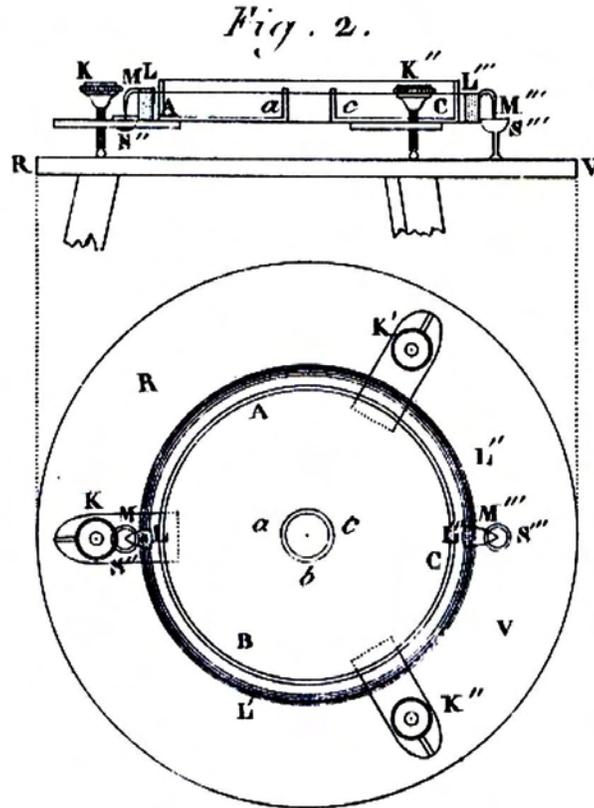


Figura 6.15: Espira circular que fica na base da espira astática da Figura 6.14, [Amp22i].

Neste artigo Ampère considera a expressão geral da força entre elementos de corrente compatível com a lei da adição na forma da Eq. (2.4):

$$\frac{ii' ds ds'}{r^n} (\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \cos \gamma + k \cos \alpha \cos \beta) . \quad (6.1)$$

Embora Ampère defendesse até esta época que $n = 2$ por analogia com a força gravitacional e com a força eletrostática, trabalha com um valor de n arbitrário para considerar o caso mais geral possível. Como afirmou em um outro trabalho, [Amp22j, pág. 229]:

a consideração das várias atrações observadas na natureza me levam a acreditar que a atração [entre elementos de corrente] cuja expressão estou buscando, também age em razão inversa do quadrado da distância; a suporei para maior generalidade em razão inversa da n -ésima potência desta distância, n sendo uma constante a determinar.

Deve ser enfatizado que a potência n da distância r que aparece na Eq. (6.1) não tem nenhuma relação com a constante n que aparecia na Eq. (4.7).

6.4.1 Força em Função do Ângulo entre os Elementos

Antes de obter o valor final da constante k na Eq. (6.1), Ampère apresenta duas transformações desta força. Uma delas relaciona os quatro ângulos discutidos na Seção 2.8, a saber, α , β , γ e ε :

$$\cos \varepsilon = \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta . \quad (6.2)$$

No artigo de 1822 ele diz que esta equação “é evidente pelo princípio fundamental da trigonometria esférica,” [Amp22i]. No *Théorie* ele diz que esta relação é obtida “ao considerar o triângulo esférico cujos lados sejam θ [ou α], θ' [ou β] e ε ,” [Amp26c, pág. 32] e [Amp23b, Amp90, pág. 204]. Ele não apresenta uma figura ilustrando como obter esta relação. Mas ela pode ser entendida pela nossa Figura 6.16.

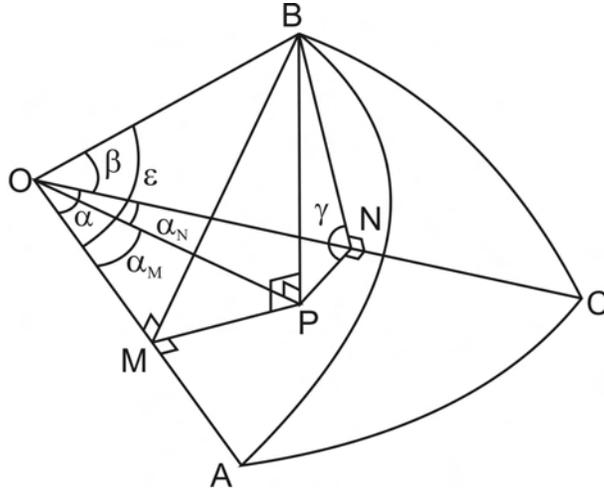


Figura 6.16: Triângulo esférico.

Neste triângulo temos que ABC representa uma parte da superfície de uma esfera centrada em O de raio $OA = OB = OC = R$. A projeção do ponto B no plano AOC é o ponto P . Escolhe-se o ponto M sobre OA tal que BM seja ortogonal a OA . Da mesma forma, escolhe-se o ponto N tal que BN seja ortogonal a OC . Supõe-se o elemento ds ao longo de OA , o elemento ds' ao longo de OB e a reta r unindo os elementos ao longo de OC . Com esta escolha vem que o ângulo α é dado por COA , o ângulo β por COB , o ângulo ε por AOB e o ângulo γ por BNP . Define-se ainda o ângulo α_M por POM e o ângulo α_N por NOP tal que $\alpha = \alpha_M + \alpha_N$.

Do triângulo ONB vem que $\cos \beta = ON/R$ e $\sin \beta = BN/R$. Do triângulo OMB vem que $\cos \varepsilon = OM/R$ e $\sin \varepsilon = BM/R$. Do triângulo OMP vem que $\cos \alpha_M = OM/OP$ e $\sin \alpha_M = PM/OP$. E do triângulo ONP vem que $\cos \alpha_N = ON/OP$ e $\sin \alpha_N = PN/OP$. Destas relações obtém-se que

$$\begin{aligned} OM &= R \cos \varepsilon = OP \cos \alpha_M = OP \cos(\alpha - \alpha_N) \\ &= OP(\cos \alpha \cos \alpha_N + \sin \alpha \sin \alpha_N) . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Com as relações do triângulo ONP com a Eq. (6.3) vem que $R \cos \varepsilon = ON \cos \alpha + PN \sin \alpha$. Com as relações do triângulo ONB nesta última expressão vem que:

$$R \cos \varepsilon = R \cos \alpha \cos \beta + PN \sin \alpha . \quad (6.4)$$

Do triângulo BPN vem que $PN = BN \cos \gamma$ e do triângulo ONB vem que $BN = R \sin \beta$. Jogando estes dois últimos resultados na Eq. (6.4) vem finalmente a Eq. (6.2). Utilizando a Eq. (6.2) vem que a Eq. (6.1) fica na forma

$$\frac{ii' ds ds'}{r^n} [\cos \varepsilon + (k - 1) \cos \alpha \cos \beta] = \frac{ii' ds ds'}{r^n} (\cos \varepsilon + h \cos \alpha \cos \beta) . \quad (6.5)$$

Esta é Eq. (2.6) com α e β no lugar de θ e θ' , respectivamente, e com $h = k - 1$.

6.4.2 Força em Termos de Derivadas Parciais

Neste artigo extremamente importante de 1822, [Amp22i], Ampère apresenta pela primeira vez uma outra transformação fundamental de sua força entre elementos de corrente. Neste caso ele passa a expressá-la em termos das diferenciais parciais da distância r entre os dois elementos de corrente em relação aos elementos ds e ds' . Embora ele usasse a expressão “diferenciais parciais,” escrevia estas derivadas parciais como dr/ds e dr/ds' , em vez da notação moderna $\partial r/\partial s$ e $\partial r/\partial s'$.

Ampère então considera a Figura 2.16, ver a página 49. Apresentamos na nossa Figura 6.17 os elementos principais para entender a transformação de Ampère.

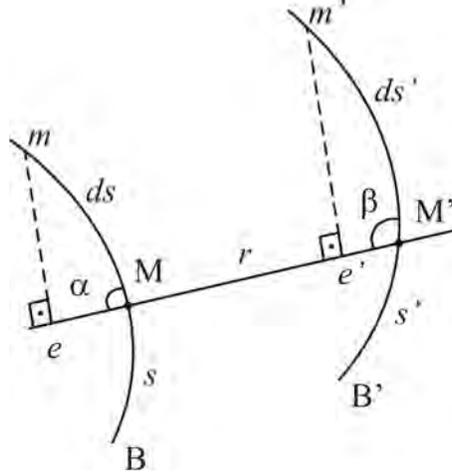


Figura 6.17: Os elementos infinitesimais ds e ds' estão orientados de forma arbitrária no espaço tri-dimensional.

Os fios curvos com corrente são representados por $BM = s$ e $B'M' = s'$. As porções infinitesimais (representadas com um tamanho exageradamente grande em nossa Figura) são dadas por $Mm = ds$ e $M'm' = ds'$. Estes elementos estão no espaço e não necessariamente formam um único plano. A distância entre os elementos é dada por $MM' = r$. Esta distância é uma função das duas variáveis independentes, s e s' , a saber, $r = r(s, s')$. Traçam-se as perpendiculares me e $m'e'$ ao longo da reta passando por MM' . De acordo com a especificação de Ampère, o ângulo α é dado por mMe e o ângulo β por $m'M'e'$. Passando dos pontos M e M' para os pontos m e m' , vem que a distância entre os elementos mudará de $MM' = r$ para um novo valor mm' . A variação dr será então dada por, de acordo com a Figura 6.17 e lembrando que estamos considerando distâncias infinitesimais:

$$dr = eM - e'M' = \cos \alpha ds - \cos \beta ds' . \quad (6.6)$$

Isto leva à seguinte conclusão:²

²Em notação moderna teríamos

$$dr = \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right) ds + \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right) ds' ,$$

$$\cos \alpha = \frac{\partial r}{\partial s} \quad \text{e} \quad \cos \beta = - \frac{\partial r}{\partial s'} .$$

$$\cos \alpha = \frac{dr}{ds}, \quad (6.7)$$

$$\cos \beta = -\frac{dr}{ds'}. \quad (6.8)$$

Ampère deriva então a Eq. (6.8) parcialmente em relação a s obtendo:

$$\frac{d\beta}{ds} \operatorname{sen} \beta = \frac{d^2r}{dsds'}. \quad (6.9)$$

Observa então que ao passar do ponto M para o ponto m vem que s se transforma em $s + ds$, sendo que β diminui de valor. Esta diminuição é dada pela projeção do ângulo $MM'm$ sobre o plano $MM'm'$, ou seja, $d\beta = -MM'm \cos \gamma$. Aqui γ é o ângulo entre os planos $M'Mm$ e $MM'm'$. Mas este ângulo $MM'm$ é dado aproximadamente por

$$MM'm \approx \frac{me}{eM'} \approx \frac{me}{M'M} = \frac{ds \operatorname{sen} \alpha}{r}. \quad (6.10)$$

Com isto obtém-se

$$\frac{d\beta}{ds} = -\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \gamma}{r}. \quad (6.11)$$

Combinando esta equação com a Eq. (6.9) vem que:

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \gamma = -r \frac{d^2r}{dsds'}. \quad (6.12)$$

Aplicando este resultado juntamente com as Eqs. (6.7) e (6.8) na Eq. (6.2) leva a

$$\cos \varepsilon = -r \frac{d^2r}{dsds'} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}. \quad (6.13)$$

Combinando as Eqs. (6.2), (6.7), (6.8) e (6.12) na Eq. (6.1) obtém-se então:

$$\begin{aligned} & \frac{ii' dsds'}{r^n} (\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \gamma + k \cos \alpha \cos \beta) \\ &= \frac{ii' dsds'}{r^n} [\cos \varepsilon + (k-1) \cos \alpha \cos \beta] \\ &= -\frac{ii' dsds'}{r^n} \left(r \frac{d^2r}{dsds'} + k \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \\ &= -ii' dsds' r^{1-n-k} \left(r^k \frac{d^2r}{dsds'} + k r^{k-1} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \\ &= -ii' dsds' r^{1-n-k} \frac{d \left(r^k \frac{dr}{ds'} \right)}{ds} = -ii' dsds' r^{1-n-k} \frac{d^2 \left(r^{1+k} \right)}{1+k dsds'}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Estas são as várias formas em que Ampère apresenta sua força no artigo de 1822.

Esta transformação é válida qualquer que seja o valor de k . No caso particular em que $k = 1$ obtém-se:

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta = -\frac{d^2(r^2/2)}{dsds'}. \quad (6.15)$$

Ampère também utiliza neste artigo de 1822 coordenadas retangulares representando o ponto M por (x, y, z) e o ponto M' por (x', y', z') . O sistema de Ampère é esquerdo ou levogiro, isto é, com os eixos x e y invertidos em relação à nossa orientação normal que segue a regra da mão direita. A distância MM' é então dada por $r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$. Fazendo a derivada parcial de $r^2/2$ em relação a s' obtém:

$$\frac{d(r^2/2)}{ds'} = (x' - x)\frac{dx'}{ds'} + (y' - y)\frac{dy'}{ds'} + (z' - z)\frac{dz'}{ds'}. \quad (6.16)$$

Derivando parcialmente esta equação em relação a ds obtém:

$$\frac{d^2(r^2/2)}{dsds'} = -\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}. \quad (6.17)$$

Esta última equação aplicada nas Eqs. (6.15) e (6.2) leva a:

$$\cos \varepsilon = \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta = \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}. \quad (6.18)$$

6.5 A Obtenção de $k = -1/2$

O caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua é chamado por Ampère de um “fato novo” em seu artigo de 1822. Ele explica este fato da seguinte maneira, [Amp22i]:

Este fato pode ser enunciado assim: Um circuito circular fechado não pode jamais produzir movimento contínuo sempre no mesmo sentido, ao agir sobre um condutor móvel de uma forma arbitrária que parte de um ponto ao longo da perpendicular elevada sobre o plano deste circuito pelo centro do círculo do qual ele forma a circunferência e que termina em um outro ponto do mesmo eixo, enquanto que o condutor móvel só pode se mover girando ao redor deste eixo.

Para justificar este fato novo apresentou pela primeira vez publicamente seu caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua, experiência esta que discutimos na Subseção 6.3.2.

Vamos agora analisar como Ampère obteve o valor final de sua constante k . Ele começa apresentando a Figura 6.18.

Temos um círculo de raio a no plano xy centrado na origem, por onde flui uma corrente constante i' . Este circuito exerce um torque sobre um elemento de corrente ids localizado no ponto M . Este elemento pertence a um outro circuito que pode girar ao redor do eixo z . O objetivo de Ampère é calcular este torque, impor que ele é nulo a partir do caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua, obtendo assim o valor de k .

Em seu artigo de 1822 ele é muito sucinto na dedução deste valor de k . Vamos aqui detalhar todas as passagens. Além disto, para simplificar a compreensão das passagens matemáticas, vamos utilizar um sistema de coordenadas orientado de acordo com a regra da mão direita usual, em vez do sistema esquerdo ou levogiro de Ampère. Vamos usar o símbolo ∂ para as derivadas parciais. Ele utiliza um sistema de coordenadas cilíndrico com variáveis $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ sendo a distância ao eixo z , e com t como sendo o ângulo polar. Em vez destas letras de Ampère, vamos usar as mais usuais $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ como sendo a distância ao eixo z , e φ como sendo o ângulo azimutal, respectivamente. Na Figura 6.19 temos os elementos principais da Figura de Ampère que vão nos interessar aqui.

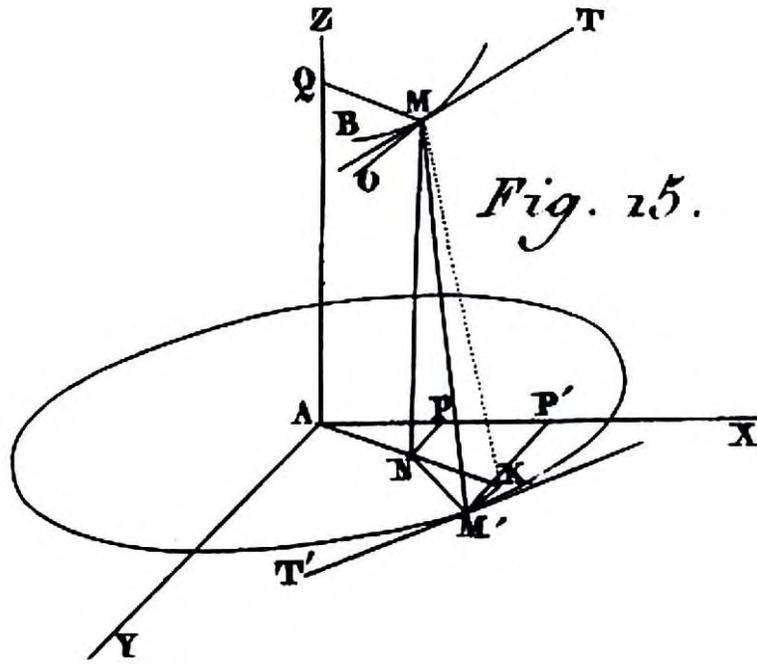


Figura 6.18: Figura original de Ampère, [Amp22i, Figura 15].

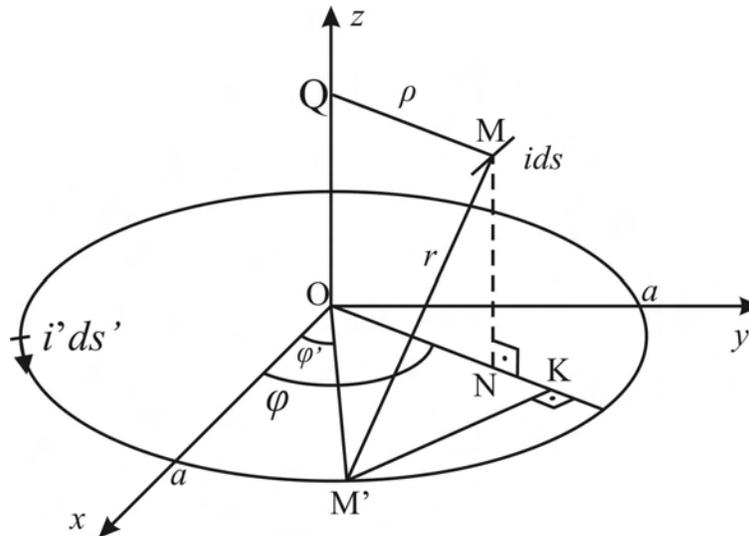


Figura 6.19: Elementos principais para seguir a dedução de Ampère do valor correto de k .

Temos um círculo de raio a localizado no plano xy , com o círculo centrado na origem O do sistema de eixos xyz . Neste circuito circular flui uma corrente constante i' . Vamos usar coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) . Um elemento de corrente $i'ds' = i'ad\varphi'$ está localizado no ponto $M' = (a, \varphi', 0)$. Ele exerce uma força sobre um outro elemento de corrente ids localizado no ponto $M = (\rho, \varphi, z)$. A projeção vertical do ponto M sobre o plano xy é o ponto N . A reta passando por ON é cortada ortogonalmente no ponto K por uma outra reta passando pelo ponto M' . O ângulo entre o eixo x e o segmento OM' é φ' , enquanto que o ângulo entre o eixo x e o segmento ON é φ . Com isto vem que $\text{sen}(\varphi - \varphi') = M'K/a$. A distância entre os dois elementos é dada por $M'M = r = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\varphi - \varphi') + z^2}$. Com isto vem que

$$\frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{1}{a} \frac{\partial r}{\partial \varphi'} = -\frac{\rho}{r} \operatorname{sen}(\varphi - \varphi') . \quad (6.19)$$

De acordo com a Eqs. (6.14) e (6.19), a força de Ampère exercida por $i'ds'$ sobre ids pode ser escrita como

$$-ii'dsds'r^{1-n-k} \frac{\partial}{\partial s} \left(r^k \frac{\partial r}{\partial s'} \right) = ii'dsads'\varphi'r^{1-n-k} \frac{\partial}{\partial s} [r^{k-1}\rho \operatorname{sen}(\varphi - \varphi')] . \quad (6.20)$$

Esta força está direcionada ao longo da reta $M'M = r$ ligando os dois elementos de corrente. Nesta experiência só interessa o torque sobre o circuito contendo ids ao redor do eixo z . Logo a única componente da força dada pela Eq. (6.20) que nos interessa é aquela perpendicular ao plano ONM . Para obter esta componente basta multiplicar esta última expressão por $M'K/M'M = a \operatorname{sen}(\varphi - \varphi')/r$:

$$ii'dsa^2d\varphi'r^{-n-k} \operatorname{sen}(\varphi - \varphi') \frac{\partial}{\partial s} [r^{k-1}\rho \operatorname{sen}(\varphi - \varphi')] . \quad (6.21)$$

Para obter o torque ao redor do eixo z basta então multiplicar esta expressão por ρ , o braço da alavanca. Integrando este torque exercido por $i'ds'$ sobre todo o circuito S obtém-se:

$$ii'a^2d\varphi' \oint_S \rho r^{-n-k} \operatorname{sen}(\varphi - \varphi') \frac{\partial}{\partial s} [r^{k-1}\rho \operatorname{sen}(\varphi - \varphi')] ds . \quad (6.22)$$

Ampère utiliza então o caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua para afirmar que esta integral é nula sempre que dois pontos do circuito S passarem pelo eixo z , que é o eixo de simetria do circuito circular S' , qualquer que seja a forma do circuito S . Para que isto ocorra para todo formato do circuito S é necessário que o integrando da Eq. (6.22) seja uma diferencial exata em relação às três variáveis de integração, a saber, r , ρ e φ . Neste ponto Ampère conclui sua análise da seguinte maneira sucinta, [Amp22i]:

Ora, sabe-se que para que o valor de uma integral seja desta maneira independente das relações das variáveis que entram nesta integral, e [para que este valor] permaneça sempre o mesmo entre os mesmos limites [de integração], é necessário que esta integral se apresente sob a forma de uma diferencial exata entre estas variáveis consideradas como sendo independentes entre si, o que não irá ocorrer a menos que se tenha:

$$k - 1 = -n - k ,$$

ou

$$k = \frac{1 - n}{2} .$$

Tal é a relação que a experiência demonstra existir entre k e n . Quando $n = 2$, tem-se $k = -1/2$, mas qualquer que seja a força das analogias que nos levem a pensar que n de fato seja igual a 2, não se tem nenhuma prova deduzida diretamente da experiência, pois todas as experiências feitas sobre este assunto foram realizadas fazendo um condutor voltaico agir sobre um ímã e, conseqüentemente, só se aplicam por uma extensão que não se pode considerar como uma prova completa, à ação mútua entre duas porções infinitamente pequenas de correntes elétricas.

Para entender como Ampère chegou nestas relações temos de continuar as contas a partir da Eq. (6.22). Aplicando a derivada parcial no colchetes, vem que o torque é dado por:

$$\begin{aligned}
& ii' a^2 d\varphi' \oint_S \rho r^{-n-k} \text{sen}(\varphi - \varphi') \left[(k-1)r^{k-2} \frac{\partial r}{\partial s} \rho \text{sen}(\varphi - \varphi') \right. \\
& \quad \left. + r^{k-1} \frac{\partial \rho}{\partial s} \text{sen}(\varphi - \varphi') + r^{k-1} \rho \cos(\varphi - \varphi') \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right] ds \\
& = ii' a^2 d\varphi' \oint_S [(k-1)r^{-n-2} \rho^2 \text{sen}^2(\varphi - \varphi') dr \\
& \quad + r^{k-1} \rho \text{sen}^2(\varphi - \varphi') d\rho + r^{k-1} \rho^2 \text{sen}(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi') d\varphi] . \tag{6.23}
\end{aligned}$$

Temos então uma integral de linha em termos de três variáveis, r , ρ e φ . Ela será independente do caminho apenas se existir uma função $\phi(r, \rho, \varphi)$ tal que ela possa ser escrita como:

$$\int \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} d\varphi \right) . \tag{6.24}$$

Ou seja, a Eq. (6.23) será independente do caminho se existir uma função ϕ tal que:

$$(k-1)r^{-n-2} \rho^2 \text{sen}(\varphi - \varphi') = \frac{\partial \phi}{\partial r} , \tag{6.25}$$

$$r^{k-1} \rho \text{sen}^2(\varphi - \varphi') = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} , \tag{6.26}$$

$$r^{k-1} \rho^2 \text{sen}(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi') = \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} . \tag{6.27}$$

Integrando estas três equações obteremos três funções, a saber:

$$\phi_1 = -\frac{k-1}{n+2} r^{-n-1} \rho^2 \text{sen}^2(\varphi - \varphi') + f_1(\rho, \varphi) , \tag{6.28}$$

$$\phi_2 = r^{-n-1} \frac{\rho^2}{2} \text{sen}^2(\varphi - \varphi') + f_2(r, \varphi) , \tag{6.29}$$

$$\phi_3 = r^{-n-1} \rho^2 \frac{\text{sen}^2(\varphi - \varphi')}{2} + f_3(r, \rho) . \tag{6.30}$$

Finalmente conclui-se então que vamos ter $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3$ para todo (r, ρ, φ) apenas se $f_1(\rho, \varphi) = f_2(r, \varphi) = f_3(r, \rho) = \text{constante}$ e se

$$-\frac{k-1}{n+2} = \frac{1}{2} . \tag{6.31}$$

Ou seja, se

$$k = \frac{1-n}{2} . \tag{6.32}$$

E esta é exatamente a equação apresentada por Ampère em seu artigo de 1822.

Combinando este resultado com sua suposição de que $n = 2$, Ampère conclui finalmente que $k = -1/2$. Esta é a parte principal do trabalho que apresentou à Academia em 10 de junho de

1822. Com isto chegou então finalmente ao valor final da sua expressão para a força entre dois elementos de corrente. Ela pode ser expressa de várias formas, ver a Eq. (6.14):

$$\begin{aligned}
 & \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \frac{1}{2} \cos \alpha \cos \beta \right) \\
 &= \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(\cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \alpha \cos \beta \right) \\
 &= -\frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(r \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{1}{2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \\
 &= -ii' ds ds' r^{-1/2} \left(r^{-1/2} \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{1}{2} r^{-3/2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \\
 &= -ii' ds ds' r^{-1/2} \frac{d \left(r^{-1/2} \frac{dr}{ds'} \right)}{ds} = -2ii' ds ds' r^{-1/2} \frac{d^2 \left(r^{1/2} \right)}{ds ds'}. \tag{6.33}
 \end{aligned}$$

Com isto Ampère concluiu a obtenção do valor final de sua força entre dois elementos de corrente.

Parte III

A Última Fase das Pesquisas Eletrodinâmicas de Ampère

Capítulo 7

Novas Experiências de Ampère

7.1 O Caso de Equilíbrio das Correntes em Semi-Círculo

Como Ampère obteve o valor final e correto de k a partir de um caso de equilíbrio, passa a dar uma importância cada vez maior a estas situações de força e torque nulos. No artigo original de 1822 apresenta apenas o caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua. Quando reimprime este artigo no *Recueil* em 1823, Ampère acrescenta no artigo modificado outros dois casos de equilíbrio, a saber, a experiência do fio sinuoso, Figura 4.17, e a experiência das correntes anti-paralelas, Figura 4.19, [Amp22p, pág. 300] e [Amp85l, pág. 275]. É possível que estas experiências só tenham sido realizadas de fato a partir de setembro de 1822, depois de Ampère se convencer da importância dos casos de equilíbrio.

Foi em setembro de 1822 que Ampère visitou Auguste de la Rive (1801-1873) em Genebra e realizou uma nova experiência de equilíbrio. Neste caso substituiu por um semi-círculo o condutor circular horizontal do caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua. Vamos chamar esta experiência de *caso de equilíbrio das correntes em semi-círculo*. Isto está mostrado na Figura 7.1, com o circuito $CDEFG$ contendo o semi-círculo DEF . Novamente Ampère não obteve rotação contínua neste caso. O trabalho que Ampère apresentou à Academia de Ciências em 16 de setembro de 1822 descrevendo esta experiência feita com de la Rive foi publicado como um resumo em [Amp22g]. O trabalho completo só foi publicado em 1885 por Joubert a partir dos manuscritos de Ampère, [Amp85j]. Apesar disto, no *Recueil* de 1823 Ampère já apresentou os aspectos principais desta experiência, assim como a Figura 7.1, [Amp22p, pág. 301]. No artigo de 1822 Ampère apenas menciona esta experiência em uma nota de rodapé, sem incluir nenhuma Figura, [Amp22i, págs. 415-416].

7.2 A Experiência da Ponte de Ampère

Duas semanas após apresentar à Academia de Ciências sua fórmula final com $k = -1/2$, Ampère obteve duas consequências novas a partir desta expressão. Vamos discutir inicialmente a segunda consequência. Este segundo “resultado notável” (palavras de Ampère) é expresso com as seguintes palavras, [Amp22i, pág. 420]:

[...] duas pequenas porções [de corrente] devem se repelir quando elas se encontram sobre uma mesma reta, e quando elas [as correntes] são dirigidas em direção ao mesmo ponto do espaço. [...] A repulsão, neste caso, era uma coisa tão inesperada que era

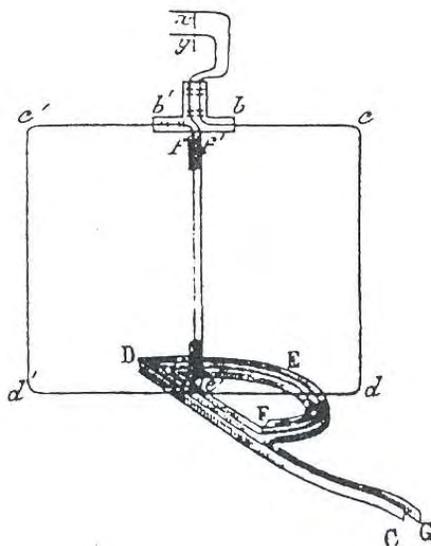


Figura 7.1: Caso de equilíbrio das correntes em semi-círculo, [Amp22p, pág. 301] e [Amp85l, pág. 275].

necessário verificá-la; fiz depois a experiência com o Sr. Auguste de la Rive, e ela foi completamente bem sucedida.

Vamos comentar inicialmente esta segunda consequência. Até meados de 1822 Ampère defendia que $n/m = 0$ na Eq. (4.7), ou $k = 0$ nas Eqs. (2.4) e (2.5), sendo que isto levaria a não haver interação entre dois elementos de corrente colineares. No entanto, caso k não fosse nulo, ele esperaria que esta constante fosse positiva, já que a experiência de Gay-Lussac e Thénard sugeria esta possibilidade, como vimos na Seção 4.2. Ela mostrou que no momento da descarga elétrica entre dois fios condutores ligados aos pólos de uma pilha potente, existe uma forte atração entre os fios. Mas Ampère havia encontrado uma explicação alternativa para este efeito atribuindo-o ao vácuo criado no ar pela passagem da eletricidade. Por estes motivos, Ampère considerou totalmente inesperada a previsão teórica obtida a partir de sua fórmula completa com $k = -1/2$ de uma repulsão entre dois elementos de corrente colineares. A experiência com Auguste de la Rive foi realizada em Genebra em setembro de 1822, Figura 7.2 (a). Esta Figura aparece no artigo de A. de la Rive, [dlR22a], assim como nos trabalhos de Ampère, [Amp85j], [Amp26c, pág. 39 e Fig. 8] e [Amp23b, Amp90, pág. 211 e Fig. 8]. Esta experiência de Ampère tem recebido diversos nomes na literatura: “experiência do fio flutuante,” [Hof96, pág. 317]; “experiência do grampo,” [GG96, pág. 61]; “experiência da ponte,” [Wes91, págs. 225-232, Seção 6.4: Determination of the force on Ampere’s bridge] e [Wes02, págs. 305-321]. Vamos chamá-la aqui de *experiência da ponte de Ampère*.

A descrição de Auguste de la Rive é bem clara sobre a previsão teórica, sobre o que ocorre na experiência e sobre a interpretação do fenômeno, [dlR22a]:

Durante sua estadia em Genebra o Sr. Ampère, tendo tido a oportunidade de realizar algumas experiências novas, desejou que eu apresentasse duas principais e importantes na seqüência desta Memória. A primeira é uma confirmação dos pontos de vista teóricos do Sr. Ampère que, partindo de sua fórmula, foi levado a concluir que duas porções de corrente dirigidas no mesmo sentido ao longo da mesma reta devem se repelir, e que todas as porções de uma mesma corrente devem se repelir umas às outras.

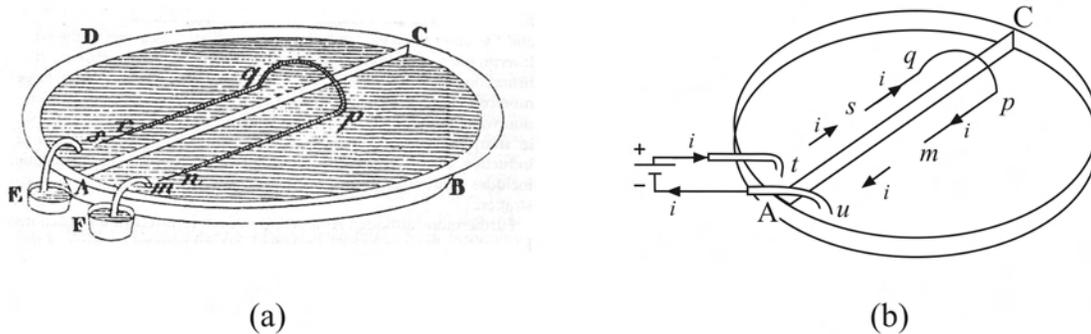


Figura 7.2: (a) Experiência da ponte de Ampère, [dlR22a] e [Amp85j].

Com efeito, sobre um prato $ABCD$, Figura 7.2, separado em dois compartimentos iguais pela divisão AC , com cada compartimento cheio de mercúrio, coloca-se um fio de latão recoberto de seda, cujos ramos qr e pn podem flutuar sobre o mercúrio paralelamente à divisão AC . As extremidades nuas rs e mn mergulham no mercúrio. Ao ligar os pólos [da bateria] nas cápsulas E e F , estabelecem-se duas correntes independentes uma da outra, nas quais cada uma [das correntes] tem por condutor uma parte do mercúrio e uma parte sólida. Qualquer que seja a direção da corrente, observam-se sempre os dois fios rq e pn mover-se paralelamente à divisão AC do lado oposto ao qual ela chega, o que indica uma repulsão para cada fio entre a corrente estabelecida no mercúrio e seu prolongamento no próprio fio.

Para facilitar a compreensão da experiência fizemos a Figura 7.2 (b). A ponte de Ampère é representada pelo segmento $sppm$. Quando flui uma corrente no circuito, seja no sentido horário ou anti-horário, a ponte vai de A para C . De acordo com Ampère a explicação para este movimento é principalmente devida à repulsão que ocorre entre a corrente i no segmento ts do mercúrio e a corrente i no segmento sq da ponte, assim como pela repulsão entre a corrente i no segmento um do mercúrio e a corrente i no segmento mp da ponte.

Esta é uma das experiências mais importantes de Ampère. Ela tem sido discutida na literatura até os dias de hoje. Para uma análise teórica desta experiência com o cálculo da força a partir da integração sêxtupla da expressão de Ampère, ver [BA98] e [BA01]. Nestes livros encontram-se também diversas referências modernas sobre este tema.

7.3 O Caso de Equilíbrio da Não Existência de Força Tangencial

Agora discutimos a primeira consequência nova obtida por Ampère em junho de 1822 a partir do valor final de sua força entre elementos de corrente, Eq. (6.33). O primeiro “resultado notável” é que, após integrar esta expressão para obter o valor da força resultante exercido sobre um elemento de corrente por um circuito fechado de forma arbitrária, obtém que é nula a componente desta força ao longo da direção do elemento que está sofrendo a ação. Em suas palavras, [Amp22i, págs. 419-420]:

[...] a integral [da força ao longo da direção do elemento que sofre a ação exercida por um circuito fechado de forma arbitrária] será, consequentemente, nula, de onde

segue que a resultante de todas as ações exercidas por um circuito fechado sobre uma pequena porção de condutor é sempre perpendicular à direção desta pequena porção. Sobre isto observo que o mesmo deve acontecer para um conjunto qualquer de circuitos fechados e, conseqüentemente, para um ímã, quando o consideramos como tal [isto é, como um conjunto de circuitos fechados], em conformidade à minha opinião sobre as causas dos fenômenos magnéticos, e é, com efeito, o que resulta de várias experiências devidas a diversos físicos.

Este primeiro fato notável previsto por Ampère a partir de sua fórmula final lhe sugeriu um novo caso de equilíbrio. Vamos chamá-lo de *caso de equilíbrio da não existência de força tangencial*. Com ele Ampère obteve a mesma relação entre n e k dada pela Eq. (6.31). Além disso, com esta nova experiência confirmou experimentalmente sua previsão teórica da não existência de força tangencial sobre um elemento de corrente. Esta previsão foi feita em junho de 1822 e mencionada em seu artigo crucial deste ano, [Amp22i]. Apesar disto, a experiência concreta com a qual comprovou esta previsão só foi mencionada pela primeira vez em uma carta a Gherardi de 16 de agosto de 1825, [Amp25a]. A descrição detalhada do caso de equilíbrio da não existência de força tangencial e a Figura 7.3 aparecem em dois artigos publicados em 1825, [Amp25b, Fig. 3] e [Amp25c].

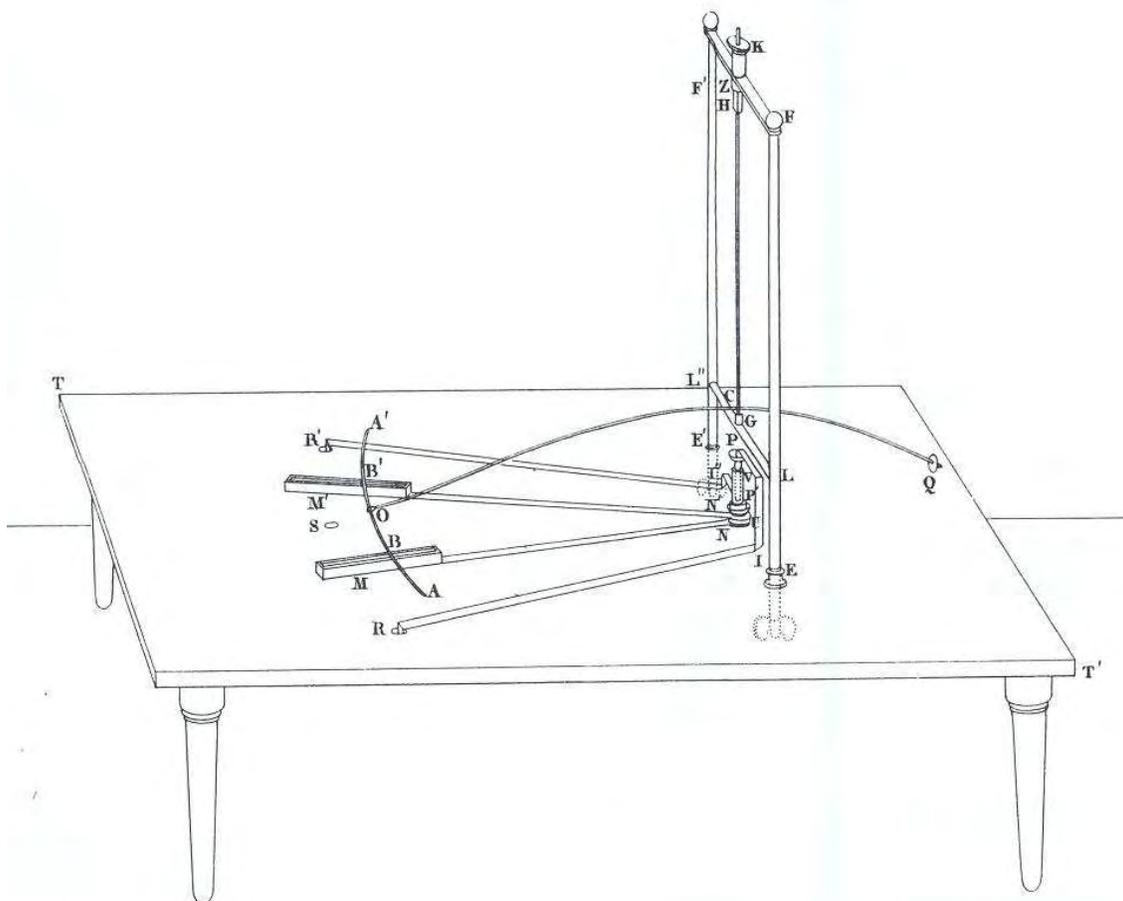


Figura 7.3: Caso de equilíbrio da não existência de força tangencial, [Amp25b, Fig. 3] e [Amp25c].

Um arco de círculo BB' flutua sobre duas tinas M e M' cheias de mercúrio apoiado por um contrapeso Q . O arco é livre para girar ao redor do eixo vertical GH . Na Figura 7.4 temos

uma representação nossa da experiência vista de cima, adaptada de uma Figura semelhante apresentada por Blondel, [Blo82, pág. 147].

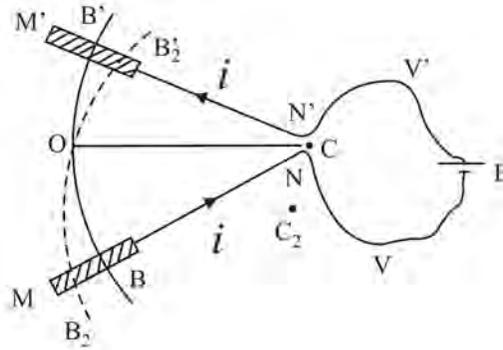


Figura 7.4: Caso de equilíbrio da não existência de força tangencial visto de cima. O arco de círculo BB' centrado em C fica em equilíbrio estável. Caso o arco seja solto do repouso na posição B_2B_2' centrado em C_2 , ele volta à posição de equilíbrio BB' . O circuito $EV'N'NVE$ possui uma forma arbitrária.

O arco $B'OB$ tem seu centro em C , que é uma projeção do eixo vertical GH , enquanto que o arco $B_2'OB_2$ tem seu centro em C_2 . Seguindo a corrente a partir do pólo positivo E da bateria, vemos que ela percorre uma trajetória curva arbitrária $EV'N'$, depois percorre o trajeto $N'B'OBN$, indo então por outra trajetória curva arbitrária NVE até o terminal negativo da bateria. A parte curva do fio $EV'N'NVE$ tem uma forma qualquer e Ampère o considera como um circuito praticamente fechado já que existe apenas uma pequena distância entre N' e N . Ampère afirma que, quando o centro do arco $B_2'OB_2$ se encontra em C_2 , portanto fora da projeção vertical do eixo GH , o arco não vai ficar parado ao ser solto do repouso, mas irá deslocar-se com seu centro oscilando ao redor de C , até B_2' parar em B' e B_2 parar em B . Nesta situação em que o arco $B'B$ tem centro em C , que está sob a projeção vertical do eixo GH , o arco não mais se desloca. Isto é, qualquer que seja o formato do circuito $EV'N'NVE$ vem que o arco $B'OB$ não vai se deslocar de B para B' , nem de B' para B . Palavras de Ampère, [Amp25b]:

[...]; de onde segue que a direção da ação [isto é, da força resultante] que o circuito fechado exerce sobre o elemento passa por este eixo [GH] e que, conseqüentemente, é perpendicular ao elemento.

Ao integrar sua Eq. (2.4) ou (2.5), Ampère obtém que só vai encontrar um valor nulo para a componente tangencial da força sobre um elemento de corrente se valer a Eq. (6.31). Ele é então o primeiro a prever teoricamente que é nula a componente longitudinal da força resultante exercida sobre um elemento de corrente por um circuito fechado de forma arbitrária, além de ser o primeiro a provar isto experimentalmente. Este resultado está embutido hoje em dia na expressão da força $d\vec{F}$ sobre um elemento de corrente $Id\vec{\ell}$ em um campo magnético \vec{B} , sendo dada por $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$. Ou seja, qualquer que seja a direção do campo magnético \vec{B} , vem que a força resultante vai estar em um plano perpendicular a $d\vec{\ell}$, isto é, será ortogonal a este elemento.

7.4 A Experiência Mostrando que $n > 1$

Este artigo fundamental no qual Ampère obtém que $k = -1/2$ foi publicado em 1822, [Amp22i]. Ao reimprimir este artigo no *Recueil* com algumas modificações, Ampère introduz uma nota interessante que vale à pena reproduzir, [Amp22p, pág. 317]:

Em virtude da equação $k = \frac{1-n}{2}$, o valor de k só será negativo se n for maior do que 1. Este é o motivo pelo qual, antes de ter verificado, pela experiência descrita [experiência da ponte de Ampère, Seção 7.2], que este valor é, de fato, negativo, me assegurei de que o valor de n é maior do que 1. Para isto, após haver encontrado, por um cálculo muito simples que, quando se supõe $n = 1$, um condutor fixo, de formato arbitrário, não pode exercer qualquer ação sobre um condutor circular situado no mesmo plano, e que a ação entre o condutor circular e um condutor retilíneo deve ser atrativa ou repulsiva para uma mesma posição entre estes condutores, dependendo se n é maior ou menor do que 1, fiz com que fosse feita esta experiência no mês de maio de 1822, e constatei que a ação a que se refere não é nula, e que resulta a partir do sentido em que ocorre [a experiência] que n é maior do que 1 e que, conseqüentemente, k é negativo, ao me servir do condutor móvel representado em *abcdefghiky* [Figura 7.5], sobre o qual fiz agir o condutor vertical *AB*. A figura que apresento aqui me parece suficiente para que se tenha uma idéia completa e para que seja inútil apresentar uma descrição detalhada.

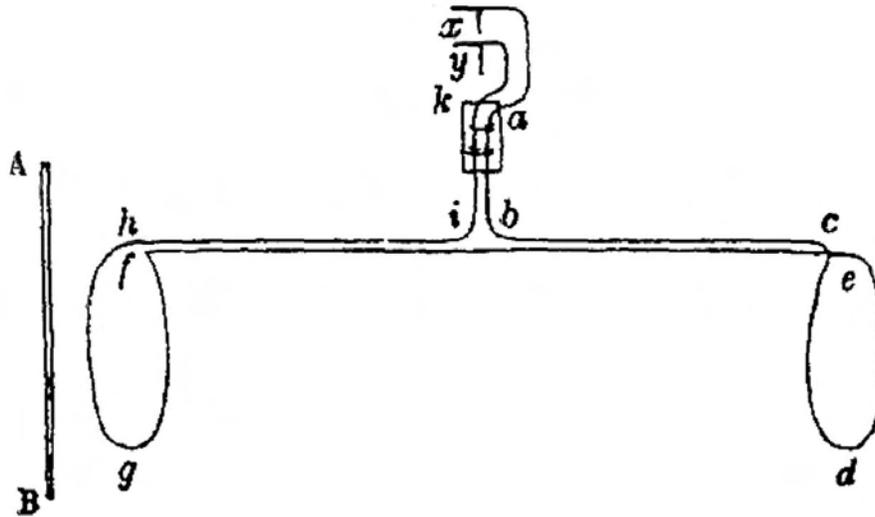


Figura 7.5: Experiência mostrando que $n > 1$.

Apesar destas palavras de Ampère, nos parece interessante discutir um pouco o que ele pode ter observado nesta experiência. Temos novamente uma espira astática em um plano vertical que pode girar ao redor do eixo vertical xy . Embora fale de ações atrativas ou repulsivas, o que observou foi o torque ou giro desta espira astática devido à influência do longo condutor retilíneo AB vertical. Na Figura 7.6 apresentamos a ilustração de Ampère vista de cima.

É como se tivéssemos feito um corte por um plano horizontal passando pelo centro do fio vertical AB . Indicamos pelos círculos com cruzes e com pontos os sentidos das correntes, a saber, entrando e saindo do papel, respectivamente. Os cinco pontos L , M , N , O e P estão



Figura 7.6: Figura 7.5 vista de cima. (a) Espira astática em equilíbrio alinhada com o condutor retilíneo AB . (b) Torque sobre a espira astática fazendo com que ela volte à posição de equilíbrio.

à mesma altura em um plano horizontal, estando L no centro do condutor AB , M o ponto da espira fg mais próximo de AB etc. As correntes em L , M e P saem do papel, enquanto que as correntes em N e O entram no papel. Quando estes pontos estão alinhados e com as correntes nestes sentidos, a espira astática fica em equilíbrio, 7.6 (a). Quando giramos um pouco a espira astática ao redor da vertical, tanto no sentido horário quanto anti-horário, ela sofre um torque que tende a fazê-la voltar à posição de equilíbrio anterior, 7.6 (b). Este é o efeito experimental que Ampère deve ter observado, concluindo a partir daí que $n > 1$.

Combinando esta conclusão com o relação entre n e k , a saber, $k = (1 - n)/2$, vem que $k < 0$.

Capítulo 8

As Contribuições de Savary

A primeira fase das pesquisas eletrodinâmicas de Ampère começou em setembro de 1820 com o anúncio da descoberta de Ørsted e terminou em janeiro de 1821 com sua previsão errada sobre o resultado da experiência do caso de equilíbrio das correntes ortogonais. A segunda fase começou em setembro de 1821 com a descoberta da rotação contínua por Faraday, terminando em setembro de 1822 com a obtenção do valor $k = -1/2$ em sua lei de força, além de novas previsões teóricas que desta vez são corroboradas experimentalmente. Em seguida a isto Ampère deixa um pouco de lado suas pesquisas experimentais e teóricas sobre a eletrodinâmica por diversos meses devido a uma sobrecarga de atividades didáticas e burocráticas que tem de realizar neste período. Sua última grande fase de pesquisas nesta área tem início em fevereiro de 1823 com o trabalho de seu aluno Félix Savary (1797-1841), terminando em agosto de 1826 com a redação de sua obra principal, o *Théorie*. Savary havia sido aluno de Ampère na Escola Politécnica. Este Savary não deve ser confundido com Félix Savart (1791-1841), o colaborador de Biot.

Em 3 de fevereiro de 1823 Félix Savary apresentou um trabalho importante à Academia de Ciências relacionado à força de Ampère entre elementos de corrente. Este trabalho foi publicado em uma Memória publicada no mesmo ano, [Sav23], [Sav22] e [Sav85b]. Em 28 de julho Savary apresentou à Academia um complemento à Memória anterior, sendo este trabalho também publicado em 1823, [Ano23] e [Sav85a]. Vamos discutir aqui alguns de seus resultados.

8.1 Obtenção de uma Nova Relação entre n e k

O primeiro dado importante que obteve foi uma nova relação entre as constantes n e k que aparecem na força de Ampère, Eq. (6.14).

Em 1820 Gay-Lussac e J. J. Welter haviam realizado uma experiência muito interessante. Inicialmente pegaram um anel de aço não imantado que não interagiu com uma bússola. Também os pedaços deste anel não interagiam com uma bússola. Enrolaram uma hélice toroidal neste anel e passaram nela uma corrente constante. Desligaram depois a corrente e retiraram a hélice do anel. O anel não exibiu qualquer efeito magnético sobre uma bússola colocada em suas proximidades. Contudo, ao ser quebrado em várias partes, cada pedaço do anel interagiu com a bússola como se este pedaço fosse um pequeno ímã. Isto é, cada pedaço era polarizado magneticamente, estando imantado. Este trabalho nunca foi publicado, mas Ampère cita diversas vezes esta experiência. Uma representação desta experiência é apresentada na Figura 8.1.

Savary resolve analisar esta situação utilizando a força de Ampère entre elementos de corrente. Para isto imagina o equivalente eletrodinâmico de um ímã cilíndrico de raio r e comprimento ℓ seguindo as concepções de Ampère. Este ímã tem como análogo eletrodinâmico o que Ampère

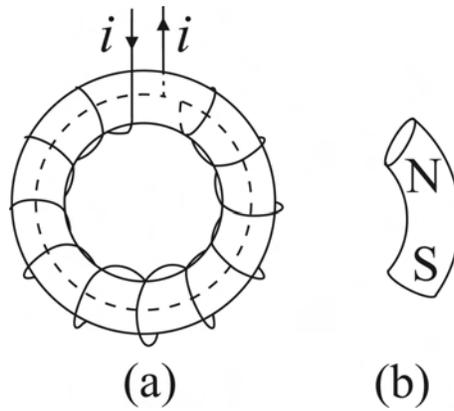


Figura 8.1: (a) Passa-se uma corrente constante toroidal ao redor de um anel de aço. Ele não interage com uma bússola. (b) Ao quebrar o anel observa-se que cada pedaço comporta-se como um ímã.

chamou de *cilindro eletrodinâmico*. Isto é, um sistema de correntes elétricas circulares de mesmo raio r cujos planos são paralelos entre si e ortogonais à reta que une seus centros igualmente espaçados, Figura 8.2 (a). A distância entre os centros das correntes circulares das extremidades tem o mesmo valor ℓ que o comprimento do ímã. A hélice helicoidal de Ampère com compensação longitudinal, Figura 4.10, é um outro equivalente eletrodinâmico de um ímã cilíndrico, Figura 8.2 (b). Uma casca cilíndrica com uma densidade de corrente superficial K fluindo ao longo do sentido azimutal também é um equivalente eletrodinâmico de um ímã cilíndrico, Figura 8.2 (c).

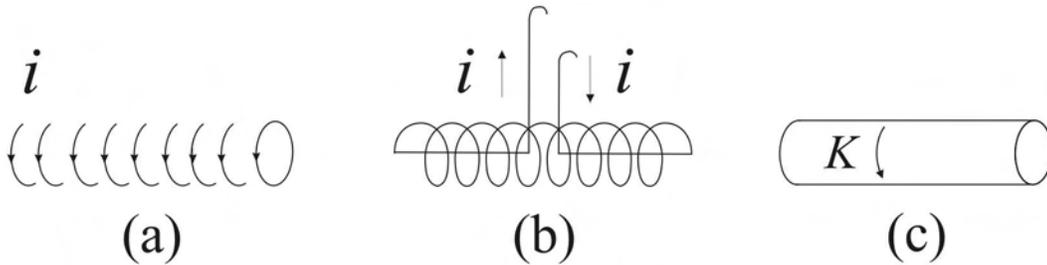


Figura 8.2: Equivalentes eletrodinâmicos de um ímã cilíndrico.

Na Figura 8.3 apresentamos três análogos eletrodinâmicos para o ímã toroidal de raio maior R e raio menor r da experiência de Gay-Lussac e Welter. Ou seja, sistemas de correntes elétricas, sem a presença de qualquer ímã, que se comportam como o ímã toroidal de Gay-Lussac e Welter. Em (a) temos aquilo que Ampère chamou de *anel eletrodinâmico*. Isto é, um sistema de correntes elétricas circulares e de mesmo raio r . Neste caso os centros destas correntes circulares estão igualmente espaçados ao longo de um círculo de raio R . Em (b) temos uma espira toroidal com compensação longitudinal. Em (c) temos uma casca toroidal com uma densidade de corrente superficial K fluindo ao longo da direção poloidal.

Savary parte da força de Ampère dada na forma da Eq. (6.14), a saber:

$$-ii' ds ds' \frac{r^{1-n-k}}{1+k} \frac{d^2 (r^{1+k})}{ds ds'}. \tag{8.1}$$

Supõe então um anel eletrodinâmico no plano xy centrado na origem com uma mesma corrente i em cada espira circular. Inicialmente calcula a força exercida por uma destas espiras circulares

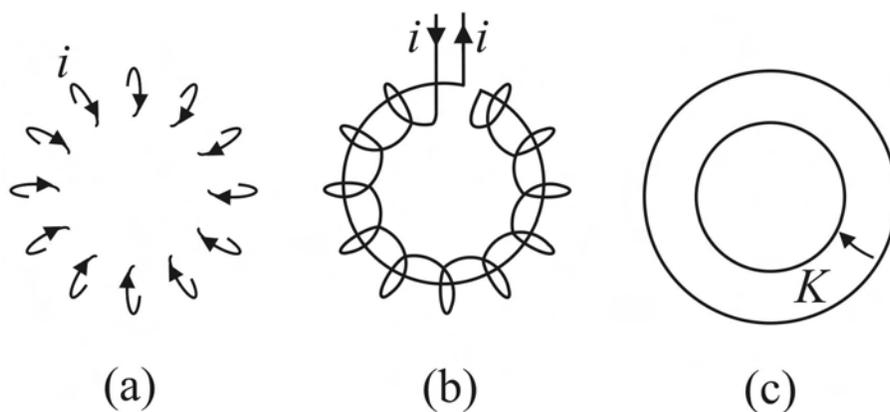


Figura 8.3: Equivalentes eletrodinâmicos de um ímã toroidal.

de raio r sobre um elemento de corrente $i'ds'$ localizado em um ponto arbitrário do espaço. Depois integra sobre todas as espiras ao redor do anel de raio R . Faz a aproximação de que a distância entre o elemento de corrente $i'ds'$ e uma espira circular qualquer pertencente ao anel é muito maior do que o raio r da espira. Obtém que esta força é proporcional a $kn + 1$. Utiliza então a experiência de Gay-Lussac e Welter como tendo mostrado que esta força é nula. Com isto conclui que

$$kn + 1 = 0 . \quad (8.2)$$

Combinando esta relação com a Eq. (6.31), obtém então que

$$2k^2 - k - 1 = 0 . \quad (8.3)$$

Esta última equação possui duas soluções, a saber, $k = 1$ e $k = -1/2$. Combinando estes dois valores de k com os dois valores correspondentes de n obtidos da Eq. (8.2), obtêm-se então dois conjuntos possíveis de grandezas, a saber:

$$k = 1 \text{ e } n = -1 , \quad (8.4)$$

e

$$k = -\frac{1}{2} \text{ e } n = 2 . \quad (8.5)$$

A experiência da ponte de Ampère já havia mostrado uma repulsão entre elementos colineares, ou seja, que $k < 0$, ver a Seção 7.2. Ampère também já havia mostrado experimentalmente que $n > 1$, ver a Seção 7.4. Savary conclui então que a única solução da Eq. (8.3) compatível com os resultados experimentais de Ampère é a Eq. (8.5).

Em princípio a experiência de Gay-Lussac e Welter se refere apenas à falta de interação entre um ímã toroidal e uma pequena bússola imantada. Por outro lado as contas de Savary se referem à falta de interação entre um anel eletrodinâmico e um elemento de corrente externo a este anel eletrodinâmico. Logo a analogia não é completa e não existe uma equivalência real entre estas duas situações, tudo depende da suposição de que um ímã é equivalente a um conjunto de correntes elétricas microscópicas. Mas o próprio Ampère chegou a realizar uma experiência equivalente à de Gay-Lussac e Welter utilizando apenas correntes elétricas, sem empregar nenhum

ímã. Ou seja, é o equivalente eletrodinâmico desta experiência. Vamos chamá-la de *caso de equilíbrio do anel toroidal*. Savary descreve-a com as seguintes palavras, [Sav85b, pág. 352]:

Para tornar a determinação das constantes que entram na sua fórmula independente de toda assimilação [analogia] entre os ímãs e as correntes elétricas, o Sr. Ampère imitou o anel de aço enrolando no formato de uma hélice uma porção de um fio condutor revestido de seda sobre uma outra porção do mesmo fio, de maneira que a corrente elétrica desta última porção destruísse o efeito das projeções longitudinais das espiras da primeira [porção], formando com esta hélice um anel circular composto de várias voltas da mesma hélice, tomando cuidado para que as porções restantes do fio condutor, que serviam para colocá-lo em comunicação com as extremidades da pilha, fossem enroladas junto até uma certa distância do anel, para que suas ações se neutralizassem completamente. O Sr. Ampère assegurou-se de que este aparelho não exerce qualquer ação [força] sobre uma porção móvel de [um outro] condutor que tinha uma forma arbitrária. Este resultado é independente do raio [maior] do anel, mas ele supõe o raio [menor] das espiras extremamente pequeno em comparação com a distância ao condutor móvel.

Em um trabalho anônimo de 1823 escrito na terceira pessoa, mas evidentemente de autoria de Ampère, [Jou85, pág. 338] e [Hof96, pág. 387], esta experiência é descrita da seguinte maneira, [Amp23a, pág. 9] e [Amp22e, pág. 331]:

Os resultados que o Sr. Savary obteve ao calcular, de acordo com esta fórmula, [a previsão teórica para] uma observação dos Srs. Gay-Lussac e Welter feita em 1820, levaram o Sr. Ampère a tentar fazer agir, sobre um condutor móvel, um sistema de correntes elétricas circulares cujos planos, extremamente próximos entre si, são perpendiculares a uma circunferência passando pelos centros dos círculos descritos por estas correntes elétricas. Ele encontrou, como era fácil de ser previsto de acordo com a experiência que acabamos de mencionar, que este sistema não exerceria qualquer ação sobre o condutor móvel em qualquer situação que ele fosse apresentado.

Não há uma representação desta experiência no artigo de Savary. Também não a encontramos nos artigos de Ampère. Mas há uma representação deste caso em um livro de Verdet (1824-1866), [Ver68, pág. 326, Figs. 185 e 186], nossa Figura 8.4. À esquerda desta Figura temos um anel eletrodinâmico aberto. Ele exerce uma força resultante sobre um elemento de corrente externo ao anel. Quando o anel eletrodinâmico é fechado, como no lado direito desta Figura, a força resultante se anula.

Esta experiência, juntamente com os cálculos de Savary, levam então à Eq. (8.2). Combinando com os outros resultados chega-se à Eq. (8.5). Savary utiliza estes valores de n e de k no restante de seu artigo.

8.2 O Análogo Eletrodinâmico de um Pólo Magnético

Savary considera também o caso de um cilindro semi-infinito conduzindo uma corrente na direção poloidal. Integrando a força de Ampère, calcula a força deste cilindro sobre um elemento de corrente idz externo ao cilindro. Em todos os seus cálculos considera o raio do cilindro ou do anel eletrodinâmico como sendo desprezíveis comparados com a distância entre o elemento de corrente idz e uma espira qualquer pertencente ao cilindro ou ao anel eletrodinâmico.

Em suas palavras, [Sav85b, pág. 354], conclui que esta força

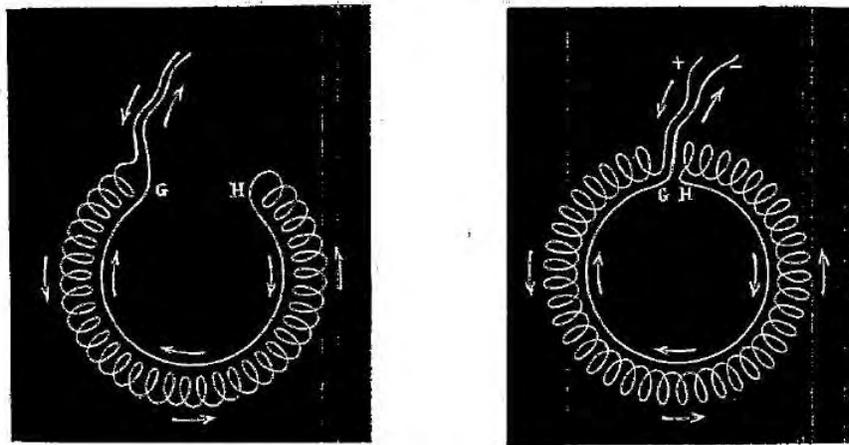


Figura 8.4: (a) Quando o anel eletrodinâmico é aberto, ele exerce uma força sobre um elemento de corrente externo a ele. (b) Quando ele é fechado esta força resultante se anula.

é perpendicular ao plano formado pelo elemento de corrente e pela extremidade correspondente do cilindro, é proporcional ao seno do ângulo que faz com este elemento a reta que o liga a esta extremidade, e [diminui] em razão inversa do quadrado da distância [entre o elemento e a extremidade correspondente do cilindro eletrodinâmico].

Expressa matematicamente esta proporcionalidade por:

$$\frac{dz \operatorname{sen} V}{r^2} . \quad (8.6)$$

Aqui r é a distância entre o elemento de corrente de comprimento dz e a extremidade do cilindro eletrodinâmico semi-infinito, e V é o ângulo entre esta distância r e o elemento dz . Na Figura 8.5 apresentamos os elementos desta força. Ela é ortogonal ao plano formado pelo elemento dz e pela reta que une seu centro à extremidade do solenóide. Em nossa Figura consideramos um caso particular no qual dz , r e o eixo do cilindro eletrodinâmico estão no plano do papel. Neste caso a força sobre idz é ortogonal ao papel, saindo dele. Ela inverte de sentido caso se inverta o sentido da corrente no elemento ou no cilindro. Caso se inverta simultaneamente o sentido da corrente no elemento e no cilindro, a força continuará saindo do papel.

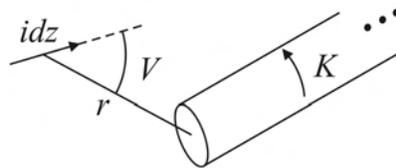


Figura 8.5: Um cilindro semi-infinito interagindo com um elemento de corrente.

A Eq. (8.6) é o análogo eletrodinâmico do resultado obtido por Biot e Savart. Expressamos este resultado na forma da Eq. (5.4). O valor desta força só depende da distância entre o elemento e a extremidade do cilindro semi-infinito, assim como do ângulo entre esta reta e o

elemento. Ou seja, ela é independente da direção do eixo do cilindro no espaço. Um cilindro semi-infinito com corrente azimutal é então o análogo eletrodinâmico de um pólo magnético.

No trabalho que apresentou à Academia de Ciências em 28 de julho de 1823, Savary generaliza este resultado. Em vez do cilindro semi-infinito considera o caso em que os centros das espiras circulares seguem uma curva arbitrária no espaço. Caso uma das extremidades vá para o infinito ou se estenda indefinidamente longe do elemento de corrente, vem que a força exercida por este sistema sobre o elemento de corrente ainda vai ser dada pela Eq. (8.6). Ou seja, vai depender apenas da distância entre a extremidade próxima ao elemento e do ângulo entre esta distância e a direção do elemento.

Savary havia obtido que a força exercida por um anel eletrodinâmico sobre um elemento de corrente externo ao anel era nula, Seção 8.1. Com o resultado do parágrafo anterior generaliza esta conclusão. Ou seja, considera o caso em que a curva seguida pelos centros das espiras circulares de raio r tem uma forma qualquer, não necessariamente um círculo de raio R como no caso do anel eletrodinâmico. Ampère chamava a este sistema de um *solenóide eletrodinâmico*. Se a curva for fechada, então a força resultante sobre um elemento de corrente externo ao sistema continuará sendo nula. Em suas palavras, [Sav85a, pág. 374]: “Resulta que, quando se reúnem as duas extremidades do eixo, qualquer que seja sua forma, a ação torna-se nula.”

Voltamos agora ao artigo de 3 de fevereiro de 1823. Savary integra a força exercida por um fio infinito sobre um cilindro semi-infinito e obtém que ela cai com o inverso da distância g entre a extremidade do cilindro e o fio, Figura 8.6. Além disso, ela é perpendicular ao plano formado pelo fio e por esta distância. Este resultado é o análogo eletrodinâmico daquilo que Biot e Savart obtiveram para a interação entre um fio reto com corrente e um pólo magnético, Seção 5.1. Mais uma vez esta força é independente da direção do eixo do cilindro em relação ao espaço. No complemento de julho este resultado é generalizado para o caso em que os centros das espiras circulares seguem uma curva de forma arbitrária. Novamente a interação deste sistema com um fio infinito vai ser inversamente proporcional à distância entre o fio e a extremidade do solenóide curvo, supondo que a outra extremidade do solenóide vá para o infinito.

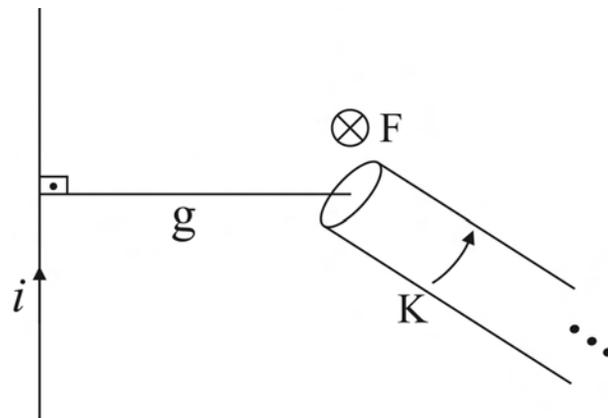


Figura 8.6: Força exercida por um fio reto sobre um cilindro semi-infinito.

8.3 Torque de um Fio Reto sobre um Cilindro Eletrodinâmico

Savary calcula ainda a força e o torque exercidos entre um elemento de corrente e um cilindro eletrodinâmico de comprimento finito. Calcula também a força e o torque exercidos entre um fio reto infinito e este cilindro finito. Um cilindro finito AB de raio r pode ser pensado como a sobreposição de dois cilindros semi-infinitos de mesmo raio r com seus eixos de simetria ao longo de AB e estendidos indefinidamente do mesmo lado. Um destes cilindros semi-infinitos tem uma extremidade no ponto A e o outro tem sua extremidade no ponto B . Além disso, as correntes nestes dois cilindros semi-infinitos fluem em sentidos opostos, Figura 8.7.

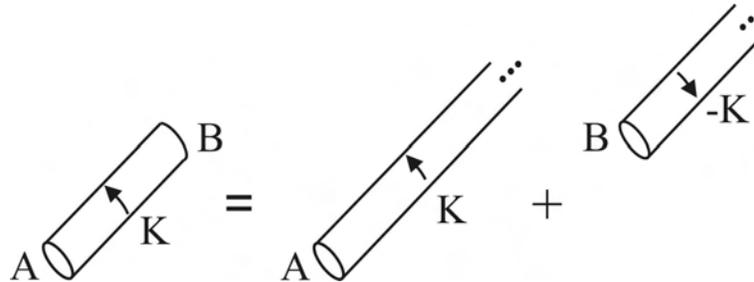


Figura 8.7: Um cilindro finito AB pode ser pensado como a sobreposição de dois cilindros semi-infinitos. Um deles terminando em A e outro terminando em B . A corrente no cilindro que termina em A flui no mesmo sentido que a corrente no cilindro finito AB . Já a corrente no cilindro que termina em B flui em sentido contrário à corrente no cilindro finito AB .

A força resultante do fio reto infinito sobre o cilindro finito é então composta de duas forças atuando nas extremidades do cilindro. Cada uma destas forças é inversamente proporcional à distância entre o fio e a extremidade correspondente, além de ser perpendicular ao plano formado por esta distância e pelo fio. Savary então afirma, [Sav85b, pág. 357]:

Este resultado, aplicado a um cilindro infinitamente curto, é a lei que havia sido proposta pelo Sr. Biot [*Annales de Chimie et de Physique*, Vol. XV, págs. 222 e 223, [BS20] e [AC06]], para representar a ação de uma molécula magnética sobre um fio indefinido.

Savary conclui esta Seção de seu artigo com as seguintes palavras, referindo-se ao torque do cilindro sobre o fio:

Se o cilindro é paralelo ao fio condutor, as duas forças são iguais e agem ao longo de retas paralelas em direções opostas. Portanto, só resta uma ação para fazer girar o fio e para colocá-lo em um plano perpendicular ao eixo do cilindro.

Por ação e reação, caso o fio esteja fixo em relação ao solo e caso o cilindro esteja livre para girar ao redor de um eixo perpendicular ao cilindro e passando por seu centro e pelo fio infinito, vai haver um torque exercido pelo fio sobre o cilindro. Este torque vai fazer com que o cilindro gire e, no equilíbrio, fique com seu eixo de simetria ortogonal ao plano contendo o fio reto e o centro do cilindro. Além disso, este torque é inversamente proporcional à distância entre o centro do cilindro e o fio. Isto fornece uma explicação quantitativa para a experiência de Ørsted eletrodinâmica.

8.4 Explicação para o Caso de Equilíbrio das Correntes Ortogonais

Savary aplica estes resultados ao caso de equilíbrio das correntes ortogonais, ver a Seção 5.3. Savary faz as contas para a situação da Figura 5.4. Ampère havia feito as contas supondo em 1820 que $k = 0$. Mas agora Savary refaz os cálculos com o valor final da força de Ampère, Eq. (6.33), ou seja, não apenas com $n = 2$, mas principalmente com $k = -1/2$.

Savary “supõe um cilindro eletrodinâmico muito curto, móvel ao redor de um eixo vertical que passa por seu centro e submetido à ação de um fio condutor situado no plano vertical que passa pelo eixo do cilindro,” [Sav85b, pág. 357]. Calcula o torque exercido por um fio infinito sobre um cilindro eletrodinâmico de comprimento 2λ muito menor do que a distância g entre o centro do cilindro e o fio. Mostra que este torque é proporcional a $2\lambda/g$. Então conclui, [Sav85b, pág. 358]:

Portanto, [este torque cai] em razão inversa da distância g , e não depende em absoluto da direção vertical, horizontal e inclinada do condutor.

Isto é o que o Sr. Ampère verificou sobre um ímã muito curto suspenso no ângulo e no plano de dois fios condutores muito longos, um horizontal e outro vertical [como na situação de nossa Figura 5.5]. Quando as correntes destes condutores se afastam simultaneamente ou se aproximam simultaneamente do vértice do ângulo [de junção dos fios] e quando são iguais as distâncias dos dois fios ao centro do ímã, o ímã permanece em equilíbrio. Portanto, as ações que ele sofre são iguais e de sinal contrário, como deve ser de acordo com o cálculo precedente.

Ou seja, Savary consegue uma explicação da experiência de Ampère e Despretz utilizando a fórmula completa de Ampère! O próprio Ampère nunca havia publicado nada sobre este caso de equilíbrio até esta data e havia feito uma previsão errada em relação ao resultado desta experiência utilizando uma versão incorreta de sua força entre elementos de corrente. Savary, ex-aluno de Ampère, deve ter ficado sabendo da experiência por meio de um contato pessoal com ele.

8.5 Ação Mútua entre Dois Cilindros Eletrodinâmicos

Outro resultado extremamente importante obtido por Savary refere-se à interação entre dois cilindros eletrodinâmicos finitos. Vamos representar o primeiro cilindro por AB e o segundo por CD . Eles estão orientados de maneira arbitrária no espaço. Integra a força de AB sobre CD . Mostra que ela pode ser expressa como a soma de quatro termos. Cada termo é atrativo ou repulsivo ao longo da reta que une uma extremidade de AB com uma extremidade de CD , caindo com o inverso do quadrado da distância entre estas extremidades. O primeiro termo está direcionado ao longo do segmento AC , caindo com o quadrado deste segmento. O segundo termo está direcionado ao longo de AD , caindo com o quadrado desta distância. O terceiro termo está direcionado ao longo de BC , caindo com o quadrado desta distância. E o último termo está direcionado ao longo de BD , caindo com o quadrado desta distância.

Este resultado é exatamente o análogo eletrodinâmico da interação que se observa entre dois ímãs AB e CD , resultado este obtido por Coulomb. Ou seja, a força e o torque entre estes ímãs são obtidas a partir da soma da força e do torque exercidos por cada pólo de AB com cada pólo

de CD . Aqui a força elementar entre dois pólos é aquela dada por Coulomb ao longo da reta que une os pólos e caindo com o quadrado da distância entre eles, Eq. (2.3). Savary expressou-se sobre isto da seguinte maneira, [Sav85b, pág. 367]:

Portanto, a ação entre dois cilindros [eletrodinâmicos] reduz-se a quatro forças, duas atrativas e duas repulsivas, dirigidas ao longo das retas que ligam suas extremidades duas a duas; como se estes pontos exercessem um sobre o outro, para se atrair ou para se repelir, uma ação variando em razão inversa do quadrado da distância. É fácil de ver, seguindo a ordem do cálculo, que estas forças são atrativas entre duas extremidades, nas quais uma está à direita e outra à esquerda das correntes do cilindro ao qual ela pertence, e repulsivas entre duas extremidades que se encontram em cada cilindro, do mesmo lado destas correntes.

Se substituirmos nas extremidades dos cilindros [eletrodinâmicos] os pólos de dois ímãs, o resultado anterior é a própria lei com a qual Coulomb representou suas experiências sobre a direção seguida por uma agulha imantada móvel que está submetida à ação de uma longa barra imantada, pelo menos a distâncias grandes entre os pólos.

A regra usada por Savary para saber quais forças são atrativas ou repulsivas utiliza dois observadores de Ampère, um em cada cilindro. Podemos entendê-la observando a Figura 8.8.

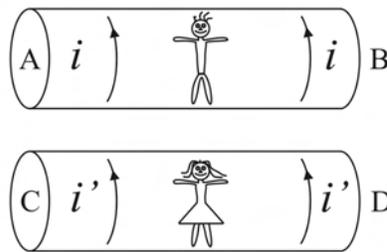


Figura 8.8: Observadores de Ampère sobre dois cilindros eletrodinâmicos.

Temos aqui um caso particular em que os eixos dos dois cilindros AB e BC formam um mesmo plano, estando estes eixos paralelos entre si. As setas indicam os sentidos das correntes em cada cilindro. Temos observadores de Ampère de costas sobre cada cilindro, com as correntes entrando por seus pés e saindo por suas cabeças. No caso desta Figura a extremidade A está à direita do observador sobre o cilindro AB , enquanto que a extremidade D está à esquerda da observadora sobre o segundo cilindro CD . De acordo com as palavras de Savary que acabamos de mencionar, vem que esta força é atrativa, ao longo da reta unindo AD . Isto é o análogo eletrodinâmico a termos dois ímãs AB e CD com seus pólos Norte em A e em C , com seus pólos Sul em B e em D , respectivamente.

8.6 O Caso do Fio Oblíquo Eletrodinâmico

No mesmo artigo considera teoricamente o análogo eletrodinâmico da experiência do fio oblíquo de Biot e Savart, Seção 5.2. Para isto consideram um cilindro eletrodinâmico de comprimento 2λ horizontal que pode girar ao redor de um eixo vertical passando por seu centro O . Um fio oblíquo DCD' com corrente i atua sobre este cilindro. O fio oblíquo está em um plano vertical

com seu ponto médio C no mesmo plano horizontal que o centro do cilindro. Savary representa a distância entre este ponto C e o centro O do cilindro por $CO = c$. Na Figura 8.9 temos uma visão desta situação em um plano vertical. O ponto E está ao longo da continuação do segmento horizontal OC . Savary representa o ângulo DCE por uma letra que vamos designar aqui por ϱ .¹

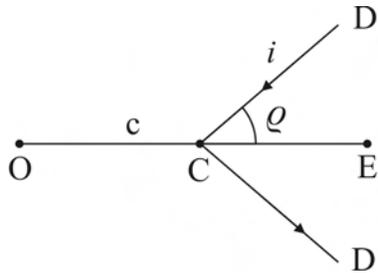


Figura 8.9: Representação do caso do fio oblíquo eletrodinâmico em um plano vertical.

Na Figura 8.10 temos uma representação deste caso em um plano horizontal. Savary calcula a força do fio oblíquo sobre o pequeno cilindro eletrodinâmico e mostra que “o cilindro [horizontal] fica em equilíbrio quando seu eixo é perpendicular ao plano [vertical] CDE .” Calcula também o torque exercido pelo fio oblíquo sobre o cilindro quando o eixo do cilindro se afasta de um ângulo θ em relação à direção de equilíbrio, Figura 8.10.

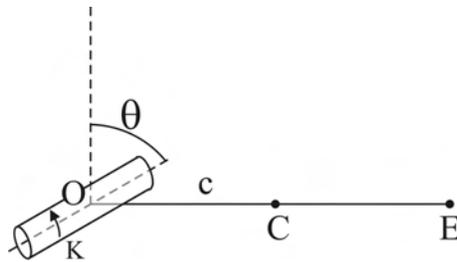


Figura 8.10: Representação do caso do fio oblíquo eletrodinâmico em um plano horizontal.

De acordo com os cálculos de Savary, este torque é proporcional a:

$$\frac{2\lambda\theta}{c} \tan \frac{\varrho}{2}. \quad (8.7)$$

Então conclui, [Sav85b, pág. 364]:

Portanto, [o torque] varia em razão inversa da distância simples [entre o vértice do fio oblíquo e o centro do cilindro] e proporcionalmente à tangente da metade da inclinação do condutor em relação ao plano horizontal, o que pouco difere do resultado que o Sr. Biot obteve pela experiência.

Vimos na Seção 5.2 que Biot obteve experimentalmente que este torque era inversamente proporcional à distância c e que era proporcional ao ângulo que está sendo representado aqui por ϱ . Se $\varrho \ll 1$ rad, temos que $\tan(\varrho/2) \approx \varrho/2$. Ou seja, neste caso o resultado experimental de Biot é próximo ao cálculo teórico de Savary.

Estas são então algumas das principais conclusões de Savary obtidas neste artigo extremamente importante. Vamos agora apresentar as reações de Biot e de Ampère a este trabalho.

¹Pelo motivo discutido na Nota de rodapé 3, página 46.

8.7 Reações de Biot e Savart ao Trabalho de Savary

Vimos na Seção 5.2 que Biot e Savart haviam concluído com suas experiências do fio oblíquo apresentadas em 18 de dezembro de 1820 que “tanto para o fio oblíquo quanto para o fio retilíneo, a ação era recíproca à distância; mas a intensidade absoluta era mais fraca para o fio oblíquo do que para o fio reto, na proporção do ângulo ZMH em relação à unidade,” [Bio85a]. Representando esta distância por c e ângulo por ϱ , para ficar igual à notação usada por Savary, vem que este resultado pode ser expresso como:

$$\frac{\varrho}{c}, \quad (8.8)$$

Já Savary obteve teoricamente a Eq. (8.7), ou seja, uma proporcionalidade com a tangente de $\varrho/2$, em vez de uma proporcionalidade com ϱ . Para ângulos muito menores do que 1 radiano temos que

$$\tan \frac{\varrho}{2} \approx \frac{\varrho}{2}. \quad (8.9)$$

Isto significa que também o resultado de Savary é proporcional ao ângulo de abertura do fio oblíquo. Isto justifica a afirmação de Savary de que seu resultado “pouco difere do resultado que o Sr. Biot obteve pela experiência.”

Mas esta proporcionalidade só é válida para ângulos pequenos. No caso do fio retilíneo temos $\varrho = \pi/2$ rad. Podemos calcular com as duas fórmulas a razão entre a ação exercida pelo fio oblíquo e a ação exercida pelo fio retilíneo. No caso de Biot e Savart esta razão é dada por

$$\frac{\varrho}{\pi/2} = \frac{2\varrho}{\pi}. \quad (8.10)$$

Já no caso de Savary esta razão é dada por

$$\frac{\tan(\varrho/2)}{\tan(\pi/4)} = \tan \frac{\varrho}{2}. \quad (8.11)$$

Isto mostra que seria possível distinguir entre estes dois resultados por meio de experiências cuidadosas.

Biot e Savart refazem suas experiências com mais atenção e agora chegam à conclusão de que o resultado correto é o de Savary e não aquele que eles próprios haviam informado em 1821, na segunda edição de seu livro *Précis élémentaire de Physique*, [Bio85a], a saber, que “tanto para o fio oblíquo quanto para o fio retilíneo, a ação era recíproca à distância; mas a intensidade absoluta era mais fraca para o fio oblíquo do que para o fio reto, na proporção do ângulo ZMH em relação à unidade.” Na terceira edição deste livro publicada em 1824, eles mudam este trecho. Agora eles afirmam o seguinte, nossa ênfase em itálico, [Bio24] e [Bio85b, pág. 116]:

As primeiras experiências me haviam feito reconhecer facilmente que a ação do fio oblíquo diminuía ao mesmo tempo em que o ângulo compreendido entre seus dois ramos, e parecia *lhe ser proporcional*; esta lei era, de fato, compatível com os limites do fenômeno; pois, evidentemente, a ação deve ser nula quando o ângulo é zero, estando então as duas metades do fio dobradas uma sobre a outra, e percorridas pela corrente elétrica em sentidos contrários; e esta mesma ação deve tornar-se igual à ação de um fio reto, quando a inclinação de cada ramo em relação à horizontal é de 90° , pois então os dois ramos formam uma mesma reta vertical. Mas, devido à

imperfeição das experiências, também poderiam ser admitidas outras leis e se poderia, por exemplo, substituir a inclinação i [que estamos representando aqui por ϱ] em relação à horizontal pela tangente da metade desta inclinação, isto é, $\tan \frac{1}{2}i$ [$\tan \frac{\varrho}{2}$]; chamando de F à ação observada do fio vertical sobre a agulha a uma certa distância, $F \tan \frac{1}{2}i$ seria a ação de um fio oblíquo animado pela mesma corrente voltaica; em vez de ser expressa, de acordo com a suposição precedente, por $\frac{Fi}{90^\circ}$, valor que não pode nunca diferir do anterior a não ser nos centésimos.

Biot descreve então experiências precisas que realizou para distinguir entre ϱ e $\tan \frac{\varrho}{2}$, concluindo que esta última expressão é que está de fato de acordo com seus novos resultados experimentais, [Bio85b, pág. 119]:

Assim, não se pode duvidar que esta expressão [$F \tan \frac{1}{2}i$, que estamos representando aqui por $F \tan \frac{\varrho}{2}$] não represente de forma geral a ação total de um fio oblíquo dobrado em dois ramos que formam um ângulo i [nosso ϱ] entre si.

Ou seja, com suas novas experiências bem mais precisas Biot acaba confirmando o resultado teórico de Savary. Com isto generaliza seu próprio resultado experimental anterior!

Vamos ver agora o que diz Biot em relação à força elementar exercida por cada elemento do fio oblíquo sobre uma partícula magnética, [Bio85b, págs. 119-120]:

Agora, caso se considere um pequeno pedaço infinitamente delgado de um fio [oblíquo] semelhante, situado em μ (*fig. 9*) [nossa Figura 5.3], e tal que μm ou R seja sua distância a uma partícula m de magnetismo, seja boreal ou austral, havíamos deduzido de nossas primeiras experiências que a ação deste pedaço sobre a partícula é recíproca ao quadrado da distância μm , multiplicada por uma função desconhecida do ângulo $m\mu M$, que designaremos aqui por ω . Portanto, só resta procurar qual forma deve-se dar a esta função, para que a soma total das ações assim exercidas sobre m , por todos os pedaços do fio, perpendicularmente ao plano CMZ , forme uma resultante proporcional a $\frac{\tan \frac{1}{2}i}{R}$. Satisfaz-se a esta função tomando $\sin \omega$ como sendo a função procurada; o que torna a ação elementar de um pedaço qualquer proporcional a $\frac{\sin \omega}{R^2}$; e, juntando a esta expressão, baseada na experiência, o conhecimento da direção absoluta da força, que é perpendicular ao plano formado por cada distância e pela direção de cada elemento longitudinal do fio que se considera, pode-se obter pelo cálculo a resultante total da ação exercida por um fio ou por uma porção qualquer de fio, reto ou curvo, limitado ou indefinido.

Esta conclusão não deixa de ser extremamente curiosa. Anteriormente Biot e Savart haviam concluído que a força elementar era proporcional a $\sin \phi$ ou a $\sin \omega$ partindo do resultado integrado do fio oblíquo sendo proporcional ao ângulo ϱ . Depois do resultado teórico de Savary refizeram suas experiências e concluíram que a ação do fio oblíquo é proporcional a $\tan \frac{\varrho}{2}$. Concluíram também que a função elementar que, após ser integrada, vai fornecer este resultado ainda é proporcional a $\sin \phi$ ou a $\sin \omega$! Ora uma mesma força elementar, após ser integrada, não pode fornecer simultaneamente uma força proporcional a ϱ e a $\tan \frac{\varrho}{2}$. Vê-se então que Biot e Savart haviam cometido dois erros em seus trabalhos iniciais com um fio oblíquo. O primeiro foi a conclusão errada de qual era o comportamento observado da força em relação ao ângulo de abertura do fio. Em vez de ser proporcional a ϱ , esta força de fato é proporcional a $\tan \frac{\varrho}{2}$. O segundo erro foi o de supor que uma força elementar proporcional a $\sin \phi$ ou a $\sin \omega$ levaria a

uma força integrada de um fio oblíquo sendo proporcional a ρ . Na verdade a integração desta força elementar proporcional a $\sin \phi$ ou a $\sin \omega$ leva a uma força resultante proporcional a $\tan \frac{\rho}{2}$.

Por uma incrível coincidência estes dois erros se cancelaram. Ou seja, o resultado elementar apresentado por Biot e Savart em 1821, Eq. (5.4), acabou sendo válido de acordo com os resultados experimentais mais precisos de 1824!

8.8 Reações de Ampère ao Trabalho de Savary

Ampère ficou empolgado com este trabalho de Savary. Nos manuscritos de Ampère pode-se ver que ele próprio escreveu grande parte do trabalho de Savary durante as provas deste artigo, [Ampj]. Pagou ainda pela publicação de 500 cópias do artigo de Savary na forma de separatas, [GG90, pág. 935].

Toda esta empolgação se deve ao fato de Ampère ter percebido que este artigo de Savary de certa forma concluía seu próprio trabalho. Ampère já havia obtido o valor final de sua força entre elementos de corrente, resultado este apresentado à Academia de Ciências em junho de 1822. Com isto havia explicado quantitativamente todas as suas experiências eletrodinâmicas relacionadas com a interação entre correntes elétricas. Com o trabalho de Savary percebe que se pode a partir da mesma força explicar quantitativamente todas as experiências eletromagnéticas feitas até então, como a de Ørsted ou as experiências de Biot e Savart (tanto do fio retilíneo quanto do fio oblíquo). Para isto basta supor as correntes microscópicas no interior dos ímãs, como Ampère sempre havia suposto. Além disso, percebe que se pode explicar também, quantitativamente, todas as experiências magnéticas com sua fórmula a partir desta suposição das correntes elétricas microscópicas no interior do ímã. A base para isto foi a dedução por Savary do análogo eletrodinâmico da força entre pólos magnéticos, Eq. (2.3). Como a interação entre ímãs, ou entre um ímã e a Terra, pode ser explicada a partir da interação elementar entre pólos magnéticos, Ampère percebeu que podia explicar todos os fenômenos magnéticos eletrodinamicamente a partir de sua força elementar entre elementos de corrente. Isto é, ela permitia uma unificação de três ramos de conhecimento: magnetismo (interação entre ímãs ou entre um ímã e a Terra), eletromagnetismo (interação entre correntes elétricas e ímãs, como nas experiências de Ørsted, de Biot e de Faraday), e eletrodinâmica (interação entre correntes elétricas, como na maioria das experiências de Ampère).

Além disso, o trabalho de Savary trouxe alguns bônus adicionais. Em primeiro lugar, ao obter uma nova relação entre as constantes k e n que apareciam na força de Ampère entre elementos de corrente, Savary conseguiu deduzir separadamente que $k = -1/2$ e $n = 2$. Anteriormente Ampère havia obtido apenas que $k = -1/2$ supondo que $n = 2$ em analogia com as outras forças elementares da natureza. Em segundo lugar, Savary conseguiu explicar quantitativamente a experiência de Ampère e Despretz, ou seja, o caso de equilíbrio das correntes ortogonais, ver a Seção 5.3. Esta anomalia experimental perturbava Ampère desde 1821, mas ele jamais havia mencionado nada sobre ela publicamente. Agora que Savary conseguiu explicá-la com o valor final da força de Ampère entre elementos de corrente, Ampère passa a falar desta experiência como mais uma prova de sua teoria!

Ampère menciona o seguinte em uma carta escrita a Auguste de la Rive no dia seguinte à apresentação de Savary, [Blo82, pág. 142]:

A seção de ontem da Academia de Ciências marca uma espécie de época na história da eletricidade dinâmica (...). Resulta do conjunto (das memórias de Savary e Demonferand) que todos os fatos que ainda não foram explicados completamente, observados

pelos Srs. Gay-Lussac e Welter, Pouillet, Biot e Savart, as experiências de Coulomb sobre os ímãs, as suas, aquelas dos Srs. Faraday e Barlow, a lei conhecida da inclinação da agulha imantada, etc., são conseqüências necessárias da minha fórmula.

Todos estes aspectos foram mencionados por Ampère em um artigo que colocou no *Recueil* logo em seguida à reimpressão do artigo de Savary, [Amp22l] e [Amp85h]. No *Exposé méthodique* de 1823 Ampère menciona publicamente pela primeira vez a experiência que havia realizado em 1821 com Despretz, o caso de equilíbrio das correntes ortogonais discutido na Seção 5.3, [Amp22e, pág. 21] e [Amp23a, pág. 343].

Com este trabalho de Savary a teoria de Ampère fica essencialmente completa. Ele passa agora a elaborar e completar sua teoria eletrodinâmica, incorporando também os fenômenos eletromagnéticos e magnéticos explicados de forma quantitativa, culminando no *Théorie* de 1826, sua obra prima.

Capítulo 9

Alguns Desenvolvimentos Posteriores

9.1 O Caso de Equilíbrio da Lei da Semelhança

Os resultados obtidos por Savary são muito importantes por mostrarem que se pode chegar diretamente em $n = 2$ na força de Ampère, Eqs. (2.4) a (2.6), sem ter de partir das analogias com as forças gravitacionais, elétricas ou magnéticas. Todos os cálculos e casos considerados por Savary são retomados e confirmados por Ampère em 1824, [Amp24c], [Amp24d] e [Amp85e].

Em 1825 Ampère obtém um novo caso de equilíbrio que lhe fornece diretamente $n = 2$. Esta experiência foi apresentada à Academia de Ciências em sua seção de 21 de novembro de 1825. Joubert publicou em 1885 dois trabalhos de Ampère a partir de seus manuscritos relativos a esta seção, [Amp87b] e [Amp87e].

Para entender este caso vamos considerar inicialmente a Figura 9.1. Consideramos dois elementos de corrente ids e $i'ds'$ separados por uma distância r , fazendo ângulos α e β com um mesmo prolongamento desta reta, enquanto que γ é o ângulo entre os planos formados pelos dois elementos com a reta que os une. Seja F a força de $i'ds'$ sobre ids e $F' = -F$ a força de ids sobre $i'ds'$, ambas ao longo da reta que os une. Se multiplicamos os comprimentos dos dois elementos, assim como a distância entre eles, por um mesmo fator Q , mas sem alterar i , i' , α , β e γ , vem da Eq. (2.4) que as forças F e F' se transformam em Q^2F/Q^n e Q^2F'/Q^n , respectivamente. Ou seja, se $n = 2$ vem que as intensidades das forças não se alteram. Quando uma fórmula não se altera quando mudamos todos os fatores geométricos que aparecem nela por um mesmo fator, diz-se que ela segue a lei da semelhança, [Kas77].

Vamos imaginar agora três elementos de corrente paralelos e com correntes de mesma intensidade fluindo no mesmo sentido, Figura 9.2. Os comprimentos dos elementos estão em uma proporção geométrica contínua de razão $Q = 3$, sendo esta também a razão das distâncias entre os elementos:

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{ds'}{ds''} = \frac{OO'}{O'O''} = Q = 3. \quad (9.1)$$

O elemento central ds' é atraído tanto pelo elemento da esquerda ds'' quanto pelo elemento da direita ds . Mas de acordo com a força de Ampère, Eq. (2.4), vem que a força resultante sobre ele será nula se valer a relação dada pela Eq. (9.1), assim como a lei da semelhança. Isto é, a força resultante será nula neste caso somente se $n = 2$. A força de Ampère resultante sobre o elemento central também será nula qualquer que seja o fator constante Q que aparece na Eq. (9.1) se valer $n = 2$.

É possível verificar experimentalmente se um fenômeno satisfaz ou não à lei da semelhança.

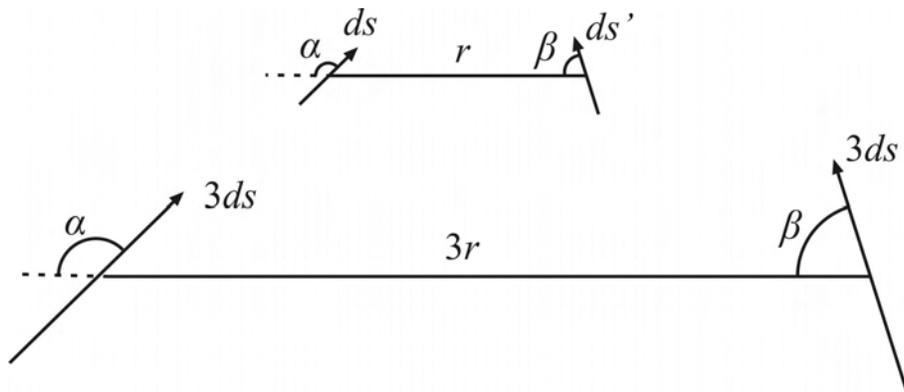


Figura 9.1: Ao multiplicar os comprimentos dos dois elementos de corrente, assim como a distância entre eles, por um mesmo fator, a força entre os elementos não muda de intensidade se valer a lei da semelhança. Disto vem que $n = 2$.

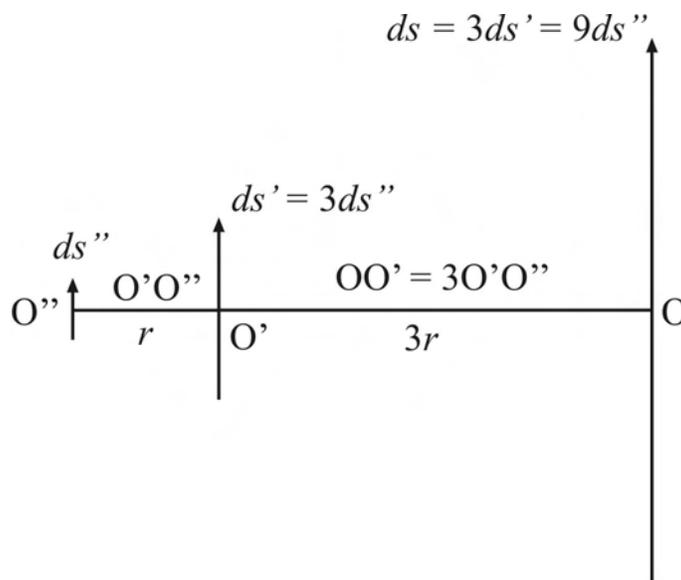


Figura 9.2: Três elementos paralelos tal que $ds/ds' = ds'/ds'' = OO'/O'O'' = 3$.

No caso da eletrodinâmica, Ampère pensou na experiência da Figura 9.3, [Amp87e, pág. 206, Fig. 1], [Amp26c, pág. 25 e Fig. 4] e [Amp23b, Amp90, pág. 197 e Fig. 4]. Temos três condutores circulares em um mesmo plano horizontal. O condutor da direita CDE tem centro O e raio R , o do meio MNP tem centro O' e raio R' , e o da esquerda VXY tem centro O'' e raio R'' . Nos três flui uma corrente constante de mesma intensidade no sentido anti-horário. Os circuitos da esquerda e da direita são fixos no laboratório, enquanto que o do centro pode girar ao redor de um eixo vertical GH se aproximando ou se afastando dos círculos laterais. As correntes circulares da esquerda e da direita repelem a corrente circular central.

Os centros O , O' e O'' das três porções circulares estão ao longo de uma mesma reta. Os círculos são projetados de maneira que seus raios estejam em proporção geométrica contínua, sendo que a razão entre as distâncias OO' e $O'O''$ tem o mesmo valor que os termos consecutivos da proporção geométrica. Isto é,

$$\frac{R}{R'} = \frac{R'}{R''} = \frac{OO'}{O'O''} \quad (9.2)$$

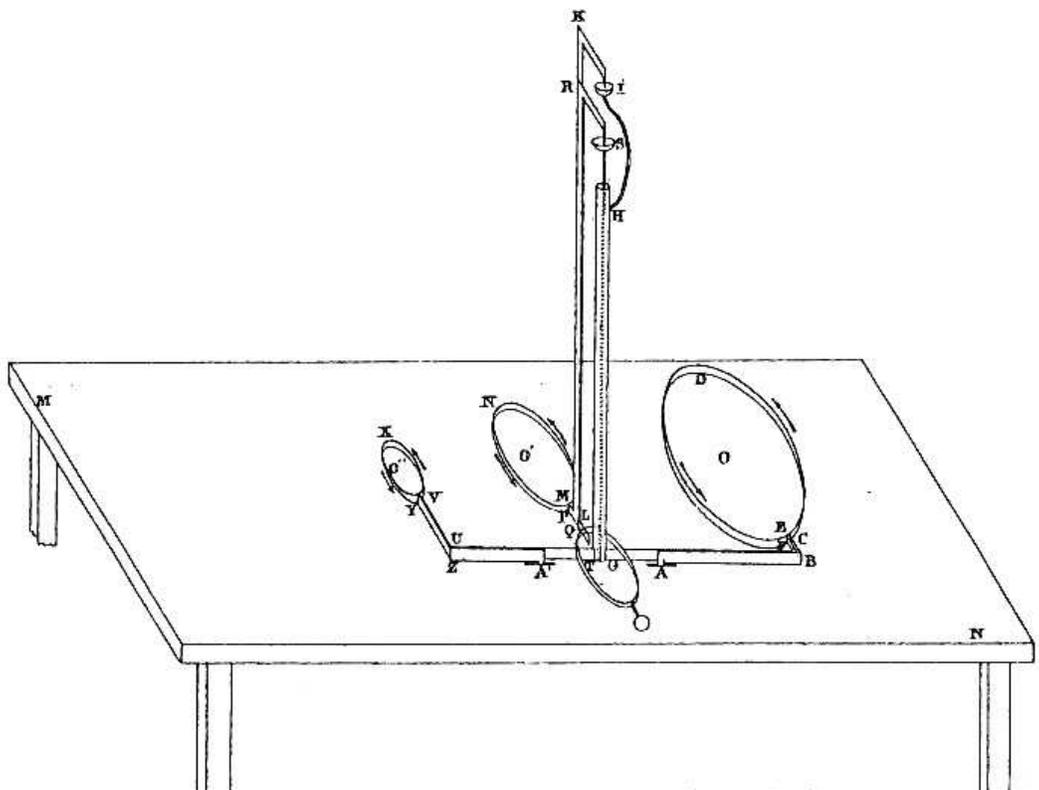


Figura 9.3: Caso de equilíbrio da lei da semelhança, [Amp87e, pág. 206, Fig. 1], [Amp26c, pág. 25 e Fig. 4] e [Amp23b, Amp90, pág. 197 e Fig. 4]. Os centros O'' , O' e O dos círculos da esquerda, do centro e da direita, respectivamente, não aparecem na Fig. 4 do *Théorie* publicado em 1826.

Vamos supor que o circuito do meio está inicialmente em repouso e que não haja corrente fluindo nos três círculos. O círculo do meio tem liberdade para girar ao redor do eixo vertical GH se aproximando ou se afastando de qualquer um dos círculos laterais. Ao fechar o circuito e passar a mesma corrente por todos eles vem que o círculo do meio permanecerá em repouso se valer $n = 2$. Este é o novo caso de equilíbrio projetado por Ampère. Vamos chamá-lo de *caso de equilíbrio da lei da semelhança*. Caso o círculo central seja um pouco afastado para a direita e solto do repouso, ele será repelido pelo círculo da direita com uma força de intensidade maior do que a repulsão que sofre do círculo da esquerda, fazendo com que ele oscile ao redor da posição central até parar devido ao atrito. Ou seja, a posição de equilíbrio do círculo central é estável.

Embora Ampère tenha apresentado uma descrição detalhada desta experiência, ela aparentemente nunca chegou a ser realizada nesta forma. No final do *Théorie* afirmou o seguinte, [Amp26c, pág. 201] e [Amp23b, Amp90, pág. 373]:

Acredito dever observar ao terminar esta Memória, que ainda não tive o tempo de fazer construir os instrumentos representados na Figura 4 [nossa Figura 9.3] e na Figura 20. Portanto, as experiências para as quais [estes instrumentos] foram destinados ainda não foram feitas. Mas como estas experiências visam somente verificar resultados obtidos de outro modo e que, por outro lado, seria útil realizá-las como uma contraprova das que forneceram estes resultados, acreditei que não deveria suprimir a descrição.

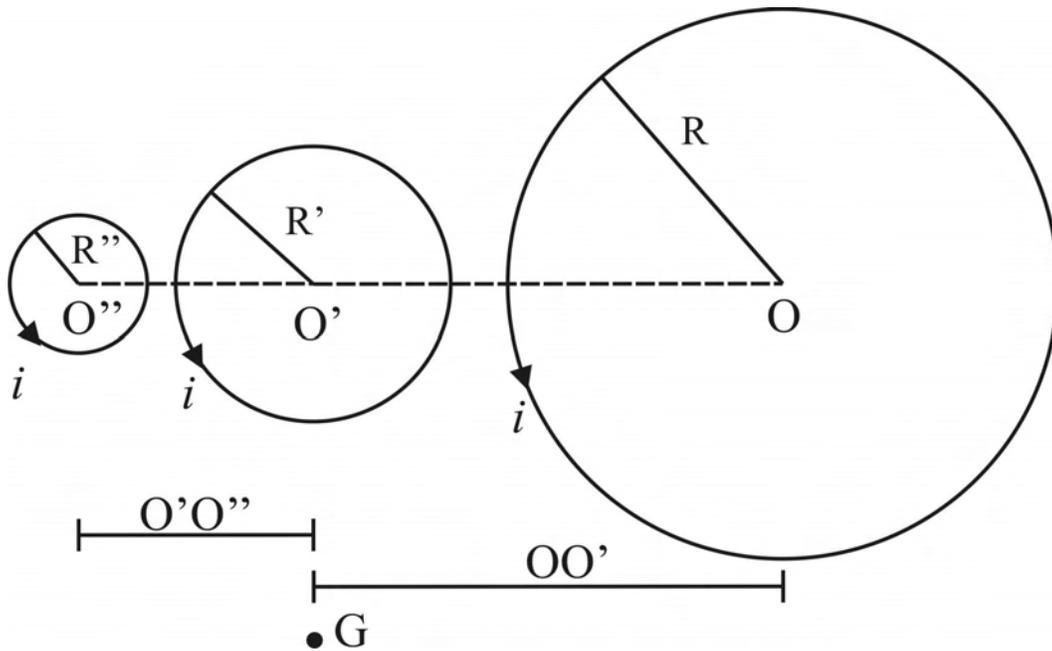


Figura 9.4: Caso de equilíbrio da lei da semelhança visto de cima. O circuito central pode girar ao redor de um eixo vertical passando por G .

Não localizamos nenhum outro trabalho ou manuscrito de Ampère no qual nos informe que tenha feito esta experiência em alguma outra data posterior a 1826. Mas uma variação desta experiência foi feita por R. Felici (1819-1902) em 1882. Ele colocou os três círculos semelhantes em três planos verticais paralelos, com os centros dos três círculos ao longo de uma mesma reta horizontal, [Fel82] e [Bou83], ver a Figura 9.5. As correntes nos três círculos eram iguais, fluindo no mesmo sentido nos dois circuitos externos e em sentido contrário no circuito do meio. Este era móvel ao redor de um eixo vertical passando por T na Figura, sendo repelido pelos dois circuitos externos. Ao ser solto do repouso ele só permaneceria em equilíbrio se valesse $n = 2$. Este equilíbrio foi observado por Felici.

Com esta experiência Felici chegou ao mesmo resultado $n = 2$ que Ampère havia obtido.

Mais recentemente Tricker realizou uma experiência análoga que leva ao mesmo resultado de $n = 2$, [Tri65, págs. 46-48]. Em vez de trabalhar com círculos semelhantes, Tricker trabalhou com solenóides semelhantes. De qualquer forma, a conclusão final destas experiências realizadas por Felici e por Tricker é que o único valor de n que concorda com os resultados experimentais é dado por $n = 2$. Isto concorda com o que Ampère esperava encontrar.

9.2 Os Casos de Equilíbrio Apresentados no *Théorie*

No *Théorie* Ampère chega à sua fórmula final para a força entre dois elementos de corrente partindo apenas de quatro casos de equilíbrio, [Amp26c], [Amp23b] e [Amp90]. O primeiro foi o das correntes anti-paralelas, Figura 4.19, discutido na Subseção 4.3.4. O segundo foi o do fio sinuoso, Figura 4.17, discutido na Subseção 4.3.3. Isto lhe permitiu escrever a força entre dois elementos como sendo a soma das forças entre as componentes destes elementos. Utilizou o primeiro caso de equilíbrio e o princípio de simetria descrito na Subseção 4.2.2 para eliminar as forças entre os elementos de corrente ortogonais. Com estes dois casos de equilíbrio chegou na Eq. (2.4), sem ainda especificar os valores de n e de k . O terceiro caso de equilíbrio foi o da

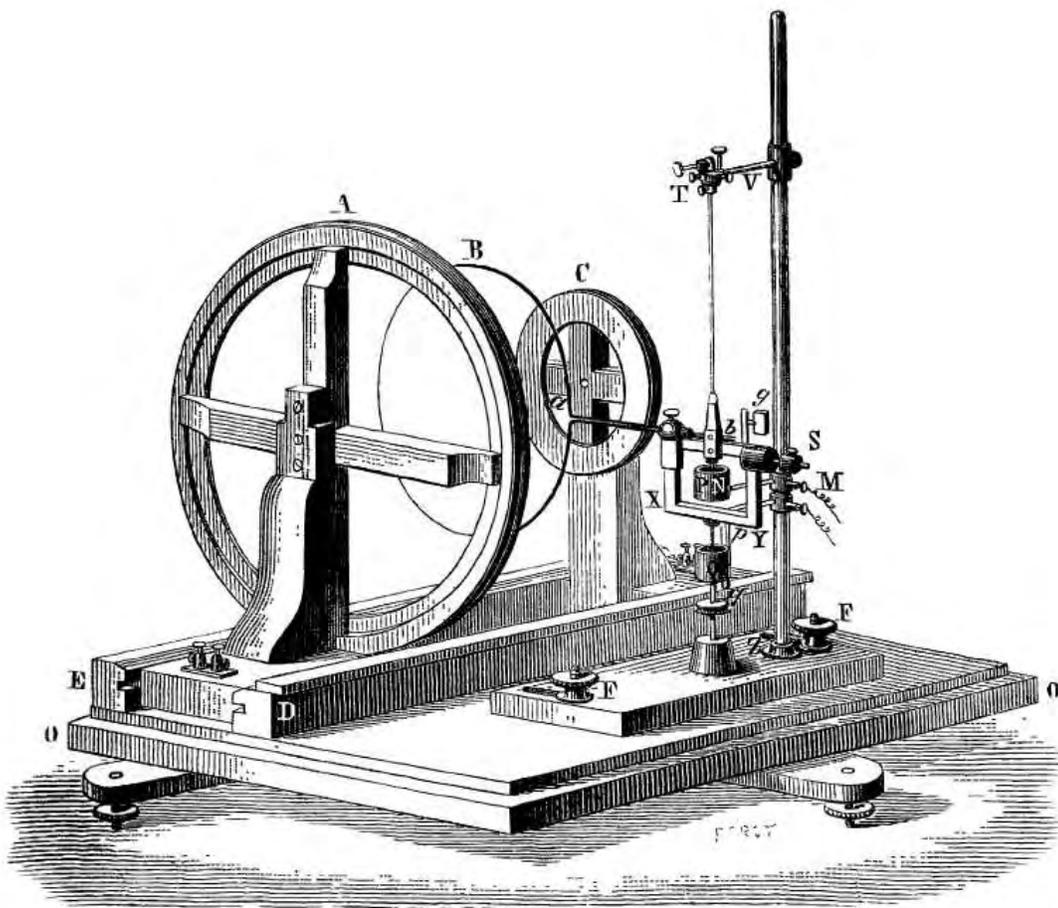


Figura 9.5: Experiência de Felici, [Fel82] e [Bou83].

não existência de forças tangenciais, Figura 7.3, discutido na Seção 7.3. Este caso de equilíbrio lhe forneceu a Eq. (6.31) relacionando as constantes k e n . O quarto e último caso de equilíbrio foi o da lei da semelhança, com o qual obteve $n = 2$, Figura 9.3. Ele foi discutido na Seção 9.1. Usando então a Eq. (6.31) obteve finalmente $k = -1/2$ e sua fórmula final, Eq. (6.33).

O *Théorie* é apresentado de forma dedutiva. Em vez de apresentar as diversas experiências e caminhos teóricos que seguiu até obter sua força entre elementos de corrente, Ampère apresenta um trabalho refinado do qual parte apenas destes quatro casos de equilíbrio para obter seus resultados principais. Ele coloca longas cópias praticamente literais de alguns de seus principais trabalhos publicados entre 1823 e 1825, em particular: [Amp24c], [Amp24d], [Amp85e], [Amp25b], [Amp25c], [Amp87b] e [Amp87e]. Devido a isto não vamos apresentar uma análise detalhada destes trabalhos de sua maturidade, deixando para apresentar apenas seu coroamento, o *Théorie*.

O *Théorie* é o trabalho mais conhecido de Ampère, é o coroamento de sua obra. Esperamos com esta tese ter ajudado a entender a origem da obra de Ampère e o caminho que percorreu até chegar na expressão final da sua força entre elementos de corrente.

Parte IV

A Principal Obra de Ampère

Capítulo 10

Introdução ao *Théorie*

O *Théorie des Phénomènes Electro-dynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience* foi publicado originalmente em novembro de 1826, [Amp26c].

Esta obra também foi publicada nas *Memórias da Academia Real de Ciências do Instituto da França* em seu Volume 6, relativo a 1823, [Amp23b]. Apesar desta data, o trabalho de Ampère só foi publicado em 1827, sendo que no final do texto Ampère menciona a data de redação daquele trecho como sendo de 30 de agosto de 1826, ver nossa página 318.

Este trabalho de 1827 foi reimpresso em 1887, 1958 e em 1990, [Amp87c], [Amp58] e [Amp90]. As paginações dos trabalhos publicados em 1827 e em 1990 coincidem, o mesmo já não ocorrendo com as reedições de 1887 e de 1958.

Logo no primeiro parágrafo Ampère menciona que no *Théorie* encontram-se reunidas as Memórias que comunicou à Academia Real de Ciências, nas seções de 4 e 26 de dezembro de 1820, 10 de junho de 1822, 22 de dezembro de 1823, 12 de setembro e 28 de novembro de 1825. Referências completas onde encontram-se estes trabalhos: [Amp20d], [Amp20e], [Amp85f], [Amp85i], [Amp20b], [Amp21a], [Amp22i], [Amp85l], [Amp24c], [Amp24d], [Amp85e], [Amp25b], [Amp25c], [Amp87b] e [Amp87e].

Capítulo 11

Comparação entre o *Théorie* de 1826 e o de 1827

11.1 Semelhanças e Diferenças

Vamos comparar as duas versões do *Théorie*, aquela que foi publicada em 1826, [Amp26c], e aquela publicada em 1827, [Amp23b].

O título de 1826 é *Théorie des Phénomènes Électro-dynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience*. Já o de 1827 é um pouco diferente, tendo a palavra *Mathématique*, a saber: *Mémoire Sur la Théorie Mathématique des Phénomènes Électro-dynamiques Uniquement Déduite de l'Expérience*.

Uma diferença entre as duas versões é que apenas naquela publicada em 1826 o texto é dividido em Seções, Tópicos ou Assuntos (ver as Seções 14.1 a 14.26 do Cap. 14). A versão publicada em 1827 não apresenta esta divisão. Na tradução apresentada aqui está incluída esta divisão por facilitar bastante a organização do texto e a orientação do leitor.

O texto destas duas versões de 1826 e de 1827 é exatamente o mesmo, exceto pela paginação diferente e pela terminação de um parágrafo, ver a Nota de Rodapé número 8 na página 173.

Uma diferença significativa entre as versões de 1826 e de 1827 do *Théorie* ocorre nas Notas ao final da obra. Existem quatro Notas na versão publicada em 1827 e cinco Notas na versão publicada em 1826. Como elas apresentam algumas diferenças entre si, resolvemos traduzir completamente as Notas das duas versões, ver os Capítulos 15 e 16. As Notas publicadas em 1826 foram republicadas em 1887, com uma paginação diferente, [Amp87c, págs. 174-190]. Já as Notas publicadas em 1827 foram republicadas em 1858 com uma paginação diferente, [Amp58, págs. 152-164], e em 1990 com a mesma paginação de 1827, [Amp90, págs. 374-387]. Apontamos aqui as diferenças e semelhanças entre estas Notas.

A primeira Nota de 1826 é idêntica à primeira Nota de 1827, exceto pelas partes finais. A de 1826 termina com um parágrafo no qual Ampère descreve algumas limitações da experiência do caso de equilíbrio da não existência de força tangencial, ver as nossas págs 324 até 325, parágrafo este que não aparece na primeira Nota de 1827. O texto que aparece no final da primeira Nota publicada em 1827 vai da nossa pág. 343 até 344.

As limitações apontadas por Ampère no parágrafo final da primeira Nota publicada em 1826 referem-se à experiência sobre o caso de equilíbrio da não existência de força tangencial discutida na Seção 7.3. Hoje em dia estas limitações não são mais relevantes. Afinal de contas, as condições experimentais deste aparelho foram bastante melhoradas por Etingshausen (1796-1878) ao sustentar a barra ou suporte QO da Figura 7.3 na nossa pág. 132, presa ao arco AA' , por uma

suspensão bifilar, [Ett78] e [Gri79]. Apesar disto, é relevante saber se a palavra final de Ampère é aquela que aparece na Nota de 1826, reconhecendo os problemas com esta experiência crucial, ou deixando de mencionar os problemas que ele sabia existirem nesta experiência. Em seguida argumentaremos a favor da hipótese de que a palavra final de Ampère é mesmo aquela publicada em 1826.

O último parágrafo da segunda Nota publicada em 1826, nossa pág. 326, é diferente do final da segunda Nota publicada em 1827, nossa pág. 345.

O que consta no final desta segunda Nota publicada em 1827 está apresentado de forma bem mais detalhada na terceira Nota publicada em 1826, Nota esta que não aparece na versão de 1827, ver a Seção 15.3.

A quarta Nota do *Théorie* de 1826, Seção 15.4, é idêntica à terceira Nota do *Théorie* publicada em 1827, Seção 16.3.

A quinta e última Nota publicada em 1826 é idêntica à quarta e última Nota publicada em 1827, exceto pelo final destas Notas. O trecho diferente ocorre entre as nossas págs. 337 e 340, relativo ao *Théorie* de 1826, que corresponde ao trecho entre as nossas págs. 351 e 353, relativo ao *Théorie* de 1827. Esta passagem modificada está mais bem detalhado no *Théorie* publicado em 1826.

11.2 A Palavra Final de Ampère

As diferenças nas Notas do *Théorie* de 1826 e de 1827 leva a uma questão relevante, ou seja, saber qual versão corresponde aos pontos de vista finais de Ampère.

Hofmann menciona de passagem que a versão inicial é a que acabou sendo publicada em 1827, [Hof96, pág. 336]. Blondel, por outro lado, considera que a versão inicial é a de 1826, sendo que a final seria a de 1827, [Blo82, págs. 67-68, 147-148 e 191]. Acreditamos que Blondel tenha sido levada a esta conclusão pelas datas de publicação.

Após uma análise detalhada de diversos aspectos chegamos à conclusão de que a palavra final de Ampère corresponde ao *Théorie* publicado em 1826. Listamos em seguida alguns argumentos que nos levaram a esta conclusão.

- Ampère tinha o costume de publicar seus artigos em periódicos e como separatas à parte, impressas em outras gráficas e editoras. Pagava de seu próprio bolso estes custos, imprimindo um grande número de cópias que distribuía aos seus conhecidos. Muitas vezes acrescentava algo ou modificava seções inteiras nestas publicações em separado. Diversos exemplos desta prática estão listados nas obras de Ampère sobre eletrodinâmica coletadas por Blondel, [Blo82, págs. 187-192]. Citamos alguns exemplos destes artigos com versões diferentes ao longo da tese.
- Era comum tanto na época de Ampère (e continua sendo nos dias atuais) que os Periódicos e as Memórias das Sociedades Científicas fossem publicados com atraso. O próprio Vol. VI das *Memórias da Academia Real de Ciências do Instituto da França* no qual foi publicada a principal obra de Ampère é relativo ao ano de 1823. Apesar disto, o texto de Ampère se refere a Memórias publicadas entre 1820 e 1825, sendo que no final do texto Ampère menciona a data de redação daquele trecho como sendo de 30 de agosto de 1826, ver nossa página 318. Pode muito bem ter ocorrido que Ampère tenha entregue este texto entre setembro e novembro de 1826, sendo o Volume publicado apenas em 1827.

- Da comparação sistemática das Figuras das versões de 1826 e de 1827 vem que quase todas as diferenças são melhorias incorporadas à publicação de 1826. Estas mudanças estão detalhadas nas Notas de Rodapé da tradução. Citamos aqui os números de algumas destas Notas de Rodapé, a saber, 73, 76, 77, 88, 110, 112 e 131, ver nossas páginas 207, 208, 209, 217, 244, 247 e 263, respectivamente.
- A divisão do *Théorie* em Seções, Tópicos ou Assuntos (ver as Seções 14.1 a 14.26 do Cap. 14) só ocorre na versão de 1826. Ampère provavelmente criou esta Tabela de Conteúdos para facilitar a orientação dos leitores depois de perceber o tamanho e complexidade do trabalho. Aachamos que ele incluiu esta divisão na versão publicada em 1826, depois do trabalho pronto que acabou sendo publicado apenas em 1827 sem esta divisão. Isto nos parece mais natural do que o ato de publicar o trabalho com esta divisão em 1826, removendo-a depois em 1827.
- A primeira errata do *Théorie* publicado em 1827 já está corrigida na versão de 1826, ver a Nota de Rodapé número 2 na nossa página 172.
- Existem alguns erros tipográficos idênticos no texto do *Théorie* de 1826 e de 1827 que foram corrigidos apenas na errata de 1826. Eles estão indicados nas Notas de Rodapé números 58, 108 e 116 nas nossas páginas 202, 237 e 250, respectivamente.
- Existe um erro tipográfico idêntico no texto do *Théorie* de 1826 e de 1827 relativo a um fechamento de parêntese em uma equação. Ele foi corrigido na errata de 1827. Só que ao corrigir este erro, a errata introduziu um novo erro em uma das frações que aparece nesta equação. A errata de 1826 corrige não apenas o fechamento do parêntese, mas também este novo erro introduzido na errata de 1827. Ver a Nota de Rodapé número 100 na nossa página 228.
- Encontramos também uma prova que nos parece definitiva a favor do argumento de que a palavra final de Ampère seja a do *Théorie* de 1826. Aachamos em seus manuscritos a correção de suas Notas finais, [Ampj]. Na Figura 11.1 apresentamos a última página do *Théorie* publicado em 1827. Na Figura 11.2 apresentamos um manuscrito de Ampère contendo suas correções a esta página. E na Figura 11.3 apresentamos como ficou a última página do *Théorie* publicado em 1826, incluindo estas modificações manuscritas de Ampère.

Concluimos então que o *Théorie* publicado em 1826 representa de fato a palavra final de Ampère.

perpendiculaires DI, DK, EU, EV, il est évident qu'on obtient ainsi pour la valeur de la force cherchée

$$\varphi \left(\frac{I}{P_{1,2}} + \frac{I}{P_{2,1}} - \frac{I}{P_{1,1}} - \frac{I}{P_{2,2}} \right).$$

La direction perpendiculaire au plan du parallélogramme NRST suivant laquelle le pôle d'un aimant situé en B est porté par l'action du courant électrique qui parcourt le contour de ce parallélogramme, est la directrice de l'action électro-dynamique qu'il exerce au point B: d'où il suit que s'il y avait à ce point un élément de courant électrique situé dans le plan du parallélogramme, il formerait un angle droit avec la directrice, et qu'ainsi l'action de ce courant sur l'élément serait une force située dans ce plan, perpendiculaire à la direction de l'élément, et égale à celle que le même courant exercerait sur le pôle d'un aimant placé au point B multipliée par un rapport constant, qui est ici celui de φ à $\frac{I}{2} i i' ds$, en nommant cet élément ds ; en sorte que la force ainsi dirigée qui agirait sur l'élément aurait pour valeur

$$\frac{I}{2} i i' ds \left(\frac{I}{P_{1,2}} + \frac{I}{P_{2,1}} - \frac{I}{P_{1,1}} - \frac{I}{P_{2,2}} \right).$$

Lorsque l'élément situé en B n'est pas dans le plan du parallélogramme, mais forme avec ce plan un angle égal à ω , on peut le remplacer par deux éléments de même intensité, l'un dans ce plan, l'autre qui lui est perpendiculaire: l'action du courant du parallélogramme sur ce dernier étant nulle, on ne doit tenir compte que de celle qu'il exerce sur le premier; elle est évidemment dans le plan du parallélogramme, perpendiculaire à l'élément et égale à

$$\frac{I}{2} i i' ds \cos. \omega \left(\frac{I}{P_{1,2}} + \frac{I}{P_{2,1}} - \frac{I}{P_{1,1}} - \frac{I}{P_{2,2}} \right).$$

Figura 11.1: Última página do *Théorie* publicado em 1827, [Amp23b, Amp90, pág. 387].

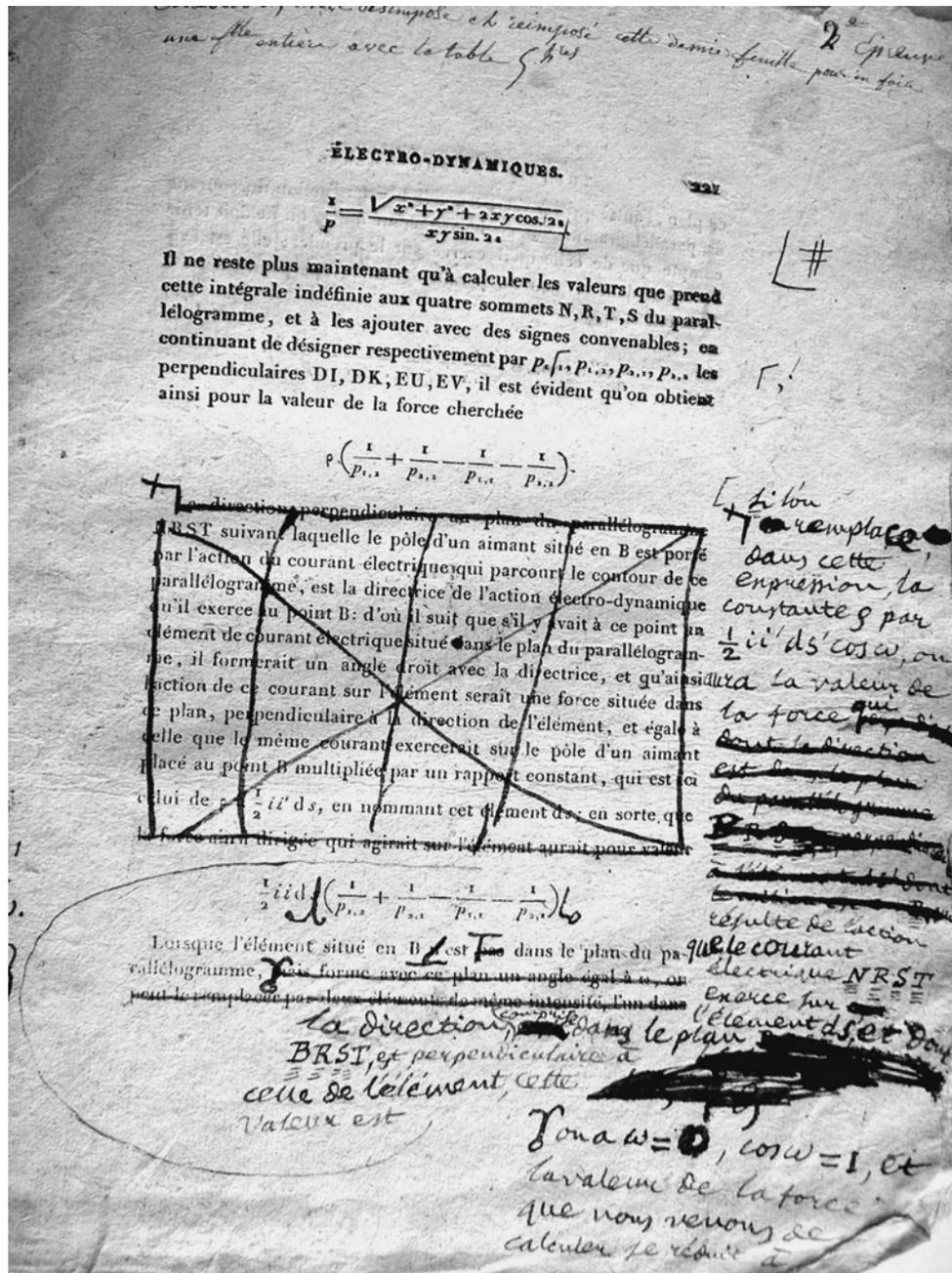


Figura 11.2: Correção manuscrita de Ampère à última página do *Théorie*, [Ampj]. A parte impressa que está sendo corrigida é idêntica à última página da versão publicada em 1827.

222 THÉORIE DES PHÉNOMÈNES ÉLECTRO-DYNAMIQUES.

en nommant p la perpendiculaire PQ abaissée du point P sur BM, parce que le double de l'aire du triangle BPM est à la fois égal à $p\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos.2\epsilon}$ et à $xy\sin.2\epsilon$, ce qui donne

$$\frac{1}{p} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos.2\epsilon}}{xy\sin.2\epsilon}.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à calculer les valeurs que prend cette intégrale indéfinie aux quatre sommets N, R, T, S du parallélogramme, et à les ajouter avec des signes convenables; en continuant de désigner respectivement par $p_{1,1}, p_{1,2}, p_{2,1}, p_{2,2}$ les perpendiculaires DI, DK, EU, EV, il est évident qu'on obtient ainsi pour la valeur de la force cherchée

$$\varphi \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right).$$

Si l'on remplace, dans cette expression, la constante φ par $\frac{1}{2} i i' d s', \cos. \omega$, on aura la valeur de la force qui résulte de l'action que le courant électrique NRST exerce sur l'élément $d s'$, et dont la direction, comprise dans le plan B R S T, est perpendiculaire à celle de l'élément; cette valeur est

$$\frac{1}{2} i i' d s' \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right) \cos. \omega.$$

Lorsque l'élément situé en B est dans le plan du parallélogramme, on a $\omega=0$, $\cos. \omega=1$, et la valeur de la force que nous venons de calculer se réduit à

$$\frac{1}{2} i i' d s' \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right).$$

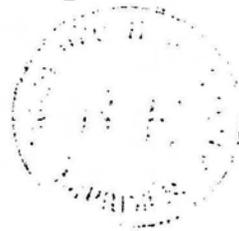


Figura 11.3: Última página do *Théorie* publicado em 1826, [Amp26c, pág. 222].

Capítulo 12

Observações sobre a Tradução

Temos conhecimento de um único trabalho de Ampère já traduzido e publicado em português, seu primeiro artigo sobre eletrodinâmica, [CA07d]. A única tradução do *Théorie* que conhecemos é a tradução *parcial* feita por Blunn e que foi publicada no livro de Tricker em 1965, [Amp65].

A tradução completa apresentada aqui foi feita a partir dos trabalhos originais publicados em 1826, [Amp26c], e em 1827, [Amp23b]. Este último foi reimpresso com a mesma paginação em 1990, [Amp90]. Marcamos todas as páginas originais entre colchetes, [páginas m e n], para facilitar a comparação com o original e também a localização de qualquer passagem específica indicada por alguma referência de outros autores relativas ao *Théorie*. Neste caso a página m corresponde à publicação de 1826, [Amp26c]. Já a página n corresponde à publicação de 1827, [Amp23b], que coincide com a paginação da reimpressão de 1990, [Amp90].

Tanto na versão publicada em 1827 quanto na versão publicada em 1826, as 44 Figuras não estão espalhadas ao longo do texto. Elas só aparecem reunidas ao final do texto em duas gravuras, Figuras 12.1 e 12.2. Ou seja, elas não aparecem no meio do texto quando são citadas.

Nesta tradução todas as Figuras originais foram escaneadas em alta definição a partir da versão publicada em 1826, [Amp26c]. Foi feito um tratamento das imagens, elas foram ampliadas e colocadas separadamente nas páginas em que são citadas, no meio do texto. Espera-se com isto facilitar a leitura da obra de Ampère e que se possam perceber os detalhes das Figuras, as conexões dos fios, as letras indicadas no texto etc.

Foi feita uma comparação sistemática entre as Figuras do *Théorie* publicado em 1826 com as da versão de 1827. As diferenças estão anotadas nas Notas ao longo da tradução.

Todas as 44 Figuras do *Théorie* foram também refeitas e vetorizadas com um software gráfico. Elas estão incluídas no Apêndice A. O objetivo foi o de ter imagens com linhas mais bem definidas e com letras maiores e mais legíveis. Espera-se com isto auxiliar no entendimento do trabalho de Ampère.

Todos os termos entre colchetes no meio do texto são de nossa autoria para facilitar a compreensão de algumas passagens.

As notas do autor, Ampère, são representadas por [N. A.], enquanto que as notas dos tradutores são representadas por [N. T.].

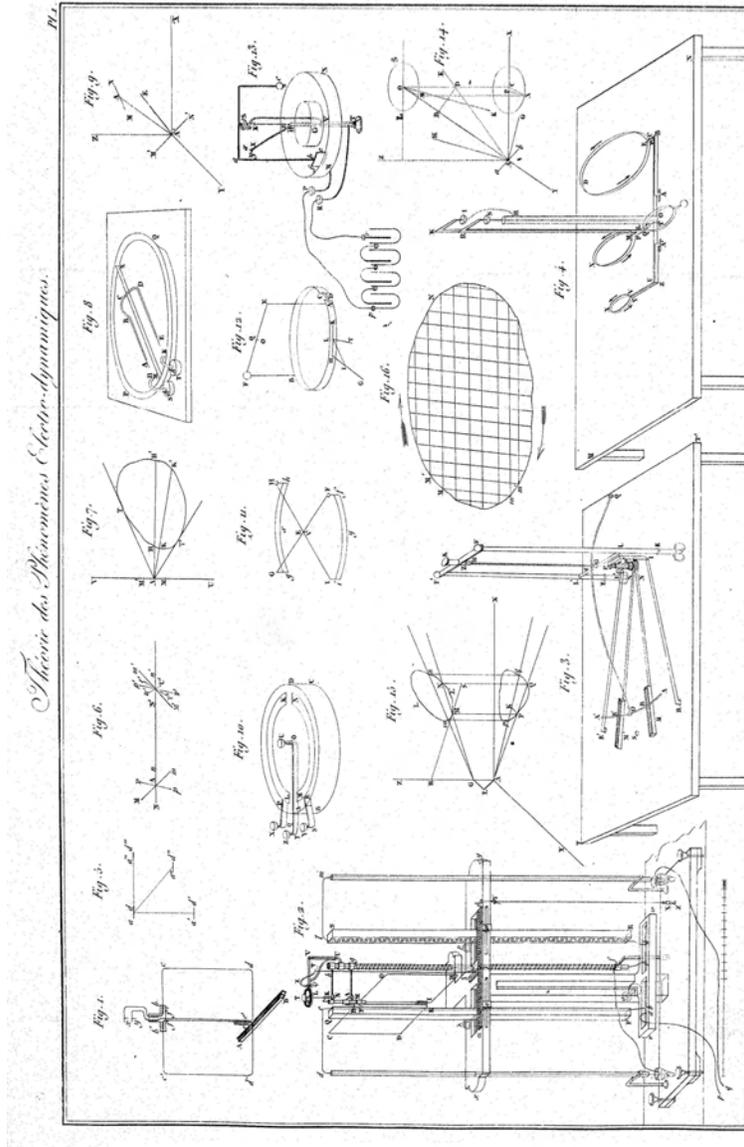


Figura 12.1: Primeira gravura original contendo metade das Figuras do *Théorie*, [Amp26c].

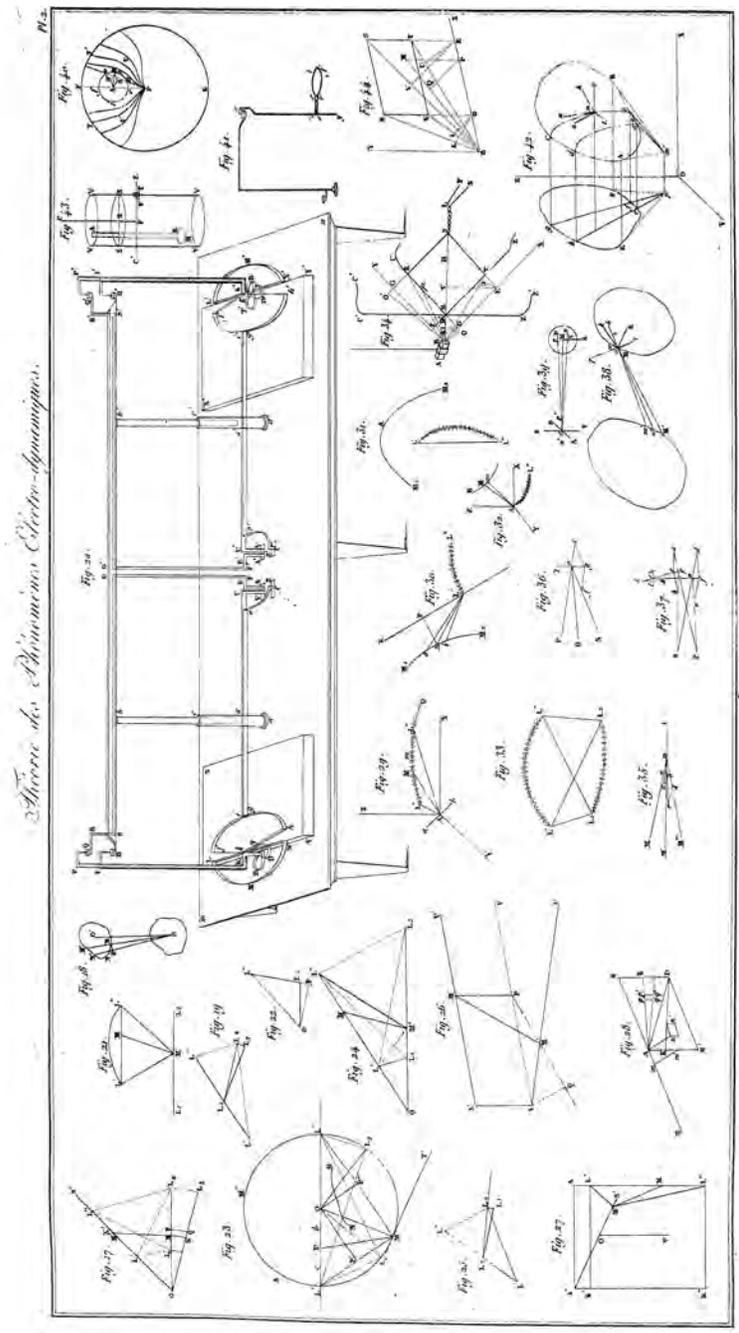


Figura 12.2: Segunda gravura original contendo metade das Figuras do *Théorie*, [Amp26c].

Capítulo 13

Conclusão

Ao longo do desenvolvimento desta tese de doutorado realizamos diversas atividades.

Inicialmente estudamos as principais publicações de Ampère relacionadas com eletrodinâmica. Estes artigos estão listados nas Referências Bibliográficas.

Examinamos diversas correspondências de Ampère, principalmente as que tratavam de temas relacionados ao magnetismo e à eletricidade.

Estudamos os manuscritos de Ampère que estão preservados nos Arquivos da Academia de Ciências de Paris.

Também analisamos uma grande quantidade de fontes secundárias relacionadas a este tema, ver a Bibliografia ao final deste trabalho. Todas as referências listadas em nossa Bibliografia foram consultadas.

Reproduzimos algumas das experiências fundamentais de Ørsted e de Ampère que nos auxiliaram na compreensão de suas obras: [CA07c], [ASCC07] e [SCCA07].

Traduzimos os primeiros artigos de Ampère, Biot e Savart relacionados com o assunto desta tese: [CA07d] e [AC06].

Analisamos a distorção da obra de Ampère nos livros didáticos, [CA07b].

Estudamos a concepção de Ampère para a origem do magnetismo terrestre, [CA07a]. Ele introduziu a hipótese de que o magnetismo terrestre é devido a correntes elétricas. Foi Ampère quem propôs isto pela primeira vez. Esta idéia fundamenta a noção moderna da gênese dos efeitos magnéticos da Terra.

Apresentamos a força de Ampère entre elementos de corrente. Examinamos atentamente o significado de todos os termos que aparecem nesta lei. Apontamos possíveis enganos de autores modernos na apresentação de alguns destes termos.

Destacamos as contribuições a respeito dos fenômenos eletromagnéticos feitas por cientistas da época de Ampère. Entre outros, mencionamos aqui os nomes de Volta, Ørsted, Biot, Savart, Arago, Gay-Lussac, Savary e Faraday.

Explicitamos a matemática fundamental utilizada por Ampère que lhe permitiu chegar na expressão final de sua fórmula para a força entre dois elementos de corrente.

Enfatizamos a importância do novo método introduzido por Ampère para a obtenção de sua lei de força. Este método é baseado nos famosos casos de equilíbrio desenvolvidos por ele. Apresentamos vários destes casos de força ou de torque nulo, assim como sua relevância metodológica na obtenção de leis quantitativas na física.

Mapeamos o caminho percorrido por Ampère para chegar à forma completa de sua força entre elementos de corrente. Para isto analisamos algumas das principais experiências, idéias e suposições teóricas feitas por Ampère que o levaram ao valor final de sua lei de força entre

dois elementos de corrente. Também consideramos detalhadamente as experiências de Biot e Savart com o fio retilíneo e com o fio oblíquo, assim como a influência da experiência de rotação contínua de Faraday na determinação feita por Ampère do valor final da sua força entre elementos de corrente.

Maxwell havia feito a seguinte afirmação relacionada com a maneira pela qual Ampère apresentou a dedução de sua fórmula em sua obra principal, o *Théorie* de 1826, baseado apenas em quatro casos de equilíbrio, [Max54, Vol. 2, artigo 528, págs. 175-6]:

Contudo, o método de Ampère, embora moldado em uma forma indutiva, não nos permite traçar a formação das idéias que o guiaram. Dificilmente podemos acreditar que Ampère realmente descobriu a lei de ação [entre dois elementos de corrente] por meio das experiências que ele descreve. Somos levados a suspeitar que, de fato, como ele próprio nos diz,¹ descobriu a lei por algum processo que ele não nos mostrou e que, quando construiu depois disto uma demonstração perfeita, removeu todos os traços do andaime através do qual ele a havia levantado.

Com este trabalho esperamos ter elucidado o processo seguido por Ampère na obtenção de sua força entre elementos de corrente.

Traduzimos na íntegra a principal obra de Ampère, o *Théorie*. Esta tradução foi feita comparando as duas versões do *Théorie* publicadas por Ampère, uma em 1826 e outra em 1827, [Amp26c] e [Amp23b]. Também examinamos as reedições desta obra publicadas posteriormente: [Amp87c], [Amp58] e [Amp90]. Corrigimos os erros tipográficos encontrados nestes textos. Expusemos as diferenças entre as publicações originais de 1826 e de 1827.

A única versão para uma língua estrangeira deste trabalho de Ampère da qual temos conhecimento é uma tradução parcial para o inglês publicada em 1965, [Amp65]. Também estudamos esta versão e a análise do trabalho de Ampère feita nesta obra.

Embasamos os motivos da edição do *Théorie* com a data de 1826 ter sido escrita depois da versão publicada em 1827. Entre outras coisas, localizamos em seus manuscritos algumas correções feitas sobre a versão de 1827, correções estas incorporadas na versão de 1826.

Todas as figuras do *Théorie* foram digitalizadas, tratadas para melhorar suas resoluções e colocadas no corpo da obra. Além disso, elas também foram refeitas e vetorizadas com um software gráfico, sendo incluídas no Apêndice A.

Acrescentamos Notas Explicativas à tradução do *Théorie*.

Mapeamos as reproduções no *Théorie* de artigos anteriores. Ou seja, indicamos ao longo de nossa tradução quais partes da obra principal de Ampère contêm reproduções literais (ou quase que literais) de artigos publicados anteriormente por ele. As diferenças também foram anotadas ao longo da tradução.

Passamos agora à tradução comentada do *Théorie*, a obra principal de Ampère. De acordo com Whittaker, [Whi73, pág. 83], esta “é uma das memórias mais célebres na história da filosofia natural.” Williams comparou-a com a principal obra de Newton, o livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, [New90] e [New08]. Em sua biografia sobre Ampère, Williams chamou seu trabalho mais relevante de “o *Principia* da eletrodinâmica,” [Wil81, pág. 145].

¹[Nota do Maxwell:] *Théorie des phénomènes Électrodynamiques*, p. 9.

Parte V

Tradução Comentada da Principal Obra de Ampère

Capítulo 14

Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência

THÉORIE

DES

PHÉNOMÈNES ÉLECTRO-DYNAMIQUES,

UNIQUEMENT DÉDUITE DE L'EXPÉRIENCE,

PAR ANDRÉ-MARIE AMPÈRE,

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE, DE LA SOCIÉTÉ ROYALE D'ÉDIMBOURG, DE LA SOCIÉTÉ HELVÉTIENNE DES SCRUTATEURS DE LA NATURE, DE LA SOCIÉTÉ PHILOSOPHIQUE DE CAMBRIDGE, DE CELLE DE PHYSIQUE ET D'HISTOIRE NATURELLE DE GENÈVE, DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES DE BRUXELLES ET DE L'ACADÉMIE ROYALE DE LISBONNE, CHEVALIER DE LA LÉGION-D'HONNEUR, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET AU COLLÈGE DE FRANCE.



A PARIS,

CHEZ MÉQUIGNON-MARVIS, LIBRAIRE-ÉDITEUR, RUE DU JARDINET, N° 13.

ET A BRUXELLES, AU DÉPÔT GÉNÉRAL DE LIBRAIRIE MÉDICALE FRANÇAISE.

NOVEMBRE 1826.

Figura 14.1: Capa do *Théorie* publicado em 1826, [Amp26c].

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
DE L'INSTITUT
DE FRANCE.

ANNÉE 1823.

TOME VI.



PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS, LIBRAIRES,
RUE JACOB, N° 24.

1827.

Figura 14.2: Capa do *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France* no qual foi publicado o *Théorie* em 1827, [Amp23b].

THÉORIE

DES PHÉNOMÈNES ÉLECTRO-DYNAMIQUES,

UNIQUEMENT DÉDUITE DE L'EXPÉRIENCE,

Ouvrage dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 28 novembre 1825.

L'ÉPOQUE que les travaux de Newton ont marquée dans l'histoire des sciences n'est pas seulement celle de la plus importante des découvertes que l'homme ait faites sur les causes des grands phénomènes de la nature; c'est aussi l'époque où l'esprit humain s'est ouvert une nouvelle route dans les sciences qui ont pour objet l'étude de ces phénomènes.

Jusqu'alors on en avait presque exclusivement cherché les causes dans l'impulsion d'un fluide inconnu qui entraînait les particules matérielles suivant la direction de ses propres particules; et partout où l'on voyait un mouvement révolutif, on imaginait un tourbillon dans le même sens.

Newton nous a appris que cette sorte de mouvement doit, comme tous ceux que nous offre la nature, être ramenée, par le calcul, à des forces agissant toujours entre deux particules matérielles suivant la droite qui les joint, de manière que

Figura 14.3: Primeira página do *Théorie* publicado em 1826, [Amp26c, pág. 3].

Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência.

[Páginas 3 e 175]¹

Obra na qual se encontram reunidas as Memórias que o Sr. Ampère comunicou à Academia Real de Ciências, nas seções de 4 e 26 de dezembro de 1820, 10 de junho de 1822, 22 de dezembro de 1823, 12 de setembro e 28 de novembro² de 1825.³

14.1 Exposição do Caminho a ser Seguido na Pesquisa sobre as Leis dos Fenômenos Naturais e sobre as Forças que os Produzem

A época marcada pelos trabalhos de Newton⁴ na história das ciências não é somente [o período] das descobertas mais importantes que o homem fez sobre as causas dos grandes fenômenos da natureza, é também a época onde o espírito humano abriu uma nova rota nas ciências que tem por objeto estudar estes fenômenos.

Até então tinha-se quase que exclusivamente procurado as causas [dos fenômenos naturais] no impulso de um fluido desconhecido que arrastava as partículas materiais seguindo a direção de suas próprias partículas. E para todo lugar onde se via um movimento giratório, imaginava-se um turbilhão no mesmo sentido.⁵

Newton nos ensinou que este tipo de movimento deve, como todos os que a natureza nos

¹[N. T.] Todos os inícios de páginas são indicados por “páginas *m* e *n*.” O número *m* refere-se ao *Théorie* publicado em 1826, [Amp26c], enquanto que o número *n* refere-se ao *Théorie* publicado em 1827, [Amp23b]. Esta última numeração coincide com a re-edição publicada em 1990, [Amp90].

²[N. T.] Na versão do *Théorie* publicada em 1827 aparece a data “21 novembre” em vez de “28 novembre.” Mas em uma errata que aparece no final do trabalho publicado em 1827 chama-se a atenção de que o correto é esta última data. Esta correção foi implementada na versão publicada em 1826.

³[N. T.] Referências completas onde encontram-se estes trabalhos citados por Ampère: [Amp20d], [Amp20e], [Amp85f], [Amp85i], [Amp20b], [Amp21a], [Amp22i], [Amp85l], [Amp24c], [Amp24d], [Amp85e], [Amp25b], [Amp25c], [Amp87b] e [Amp87e].

⁴[N. T.] Isaac Newton (1642-1727) publicou o livro *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* em 1687. Seu livro *Óptica* foi publicado em 1704. Estas duas obras já se encontram totalmente traduzidas para o português, [New96], [New90] e [New08].

⁵[N. T.] Este modelo da gravitação foi apresentado por René Descartes (1596-1650).

oferece, ser reduzido pelo cálculo a forças agindo sempre entre duas partículas materiais seguindo a reta que as une, de maneira que

[Páginas 4 e 176]

a ação exercida por uma delas sobre a outra seja igual e oposta à ação que esta última [partícula] exerce ao mesmo tempo sobre a primeira. Conseqüentemente não se pode, quando se supõem estas duas partículas invariavelmente ligadas entre si, resultar qualquer movimento [do centro de massa do sistema] devido à ação mútua entre elas. É esta lei confirmada hoje em dia por todas as observações e por todos os cálculos, que ele exprime no último dos três axiomas dispostos no começo dos *Philosophiæ naturalis principia mathematica*.⁶ Mas não bastava estar elevado a esta alta concepção, era preciso encontrar sob qual lei estas forças variam conforme a posição respectiva das partículas entre as quais elas se exercem. Ou, o que é equivalente, [era necessário] exprimir o valor [destas forças] por uma fórmula.

Newton estava longe de pensar que tal lei pudesse ser inventada partindo de considerações abstratas mais ou menos plausíveis. Ele estabeleceu que ela deveria ser deduzida dos fatos observados ou, de preferência, de leis empíricas que, como as de Kepler,⁷ são somente os resultados generalizados de um grande número de observações particulares.⁸

O caminho seguido por Newton foi o de inicialmente observar os fatos, variando as circunstâncias na medida do possível, acompanhar este primeiro trabalho com medidas precisas para deduzir as lei gerais, fundadas unicamente na experiência, e deduzir destas leis, independentemente de toda hipótese sobre a natureza das forças que produzem os fenômenos, o valor matemático destas forças, ou seja, a fórmula que as representa. Em geral este caminho tem sido adotado na França pelos sábios a quem a física deve os imensos progressos que fez nos últimos tempos, e foi ele [este procedimento] que me serviu de guia em todas as minhas pesquisas

[Páginas 5 e 177]

sobre os fenômenos eletrodinâmicos. Consultei unicamente a experiência para estabelecer as leis destes fenômenos, e deduzi a única fórmula que pode representar as forças a que se devem [estes fenômenos]. Não fiz nenhuma pesquisa sobre a própria causa que se possa designar a estas forças, estando bem convencido de que toda a pesquisa deste gênero deve ser precedida do conhecimento puramente experimental das leis, e da determinação, deduzida unicamente destas leis, do valor das forças elementares cuja direção é, necessariamente, a da reta que une os pontos materiais entre os quais se exercem [estas forças]. É por isso que evitei comentar sobre as idéias que eu poderia ter sobre a natureza da causa [das forças] que emanam dos condutores voltaicos, exceto nas notas que acompanham a *Exposé sommaire des nouvelles expériences électromagnétiques faites*

⁶[N. T.] Terceiro “Axioma ou Lei do Movimento” de Newton: “A toda ação há sempre oposta uma reação igual, ou, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas,” [New90, págs. 15-16].

⁷[N. T.] J. Kepler (1571-1630). Apresentou três leis do movimento planetário, [Sym82, pág. 159]: “1. Os planetas movem-se em elipses sendo o Sol um dos focos. 2. O raio vetor do Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais. 3. O quadrado do período de revolução é proporcional ao cubo do semi-eixo maior.” As duas primeiras leis surgiram no período entre 1601 e 1606, sendo publicadas em 1609. Já a terceira lei foi publicada em 1619.

⁸[N. T.] Na versão de 1827 do *Théorie* este parágrafo termina com as seguintes palavras: “são somente os resultados generalizados de um grande número de fatos.”

par plusieurs physiciens depuis le mois de mars 1821,⁹ que li na seção pública da Academia de Ciências, em 8 de abril de 1822. Pode-se ver o que disse nestas notas na página 215 do meu *recueil d’Observations électro-dynamiques*.¹⁰ Não parece que este caminho — o único que pode conduzir a resultados independentes de toda hipótese — seja preferido pelos físicos do resto da Europa, tal como é [preferido] pelos franceses. E o sábio ilustre¹¹ que viu pela primeira vez os pólos de um ímã transladados pela ação de um fio condutor em direções perpendiculares à direção do fio, concluiu que a matéria elétrica girava em torno dele, e empurrava os pólos no sentido de seu movimento,¹² precisamente como Descartes girava a matéria de seus turbilhões no sentido das revoluções planetárias. Guiado pelos princípios

[Páginas 6 e 178]

da filosofia newtoniana, reduzi o fenômeno observado pelo Sr. Oerstedt — como se fez com respeito a todos aqueles do mesmo gênero que nos oferece a natureza — às forças agindo sempre ao longo da reta que une as duas partículas entre as quais as forças se exercem. E se estabeleci que a mesma disposição, ou o mesmo movimento da eletricidade, que existe em um fio condutor ocorre também em torno das partículas do ímã, certamente não é para as fazer agir por impulso, à maneira de um turbilhão, mas para calcular, a partir de minha fórmula, as forças que resultam entre estas partículas e as partículas de um condutor ou de um outro ímã — seguindo as retas que ligam duas a duas as partículas entre as quais se considera a ação mútua — e para mostrar que os resultados dos cálculos são completamente verificados:

1. Pelas experiências que fiz, e pelas que se devem ao Sr. Pouillet¹³ sobre a determinação precisa das posições onde tem que se encontrar um condutor móvel para que permaneça em equilíbrio quando é submetido à ação, seja de um outro condutor, seja de um ímã;
2. Pela concordância destes resultados com as leis que Coulomb¹⁴ e o Sr. Biot¹⁵ deduziram de suas experiências. O primeiro em relação à ação mútua entre dois ímãs, e o segundo [em relação à ação] entre um ímã e um fio condutor.

A principal vantagem das fórmulas que são obtidas imediatamente desta forma — a partir de alguns fatos gerais dados por um número suficiente de observações para que a precisão [das fórmulas] não possa ser contestada — é de permanecerem independentes, tanto das hipóteses que puderam auxiliar seus autores na pesquisa destas fórmulas, quanto das hipóteses que podem

⁹[N. T.] *Exposição sumária das novas experiências eletromagnéticas feitas por vários físicos desde o mês de março de 1821*. Este trabalho foi publicado originalmente em 1822, [Amp22k], sendo reproduzido em [Amp22f] e em [Amp85d].

¹⁰[N. T.] *Coletânea de Observações Eletrodinâmicas*. Estas Notas de Ampère foram publicadas originalmente no *Recueil* e reproduzidas na *Coletânea do Joubert*, [Amp22j] e [Amp85i], respectivamente. Há uma tradução parcial para o inglês destas Notas em [Can80].

¹¹[N. T.] H. C. Ørsted.

¹²[N. T.] Para Ørsted a matéria elétrica descrevia hélices ao redor do fio com corrente. De acordo com Ørsted seria esta matéria elétrica girando ao redor do fio que deslocaria os pólos do ímã, [Ørs86].

¹³[N. T.] C.-S.-M. Pouillet (1790-1868). Defendia a hipótese de magnetização do fio quando passava uma corrente elétrica por ele, assim como Biot. Em 1837 realizou as primeiras medidas quantitativas do calor emitido pelo Sol e da absorção atmosférica. Também trabalhou sobre as leis experimentais da intensidade da corrente em um circuito fechado. Construiu galvanômetros para medir intensidades de corrente. Com eles verificou em 1839 a lei de Ohm (1789-1854) de 1826 com grande precisão, [Tat81].

¹⁴[N. T.] C. A. Coulomb (1736-1806). As leis de força de Coulomb entre cargas elétricas e entre pólos magnéticos foram publicadas em 1785, podendo ser representadas pelas Eqs. (2.2) e (2.3).

¹⁵[N. T.] J. B. Biot (1774-1862). Os trabalhos eletromagnéticos de Biot foram discutidos no Cap. 5

lhes substituir em seguida. A expressão da atração universal deduzida das leis de Kepler¹⁶ não depende em nada das hipóteses que alguns autores tentaram fazer sobre

[Páginas 7 e 179]

uma causa mecânica que gostariam de lhe assinalar. A teoria do calor se apóia realmente nos fatos gerais dados imediatamente pela observação, e a equação deduzida destes fatos se encontra confirmada pela concordância entre os resultados que se obtém [da equação] e os [resultados] fornecidos pela experiência. [Esta equação] deve ser igualmente recebida como exprimindo as leis verdadeiras da propagação do calor, [tanto] por aqueles que a atribuem a uma irradiação de moléculas caloríficas, [quanto] por aqueles que recorrem às vibrações de um fluido espalhado no espaço para explicar o mesmo fenômeno. Apenas é necessário que os primeiros mostrem como a equação de que se trata resulta da sua maneira de ver, e que os segundos a deduzam de fórmulas gerais dos movimentos vibratórios. [E isto] não [é] para acrescentar nada à certeza desta equação, mas para que as respectivas hipóteses possam subsistir. O físico que não toma posição a este respeito admite esta equação como a representação exata dos fatos, sem se inquietar sobre a maneira pela qual ela pode resultar de uma ou de outra das explicações que falamos. E se novos fenômenos e novos cálculos vierem demonstrar que os efeitos do calor só podem ser realmente explicados dentro do sistema de vibrações, o grande físico que chegou primeiro a esta equação¹⁷ — e que criou novos meios de integração para aplicar ao objeto de suas pesquisas — não deixará de ser o autor da teoria matemática do calor, [assim] como Newton é o autor da teoria dos movimentos planetários, embora esta última [teoria] não tenha sido também completamente demonstrada por seus trabalhos da mesma forma que ela foi desde então [demonstrada] pelos [trabalhos] de seus sucessores.

Isto também serve para a fórmula com a qual representei

[Páginas 8 e 180]

a ação eletrodinâmica. Qualquer que seja a causa física pela qual se deseje explicar os fenômenos produzidos por esta ação, a fórmula que obtive permanecerá sempre como a expressão dos fatos. Caso se chegue a deduzí-la de uma das considerações pelas quais explicou-se tantos outros fenômenos — tais como as atrações em razão inversa do quadrado da distância, que tornam-se insensíveis a toda distância apreciável das partículas entre as quais elas se exercem, [ou tais como] as vibrações de um fluido espalhado no espaço, etc. — se dará um passo a mais nesta parte da física. Mas esta pesquisa, da qual ainda não me ocupei nem um pouco, mesmo reconhecendo toda [sua] importância, não mudará em nada os resultados de meu trabalho já que, para estar de acordo com os fatos, será sempre preciso que a hipótese adotada esteja de acordo com a fórmula que representa tão completamente os fatos.

Desde que reconheci¹⁸ que dois condutores voltaicos agem um sobre o outro, às vezes se atraindo e outras vezes se repelindo, que distingui e descrevi as ações que eles exercem nas di-

¹⁶[N. T.] Ampère tem um trabalho didático interessante discutindo como deduzir a partir das leis de Kepler que a força gravitacional sobre um planeta é inversamente proporcional ao quadrado de sua distância até o Sol, [Amp29].

¹⁷[N. T.] J. B. Fourier (1768-1830). Seu trabalho *A Teoria Analítica do Calor* foi publicado em 1822, sendo baseado em um trabalho de 1812 com o qual ganhou um prêmio da Academia Francesa de Ciências. Há uma tradução para o inglês em [Fou52].

¹⁸[N. T.] A parte do *Théorie* que vai deste parágrafo até o meio da página 182 foi retirado da Memória de 10 de junho de 1822 da maneira como apresentado no *Recueil*, [Amp22p, págs. 293-303] e [Amp851, págs. 270-277].

ferentes posições que podem se encontrar em relação um ao outro, e que constatee a igualdade entre a ação que é exercida por um condutor retilíneo e a ação que é [exercida] por um condutor sinuoso — quando este [condutor sinuoso] somente se afasta por distâncias extremamente pequenas da direção do primeiro [condutor retilíneo], e [quando o condutor sinuoso] termina nas duas extremidades nos mesmos pontos [em que termina o condutor retilíneo] —; procurei exprimir por uma fórmula o valor da força atrativa ou repulsiva entre dois de seus elementos [de corrente], ou partes infinitamente pequenas, a fim de poder deduzir desta fórmula, pelos métodos conhecidos de integração, a ação que se estabelece entre duas porções de condutores dadas as formas e a posição [destas duas porções de condutores com corrente].

[Páginas 9 e 181]

A impossibilidade de submeter diretamente à experiência as porções infinitamente pequenas do circuito voltaico obriga, necessariamente, partir de observações feitas sobre os fios condutores de grandeza finita. E é necessário satisfazer a estas duas condições: que as observações sejam suscetíveis de uma grande precisão, e que elas sejam apropriadas para determinar o valor da ação mútua entre duas porções infinitamente pequenas destes fios. Isto pode ser obtido de duas maneiras:

1. Uma consiste em medir inicialmente com a maior exatidão os valores da ação mútua entre duas porções [de um fio condutor] de tamanho finito, colocando sucessivamente estas [duas porções] uma com respeito à outra em distâncias diferentes e em posições [ou orientações] diferentes, pois é evidente que aqui a ação [mútua] não depende somente da distância. É necessário em seguida fazer uma hipótese sobre o valor da ação mútua entre duas porções infinitamente pequenas [de condutores com corrente], obtendo-a a partir da ação que deve resultar para os condutores de tamanho finito com os quais se trabalhou, e modificar a hipótese até que os resultados do cálculo estejam de acordo com a observação. Este é o procedimento que me propus de início a seguir, como expliquei com detalhes em uma Memória lida à Academia de Ciências em 9 de outubro de 1820.^{19,20} Ainda que este procedimento nos conduza à verdade somente pela via indireta das hipóteses, não é menos precioso, já que frequentemente é o único que pode ser empregado nas pesquisas deste gênero. Um dos membros desta Academia,²¹ cujos trabalhos abarcam todas as partes da física, o descreveu perfeitamente

[Páginas 10 e 182]

na *Notice sur l'aimantation imprimée aux métaux par l'électricité en mouvement*,²² que nos foi lida no dia 2 de abril de 1821, chamando-o [a este procedimento] como sendo um trabalho de uma espécie de adivinhação, que é o objetivo de quase todas as pesquisas físicas.^{23,24}

¹⁹[N. A.] Esta Memória não foi publicada à parte, mas os principais resultados foram inseridos na Memória que publiquei em 1820, no volume XV dos *Annales de chimie et de physique*.

²⁰[N. T.] Ver, em particular, [Amp20f, págs. 182-188 e 212-213] e [Amp85a, págs. 17 e 29-33].

²¹[N. T.] J. B. Biot

²²[N. T.] *Nota sobre a imantação imprimida aos metais pela eletricidade em movimento*.

²³[N. A.] Veja o *Journal des Savants* de abril 1821, pág. 233.

²⁴[N. T.] Referência original: [Bio21, pág. 233]. Neste artigo aparece o seguinte trecho, nossa ênfase em itálico:

2. Mas existe uma outra maneira de alcançar mais diretamente o mesmo objetivo. Foi esta [maneira] que segui desde então e que me conduziu aos resultados que desejava. Ela consiste em constatar, pela experiência, que um condutor móvel permanece exatamente em equilíbrio entre [duas] forças iguais [e opostas], ou entre [dois] torques iguais [e opostos] — com estas forças e estes torques sendo produzidos pelas porções de [fios] condutores fixos cujas formas ou tamanhos podem variar de uma maneira qualquer — sob as condições determinadas pela experiência, sem que o equilíbrio [do condutor móvel] seja perturbado, e de concluir diretamente pelo cálculo qual deve ser o valor da ação mútua entre as duas porções infinitamente pequenas [dos condutores com corrente], para que o equilíbrio seja de fato independente de todas as mudanças de forma ou de tamanho compatíveis com as condições.

Este último procedimento só pode ser empregado quando a natureza da ação que se estuda produz casos de equilíbrio independentes da forma dos corpos. Ele é, conseqüentemente, muito mais restrito em suas aplicações do que o procedimento de que falei há pouco. Mas já que os condutores voltaicos apresentam circunstâncias nas quais se produz este tipo de equilíbrio, é natural que se prefira este procedimento em relação a qualquer outro, por ser mais direto, mais simples, e suscetível de uma exatidão maior quando as experiências são feitas com as convenientes precauções. Existe ademais, com respeito

[Páginas 11 e 183]

à ação exercida por estes condutores, um motivo ainda bem mais decisivo de seguir este procedimento nas pesquisas relativas à determinação das forças que a produzem [isto é, que produzem esta ação]. Este motivo é a extrema dificuldade das experiências nas quais se proporia, por exemplo, medir as forças pelo número de oscilações de um corpo submetido às suas ações. Esta dificuldade surge do fato de que, quando faz-se agir um condutor fixo sobre uma porção móvel do circuito voltaico, as partes do aparelho necessárias para conectá-la [a porção móvel] com a pilha, agem sobre esta porção móvel ao mesmo tempo que o condutor fixo, alterando assim os resultados das experiências. Contudo, acredito ter conseguido sobrepujar [esta dificuldade] em

Os próprios dispositivos pelos quais estes efeitos foram obtidos, mostram ainda o caráter revolutivo da força magnética adquirido pelo fio condutor. Ora, como esta força é imprimida ao fio pela presença dos princípios elétricos que o percorrem seguindo seu comprimento, é portanto necessário que estes princípios possuam em seus movimentos alguma propriedade transversal e revolutiva em um sentido determinado, por meio da qual eles excitam ou exercem eles mesmos o poder que o fio nos mostra. Todos os nossos esforços hoje em dia devem tender a descobrir o que possa ser esta modificação. Assim, como disse no começo deste discurso, já chegamos, neste assunto tão novo, ao último estágio das pesquisas puramente experimentais. Aquelas que ainda restam fazer, apoiadas sobre particularidades que não são imediatamente perceptíveis a nossos sentidos, podem consistir somente em desenvolver concepções intelectuais, em verificar idéias de causa que a imaginação, guiada pelo estudo habitual da natureza, só pode sugerir. *Este trabalho, uma espécie de adivinhação, é o objetivo de quase todas as pesquisas físicas.* Ele é de uma necessidade perpétua na química, que sempre opera sobre as propriedades individuais das partículas dos corpos. E é por este motivo que esta ciência, tão positiva nos seus detalhes, é ao mesmo tempo tão exposta ao espírito de sistema em suas sínteses gerais. Newton não teve de vencer este tipo de dificuldade quando analisou os movimentos dos planetas e dos cometas. Estes astros lhe ofereciam na curvatura de suas órbitas, nas suas formas, suas velocidades, os índices perceptíveis e simples das forças que os solicitavam. Portanto, ele pôde chegar diretamente, e sem hipóteses, à lei geral destas forças, a partir das quais ele e seus sucessores deduziram, pelo cálculo, todos os fenômenos do sistema do mundo.

um aparelho apropriado para medir a ação mútua entre dois condutores, um fixo e um móvel, pelo número de oscilações [realizadas por] este último, e variando a forma do condutor fixo. Descreverei este aparelho na seqüência desta Memória.

É verdade que não se encontram os mesmos obstáculos quando se mede da mesma maneira a ação de um fio condutor sobre um ímã. Mas este meio não pode ser empregado quando se trata da determinação das forças que dois condutores voltaicos exercem um sobre o outro, determinação que deve ser o primeiro objeto de nossas pesquisas no estudo de novos fenômenos. É evidente, com efeito, que se a ação de um fio condutor sobre um ímã fosse devida a uma outra causa diferente da que ocorre entre dois condutores, as experiências feitas sobre a primeira [ação] não poderiam ensinar nada em relação à segunda [ação]. E [também é evidente] que se os ímãs devem suas propriedades somente às correntes elétricas ao redor de cada uma de suas partículas, para poder se obter

[Páginas 12 e 184]

as conseqüências corretas relativas à ação que o fio condutor exerce sobre as correntes [do ímã], seria necessário que se soubesse de antemão se elas possuem a mesma intensidade perto da superfície do ímã e no seu interior, ou [então] utilizando a lei segundo a qual varia esta intensidade. [Também seria necessário que se soubesse de antemão] se os planos destas correntes estão sempre perpendiculares ao eixo da barra imantada, como supus de início, ou se a ação mútua das correntes de um mesmo ímã lhes fornece uma posição um pouco mais inclinada [com relação] a este eixo quando eles [os planos] estão a uma distância maior e quando eles se afastem mais de seu centro, como concluí desde que observei a diferença entre a posição dos pólos de um ímã e as posições dos pontos que ligam as mesmas propriedades [ou seja, os pontos análogos aos pólos]

em um fio condutor curvado de forma helicoidal.^{25,26}

[Páginas 13 e 185]

²⁵[N. A.] Acredito ter o dever de acrescentar aqui a seguinte nota, que foi extraída da análise dos trabalhos da Academia durante o ano de 1821, publicada em 8 de abril de 1822. (Veja a parte matemática desta análise, págs. 22 e 23.)

“A Principal diferença entre a maneira de agir de um ímã e a de um condutor voltaico no qual uma parte está curvada de forma helicoidal ao redor da outra parte [retilínea], consiste em que os pólos do primeiro [isto é, do ímã] estão situados mais próximos do centro do ímã do que de suas extremidades, enquanto que os pontos que apresentam as mesmas propriedades na hélice estão colocados exatamente nas extremidades desta hélice. Isto é o que deve acontecer quando a intensidade das correntes do ímã diminui do centro para as suas extremidades. Mas o Sr. Ampère reconheceu depois uma outra causa que também pode determinar este efeito. Após ter concluído de suas novas experiências que as correntes elétricas de um ímã existem ao redor de cada uma de suas partículas, lhe foi fácil ver que não é necessário supor, como fez de início, que os planos das correntes [do ímã] estão sempre perpendiculares ao eixo do ímã; [já que] suas ações mútuas devem tender a dar a estes planos uma posição inclinada [em relação] ao eixo, sobretudo perto de suas extremidades, de modo que os pólos, ao invés de estarem exatamente ali situados [nas extremidades do ímã] — como deveriam estar, segundo os cálculos deduzidos das fórmulas dadas pelo Sr. Ampère, quando se supõem todas as correntes de mesma intensidade e em planos perpendiculares ao eixo — devem se aproximar do centro do ímã de uma parte de seu comprimento tanto maior quanto os planos de um maior número de correntes estiverem assim inclinados, e que eles estejam assim [inclinados] em maior quantidade, quer dizer, tanto mais [inclinados em relação ao eixo] quanto mais espesso for o ímã relativamente ao seu comprimento — o que está de acordo com a experiência. Nos fios condutores curvados na forma helicoidal — e nos quais uma parte volta pelo eixo para destruir o efeito da parte das correntes de cada espira que age como se elas estivessem paralelas a este eixo — as duas circunstâncias que, conforme acabamos de dizer, não ocorrem necessariamente nos ímãs, existem ao contrário necessariamente nestes fios. Também se observa que as hélices possuem pólos semelhantes aos [pólos] do ímã, mas dispostos exatamente nas suas extremidades como fornece o cálculo.”

Vê-se por esta nota que, desde o ano de 1821, concluí a partir dos fenômenos que apresentam os ímãs:

1. Que ao se considerar cada partícula de uma barra imantada como um ímã, os eixos destes ímãs elementares devem estar, não paralelos ao eixo do ímã total como então se supunha, mas situados em direções inclinadas em relação a este eixo e em direções determinadas pela ação mútua;
2. Que esta disposição é uma das causas pelas quais os pólos do ímã total não estão situados nas extremidades, mas entre as extremidades e o centro do ímã.

Estas duas afirmações se encontram hoje em dia completamente demonstradas pelos resultados que o Sr. Poisson deduziu das fórmulas pelas quais ele representou a distribuição, nos ímãs, das forças que emanam de cada uma de suas partículas. Estas fórmulas estão baseadas na lei de Coulomb [expressando a força entre pólos magnéticos] e, conseqüentemente, não há nada a modificá-las quando se adota a maneira com a qual expliquei os fenômenos magnéticos, já que esta lei [de Coulomb para a força entre os pólos magnéticos] é uma conseqüência de minha fórmula, como se verá a seguir nesta Memória.

²⁶[N. T.] Referência original do trabalho de Ampère do qual retirou esta citação: [Amp22a, pág. 45]. Os trabalhos de S. D. Poisson (1781-1840) a que Ampère está se referindo são [Poi22a] e [Poi22b].

14.2 Descrição das Experiências pelas Quais se Constatam Quatro Casos de Equilíbrio que Fornecem a Quantidade de Leis de Ação à qual são Devidos os Fenômenos Eletrodinâmicos

Os diversos casos de equilíbrio que constatei por experiências precisas, fornecem imediatamente a quantidade de leis que conduzem diretamente à expressão matemática da

[Páginas 14 e 186]

força que dois elementos de condutores voltaicos exercem um sobre o outro, dando a conhecer em primeiro lugar a forma desta expressão e determinando a seguir o valor das constantes — inicialmente desconhecidas — que ela contém [isto é, determinando as constantes que aparecem na expressão matemática da força], precisamente como as leis de Kepler demonstram de início que a força que retém os planetas em suas órbitas tende constantemente ao centro do Sol, em seguida que ela muda para um mesmo planeta à razão inversa do quadrado da sua distância até seu centro e, enfim, que o coeficiente constante que representa a intensidade [desta força] tem o mesmo valor para todos os planetas. São quatro casos de equilíbrio ao todo. O primeiro demonstra a igualdade dos valores absolutos da atração e da repulsão que são produzidos fazendo passar alternadamente, em dois sentidos opostos, a mesma corrente em um condutor fixo onde não se muda nem a posição nem a distância dos corpos sobre os quais age.²⁷ Esta igualdade resulta da simples observação que duas porções iguais de um mesmo fio condutor recoberto de seda para impedir o contato [elétrico entre as partes do fio que se tocam] — e sendo todas as duas [porções] retilíneas ou curvadas juntas de maneira a formar duas hélices uma ao redor da outra onde todas as partes são iguais — e que são percorridas por uma mesma corrente elétrica, uma [porção] em um sentido e outra [porção] em sentido contrário, não exercem nenhuma ação, seja em um condutor móvel, seja sobre um ímã. Pode-se também constatar [a igualdade das intensidades de atração e de repulsão] com a ajuda do condutor móvel que se vê na Figura 9 da primeira Gravura do volume XVIII dos *Annales de chimie et de physique*,²⁸ relativa à descrição de um de meus aparelhos eletrodinâmicos, e que é representado aqui (Figura 1). Para isto dispõe-se um pouco abaixo da parte inferior *dee'd'* deste condutor, e em uma direção qualquer, um [fio] condutor retilíneo

[Páginas 15 e 187]

horizontal [fixo] AB redobrado várias vezes, de maneira que o centro de seu comprimento e de sua espessura esteja ao longo da vertical que passa pelas pontas x e y , em torno das quais gira livremente o condutor móvel.

Vê-se então, que este condutor [móvel] permanece na posição onde é colocado. Isto prova que existe um equilíbrio entre as ações exercidas pelo condutor fixo sobre as duas porções iguais e opostas do circuito voltaico bcd e e $b'c'd'e'$, que diferem somente porque, em uma [porção], a corrente elétrica se aproxima do condutor fixo AB e, na outra [porção], se afasta [de AB],

²⁷[N. T.] Os casos de equilíbrio apresentados no *Théorie* não estão ordenados de acordo com a ordem histórica em que foram obtidos pela primeira vez por Ampère. O primeiro caso de equilíbrio do *Théorie* é o que denominamos de *caso de equilíbrio das correntes anti-paralelas*, discutido na Subseção 4.3.4.

²⁸[N. T.] Ver [Amp21b] e a nossa Figura 4.16 (a).

Fig. 1.

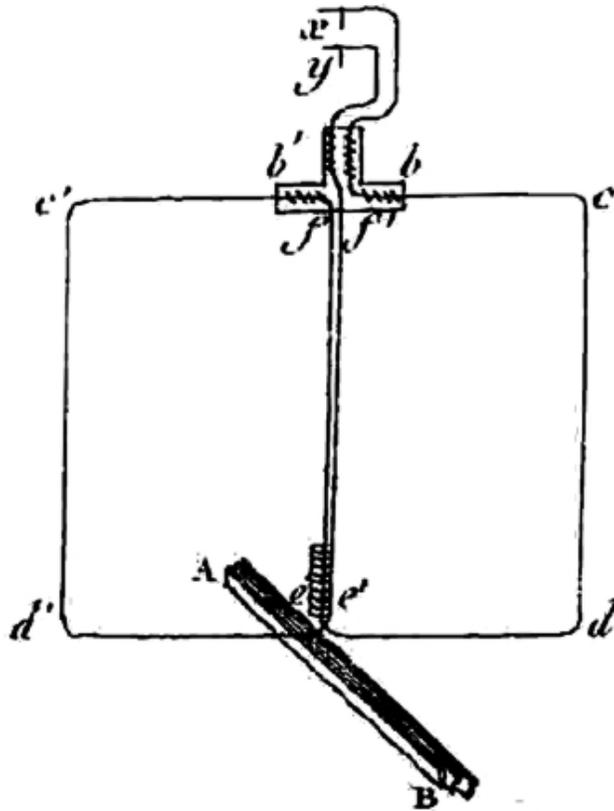


Figura 1.

qualquer que seja o ângulo formado pela direção deste último condutor com o plano do condutor móvel. Ora, se de início considera-se as duas ações exercidas entre cada uma destas porções do circuito voltaico e a metade do condutor AB da qual ela seja mais próxima e, em seguida, as duas ações entre cada uma destas [porções] e a metade do mesmo condutor [AB] que seja mais afastada, ver-se-á facilmente:

1. Que o equilíbrio do qual acabamos de falar só pode ocorrer para todos os valores deste ângulo quando houver, separadamente, equilíbrio entre as duas primeiras ações e as duas últimas.
2. Que se uma das duas primeiras [ações] é atrativa, pois os lados do ângulo agudo formado pelas porções dos condutores entre os quais ocorre a ação são percorridos pela corrente elétrica no mesmo sentido, a outra [ação] será repulsiva pois ela ocorrerá entre os dois lados do ângulo igual oposto pelo vértice, que são percorridos em sentido contrário pela mesma corrente.

De modo que se necessitará de início, para que exista equilíbrio entre elas, que estas duas primeiras ações que tendem a girar o condutor móvel, uma [ação] em um sentido e outra [ação] no sentido oposto, sejam iguais

entre si. E segue que as duas últimas ações, uma atrativa e outra repulsiva, que se exercem entre os lados dos dois ângulos obtusos opostos pelo vértice e suplementares²⁹ aos dois [ângulos] que acabamos de falar, sejam também iguais entre si. É inútil destacar que estas ações [isto é, estes torques] são realmente as somas dos produtos das forças que agem sobre cada porção infinitamente pequena do condutor móvel, multiplicadas por sua distância à vertical [em torno] da qual ele pode girar livremente. Mas como as distâncias a esta vertical das porções infinitamente pequenas correspondentes dos dois ramos $bcde$ e $b'c'd'e'$ são sempre iguais entre si, a igualdade dos torques torna necessário a [igualdade] das forças.

O segundo³⁰ dos três³¹ casos gerais de equilíbrio é aquele que observei no fim de 1820. Ele consiste na igualdade das ações exercidas sobre um condutor retilíneo móvel, por dois condutores fixos situados a distâncias iguais do primeiro, onde um é retilíneo e o outro dobrado e curvado de uma maneira arbitrária, quaisquer que sejam, além disso, as sinuosidades formadas por este último [condutor]. Eis aqui a descrição³² do aparelho com o qual verifiquei a igualdade das duas ações por experiências suscetíveis de uma grande precisão, cujos resultados comuniquéi à Academia na seção de 26 de dezembro de 1820.³³

As duas régua verticais de madeira, PQ e RS (Figura 2), possuem nas ranhuras feitas sobre as faces que se encaram um fio [condutor] retilíneo bc na primeira [régua] e, na segunda [régua], um fio [condutor] kl . [Este fio kl] forma — ao longo de todo o seu comprimento e em um plano perpendicular ao plano que liga os dois eixos das régua — contornos e dobras, tal como se vê na Figura ao longo da régua RS, de maneira

que este fio somente se afasta, em qualquer destes pontos, muito pouco do centro da ranhura.

Estes fios estão destinados a servir de condutores a duas porções de uma mesma corrente, que se faz agir por repulsão sobre a parte GH de um condutor móvel, composto de dois circuitos retangulares quase fechados e iguais, BCDE e FGHI, que são percorridos em sentidos contrários pela corrente elétrica, a fim de que as ações que a Terra exerce sobre estes dois circuitos se destruam mutuamente. Nas duas extremidades deste condutor móvel estão duas pontas A e K que mergulham nas taças M e N, cheias de mercúrio, e soldadas às extremidades dos dois ramos de cobre, gM e hN . Através dos encaixes de cobre g e h , estes ramos estão em comunicação, o primeiro [ramo] com um fio de cobre gfe curvado de forma helicoidal ao redor do tubo de vidro hgf , e o outro [ramo] com um fio retilíneo hi que passa por dentro do mesmo tubo, e acaba na

²⁹[N. T.] Dois ângulos suplementares são ângulos que, somados, dão 180° .

³⁰[N. T.] O que Ampère chama de segundo caso de equilíbrio no *Théorie* é o que denominamos de *caso de equilíbrio do fio sinuoso*, discutido na Subseção 4.3.3.

³¹[N. T.] Aqui deveria ser “quatro,” pois vão ser discutidos quatro casos gerais de equilíbrio no *Théorie*. Este erro de grafia se deve a que Ampère está reproduzindo aqui um trecho literal de seu trabalho de 1822 como reproduzido no *Recueil* de 1823, [Amp22p, págs. 302-303] e [Amp85i, págs. 276-277]. Neste artigo Ampère fala de apenas três casos de equilíbrio, a saber, o caso de equilíbrio das correntes anti-paralelas, o caso de equilíbrio do fio sinuoso, e o caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua, discutido na Subseção 6.3.2. No *Théorie* este terceiro caso de equilíbrio foi substituído pelo que denominamos de *caso de equilíbrio da não existência de força tangencial*, discutido na Seção 7.3. O quarto caso de equilíbrio do *Théorie*, a saber, o que denominamos de *caso de equilíbrio da lei da semelhança* só foi introduzido em 1825, ver a Seção 9.1.

³²[N. T.] Esta descrição que começa aqui e vai até nossa página 186 foi tomada emprestada textualmente de [Amp85i, págs. 251-256].

³³[N. T.] Ver [Amp20b], [Amp21a] e [Amp85i].

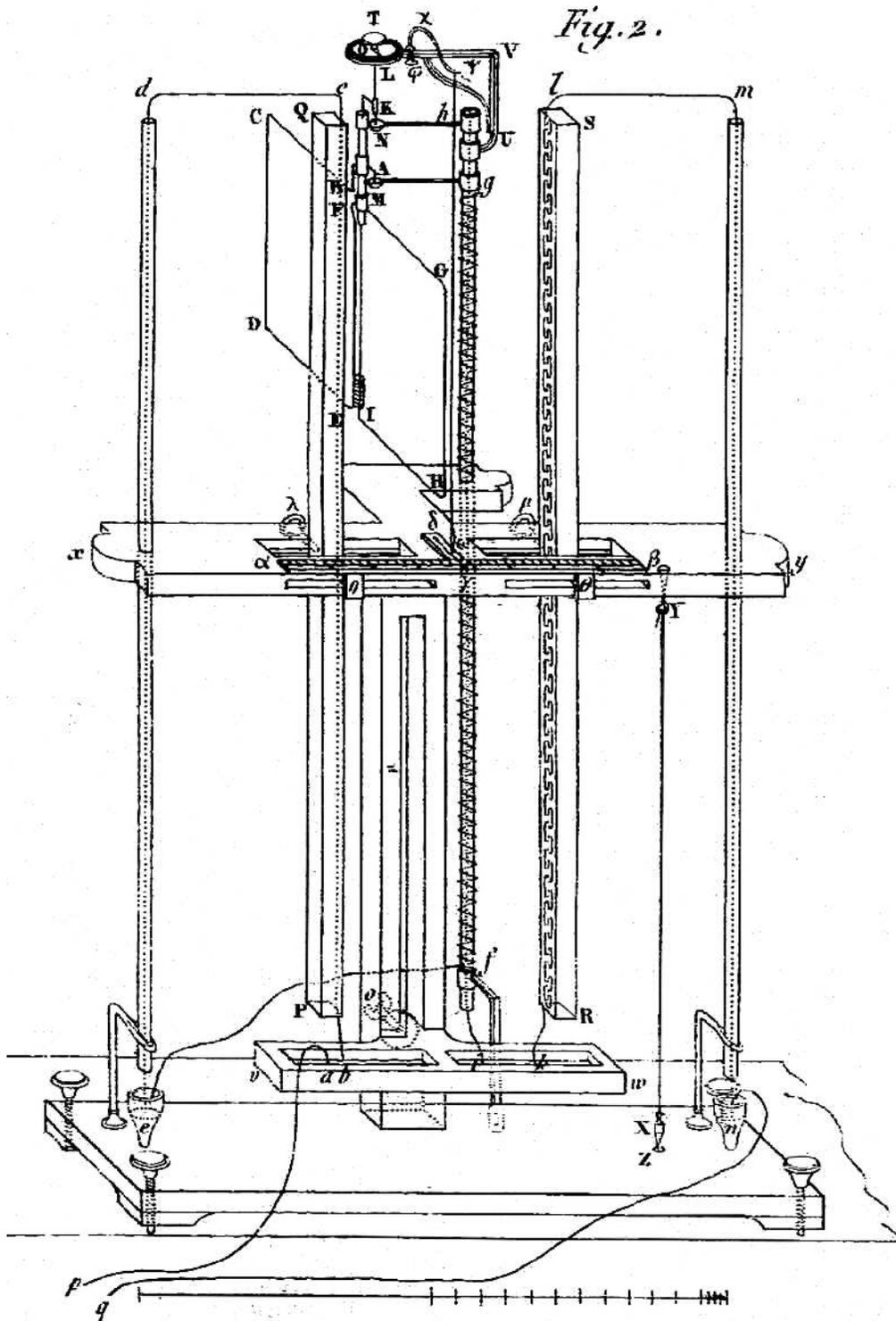


Figura 2.

tina *ki* — talhada em uma peça de madeira *vw* que é fixada na altura que se desejar em relação ao suporte *z* com o parafuso de precisão *o*. De acordo com a experiência que mencionei acima, esta porção do circuito composta pela hélice *gf* e pelo fio retilíneo *hi*, não pode exercer qualquer ação sobre o condutor móvel. Para que a corrente elétrica passe pelos condutores fixos *bc* e *kl*,

os fios que formam estes condutores se prolongam em cde e lmn , dentro de dois tubos de vidro³⁴ presos à travessa

[Páginas 18 e 190]

xy , e que terminam, o primeiro [tubo] na taça e , e o segundo [tubo] na taça n . Estando tudo assim disposto, coloca-se mercúrio em todas as taças e nas duas tinas ba e ki . Além disso, mergulha-se o reóforo³⁵ positivo pa na tina ba que também está talhada na peça de madeira vw , e o reóforo negativo qn na taça n . A corrente percorre todos os condutores do aparelho na seguinte ordem: $pabcdefgMABCDEFGHIKNhiklmnq$. Disto resulta que [a corrente] é ascendente nos dois condutores fixos, e descendente na parte GH do condutor móvel que está submetido à ação destes, e que se encontra no meio do intervalo entre os dois condutores fixos no plano que passa por seus eixos. Esta parte GH é então repelida por bc e kl . Daí segue que se a ação destes dois condutores é a mesma a distâncias iguais, GH deve parar no centro do espaço que os separa — o que com efeito acontece.

É bom frisar:

1. Mesmo que os dois eixos dos condutores fixos estejam a distâncias iguais de GH, não se pode dizer rigorosamente que a distância é a mesma para todos os pontos do condutor kl , devido às curvas e às dobras que este condutor forma. Mas como estas curvas e dobras estão em um plano perpendicular ao plano que passa por GH e pelos eixos dos condutores fixos, é evidente que a diferença da distância que resulta [destas curvas] é a menor possível, e tanto menor que a metade da largura da ranhura RS, que esta metade é menor que o espaço [entre] as duas régua, já que esta diferença, no caso onde ela é a maior possível, é igual à [diferença] que se encontra entre o raio e a secante de um arco cuja tangente é igual à metade da largura da ranhura,

[Páginas 19 e 191]

e que pertence a um círculo cujo diâmetro é a distância entre as duas régua.

2. Que caso cada porção infinitamente pequena do condutor kl seja decomposta — como se decomporia uma força em duas outras porções pequenas que seriam suas projeções — uma [projeção] sobre o eixo vertical deste condutor, a outra sobre as linhas horizontais orientadas por todos os seus pontos no plano onde se encontram as dobras e as curvas que ele [o condutor] forma, a soma das primeiras [projeções] — considerando como negativas aquelas que, tendo uma direção oposta à direção das outras, devem produzir uma ação em sentido contrário — será igual ao comprimento deste eixo. De modo que a ação total, resultante de todas estas projeções, será a mesma que a de um condutor retilíneo [de comprimento] igual ao eixo. Ou seja, [igual] à [ação] do condutor bc situado do outro lado à mesma distância de GH, enquanto que a ação das [demais projeções horizontais] será nula sobre o mesmo condutor móvel GH, dado que os planos levantados perpendicularmente sobre o

³⁴[N. A.] O uso destes tubos é para impedir a flexão dos fios envoltos [por estes tubos], mantendo-os a distâncias iguais dos dois condutores bc e kl , de modo que as suas ações sobre GH que diminuem as [ações] destes dois condutores, as diminuem de forma igual.

³⁵[N. T.] Reóforo: do grego *rhéos*, corrente, mais a palavra *phorós*, portador. Palavra introduzida por Ampère, [dIR22a] e [dIR22b, pág. 266]. Ou seja, cada um dos fios metálicos que se ligam aos eletrodos de uma pilha; fio condutor de uma corrente elétrica.

meio de cada uma delas passarão sensivelmente pela direção de GH. Logo, a reunião destas duas séries de projeções produz necessariamente sobre GH uma ação igual à [ação] de bc . E como a experiência prova que o condutor sinuoso kl também produz uma ação igual à de bc , qualquer que sejam as dobras e curvas que ele forme, segue que ele age, em todos os casos, como a reunião das duas séries de projeções. Isto não pode ocorrer, independentemente da maneira como [o condutor] é dobrado e curvado, a menos que cada uma das partes deste condutor não atue separadamente como a união de suas duas projeções.

Para que esta experiência tenha toda a precisão desejável, é necessário que as duas réguas estejam exatamente verticais, e que estejam precisamente à mesma distância do

[Páginas 20 e 192]

condutor móvel. Para cumprir estas condições, acopla-se uma divisão $\alpha\beta$ à travessa xy , e as réguas são fixas com duas braçadeiras η e θ , e dois parafusos de pressão λ e μ — o que permite que elas [as réguas] sejam afastadas ou aproximadas à vontade — mantendo-as sempre a uma distância igual do centro γ da divisão $\alpha\beta$. O aparelho é construído de maneira que as duas réguas sejam perpendiculares à travessa xy , e dispomos [esta travessa] horizontalmente com a ajuda dos parafusos que se encontram nos quatro cantos da base do instrumento, e do prumo de chumbo XY que corresponde exatamente ao ponto Z, marcado convenientemente sobre a base, quando a travessa xy está perfeitamente nivelada.

Para fazer o condutor ABCDEFGHIK móvel ao redor de uma linha vertical situada a uma distância igual dos dois condutores bc e kl , este condutor é suspenso por um fio metálico muito fino preso ao centro de um botão T, que pode girar ao redor de si sem mudar de distância a estes dois condutores. Este botão está no centro de um pequeno quadrante³⁶ O, sobre o qual o índice L serve para marcar o lugar onde será preciso parar para que a parte GH do condutor móvel corresponda, sem que o fio seja torcido, ao meio do intervalo entre os dois condutores fixos bc e kl , a fim de poder retornar com a agulha imediatamente na direção onde é necessário que ela esteja para isto, todas as vezes que se quiser repetir a experiência. Reconhece-se que GH está, com efeito, a uma distância igual de bc e de kl , por meio de um outro fio de prumo de chumbo $\psi\omega$ preso a um ramo de cobre $\varphi\chi\psi$ sustentado, como o quadrante O, pelo suporte UVO, no qual este ramo $\varphi\chi\psi$ pode girar ao redor do eixo do botão φ que o finaliza, o que facilita a correspondência da ponta do prumo ω sobre a linha $\gamma\delta$ no meio da divisão $\alpha\beta$. Quando o condutor está em uma posição conveniente,

[Páginas 21 e 193]

as três verticais $\psi\omega$, GH e CD se encontram no mesmo plano, e pode-se confirmar facilmente isto colocando o olho neste plano na frente de $\psi\omega$.

O condutor móvel se encontra assim disposto de antemão na situação em que deve existir equilíbrio entre as repulsões [que ele sofre] dos dois condutores fixos, se estas repulsões forem exatamente iguais. Produz-se então [estas repulsões] mergulhando no mercúrio da tina ba e da taça n os fios ap e nq , que se comunicam com as duas extremidades da pilha, e observa-se o condutor GH permanecer nesta posição apesar da grande mobilidade deste tipo de suspensão. Por outro lado, ao se deslocar o índice L, mesmo que seja por muito pouco, levando GH para

³⁶[N. T.] *Cadran* no original em francês. Neste caso trata-se de um círculo com divisões no qual existe um ponteiro marcando o ângulo.

uma posição na qual ele não está mais a distâncias iguais dos condutores bc e kl , no momento em que se estabelece o contato com as pilhas, observa-se [o condutor GH] mover-se, afastando-se do condutor ao qual se encontra mais próximo. Foi assim que constatei, na época em que fiz construir este instrumento, a igualdade das ações dos dois condutores fixos, por experiências repetidas diversas vezes com todas as precauções necessárias para que não pudesse existir nenhuma dúvida sobre o resultado.

Também se pode demonstrar a mesma lei por uma experiência bem simples. Para isso é suficiente ter um fio de cobre revestido de seda onde uma porção é retilínea e a outra é curvada sobre a primeira de maneira a formar sinuosidades quaisquer sem se separar desta [porção retilínea] que está isolada pela seda que as envolve. Constata-se então que uma outra porção do fio condutor não atua sobre o arranjo destas duas porções. E como [a terceira porção] seria igualmente [sem ação] sobre o arranjo de dois fios retilíneos percorridos em sentido contrário

[Páginas 22 e 194]

por uma mesma corrente elétrica — tendo em vista a experiência pela qual se constata da maneira mais simples o primeiro caso de equilíbrio — segue que a ação de uma corrente sinuosa é exatamente igual à [ação] de uma uma corrente retilínea compreendida entre as mesmas extremidades, já que estas duas ações criam um equilíbrio à ação de uma mesma corrente retilínea de mesmo comprimento que esta última, mas dirigida em sentido contrário.³⁷

O terceiro caso de equilíbrio³⁸ consiste em que um circuito fechado em uma forma qualquer, não poderia colocar em movimento uma porção qualquer de um fio condutor que forma um arco de círculo cujo centro encontra-se em um eixo fixo, ao redor do qual [o arco de círculo] pode girar livremente e que é perpendicular ao plano do círculo do qual faz parte este arco.³⁹

³⁷[N. T.] Vale à pena reproduzir aqui uma Nota escrita por Joubert quando da reimpressão do *Théorie* em 1887, [Amp87c, pág. 17]. Esta nota refere-se ao seguinte artigo de Bertrand: [Ber74]. Aqui vai a Nota na íntegra:

O Sr. J. Bertrand mostrou (*Journal de Physique* [1], Vol. III, p. 297; 1874) que o teorema das *correntes sinuosas*, considerado por Ampère como um dos quatro teoremas fundamentais dos quais ele se serve para estabelecer sua fórmula, é uma consequência da hipótese de que a ação entre dois elementos de corrente está direcionada ao longo da reta que os liga e do teorema fornecido pelo terceiro caso de equilíbrio, segundo o qual a ação de uma corrente fechada sobre um elemento de corrente é sempre normal ao elemento.

“Suponhamos, escreve o Sr. Bertrand [Ver [Ber74, pág. 301]], que Ampère tivesse verificado e enunciado inicialmente este último teorema e que, apenas pelo raciocínio, ele tivesse deduzido daí o teorema das correntes sinuosas, [então] ele poderia ter dito: Se a ação entre dois elementos é, como me parece provável, dirigida ao longo da reta que os une, segue-se necessariamente que um condutor sinuoso exerce a mesma ação que um condutor retilíneo ao longo da mesma direção. Em seguida, vindo a experiência confirmar esta previsão, ela não teria sido considerada, com razão, como uma prova muito forte em favor da hipótese que conduz a ela? A ordem na qual as verdades foram descobertas e a época na qual foi apontada a dependência mútua entre elas muda em qualquer aspecto suas probabilidades?”

³⁸[N. T.] No *Théorie* este terceiro caso de equilíbrio é o que denominamos de *caso de equilíbrio da não existência de força tangencial*, discutido na Seção 7.3.

³⁹[N. T.] Ver, em particular, [Amp25b]. Este artigo começa com as seguintes palavras:

A maneira pela qual determinei a relação dos dois coeficientes da fórmula pela qual representei a ação mútua entre dois elementos de correntes elétricas na Memória que li para a Academia em 10 de junho de 1822 [[Amp22i]], estando sujeita a uma certa dificuldade, procurei estabelecer esta relação de uma maneira mais simples e mais direta: Consegui obter [esta nova maneira] facilmente com a ajuda de um instrumento que vou descrever inicialmente; em seguida exporei alguns resultados

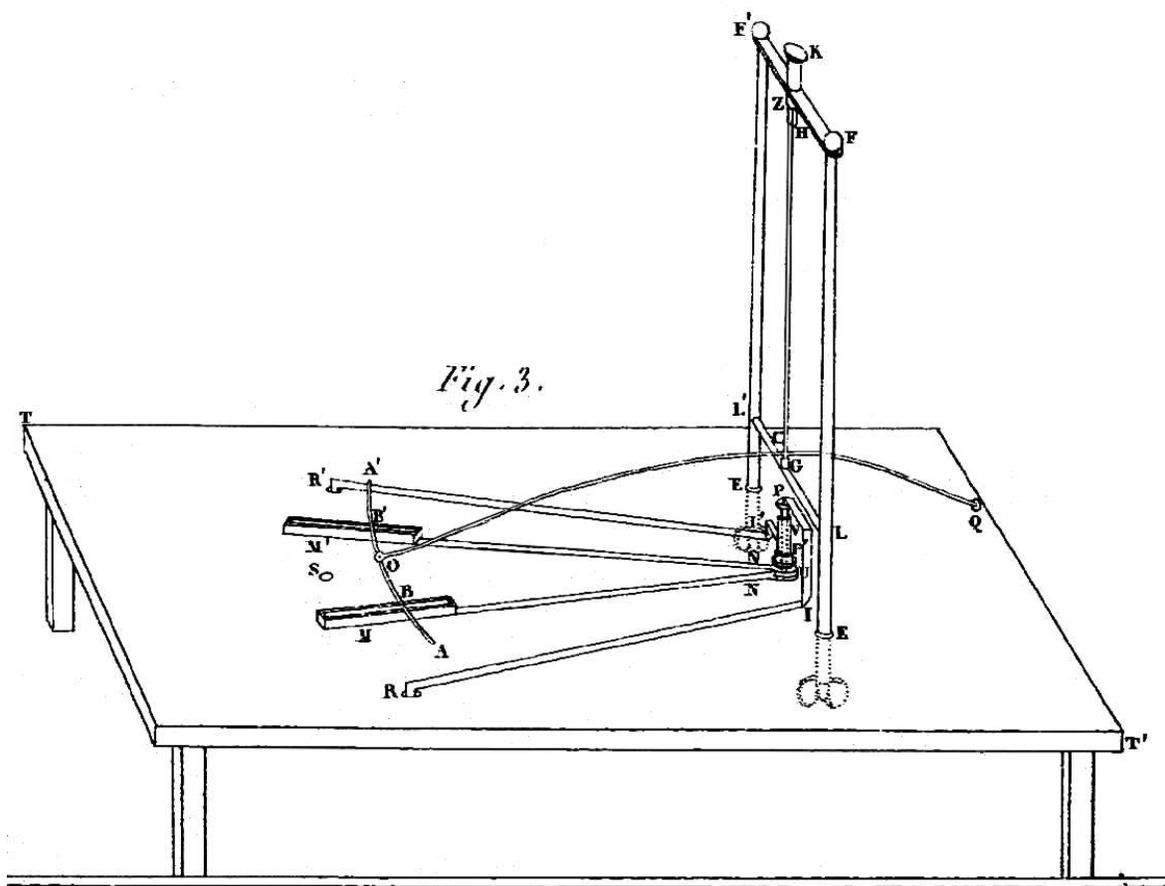


Figura 3.

Sobre uma base TT' (Figura 3),⁴⁰ em forma de mesa, elevam-se duas colunas EF e $E'F'$, unidas por duas travessas⁴¹ LL' e FF' . Um eixo GH é mantido entre estas duas travessas em uma posição vertical. Suas duas extremidades pontiagudas G e H , entram nos dois orifícios cônicos, um feito na travessa inferior LL' , o outro na extremidade de um parafuso KZ seguro pela travessa superior FF' , e feito para fixar o eixo GH sem forçá-lo. Em C é fixado sempre a este eixo um suporte QO cuja extremidade O apresenta uma junta na qual se encaixa por seu centro um arco de círculo AA' formado por um fio metálico que permanece constantemente em uma posição horizontal, e que tem por raio a distância entre o ponto O e o eixo GH . Este arco é equilibrado por um contra-peso Q , a fim de diminuir o atrito do eixo GH nos orifícios cônicos

novos que deduzi da mesma fórmula.

Ampère descreve então o instrumento que aparece na Figura 3 do *Théorie*, ver a página 187. Esta nova experiência, o caso de equilíbrio da não existência de forças tangenciais, também apresenta alguns problemas experimentais. Ela tem pouca sensibilidade devido aos vários atritos que dificultam a mobilidade do aparelho, atritos estes que surgem no eixo de rotação e principalmente entre o arco e o mercúrio das tinas. O movimento só começa a ocorrer quando o arco está com seu centro bem afastado do eixo de rotação vertical.

As condições experimentais deste aparelho foram bem melhoradas por Ettingshausen (1796-1878) ao sustentar a barra ou suporte QO da Figura 3, presa ao arco AA' , por uma suspensão bifilar, [Ett78] e [Gri79].

⁴⁰[N. T.] Na Figura original a letra E' da coluna da esquerda aparece apenas como E .

⁴¹[N. T.] No original está escrito travessas LL' e EF' . O correto, de acordo com a Figura original de Ampère, seria travessas LL' e FF' .

onde suas extremidades estão encaixadas.

[Páginas 23 e 195]

Abaixo do arco AA' estão dispostas duas tinas M e M' cheias de mercúrio, de tal forma que a superfície do mercúrio fica acima das beiradas, tocando o arco AA' em B e B' . Estas duas tinas estão em contato por dois condutores metálicos, MN e $M'N'$, com as taças P e P' , [também] cheias de mercúrio. A taça P e o condutor MN — que liga a taça com a tina M — estão fixados em um eixo vertical preso na mesa de maneira que possa girar livremente. A taça P' , que está conectada ao condutor $M'N'$, é atravessada pelo mesmo eixo, ao redor do qual ela também pode girar independentemente da outra [taça]. Ela está isolada [do eixo] por um tubo de vidro V que envolve este eixo, e por um anel de vidro U que a separa do condutor da tina M , de maneira que se possa dispor os condutores MN e $M'N'$ sob o ângulo que se queira.

Dois outros condutores IR e $I'R'$ presos à mesa mergulham, respectivamente, nas taças P e P' , e as comunicam com as cavidades R e R' talhadas na mesa e cheias de mercúrio. Enfim, uma terceira cavidade S igualmente cheia de mercúrio encontra-se entre as duas outras [cavidades].

Eis a maneira de usar este aparelho: Mergulha-se um dos reóforos, por exemplo, o reóforo positivo na cavidade R , e o reóforo negativo na cavidade S , que conecta-se com a cavidade R' por um condutor curvilíneo de uma forma qualquer. A corrente segue o condutor RI , passa pela taça P , daí para o condutor NM , para a tina M , para o condutor $M'N'$, para a taça P' , para o condutor $I'R'$ e, por fim, da cavidade R' para o condutor curvilíneo que se comunica com o mercúrio da cavidade S , onde o reóforo negativo está mergulhado.

[Páginas 24 e 196]

De acordo com esta disposição o circuito voltaico total está formado:

1. Pelo arco BB' e pelos condutores MN e $M'N'$;
2. Por um circuito que se compõe das partes do aparelho RIP e $P'I'R'$, por um condutor curvilíneo indo de R' para S , e pela própria pilha.

Este último circuito deve agir como um circuito fechado, já que é interrompido somente pela espessura do vidro que isola as duas taças P e P' . Logo, será suficiente observar sua ação sobre o arco BB' para constatar pela experiência a ação de um circuito fechado sobre um arco nas diferentes posições que se pode dar para um e para outro.

Quando se coloca, por meio da junta O , o arco AA' em uma posição tal que seu centro esteja fora do eixo GH , este arco entra em movimento e desliza sobre o mercúrio das tinas M e M' em virtude da ação da corrente curvilínea fechada que vai de R' para S . Se, ao contrário, seu centro está no eixo, ele permanece imóvel. Disto segue que as duas porções do circuito fechado que tendem a girar [o arco] em sentidos contrários ao redor do eixo exercem sobre este arco torques [opostos] de mesmo valor absoluto, qualquer que seja o tamanho da parte BB' determinada pela abertura do ângulo entre os condutores MN e $M'N'$. Portanto, se considerarmos sucessivamente dois arcos BB' que diferem pouco um do outro — como o torque é nulo para cada um deles — [o torque] será nulo para sua pequena diferença e, conseqüentemente, para todo elemento de circunferência cujo centro está no eixo. Disto segue que a direção da ação exercida pelo circuito fechado sobre o elemento [de corrente] passa pelo eixo [ou seja, é direcionada para o eixo GH], e que ela é necessariamente perpendicular a este elemento.

Quando o arco AA' está situado de maneira que seu centro esteja

[Páginas 25 e 197]

no eixo, as porções MN e $M'N'$ do condutor exercem sobre o arco BB' ações repulsivas iguais e opostas, de modo que não pode resultar nenhum efeito [da soma destas duas ações opostas]. E já que não há movimento, tem-se certeza de que não existe torque produzido pelo circuito fechado.

Quando o arco AA' se encontra na outra posição que havíamos suposto de início [ou seja, com seu centro fora do eixo GH], as ações dos condutores MN e $M'N'$ não são mais iguais. Poder-se-ia crer que o movimento se deve somente a esta diferença. Mas ao se aproximar ou afastar o circuito curvilíneo que vai de R' até S , o movimento [do arco] aumenta ou diminui, [fato] que não permite que se duvide que o circuito fechado influencia notavelmente no efeito observado.

Ocorrendo este resultado para qualquer que seja o comprimento do eixo AA' , [então] necessariamente isto ocorrerá para cada um dos elementos que compõem este arco. Disto tiraremos esta consequência geral, [a saber,] que a ação de um circuito fechado, ou de um conjunto qualquer de circuitos fechados, sobre um elemento infinitamente pequeno de corrente elétrica, é perpendicular a este elemento.

É com a ajuda de um quarto caso de equilíbrio,⁴² que me resta falar, que se pode finalizar de determinar os coeficientes constantes que entram em minha fórmula, sem recorrer — como tenho feito desde o início — às experiências onde um ímã e um fio condutor agem um sobre o outro.⁴³ Eis aqui o instrumento com ajuda do qual esta determinação [dos coeficientes] repousa unicamente sobre a observação do que ocorre quando se examina a ação mútua entre dois fios condutores.

Na mesa MN (Figura 4), talha-se uma cavidade A , cheia de mercúrio, de onde parte um condutor fixo $ABCDEFG$ formado de uma lâmina de cobre, a porção CDE é circular,

[Páginas 26 e 198]

e as partes CBA e EFG estão isoladas uma da outra pela seda que as cobre. Em G o condutor está soldado a um tubo de cobre GH , sobreposto por uma taça I , que se comunica com o tubo pelo suporte HI do mesmo metal. Da taça I parte um condutor móvel $IJKLMNPQRS$, cuja porção MNP é circular. Ele está envolto de seda nas partes MLK e PQR para que estejam isoladas [entre si], e ele é mantido na [posição] horizontal por meio de um contra-peso a fixado sobre uma circunferência de círculo que um prolongamento bcg da lâmina que compõe o condutor móvel forma ao redor do tubo GH . A taça S está sustentada por uma haste ST , que possui o mesmo eixo que GH , do qual está isolada por uma substância resinosa que se colocou dentro do tubo. A base da haste ST está soldada ao condutor fixo $TUVXYZA'$, que sai do tubo GH por uma abertura suficientemente grande para que a resina o isole tão completamente neste lugar da mesma forma que ela [a resina] o faz [isto é, isola da mesma forma] no restante do tubo GH , com respeito à haste ST . Fora do tubo este condutor [fixo] é revestido de seda para impedir que a porção TUV entre em contato com YZA' . Quanto à porção VXY , ela é circular, e a extremidade A' mergulha

⁴²[N. T.] No *Théorie* o quarto caso de equilíbrio é o que denominamos de *caso de equilíbrio da lei da semelhança* discutido na Seção 9.1.

⁴³[N. T.] As interações entre um ímã e um fio com corrente foram chamadas de *eletromagnéticas* por Ørsted. Ampère está afirmando aqui que vai obter todos os coeficientes de sua força entre elementos de corrente partindo apenas de interações entre condutores conduzindo correntes elétricas, interações que denominou de *eletrodinâmicas*. Ou seja, não vai precisar recorrer a experiências com ímãs ou que envolvam o magnetismo terrestre, trabalhando apenas com interações entre correntes.

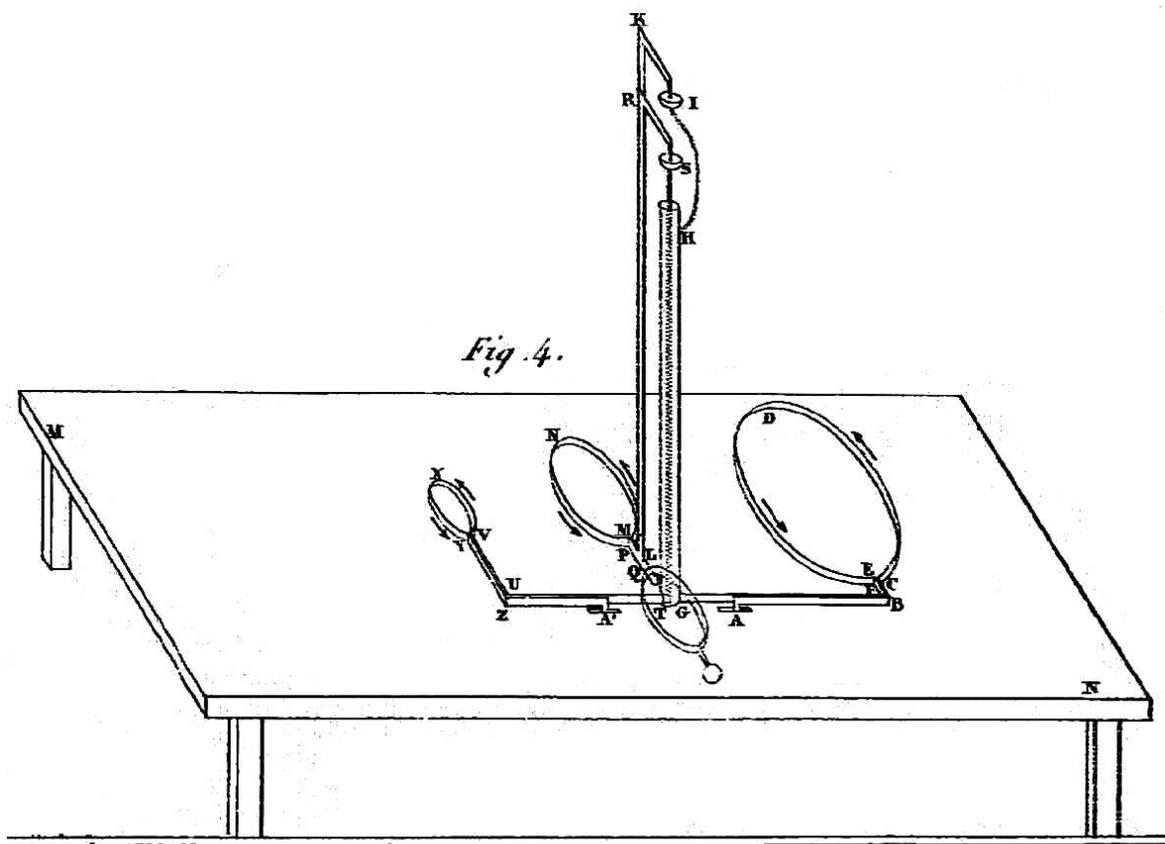


Figura 4.

em uma segunda cavidade A' talhada na mesa e cheia de mercúrio.

Os centros⁴⁴ O , O' e O'' das três porções circulares [horizontais] estão em linha reta. Os raios dos círculos que elas formam encontram-se em uma proporção geométrica contínua, e o condutor móvel é inicialmente colocado de maneira que as distâncias OO' e $O'O''$ estejam na mesma razão que os termos consecutivos desta proporção. De modo que os círculos O e O' formam um sistema semelhante ao [sistema] dos círculos O' e O'' . Mergulha-se então o reóforo positivo em A e o reóforo negativo em A' , a corrente percorre sucessivamente os três círculos cujos centros são O , O' e O'' , que se repelem dois a dois, pois

[Páginas 27 e 199]

a corrente vai em sentido oposto nas partes vizinhas.

O objetivo da experiência que se fez com este instrumento é de provar que o condutor móvel permanece em equilíbrio na posição onde a razão entre OO' e $O'O''$ é a mesma que [a razão] dos raios dos dois círculos consecutivos, e que ao se afastar [o condutor móvel] desta posição, ele retorna [para esta posição] oscilando ao redor dela.

⁴⁴[N. T.] Na Fig. 4 do *Théorie* publicado em 1826, reproduzida aqui, não aparecem estes centros. Eles aparecem na Fig. 4 do *Théorie* publicado em 1827, ver a Fig. 9.3. Neste caso o centro O'' pertence ao círculo da esquerda, O' ao círculo do centro, e O ao círculo da direita.

14.3 Pesquisa da Fórmula que Exprime a Ação Mútua entre Dois Elementos de Condutores Voltaicos

Agora vou explicar como se deduz rigorosamente destes casos de equilíbrio a fórmula pela qual representei a ação mútua entre dois elementos de corrente voltaica, mostrando que esta é a única força que age seguindo a linha reta que une os centros [destes elementos] que pode concordar com os dados empíricos. Inicialmente é evidente que a ação mútua entre dois elementos de corrente elétrica é proporcional aos seus comprimentos. Pois, ao supor [os elementos de corrente] divididos em partes infinitamente pequenas iguais à sua medida comum, todas as atrações e repulsões destas partes, podendo ser consideradas como direcionadas ao longo de uma mesma linha reta, necessariamente se somam. Esta mesma ação também deve ser proporcional às intensidades das duas correntes. Para exprimir numericamente a intensidade de uma corrente qualquer, suponha que se escolheu uma outra corrente arbitrária para termo de comparação, que se tomou dois elementos [de comprimentos] iguais em cada uma destas correntes, que se procurou a razão das ações que [estes elementos] exercem à mesma distância sobre um mesmo elemento de uma outra corrente qualquer, na situação em que ele [o terceiro elemento] é paralelo a eles [isto é, paralelo aos dois primeiros elementos], e [na situação] em que sua direção [do terceiro elemento] é perpendicular às linhas retas que unem seu centro com os centros dos outros dois elementos. Esta razão será a medida de uma das intensidades [de corrente], considerando a outra como unidade [isto é, considerando a outra corrente como tendo intensidade igual a um].

Designando então por i e i' as razões das intensidades das duas correntes dadas em relação à intensidade da corrente assumida como

[Páginas 28 e 200]

unidade, e por ds e ds' os comprimentos dos elementos que se considera em cada um destes [elementos de corrente]. A ação mútua entre eles — quando estiverem perpendiculares à linha que une seus centros, paralelos entre si e situados a uma distância unitária um do outro — será expressa por $ii'dsds'$. Tomaremos [esta expressão] com o sinal + quando as duas correntes, indo no mesmo sentido, se atraem, e com o sinal – no caso contrário.

Caso se quisesse relacionar a ação destes dois elementos de corrente com o peso, se consideraria como unidade de força o peso da unidade de volume de uma matéria conveniente. Mas neste caso a corrente assumida como unidade não seria mais arbitrária. Ela deveria ser tal que a atração entre dois de seus elementos ds e ds' , situados como acabamos de dizer, pudesse sustentar um peso que estivesse para a unidade de peso assim como $dsds'$ está para 1. Uma vez determinada esta corrente, o produto $ii'dsds'$ designaria a razão da atração de dois elementos de intensidades quaisquer, sempre na mesma posição, pelo peso que tivesse sido escolhido como unidade de força.

Posto isto,⁴⁵ ao considerar-se dois elementos dispostos de uma maneira qualquer, sua ação mútua dependerá de seus comprimentos, das intensidades das correntes das quais eles fazem parte, e de suas posições respectivas. Pode-se determinar esta posição por meio do comprimento r da linha reta que une seus centros, [por meio] dos ângulos θ e θ' que as direções dos dois elementos consideradas no sentido de suas correntes respectivas fazem com um mesmo prolongamento desta reta e, enfim, [por meio] do ângulo ω que fazem entre si os planos que passam por cada uma destas direções [dos dois elementos considerados no sentido de suas correntes] e pela linha reta

⁴⁵[N. T.] Ver [Amp20d], [Amp20e] e [Amp85f] (4 de dezembro de 1820), assim como [Amp22k] e [Amp85d] (8 de abril de 1822).

que une os centros dos elementos.

A consideração das diversas atrações ou repulsões observadas na natureza me levou a crer que a força cuja expressão procurava, agiria em razão inversa

[Páginas 29 e 201]

da distância. Considerei-a, por uma maior generalidade, como a razão inversa da n -ésima potência desta distância, sendo n uma constante a determinar.⁴⁶ Agora, representando por ρ a função desconhecida dos ângulos θ , θ' e ω , obtenho a expressão geral da ação [isto é, da força] entre dois elementos [com comprimentos infinitesimais] ds e ds' de duas correntes [elétricas] que possuem intensidades i e i' , como sendo dada por $\rho ii' ds ds' / r^n$. Me faltava determinar a função ρ . Para isso considerei inicialmente dois elementos ad e $a'd'$ (Figura 5) paralelos entre si, perpendiculares à linha reta que une seus centros, e situados a uma distância r qualquer um do outro.

Estando a ação entre eles expressa de acordo com a descrição precedente por $ii' ds ds' / r^n$, supus [então] que ad permanecesse fixo e que $a'd'$ fosse deslocado paralelo a si mesmo, de maneira que seu centro estivesse sempre à mesma distância do centro de ad . [Deste modo] ω permaneceu sempre nulo e a ação mútua [entre os dois elementos de corrente] somente podia depender dos ângulos designados acima por θ e θ' , que neste caso são iguais ou suplementares um ao outro, de acordo com que as correntes estejam dirigidas no mesmo sentido ou em sentidos opostos. Assim, encontrei para este valor $ii' ds ds' \varphi(\theta, \theta') / r^n$. Chamando de k à constante positiva ou negativa na qual se reduz [o valor de] $\varphi(\theta, \theta')$ quando o elemento $a'd'$ está na [posição] $a''d''$ [que se encontra ao longo] do prolongamento de ad , e [com a corrente do elemento $a''d''$] direcionado no mesmo sentido [que a corrente de ad], obtive $kii' ds ds' / r^n$ para a expressão da ação de ad sobre $a''d''$. Nesta expressão a constante k representa a razão [entre] a ação de ad sobre $a''d''$ ⁴⁷ e [a ação] de ad sobre $a'd'$. Esta razão é independente da distância r [entre os dois elementos], das intensidades [de corrente] i e i' , e dos comprimentos ds e ds' dos dois elementos considerados.

Estes valores da ação eletrodinâmica, nos dois

[Páginas 30 e 202]

casos mais simples, [são] suficientes para encontrar a forma geral da função ρ , partindo da

⁴⁶[N. T.] Nota acrescentada por Joubert quando da reimpressão do *Théorie* em 1887, [Amp87c, pág. 24], referindo-se ao seguinte trabalho de Verdet, [Ver72, p. 144]:

“Com todo rigor, nada prova

1. Que a função da distância seja da forma $1/r^n$.
2. Que esta forma seja a mesma quando o elemento ocupa a posição $a''d''$ e a posição ad (Figura 5), e que, conseqüentemente, exista uma razão k constante, independente da distância entre as ações exercidas nos dois casos.

Na Nota 1 que acompanha a presente Memória [ver as Seções 15.1 e 16.1], Ampère apresenta um método mais geral no qual não se supõe mais, *a priori*, que a ação varie em razão inversa de uma potência da distância. Encontra-se nas Obras de Verdet (*Conférences à l'École Normale*, Vol. I, p. 144) uma demonstração ainda mais geral, devida a Blanchet, e na qual se consideram duas funções diferentes para representar a ação entre dois elementos de corrente nas posições ad e $a''d''$.”

⁴⁷[N. T.] No original está escrito ad'' o que é um erro tipográfico, pois se está falando da ação entre os dois elementos de corrente ad e $a''d''$.

Fig. 5.

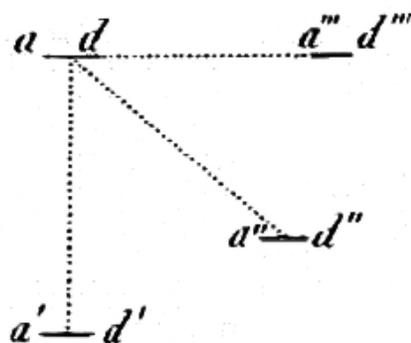


Figura 5.

experiência que mostra que a atração de um elemento [de corrente] retilíneo infinitamente pequeno é a mesma [atração] que aquela de um outro elemento sinuoso qualquer — terminado nas duas extremidades do primeiro — e [partindo] deste teorema que vou estabelecer, a saber: Que uma porção infinitamente pequena de corrente elétrica não exerce qualquer ação sobre uma outra porção infinitamente pequena de uma corrente situada em um plano que passa pelo seu centro e que é perpendicular à sua direção. Com efeito, as duas metades do primeiro elemento produzem sobre o segundo ações iguais, uma atrativa e outra repulsiva, porque em uma destas metades a corrente vai se aproximando e na outra se afastando da perpendicular comum. Ora, estas duas forças iguais fazem um ângulo [entre si] que tende para [o valor de] dois ângulos retos na medida em que o [comprimento do] elemento tende para zero. A resultante [destas duas forças] é então infinitamente pequena em relação a estas forças e, conseqüentemente, é desprezada no cálculo. Posto isto, sejam $Mm = ds$ e $M'm' = ds'$ (Figura 6)⁴⁸ dois elementos de corrente elétrica cujos centros estejam nos pontos A e A' . Façamos passar o plano $MA'm$ pela linha reta AA' que os une e pelo elemento Mm . Substituamos a porção de corrente ds que percorre este elemento por sua projeção $Nn = ds \cos \theta$ sobre a reta AA' , e sua projeção $Pp = ds \sin \theta$ sobre a perpendicular a esta reta [AA'] traçada em A [e contida] no plano $MA'm$.

Em seguida façamos a substituição da porção de corrente ds' que percorre $M'm'$ por sua projeção⁴⁹ $N'n' = ds' \cos \theta'$ sobre a linha reta AA' , e [por] sua projeção $P'p' = ds' \sin \theta'$ sobre a perpendicular à [reta] AA' traçada pelo ponto A' sobre AA' [e contida] no plano $M'Am'$. Enfim, façamos a substituição desta última [projeção $ds' \sin \theta'$] por sua projeção $T't' = ds' \sin \theta' \cos \omega$

⁴⁸[N. T.] Por um erro tipográfico aparece aqui no original $Mm = ds$ e $M'm = ds'$ em vez de $Mm = ds$ e $M'm' = ds'$. No parágrafo seguinte já aparece a expressão correta $M'm' = ds'$. No *Théorie* publicado em 1827 aparece A' no centro de $M'm'$. Incluímos este A' em nossa reprodução desta Figura feita com um software gráfico, ver a Fig. A.6.

⁴⁹[N. T.] No original está escrito $N'n' = ds' \cos \theta$. Isto é um erro tipográfico, pois se está falando do ângulo θ' formado entre ds' e a reta AA' , que não é necessariamente igual a θ .

Fig.6.

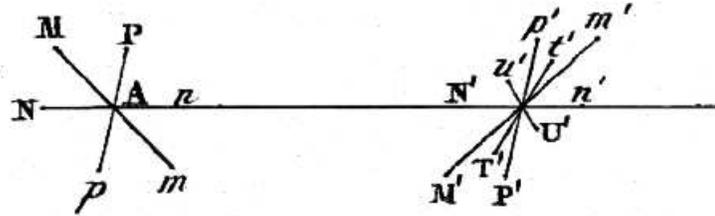


Figura 6.

sobre o plano

[Páginas 31 e 203]

MA'm e por sua projeção $U'u' = ds' \text{sen } \theta' \text{sen } \omega$ sobre a perpendicular a este plano traçada pelo ponto A'. De acordo com a lei estabelecida acima, a ação dos dois elementos ds e ds' será a mesma que a produzida pelo conjunto das duas porções de corrente $ds \cos \theta$ e $ds \text{sen } \theta$ [atuando] sobre o conjunto das três porções $ds' \cos \theta'$, $ds' \text{sen } \theta' \cos \omega$ e $ds' \text{sen } \theta' \text{sen } \omega$. Como esta última [projeção] possui seu centro no plano MAm ao qual é perpendicular, não existirá qualquer ação entre ela e as duas porções $ds \cos \theta$ e $ds \text{sen } \theta$ que estão sobre este plano. Pela mesma razão, também não poderá existir qualquer ação entre as porções $ds \cos \theta$ e $ds' \text{sen } \theta' \cos \omega$, e nem entre as porções $ds \text{sen } \theta$ e $ds' \cos \theta'$ pois, concebendo-se pela reta AA' um plano perpendicular ao plano MA'm, [então] $ds \cos \theta$ e $ds' \cos \theta'$ encontram-se neste plano, e [pelo motivo de] que as porções $ds' \text{sen } \theta' \cos \omega$ e $ds \text{sen } \theta$ lhe são perpendiculares e possuem seus centros neste mesmo plano. Então a ação dos dois elementos ds e ds' se reduz à junção das duas ações restantes, a saber: A ação mútua entre $ds \text{sen } \theta$ e $ds' \text{sen } \theta' \cos \omega$ e a [ação entre] $ds \cos \theta$ e $ds' \cos \theta'$. Como estas duas ações estão dirigidas ao longo da reta AA' que une os centros das porções de corrente entre as quais [a ação] se exerce, é suficiente somá-las para obter a ação mútua entre os dois elementos ds e ds' . Ora, as porções $ds \text{sen } \theta$ e $ds' \text{sen } \theta' \cos \omega$ estão em um mesmo plano, e ambas [são] perpendiculares à reta AA'. Deste modo, conforme vimos, a ação mútua entre elas é igual a

$$\frac{ii' ds ds' \text{sen } \theta \text{sen } \theta' \cos \omega}{r^n}$$

e a [ação] das duas porções $ds \cos \theta$ e $ds' \cos \theta'$ dirigidas ao longo

[Páginas 32 e 204]

da mesma linha reta AA' , vale

$$\frac{ii'kdsds' \cos \theta \cos \theta'}{r^n} .$$

Conseqüentemente, a ação mútua dos dois elementos ds e ds' é, necessariamente, expressa por

$$\frac{ii'dsds'}{r^n} (\sen \theta \sen \theta' \cos \omega + k \cos \theta \cos \theta') .$$

Simplifica-se esta fórmula introduzindo o [novo] ângulo ε entre os dois elementos no lugar de ω . Pois, ao considerar o triângulo esférico cujos lados sejam θ , θ' e ε , temos

$$\cos \varepsilon = \cos \theta \cos \theta' + \sen \theta \sen \theta' \cos \omega .$$

De onde vem que

$$\sen \theta \sen \theta' \cos \omega = \cos \varepsilon - \cos \theta \cos \theta' .$$

Substituindo [esta expressão] na fórmula anterior e fazendo $k - 1 = h$, ela fica na forma

$$\frac{ii'dsds'}{r^n} (\cos \varepsilon + h \cos \theta \cos \theta') .$$

E é importante destacar que ela muda de sinal quando apenas uma de suas correntes, por exemplo aquela do elemento ds , toma uma direção diametralmente oposta à que tinha, deste modo $\cos \theta$ e $\cos \varepsilon$ mudam de sinal, enquanto que $\cos \theta'$ continua o mesmo. Este valor da ação mútua entre dois elementos foi deduzido somente [a partir] da substituição de um elemento por suas projeções. Mas é fácil de assegurar que ela exprime que se pode substituir um elemento por um contorno poligonal qualquer, e em seguida um arco de curva

[Páginas 33 e 205]

qualquer limitado pelas mesmas extremidades, desde que todas as dimensões deste polígono ou desta curva sejam infinitamente pequenas.

Sejam, com efeito, ds_1, ds_2, \dots, ds_m os diferentes lados do polígono infinitesimal que substitui ds . A direção AA' poderá ser considerada sempre como a linha que une os respectivos centros destes lados com A' .

Sejam $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ os ângulos que [os lados] fazem com AA' e sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ os ângulos que [os lados] fazem com $M'm'$. Designando como usual por Σ uma somatória dos termos de mesma forma, a soma das ações dos lados ds_1, ds_2, \dots, ds_m sobre ds' será

$$\frac{ii'ds'}{r^n} (\Sigma ds_I \cos \varepsilon_I + h \cos \theta' \Sigma ds_I \cos \theta_I) .$$

Ora, $\Sigma ds_I \cos \varepsilon_I$ é a projeção do contorno poligonal sobre a direção de ds' e, conseqüentemente, é igual à projeção de ds sobre a mesma direção, ou seja, [é igual] a $ds \cos \varepsilon$. Da mesma forma $\Sigma ds_I \cos \theta_I$ é igual à projeção de ds sobre AA' , que é $ds \cos \theta$. A ação exercida sobre ds' pelo contorno poligonal limitado pelas extremidades de ds tem, então, como expressão

$$\frac{ii'ds'}{r^n} (ds \cos \varepsilon + hds \cos \theta \cos \theta') ,$$

e é a mesma [ação] que a exercida por ds sobre ds' .

Sendo esta conseqüência independente do número de lados ds_1, ds_2, \dots, ds_m , ela ocorrerá em um arco infinitamente pequeno de uma curva qualquer.

Provára-se igualmente que a ação de ds' sobre ds pode ser substituída pela [ação] que uma curva infinitamente pequena qualquer, cujas extremidades fossem as mesmas que [as extremidades]

[Páginas 34 e 206]

de ds' , exerceria sobre cada um dos elementos da pequena curva que já substituímos por ds e, conseqüentemente, sobre esta mesma pequena curva. Assim a fórmula que encontramos exprime que um elemento curvilíneo qualquer produz o mesmo efeito que a porção infinitamente pequena de corrente retilínea limitada pelos mesmos extremos, quaisquer que sejam os valores das constantes n e h . Portanto, a experiência pela qual constata-se este resultado não pode de forma alguma servir para obter estas constantes.

Teremos então de recorrer aos dois casos de equilíbrio que já comentamos. Mas, antes de tudo, transformaremos⁵⁰ a expressão precedente da ação entre dois elementos de corrente voltaica, introduzindo nela as diferenciais parciais da distância entre estes dois elementos.

Sejam x, y e z as coordenadas do primeiro ponto [a saber, do centro de ds], e x', y' e z' as do segundo. Segue que

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{x - x'}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y - y'}{r} \frac{dy}{ds} + \frac{z - z'}{r} \frac{dz}{ds}, \\ \cos \theta' &= \frac{x - x'}{r} \frac{dx'}{ds'} + \frac{y - y'}{r} \frac{dy'}{ds'} + \frac{z - z'}{r} \frac{dz'}{ds'}.\end{aligned}$$

Mas temos que

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

De onde, tomando sucessivamente os coeficientes das diferenciais parciais com relação a s e s' ,

$$\begin{aligned}r \frac{dr}{ds} &= (x - x') \frac{dx}{ds} + (y - y') \frac{dy}{ds} + (z - z') \frac{dz}{ds}, \\ r \frac{dr}{ds'} &= -(x - x') \frac{dx}{ds'} - (y - y') \frac{dy}{ds'} - (z - z') \frac{dz}{ds'}.\end{aligned}$$

[Páginas 35 e 207]

Assim,

$$\cos \theta = \frac{dr}{ds}, \quad \cos \theta' = -\frac{dr}{ds'}.$$

Para ter o valor de $\cos \varepsilon$, observaremos que

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \quad \text{e} \quad \frac{dx'}{ds'}, \frac{dy'}{ds'}, \frac{dz'}{ds'},$$

⁵⁰[N. T.] Esta transformação foi apresentada por Ampère pela primeira vez na Memória lida perante a Academia em 10 de junho de 1822, [Amp22i] e [Amp85i], ver a Seção 6.4.

são os co-senos dos ângulos que ds e ds' formam com os três eixos. Disto concluiremos que

$$\cos \varepsilon = \frac{dx dx'}{ds ds'} + \frac{dy dy'}{ds ds'} + \frac{dz dz'}{ds ds'} .$$

Ora, diferenciando em relação a s' a equação precedente que fornece $r \frac{dr}{ds}$, encontra-se

$$r \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} = - \frac{dx dx'}{ds ds'} - \frac{dy dy'}{ds ds'} - \frac{dz dz'}{ds ds'} = - \cos \varepsilon .$$

Caso sejam substituídos na fórmula que representa a ação mútua entre os dois elementos de corrente ds e ds' , no lugar de $\cos \theta$, $\cos \theta'$ e $\cos \varepsilon$, os valores que acabamos de obter — e substituindo $1 + h$ por seu valor equivalente k — esta fórmula ficará na forma

$$- \frac{ii' ds ds'}{r^n} \left(r \frac{d^2 r}{ds ds'} + k \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) ,$$

que pode ser posta na forma

$$- \frac{ii' ds ds'}{r^n} \frac{1}{r^{k-1}} \frac{d(r^k \frac{dr}{ds})}{ds'} ,$$

ou, enfim

$$ii' r^{1-n-k} \frac{d(r^k \frac{dr}{ds})}{ds'} ds ds' .$$

[Páginas 36 e 208]

Pode-se ainda lhe dar a seguinte forma:

$$- \frac{ii'}{1+k} r^{1-n-k} \frac{d^2(r^{1+k})}{ds ds'} ds ds' .$$

14.4 Relação Fornecida pelo Terceiro Caso de Equilíbrio entre as Duas Constantes Desconhecidas que Entram nesta Fórmula

Examinemos agora o que resulta do terceiro caso de equilíbrio que falamos, e que demonstra que a componente da ação de um circuito fechado qualquer sobre um elemento ao longo da direção deste elemento é sempre nula, qualquer que seja a forma do circuito.⁵¹ Designando por ds' o elemento em questão, a ação de um elemento ds do circuito fechado sobre ds' será, tendo em vista a [equação] precedente,

$$- ii' ds' \cdot r^{1-n-k} \frac{d(r^k \frac{dr}{ds'})}{ds} ds .$$

Ou, substituindo dr/ds' por $-\cos \theta'$,

$$ii' ds' \cdot r^{1-n-k} \frac{d(r^k \cos \theta')}{ds} ds .$$

⁵¹[N. T.] Este trecho foi tirado de [Amp25b, págs. 385-386].

A componente desta ação ao longo de ds' é obtida multiplicando esta expressão por $\cos \theta'$ e será dada por

$$ii' ds' \cdot r^{1-n-k} \cos \theta' \frac{d(r^k \cos \theta')}{ds} ds .$$

Esta diferencial integrada sobre toda a extensão do circuito s fornecerá a componente tangencial total e deverá ser nula, qualquer que seja a forma do circuito. Integrando por partes, após ter escrito assim,

$$ii' ds' \cdot r^{1-n-2k} r^k \cos \theta' \frac{d(r^k \cos \theta')}{ds} ds ,$$

teremos,

[Páginas 37 e 209]

$$\frac{1}{2} ii' ds' \left[r^{1-n} \cos^2 \theta' - (1 - n - 2k) \int r^{-n} \cos^2 \theta' dr \right] .$$

O primeiro termo $r^{1-n} r^k \cos^2 \theta'$ vai a zero nos limites. Quanto à integral $\int r^{-n} \cos^2 \theta' dr$, é muito fácil de conceber um circuito fechado para o qual ela não se reduz a zero. Com efeito, se imaginarmos superfícies esféricas muito próximas cortando este circuito e tendo como centro o meio do elemento ds' , os dois pontos onde cada uma das esferas cortar o circuito terão o mesmo valor para r e módulos iguais com sinais contrários para dr . Mas os valores de $\cos^2 \theta'$ poderão ser diferentes. E existirá uma infinidade de maneiras de fazer com que os quadrados de todos os co-senos relacionados aos pontos situados em um mesmo lado entre os pontos extremos do circuito sejam menores que os co-senos relativos aos pontos correspondentes do outro lado. Ora, neste caso a integral não irá para zero. E como a expressão acima deve ser nula, qualquer que seja a forma do circuito, é necessário então que o coeficiente $1 - n - 2k$ desta integral seja nulo, o que implica nesta primeira relação entre n e k , [a saber,] $1 - n - 2k = 0$.^{52,53}

⁵²[N. T.] Como vimos na Seção 6.5, no trabalho de 10 de junho de 1822, [Amp22i] e [Amp85i], Ampère havia deduzido esta mesma relação a partir do fato de que um circuito fechado de forma circular não exerce qualquer torque sobre um circuito de forma arbitrária que é móvel ao redor do eixo do círculo e que possui suas duas extremidades sobre este eixo. Ou seja, a partir do caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua discutido na Subseção 6.3.2. Já aqui no *Théorie* esta relação está sendo obtida a partir do caso de equilíbrio da não existência de força tangencial discutido na Seção 7.3. Além disso, o método apresentado no *Théorie* leva diretamente ao resultado $n = 2$ ao ser combinado com o caso de equilíbrio da lei da semelhança discutido na Seção 9.1.

⁵³Tricker apresenta a seguinte Nota neste ponto da tradução parcial do *Théorie* para o inglês, [Tri65, pág. 181]:

“A dedução da fórmula de Ampère está virtualmente completa neste ponto. O valor de n pode ser determinado muito simplesmente pelo método das dimensões, utilizando o resultado da quarta experiência [isto é, o caso de equilíbrio da lei da semelhança] que mostra que a força exercida por um circuito sobre outro circuito é independente das dimensões lineares dos circuitos. Na expressão

$$\frac{ii' ds ds'}{r^n} (\sin \theta \sin \theta' \cos \omega + k \cos \theta \cos \theta') ,$$

o numerador é de duas dimensões no comprimento [devido ao produto $ds ds'$]. Daí segue que o denominador também tem de possuir duas dimensões em comprimento e, assim, o valor do expoente n tem que ser igual a 2. Isto fornece então $k = -1/2$.

Aparentemente Ampère não descobriu esta linha de raciocínio até depois de ter escrito esta

Antes de procurar uma segunda equação para determinar estas duas constantes, começaremos por provar que k é negativo e que, conseqüentemente, $n = 1 - 2k$ é maior que 1. Teremos que recorrer para isso a um fato bem fácil de constatar pela experiência,⁵⁴ a saber, que um condutor retilíneo indefinido atrai um circuito fechado quando a corrente elétrica deste circuito na parte mais próxima do condutor está no mesmo sentido que a [corrente] do condutor, e que [o condutor] repele [o circuito] no caso contrário.

Seja UV (Figura 7) o condutor retilíneo indefinido. Suponhamos

[Páginas 38 e 210]

para uma maior simplicidade que o circuito fechado THKT'K'H' esteja no mesmo plano que o fio condutor UV. Procuramos a ação exercida por um elemento qualquer MM' deste condutor [retilíneo]. Para isso desenhamos os raios entre seu centro A e todos os pontos do circuito e procuramos a ação perpendicular à UV exercida por este elemento sobre o circuito.

A componente perpendicular à UV da ação exercida por MM' = ds' sobre um elemento KH = ds é obtida multiplicando a expressão desta ação por $\sin \theta'$. Observando que $1 - n - 2k = 0$ vem que ela será então dada por

Memória e ela é dada somente em uma nota no final [ver as Seções 15.1 e 16.1]. O método lhe ocorreu após considerar conclusões similares obtidas por Laplace a partir de algumas experiências de Biot.”

Talvez por este motivo a tradução parcial para o inglês do *Théorie* que aparece em Tricker continue depois desta nota a partir do que corresponderia à segunda metade da página 94 do *Théorie* publicado em 1826, [Amp26c], equivalente à página 266 do *Théorie* publicado em 1827. Ou seja, não são traduzidas para o inglês as páginas 38 a 94 da versão de 1826 (ou as páginas 210 a 266 da versão de 1827).

No entanto, não é correta esta conclusão de Tricker de que Ampère só teria descoberto esta linha de raciocínio depois de escrever o *Théorie* em 1826. Afinal de contas, já em 28 de novembro de 1825 Ampère leu para a Academia de Ciências uma Memória na qual apresentou o caso de equilíbrio da lei da semelhança discutido na Seção 9.1, ver [Amp87e]. Além disso, nesta Memória de 1825 ele já utilizou diretamente este argumento mencionado por Tricker e que será apresentado na primeira Nota ao final do *Théorie*, ver as Seções 15.1 e 16.1. Vejamos algumas palavras de Ampère escritas no final de 1825, [Amp87e, págs. 207-208], supondo uma força inversamente proporcional à distância r elevada à n -ésima potência:

De resto, deve-se notar que a maneira que acabo de indicar para determinar o valor de n poderia ser concluída disto, [a saber,] que a ação mútua entre dois elementos de corrente elétrica, sendo necessariamente proporcional ao produto dos comprimentos destes elementos, e representada por este produto multiplicada por uma função dos ângulos que lhes determinam a posição, e dividida pela n -ésima potência da distância entre eles, o número de dimensões dos valores das integrais duplas que exprimem as forças resultantes da ação mútua entre dois circuitos é, necessariamente, $2 - n$. Portanto, quando se supõe que todas as dimensões dos dois circuitos aumentam ou diminuem na mesma razão [rapport] sem que os ângulos sejam alterados, é necessário que a ação seja, como acabamos de ver de outra maneira, proporcional à potência $2 - n$ desta razão. [Logo,] se a ação mantiver-se a mesma, é então necessário que $n = 2$.

Ou seja, Ampère mostra que se a força resultante entre dois circuitos não se alterar quando todas as dimensões lineares forem alteradas na mesma proporção, segue como uma conseqüência necessária que a força entre os elementos deve ser inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

Acreditamos que tenha sido consciente a opção de Ampère de colocar este raciocínio apenas na Nota I ao final do *Théorie*, ver as Seções 15.1 e 16.1. Ou seja, acreditamos que esta tenha sido uma escolha metodológica de sua parte e não uma descoberta tardia como sugerido por Tricker.

⁵⁴[N. T.] Ampère está se referindo à experiência de maio de 1822 mostrando que $n > 1$. Ela foi discutida na Seção 7.4.

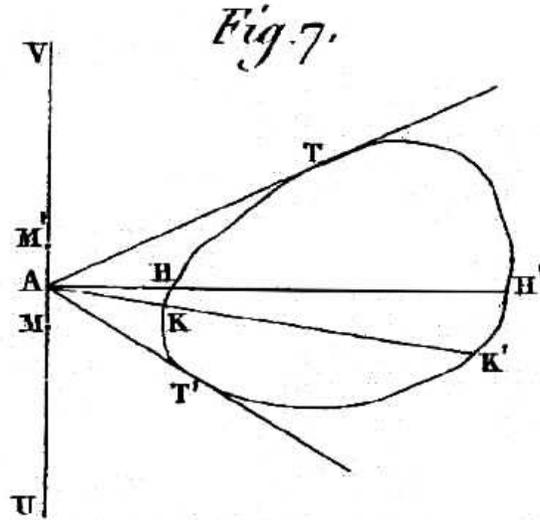


Figura 7.

$$ii' ds' \operatorname{sen} \theta' r^k \frac{d(r^k \cos \theta')}{ds} ds ,$$

ou

$$\frac{1}{2} ii' ds' \tan \theta' \frac{d(r^{2k} \cos^2 \theta')}{ds} ds ,$$

expressão que deve ser integrada por toda a extensão do circuito. A integração por partes dará:

$$\frac{1}{2} ii' ds' \left(r^{2k} \operatorname{sen} \theta' \cos \theta' - \int r^{2k} d\theta' \right) .$$

O primeiro termo vai a zero nos limites, restando somente:

$$-\frac{1}{2} ii' ds' \int r^{2k} d\theta' .$$

Considerando agora os dois elementos (do circuito) KH e K'H' compreendidos entre os dois mesmos raios consecutivos, $d\theta'$ é o mesmo para ambas as partes, porém deve ter o sinal contrário, de modo que fazendo $AH = r$ e $AH' = r'$, se terá para ação somada dos dois elementos:

$$-\frac{1}{2} ii' ds' \left[\int (r'^{2k} - r^{2k}) d\theta' \right] ,$$

[Páginas 39 e 211]

onde supomos que r' é maior que r . O termo desta integral que resulta da ação da parte THT' convexa com relação a UV dominará sobre o termo produzido pela ação da parte côncava TH'T' se k é negativo, ocorrerá o contrário se k é positivo e não existirá ação se k é nulo. Como as

mesmas conseqüências existirão para todos os elementos de UV, segue disto que a parte convexa em relação a UV terá mais influência sobre o movimento do circuito que a parte côncava se $k < 0$, igual se $k = 0$, e menos [influência] se $k > 0$. Ora, a experiência prova que ela tem mais [influência]. Tem-se então que $k < 0$, e disto segue que $n > 1$, pois $n = 1 - 2k$.

Deduz-se disto esta notável conseqüência, que as partes de uma mesma corrente retilínea se repelem. De fato, ao se fazer $\theta = 0$ e $\theta' = 0$, a fórmula que fornece a atração entre dois elementos torna-se $kii'dsds'/r^n$. E como ela é negativa, pois k é negativo, existe repulsão. É o que verifiquei pela experiência que vou descrever. Toma-se um recipiente de vidro PQ (Figura 8)⁵⁵ separado por uma barreira MN em dois compartimentos iguais e cheios de mercúrio. Passa-se um fio de cobre coberto de seda ABCDE, cujas seções AB e ED, dispostas paralelamente à barreira MN, flutuam sobre o mercúrio com o qual se comunicam as extremidades nuas A e E destas seções.

Fig. 8

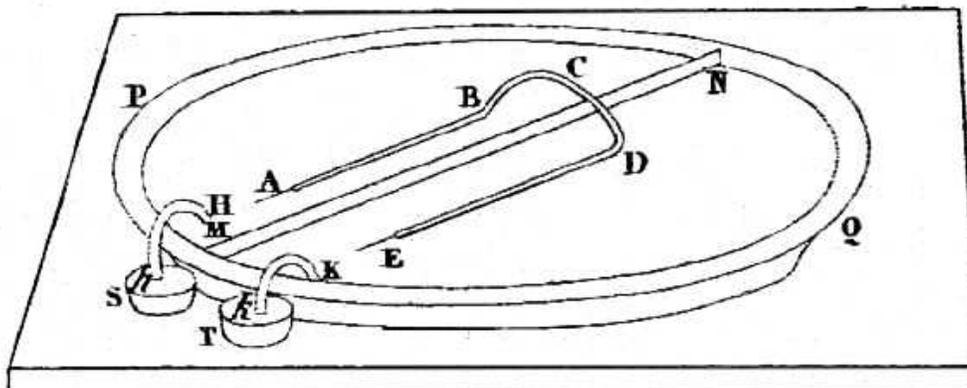


Figura 8.

Colocando os réóforos nas cápsulas S e T — cujo mercúrio [ali disposto] se comunica com o [mercúrio] do recipiente PQ através das porções do condutor hH e kK — se estabelecem duas correntes, onde cada uma tem por condutor uma parte de mercúrio e uma parte sólida. Qualquer que seja a direção da corrente, vê-se sempre os dois fios AB e ED caminhar paralelamente com relação à barreira MN, se distanciando dos pontos H e K, o que indica uma repulsão

[Páginas 40 e 212]

para cada fio entre a corrente estabelecida no mercúrio e seu prolongamento no próprio fio. Ao longo do sentido da corrente, o movimento do fio de cobre é mais ou menos fácil, porque, em um caso, a ação exercida pelo globo [terrestre] sobre a porção BCD deste fio, se junta com o efeito obtido, e no outro caso, ao contrário, ela diminui o efeito obtido e este é reduzido.

⁵⁵[N. T.] Esta experiência foi feita originalmente em Genebra entre o final de agosto e o início de setembro de 1822, ver a Seção 7.2.

14.5 Fórmulas Gerais que Representam a Ação de um Circuito Voltaico Fechado, ou de um Sistema de Circuitos Fechados, sobre um Elemento de Corrente Elétrica

Examinemos agora a ação que exerce uma corrente elétrica que forma um circuito fechado⁵⁶ — ou um sistema de correntes que também formam circuitos fechados — sobre um elemento de corrente elétrica.⁵⁷

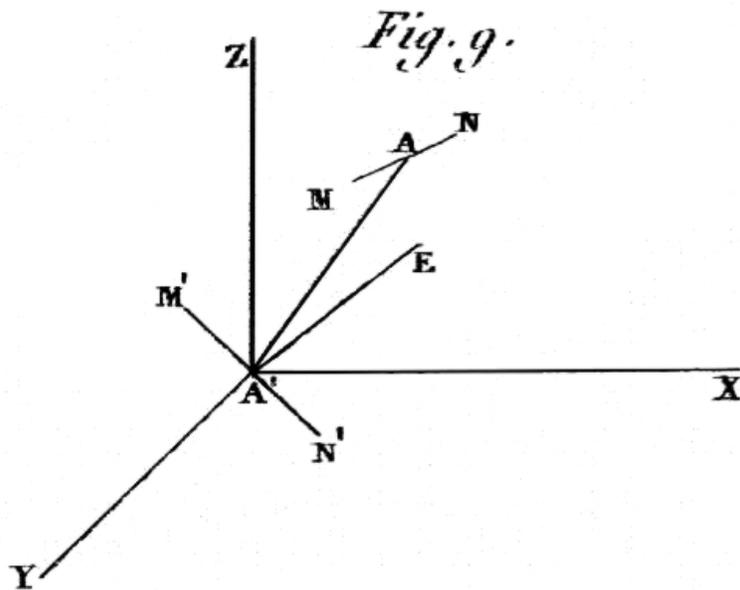


Figura 9.

Tomemos a origem do sistema de coordenadas no centro⁵⁸ A' (Figura 9)⁵⁹ do elemento proposto $M'N'$, e chamemos de λ , μ e ν , aos ângulos que ele faz com os três eixos. Seja MN um elemento qualquer de uma corrente que forma um circuito fechado, ou de uma das correntes que igualmente formam circuitos fechados nas quais se compõe o sistema de correntes considerado. Chamando de ds' e ds os elementos $M'N'$ e MN , de r à distancia AA' entre seus centros e de θ ao ângulo da corrente $M'N'$ com AA' , a fórmula que encontramos anteriormente para descrever

⁵⁶[N. T.] No original está escrito “formant un circuit formé” (que forma um circuito formado). Além da redundância, esta expressão não demonstra coerência com o restante do parágrafo. Se no lugar da palavra “formé” (formado, construído) se colocar a palavra “fermé” (fechado), a frase fica coerente com o parágrafo inteiro. Por isso privilegiamos a coerência e substituímos “formé” por “fechado”.

⁵⁷[N. T.] O trecho a seguir vem da Memória de Ampère de 22 de dezembro de 1823, [Amp24c], [Amp24d] e [Amp85e].

⁵⁸[N. T.] Tanto no *Théorie* publicado em 1826 quanto na versão de 1827 aparece no original que o centro de $M'N'$ é o ponto A , o que é um erro tipográfico. Apenas no *Théorie* de 1826 aparece uma errata informando que o correto é que o centro de $M'N'$ é o ponto A' .

⁵⁹[N. T.] Chamamos a atenção que Ampère sempre utilizou um sistema de coordenadas esquerdo ou levogiro no qual os eixos x e y estão invertidos em relação ao sistema de coordenadas direito ou dextrógiro usual.

a ação mútua entre dois elementos se tornará, substituindo nela⁶⁰ dr/ds' por $-\cos\theta'$:⁶¹

$$ii'ds'r^k \frac{d(r^k \cos\theta')}{ds} ds .$$

Os ângulos que AA' faz com os três eixos têm por co-senos x/r , y/r e z/r . Com isto obtém-se:

$$\cos\theta' = \frac{x}{r} \cos\lambda + \frac{y}{r} \cos\mu + \frac{z}{r} \cos\nu .$$

Substituindo este valor em $\cos\theta'$,⁶² e multiplicando por x/r , encontraremos para a expressão da componente [da força] ao longo de eixo x o seguinte valor:

[Páginas 41 e 213]

$$ii'ds'r^{k-1}xd(r^{k-1}x \cos\lambda + r^{k-1}y \cos\mu + r^{k-1}z \cos\nu) .$$

O símbolo d se refere somente, exceto no fator ds' , às diferenciais tomadas variando unicamente s . Esta expressão pode ser escrita assim⁶³

$$\begin{aligned} &= ii'ds' \left[\cos\lambda r^{k-1}xd(r^{k-1}x) + \frac{x \cos\mu}{y} r^{k-1}yd(r^{k-1}y) + \frac{x \cos\nu}{z} r^{k-1}zd(r^{k-1}z) \right] \\ &= \frac{1}{2}ii'ds' \left[\cos\lambda d(r^{2k-2}x^2) + \frac{x}{y} \cos\mu d(r^{2k-2}y^2) + \frac{x}{z} \cos\nu d(r^{2k-2}z^2) \right] \end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}ii'ds' \left(d \frac{x^2 \cos\lambda + xy \cos\mu + xz \cos\nu}{r^{n+1}} - \frac{y^2 \cos\mu}{r^{n+1}} d \frac{x}{y} - \frac{z^2 \cos\nu}{r^{n+1}} d \frac{x}{z} \right) \\ &= \frac{1}{2}ii'ds' \left(d \frac{x \cos\theta'}{r^n} + \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} \cos\mu - \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} \cos\nu \right) , \end{aligned}$$

substituindo $2k - 2$ pelo seu valor $-n - 1$.

Ao se representar por r_1, x_1, θ'_1 e por r_2, x_2, θ'_2 os valores de r, x e θ' , nas duas extremidades do arco s , e por X a resultante ao longo do eixo x de todas as forças exercidas pelos elementos deste arco sobre ds' , se terá:

$$X = \frac{1}{2}ii'ds' \left(\frac{x_2 \cos\theta'_2}{r_2^n} - \frac{x_1 \cos\theta'_1}{r_1^n} + \cos\mu \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} - \cos\nu \int \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} \right) .$$

⁶⁰[N. T.] No original está escrito dr/ds o que é um erro tipográfico, pois se está falando da corrente $M'N'$ que corresponde ao elemento ds' e de seu ângulo θ' com AA'.

⁶¹[N. T.] No original a parte da equação que está entre parênteses se apresenta na forma $(r^n \cos\theta')$. Isto é um erro tipográfico. Afinal de contas, o índice n não pode estar neste lugar, já que esta equação vem de

$$-ii'ds'r^{1-n-k} \frac{d(r^k \frac{dx}{ds'})}{ds} ds .$$

Substituindo n por $1 - 2k$ obtém-se a equação que colocamos no texto.

⁶²[N. T.] No original está escrito $\cos\theta$ o que é um erro tipográfico. Afinal de contas se está falando do elemento ds' que tem por ângulo θ' .

⁶³[N. T.] No original a última fração da terceira linha abaixo está escrita na forma $d \frac{x}{y}$ o que é um erro tipográfico pois se está reescrevendo uma parte do último termo da equação anterior que tem z como variável e não y .

Se este arco forma um circuito fechado, r_2 , x_2 e θ'_2 serão iguais a

[Páginas 42 e 214]

r_1 , x_1 e θ'_1 . Com isto o valor de X se reduzirá a:

$$X = \frac{1}{2}ii'ds' \left(\cos \mu \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} - \cos \nu \int \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} \right) .$$

E chamando por Y e Z às forças ao longo dos eixos y e z resultantes da ação dos mesmos elementos sobre ds' , se encontrará por um cálculo semelhante

$$Y = \frac{1}{2}ii'ds' \left(\cos \nu \int \frac{ydz - zdy}{r^{n+1}} - \cos \lambda \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} \right) ,$$

$$Z = \frac{1}{2}ii'ds' \left(\cos \lambda \int \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} - \cos \mu \int \frac{ydz - zdy}{r^{n+1}} \right) .$$

E fazendo

$$\int \frac{ydz - zdy}{r^{n+1}} = A, \quad \int \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} = B, \quad \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} = C ,$$

vem que

$$X = \frac{1}{2}ii'ds'(C \cos \mu - B \cos \nu) ,$$

$$Y = \frac{1}{2}ii'ds'(A \cos \nu - C \cos \lambda) ,$$

$$Z = \frac{1}{2}ii'ds'(B \cos \lambda - A \cos \mu) .$$

Multiplicando a primeira destas equações por A , a segunda por B e a terceira por C , encontra-se $AX + BY + CZ = 0$. E se concebemos [como passando] pela origem [A'] uma reta $A'E$ [ver a Figura 9] que faz com os eixos [ortogonais cartesianos] ângulos cujos co-senos sejam, respectivamente,⁶⁴

$$\frac{A}{D} = \cos \xi, \quad \frac{B}{D} = \cos \eta, \quad \frac{C}{D} = \cos \zeta ,$$

supondo, para abreviar⁶⁵

[Páginas 43 e 215]

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = D ,$$

ela [a reta $A'E$] será perpendicular à resultante R das três forças X , Y e Z , que fazem com os eixos [ortogonais cartesianos] ângulos cujos co-senos são

$$\frac{X}{R}, \quad \frac{Y}{R}, \quad \frac{Z}{R} ,$$

⁶⁴[N. T.] No original a primeira equação está escrita como " $\frac{A}{B} = \cos \xi$." Isto é um erro tipográfico, já que a hipotenusa aqui é o comprimento $D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

⁶⁵[N. T.] No original está escrito $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \overline{D}$, o que é um erro tipográfico.

pois tem-se, em virtude da equação precedente,⁶⁶

$$\frac{A X}{D R} + \frac{B Y}{D R} + \frac{C Z}{D R} = 0 .$$

Deve-se frisar que a reta [A'E] que acabamos de determinar é completamente independente da direção do elemento M'N'. Pois ela é deduzida imediatamente das integrais A, B e C, que dependem somente do circuito fechado e da posição dos planos coordenados, e que são as somas das projeções sobre os planos coordenados das áreas dos triângulos que possuem seu cume no centro de elemento ds' e [que possuem] como bases os diferentes elementos dos circuitos fechados s , sendo todas estas áreas divididas pela potência $n + 1$ do raio vetor r .⁶⁷ Estando a resultante perpendicular à reta A'E, que chamarei de diretriz, ela [isto é, a força resultante sobre ds'] se encontra, qualquer que seja a direção do elemento [ds'], no plano construído sobre o ponto A' e perpendicular à [reta] A'E. Darei o nome de plano diretor a este plano.⁶⁸ Ao se fazer a soma dos quadrados de X , Y e Z , se encontrará para o valor da ação resultante [sobre ds' exercida pelo] circuito único ou pelo conjunto de circuitos que se considera, [como sendo dada por:]

$$R = \frac{1}{2} Dii' ds' [(\cos \zeta \cos \mu - \cos \eta \cos \nu)^2 + (\cos \xi \cos \nu - \cos \zeta \cos \lambda)^2 + (\cos \eta \cos \lambda - \cos \xi \cos \mu)^2]^{1/2} .$$

Ou, chamando de ε o ângulo do elemento ds' com a diretriz,

$$R = \frac{1}{2} Dii' ds' \operatorname{sen} \varepsilon .$$

[Páginas 44 e 216]

É fácil de determinar a componente desta ação em um plano dado passando pelo elemento ds' e que faz um ângulo φ com o plano construído por ds' e pela diretriz. Com efeito, sendo a resultante R perpendicular a este último plano, sua componente sobre o plano dado será dada por

$$R \operatorname{sen} \varphi , \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} Dii' ds' \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \varphi .$$

Ora, $\operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \varphi$ é igual ao seno do ângulo ψ que a diretriz faz com o plano dado. Isto se deduz imediatamente do ângulo triedro formado por ds' , pela diretriz e pela sua projeção sobre a plano dado. A componente neste plano terá como expressão

$$\frac{1}{2} Dii' ds' \operatorname{sen} \psi .$$

Esta expressão pode ser posta de uma outra forma observando que ψ é o complemento do ângulo⁶⁹ entre a diretriz e a normal ao plano no qual se considera a ação. Tem-se então, chamando de ξ ,

⁶⁶[N. T.] No original a segunda fração do segundo termo está escrita na forma $\frac{Y}{X}$ o que é um erro tipográfico.

⁶⁷[N. T.] Este é um resultado extremamente importante. Ampère chegou a ele no final de 1823, em seguida ao trabalho de Savary, ver o Cap. 8, assim como as referências [Amp24c], [Amp24d] e [Amp85e].

⁶⁸[N. T.] O nome *plano diretor* aparece publicado em [Amp24c, pág. 142] e em [Amp85e, pág. 398]. O primeiro nome que Ampère deu à *diretriz* foi de *normal ao plano diretor*, [Amp85e, pág. 398].

⁶⁹[N. T.] O complemento de um ângulo φ_1 é um ângulo φ_2 tal que $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi/2$.

η e ζ aos ângulos que esta última reta forma com os três eixos,

$$\text{sen } \psi = \frac{A}{D} \cos \xi + \frac{B}{D} \cos \eta + \frac{C}{D} \cos \zeta .$$

E a expressão para a ação fica na forma

$$\frac{1}{2} ii' ds' (A \cos \xi + B \cos \eta + C \cos \zeta) ,$$

ou

$$\frac{1}{2} U ii' ds' ,$$

ao fazer [a seguinte definição]

[Páginas 45 e 217]

$$U = A \cos \xi + B \cos \eta + C \cos \zeta .$$

Observa-se que esta ação é independente da direção do elemento no plano que se considera. Nós a chamaremos de ação exercida neste plano. E concluiremos do fato que ela permanece a mesma quando se fornece sucessivamente ao elemento diferentes direções no mesmo plano, que se a [ação] que a Terra exerce sobre um condutor móvel em um plano fixo é produzida por correntes formando circuitos fechados, e cujas distâncias até o condutor são suficientemente grandes para serem consideradas como constantes enquanto que ele se move neste plano, ela terá sempre o mesmo valor nas diferentes posições que o condutor assume sucessivamente, porque as ações exercidas sobre cada um dos elementos dos quais ele é composto permanecem sempre as mesmas e sempre perpendiculares a estes elementos, [logo] sua resultante não poderá variar nem em sua grandeza nem em sua direção relativa ao condutor. Contudo, esta direção mudará no plano fixo ao se seguir o movimento deste condutor. E com efeito é isto que se observa com respeito a um condutor que é móvel em um plano horizontal e que é direcionado sucessivamente para diversos azimutes.

14.6 Experiência pela Qual se Verifica uma Conseqüência destas Fórmulas

Pode-se verificar este resultado pela seguinte experiência.⁷⁰ Em um disco de madeira ABCD (Figura 10) talha-se um sulco circular KLMN no qual se dispõe dois recipientes de cobre KL e MN com o mesmo formato e tal que cada um ocupe um semi-círculo quase completo do sulco, porém de modo que fique entre eles dois intervalos KN e LM preenchidos de uma goma isolante. A cada um destes recipientes são soldadas duas lâminas de cobre PQ e RS incrustadas no

[Páginas 46 e 218]

disco e que carregam as taças X e Y destinadas a colocar — por meio do mercúrio que elas contêm — os recipientes KL e MN em contato com os reóforos de uma pilha muito forte. No

⁷⁰[N. T.] Ver [Amp24c, pág. 139 e Fig. 2].

Fig. 10.

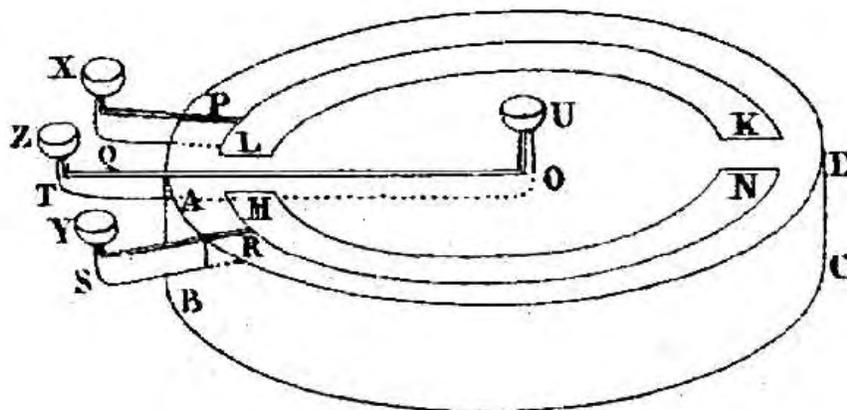


Figura 10.

disco incrusta-se uma outra lâmina TO que leva a taça Z, onde também colocamos um pouco de mercúrio. Esta lâmina TO está soldada no centro O do disco a uma haste vertical sobre a qual está soldada uma quarta taça U, cujo fundo está coberto por um pedaço de vidro ou de ágata⁷¹ para fazer mais móvel uma armação cruzada⁷² — da qual falaremos em seguida — mas cujas beiradas são suficientemente altas para que se possa colocar em comunicação com o mercúrio disposto nesta taça. Esta [taça U] recebe a ponta V (Figura 11)⁷³ que serve de pivô para a armação cruzada FGHI, na qual as seções EG e EI são iguais entre si e soldadas em G e I às lâminas *g x h* e *i y f* que mergulham na água acidulada dos recipientes KL e MN [da Figura 10], quando a ponta V repousa sobre o fundo da taça U, e que são ligadas por suas outras extremidades *h* e *f* às seções EH e EF sem se comunicar [eletricamente] com elas. Estas duas lâminas são iguais e curvadas [na forma de] arcos de círculo [com abertura] de aproximadamente 90°.

Quando se mergulham os reóforos, um na taça Z, o outro em uma das duas taças X ou Y, a corrente passa somente por uma das seções da armação cruzada e vemos [esta armação] girar sobre a ponta V pela ação da Terra, do Leste para Oeste pelo Sul quando a corrente vai da circunferência ao centro, e no sentido contrário quando parte do centro para a circunferência, conforme a explicação que dei deste fenômeno — que se pode ver no meu trabalho *Recueil d'Observations électro-dynamiques*, página 284.⁷⁴ Mas quando se mergulham [os reóforos] nas taças X e Y, a corrente percorre em sentidos opostos as duas seções EG e EI, [e] a armação

⁷¹[N. T.] Quartzo translúcido de cores variadas.

⁷²[N. T.] “Sautoir” no original em francês.

⁷³[N. T.] Na Figura 11 original publicada em 1827 não aparece a ponta V abaixo do cruzamento E. Isto foi corrigido no *Théorie* publicado em 1826, como aparece aqui. Esta ponta vai fazer contato elétrico com o mercúrio que fica na taça U da Figura 10.

⁷⁴[N. T.] Ampère se refere aqui inicialmente a um trabalho de Auguste de la Rive que foi publicado em 1822 e reeditado no *Recueil* com algumas modificações feitas por Ampère, [dlR22a, pág. 46], [dlR22b, pág. 284] e [dlR85, pág. 326]. Estes trabalhos foram seguidos de Notas do próprio Ampère, [Ampa] e [Amp22b]. No *Recueil* a Memória de De la Rive foi precedida de um Prefácio escrito por Ampère, [Amp22c] e [Amp85b].

Fig. II.

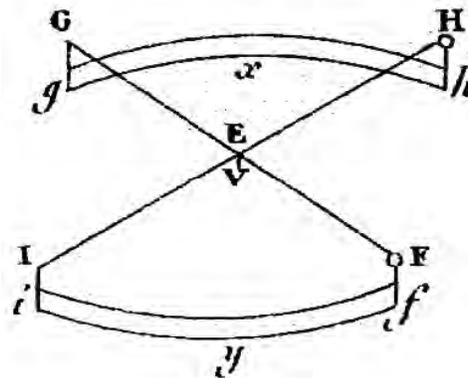


Figura 11.

cruzada permanece imóvel em qualquer posição em que estiver colocada,

[Páginas 47 e 219]

quando, por exemplo, uma das seções está paralela e a outra perpendicular ao meridiano magnético, e isto [ocorre] mesmo ao se golpear levemente o disco ABCD, aumentando a mobilidade do instrumento [através] dos pequenos abalos resultantes. Dobrando um pouco as arestas da armação cruzada ao redor do ponto E, pode-se fazer [com que as arestas tenham] diferentes ângulos, e o resultado da experiência é sempre o mesmo. Disto segue evidentemente que a força com a qual a Terra age sobre uma porção do condutor — perpendicularmente à sua direção — para movê-la em um plano horizontal — e, conseqüentemente, em um plano de posição dada tendo em vista o sistema de correntes terrestres — é a mesma, qualquer que seja a direção, neste plano, da porção do condutor. E este é exatamente o resultado do cálculo que se queria verificar.

É bom destacar que a ação das correntes de água acidulada sobre seus prolongamentos nas lâminas *gh* e *if* não perturba de nenhuma maneira o equilíbrio do aparelho. Pois é fácil de ver que esta ação tende a girar a lâmina *gh* ao redor da ponta V no sentido *hxg*, e a lâmina *if* no sentido *fyi*, de onde resultam, pelas lâminas serem iguais, dois torques iguais mas em sentidos opostos que se destroem.

Sabe-se que a experiência pela qual se constata esta ação é devida ao Sr. Savary.⁷⁵ Esta experiência pode ser feita mais comodamente, substituindo a espiral de fio de cobre do aparelho que ele se serviu de início, por uma lâmina circular do mesmo metal. Esta lâmina ABC (Figura 12)⁷⁶ forma um arco de círculo quase igual a uma circunferência inteira. Mas suas extremidades A e C estão separadas uma da outra por um pedaço D de uma substância isolante.

Coloca-se uma de

⁷⁵[N. T.] Ampère mencionou esta experiência de Savary em [Amp22d, pág. 66] e em [Amp85c, pág. 198].

⁷⁶[N. T.] A ponta O abaixo da letra Q no centro da haste EF não aparece no *Théorie* publicado em 1827, mas foi corrigido no *Théorie* publicado em 1826, nesta Figura 12 reproduzida aqui. Esta ponta vai entrar em contato elétrico com um dos pólos da bateria ligada ao mercúrio contido na taça S da Figura 13, ver a nossa página 210.

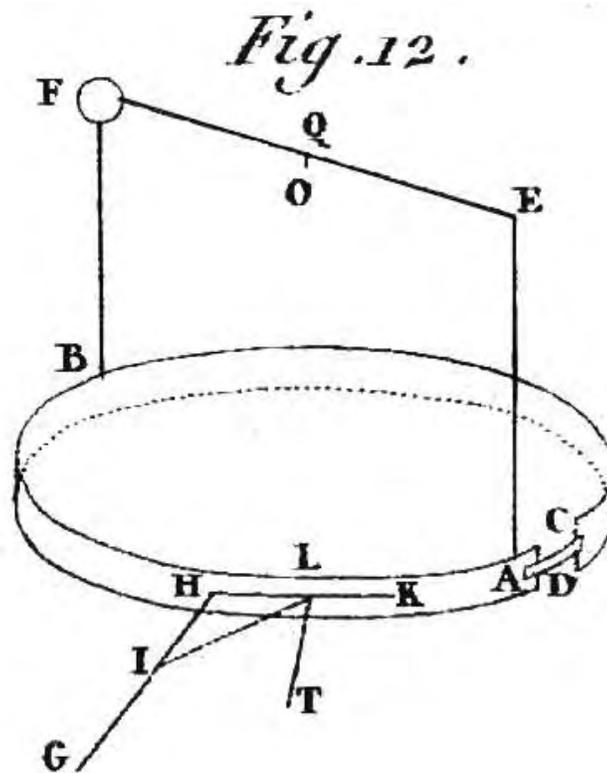


Figura 12.

[Páginas 48 e 220]

suas extremidades A, por exemplo, em comunicação com um dos reóforos pela ponta O que se dispõe na taça S (Figura 13)^{77,78} cheia de mercúrio. Esta [taça] está unida pelo fio metálico STR à taça R na qual mergulha um dos reóforos. Esta ponta O (Figura 12) comunica-se com a extremidade A pelo fio de cobre AEQ cujo prolongamento QF sustenta em F a lâmina ABC por um anel [feito] de uma substância isolante que envolve neste ponto o fio de cobre. Quando a ponta O repousa sobre o fundo da taça S (Figura 13), a lâmina ABC (Figura 12) mergulha na água acidulada contida no recipiente de cobre MN (Figura 13) que se comunica com a taça P onde se encontra o outro reóforo.

⁷⁷[N. T.] No *Théorie* publicado em 1827 não aparece a letra O na taça S da Figura 13. Isto foi corrigido na versão de 1826 que aparece aqui. A ponta O abaixo de Q aparece na Figura 12, ver a nossa página 209.

⁷⁸[N. T.]

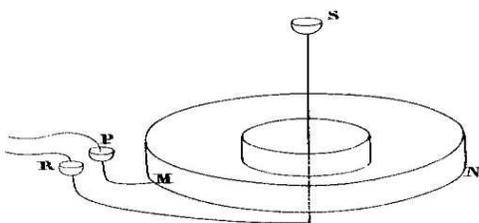


Figura 14.4: Ilustração do recipiente com água acidulada, [Amp24c, Fig. 6].

alguma Figura específica sendo usada para explicar mais de uma experiência, como é o caso da Figura 13 do *Théorie*.

A Figura 14.4 ao lado é um esquema mais simples da cuba da Figura 13 do *Théorie* e foi publicada em 1824, [Amp24c, Fig. 6]. Ela está colocada aqui para facilitar na compreensão da experiência de Ampère. A Figura 13 do *Théorie* é mais complexa devido à argumentação que Ampère irá fazer na nossa página 305 (que corresponde à pág. 174 do *Théorie* de 1826, ou à página 346 da versão de 1827). Como as Figuras eram dispostas no final do livro, costumavam levar detalhes que eram utilizados em mais de um argumento. Isto às vezes as tornava bem complexas, com

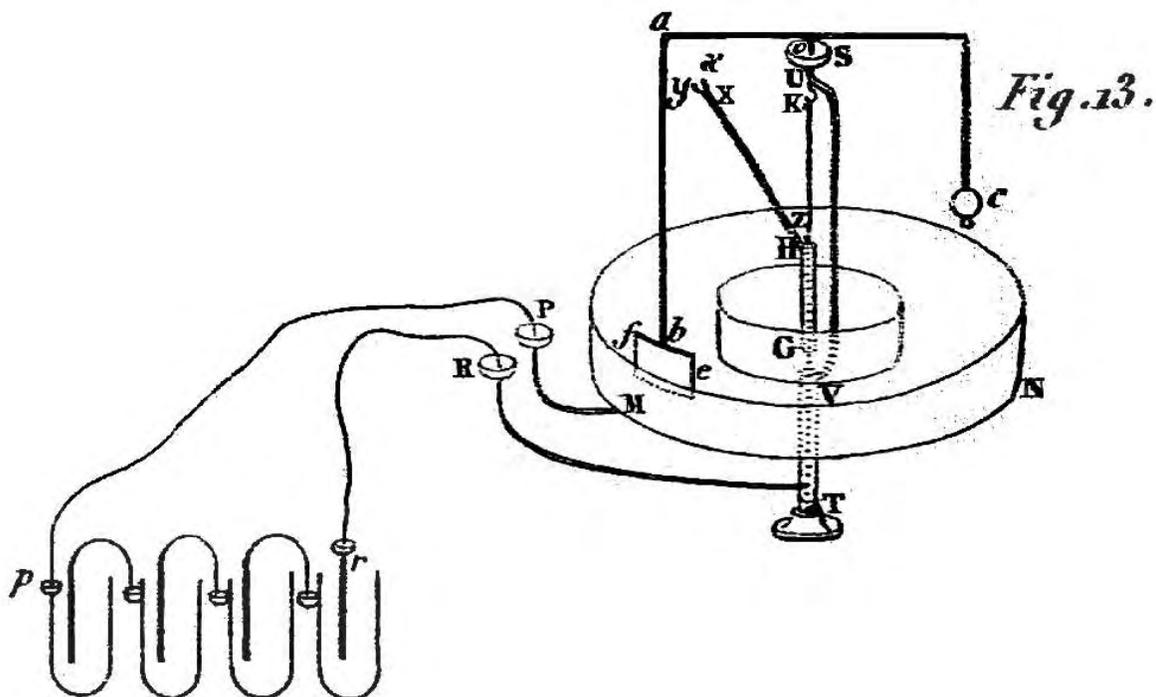


Figura 13.

Vê-se então esta lâmina girar no sentido CBA. Desde que a pilha seja bastante forte, o movimento permanece sempre neste sentido quando são invertidas as comunicações com a pilha, mudando reciprocamente os dois reóforos da taça P para a taça R. Isto prova que este movimento não é de nenhuma maneira devido à ação da Terra e que somente pode vir da ação exercida pelas correntes da água acidulada sobre a corrente da lâmina circular ABC (Figura 12), ação que é sempre repulsiva, porque se GH representa uma das correntes da água acidulada que se prolonga em HK na lâmina ABC, qualquer que seja o sentido da corrente, ela percorrerá evidentemente um dos lados do ângulo GHK se aproximando, e o outro [lado] se afastando do vértice H. Mas é preciso, para que o movimento que se observa neste caso exista, que a repulsão entre os dois elementos, um em I e o outro em L, ocorra ao longo da reta IL, oblíqua [em relação] ao arco ABC, e não [ocorra] ao longo da [reta] LT perpendicular ao elemento situado em L, pois a direção desta perpendicular reencontra a [linha] vertical traçada pelo ponto O ao redor do qual a parte móvel do aparelho está sujeita a girar, e uma força

[Páginas 49 e 221]

direcionada ao longo desta perpendicular não poderia imprimir nenhum movimento de rotação.

Disse que — quando se quer assegurar que o movimento deste aparelho não é produzido pela ação da Terra, ao se constatar que [o movimento] continua ocorrendo no mesmo sentido quando se invertem as comunicações com a pilha trocando os reóforos das taças — seria necessário empregar uma pilha bastante forte. Com efeito, é impossível nesta disposição do condutor móvel, de impedir a Terra de agir sobre o fio vertical AE levando-o para Oeste, quando a corrente sobe neste fio, e para Leste, quando a corrente desce, e sobre o fio horizontal EQ, fazendo-o girar em torno da [linha] vertical traçada pelo ponto O, no sentido direto Leste-Sul-Oeste quando a corrente vai de E para Q, se aproximando do centro de rotação, e no sentido retrógrado Oeste-Sul-Leste

quando a corrente vai de Q para E, afastando-se do mesmo centro.^{79,80} A primeira destas ações é pouco sensível, menor ainda quando se dá ao fio vertical AE somente o comprimento necessário para a estabilidade do condutor móvel sobre a ponta O. Mas a segunda [ação] é determinada pelas dimensões do aparelho. E como ela muda de sentido quando se invertem as comunicações com a pilha, ela se junta em uma ordem de comunicação com a ação exercida pelas correntes de água acidulada, e se subtrai na outra [ordem de comunicação; isto é, em um sentido da corrente os dois torques se somam e em outro sentido da corrente os dois torques se subtraem]. É por isso que o movimento observado é sempre mais rápido em um caso do que no outro. E esta diferença torna-se mais evidente,

[Páginas 50 e 222]

conforme a corrente produzida pela pilha é mais fraca, pois na medida que sua intensidade diminui, sendo a ação eletrodinâmica — mantendo as outras coisas constantes — proporcional ao produto das intensidades das duas porções de corrente que agem entre si, esta ação entre as correntes de água acidulada e as correntes da lâmina ABC, diminui com o quadrado de sua intensidade, enquanto que a intensidade das correntes terrestres continuando a mesma, sua ação sobre [as correntes] da lâmina diminui somente proporcionalmente à mesma intensidade. Na medida que a energia da pilha diminui, a ação do globo se torna cada vez mais perto de destruir [a ação] das correntes da água acidulada na disposição das comunicações com a pilha onde estas ações são opostas, e se observa — quando esta energia fica muito fraca — o aparelho parar neste caso e, logo após, o movimento se produz em sentido contrário. Neste caso, a experiência conduzirá a uma consequência oposta a que se tratava de estabelecer, porque a ação da Terra tornando-se preponderante, se poderia desconhecer a existência da ação das correntes da água acidulada. De resto, a primeira destas duas ações é sempre nula sobre a lâmina circular ABC, pois — como a Terra age como um sistema de correntes fechadas — a força que ela exerce sobre cada elemento sendo perpendicular à direção deste elemento, [a força] passa pela [linha] vertical ligada ao ponto O, e não pode, conseqüentemente, girar o condutor móvel ao redor dela.

14.7 Aplicação das Fórmulas Precedentes a um Circuito Circular

Iremos, para servir de exemplo, aplicar as fórmulas precedentes no caso onde o sistema se reduz a uma só corrente circular fechada.⁸¹

Quando o sistema é composto somente de uma única corrente,

[Páginas 51 e 223]

percorrendo uma circunferência de círculo de um raio qualquer m , simplifica-se o cálculo, tomando, para o plano xy , o plano que passa pela origem das coordenadas, ou seja, pelo centro A

⁷⁹[N. A.] Veja sobre estes dois tipos de ações exercidas pelo globo terrestre, o que está dito no meu trabalho *Recueil d'Observations électro-dynamiques*, páginas 280 a 284.

⁸⁰[N. T.] Ampère se refere aqui inicialmente a um trabalho de Auguste de la Rive que foi publicado em 1822 e reeditado no *Recueil* com algumas modificações feitas por Ampère, [dlR22a, págs. 42 a 46], [dlR22b, págs. 280 a 284] e [dlR85, págs. 323 a 327]. Estes trabalhos foram seguidos de Notas do próprio Ampère, [Ampa] e [Amp22b]. No *Recueil* a Memória de De la Rive foi precedida de um Prefácio escrito por Ampère, [Amp22c] e [Amp85b].

⁸¹[N. T.] Ver [Amp24c, págs. 148-151].

do elemento ab (Figura 14) e paralelo ao [plano] do círculo; e [tomando] para o plano dos [eixos] xz , o plano que é traçado perpendicularmente ao plano do círculo [passando] pela mesma origem [A] e pelo centro O.

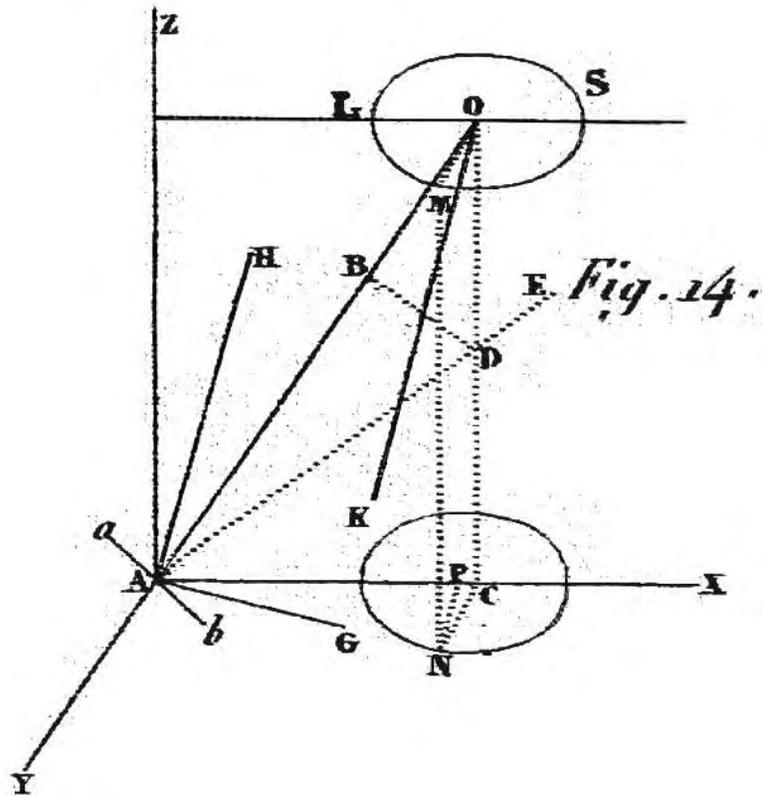


Figura 14.

Sejam p e q as coordenadas do centro O. Supomos que o ponto C seja a projeção de O no plano xy e N [a projeção de] um ponto qualquer M do círculo, e chamemos de ω ao ângulo ACN. Ao se abaixar [uma linha] NP perpendicularmente sobre AX, as três coordenadas x , y e z do ponto M serão MN, NP e AP. E se encontrará facilmente para os seus valores [o seguinte]:

$$z = q, \quad y = m \operatorname{sen} \omega, \quad x = p - m \cos \omega .$$

As quantidades que chamamos de A, B e C sendo, respectivamente, iguais a

$$\int \frac{ydz - zdy}{r^{n+1}}, \quad \int \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}}, \quad \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}},$$

teremos [então]

$$A = -mq \int \frac{\cos \omega d\omega}{r^{n+1}},$$

$$B = mq \int \frac{\operatorname{sen} \omega d\omega}{r^{n+1}},$$

$$C = mp \int \frac{\cos \omega d\omega}{r^{n+1}} - m^2 \int \frac{d\omega}{r^{n+1}} .$$

Ao se integrar por partes [as integrais] que contêm os termos $\sin \omega$ e $\cos \omega$, prestando atenção que

[Páginas 52 e 224]

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = q^2 + p^2 + m^2 - 2mp \cos \omega ,$$

dando

$$dr = \frac{mp \sin \omega d\omega}{r} ,$$

[e depois que se] suprimem os termos que são nulos pois estas integrais devem ser tomadas de $\omega = 0$ até $\omega = 2\pi$, e que colocamos os valores de A, B e C assim encontrados na expressão de U , [a saber,]

$$U = A \cos \xi + B \cos \eta + C \cos \zeta ,$$

se obterá

$$U = m \left[(n+1)(p^2 \cos \zeta - pq \cos \xi) \int \frac{\sin^2 \omega d\omega}{r^{n+3}} - \cos \zeta \int \frac{d\omega}{r^{n+1}} \right] .$$

Ora, o ângulo ξ pode ser expresso em função de ζ . Pois, chamando de h a perpendicular OK traçada para baixo a partir do centro O sobre o plano bAG para o qual calcula-se o valor de U , se terá $h = q \cos \zeta + p \cos \xi$. E este valor se tornará

$$U = m^2 \left\{ (n+1) [(p^2 + q^2) \cos \zeta - hq] \int \frac{\sin^2 \omega d\omega}{r^{n+3}} - \cos \zeta \int \frac{d\omega}{r^{n+1}} \right\} .$$

14.8 Simplificação destas Fórmulas quando o Diâmetro do Circuito Circular é Muito Pequeno

A determinação de seu valor é bem simples no caso em que o raio m é muito pequeno comparado à distância l da origem A ao centro O. Pois se a desenvolvemos em série seguindo as potências de m , se verá que quando se negligencia as potências de m superiores a 3, os termos em m^3 vão a zero nos limites 0 e 2π , e os termos em m^2 se obtêm substituindo r por $l = \sqrt{p^2 + q^2}$. Somente resta então calcular os valores de

$$\int \sin^2 \omega d\omega \quad \text{e de} \quad \int d\omega \quad \text{variando de } \omega = 0 \text{ até } \omega = 2\pi .$$

[Páginas 53 e 225]

Isto resulta em π para a primeira [integral] e 2π para a segunda. O valor de U se reduz então a⁸²

⁸²[N. T.] No artigo de 1824 Ampère acrescenta o seguinte logo em seguida à fórmula abaixo, [Amp24c, pág. 150-151]:

Os resultados expostos nestes dois parágrafos [ou seja, as propriedades gerais das três integrais A,

$$U = \pi m^2 \left[\frac{(n-1) \cos \zeta}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)hq}{l^{n+3}} \right].$$

14.9 Aplicação a um Circuito Plano Formando uma Curva Fechada Qualquer, Inicialmente no Caso em que Todas as Suas Dimensões são Muito Pequenas, e em Seguida para Qualquer que Seja o Seu Tamanho

Para maior generalidade, vamos supor agora que a corrente fechada, no lugar de ser circular, tem uma forma qualquer, mas sem deixar de ser plana e muito pequena.⁸³

Seja MNL (Figura 15) um circuito muito pequeno e plano cuja área seja λ e que atue sobre um elemento disposto na origem A. Cortemos sua superfície em elementos infinitamente pequenos por planos passando pelo eixo z , e seja APQ o traço de um destes planos [projetado sobre o plano xy], assim como M e N seus pontos de encontro com o circuito λ , projetados sobre o plano xy em P e Q. Prolonguemos a corda MN até o eixo z no [ponto] G. Tracemos para baixo a partir de A uma perpendicular ao plano do circuito $AE = q$, e façamos a ligação EG. Seja Apq o traço de um plano infinitamente vizinho do primeiro, fazendo com ele um ângulo $d\varphi$. Façamos $AP = u$ e $PQ = \delta u$. A ação do circuito sobre o elemento em A depende, como se viu, de três integrais chamadas de A, B e C, que iremos calcular. Consideremos inicialmente C, que vale

$$C = \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} = \int \frac{u^2 d\varphi}{r^{n+1}}.$$

Esta integral é relativa a todos os pontos do circuito. Ao se considerar simultaneamente os dois elementos compreendidos entre os dois planos vizinhos AGNQ e AGnq, e que correspondem a valores iguais e de sinais contrários de $d\varphi$, se verá que as ações destes dois elementos devem ser subtraídas uma da outra, e que [a ação] do elemento que está mais

[Páginas 54 e 226]

B e C] são independentes do valor que se dá ao expoente da potência da distância à qual se supõe que a ação eletrodinâmica é reciprocamente proporcional quando esta distância varia, sem que os elementos de correntes elétricas entre os quais se exerce [a ação ou força] mudem de direção. Não ocorre o mesmo nos resultados com os quais me ocupo no restante de minha Memória, e que são relativos ao caso no qual o sistema de correntes formando circuitos fechados, dos quais acabamos de examinar as propriedades, torna-se um solenóide eletrodinâmico tal como o defini mais acima. Estes resultados ocorrem apenas em dois casos, [a saber,] no caso da natureza, isto é, quando a ação eletrodinâmica é reciprocamente proporcional ao quadrado da distância quando apenas ela varia, e no caso no qual fosse suposto que [a ação ou força] é diretamente proporcional à distância. Eles [isto é, estes resultados] são devidos ao Sr. Savary, que os obteve inicialmente para um cilindro eletrodinâmico [[Sav23], [Sav22] e [Sav85b]] e, em seguida, para um solenóide qualquer [isto é, com os centros dos pequenos círculos que compõem o solenóide seguindo uma linha curva no espaço, e não apenas seguindo uma linha reta como no caso do cilindro eletrodinâmico, [Ano23] e [Sav85a]]. A nova demonstração que dou [a estes resultados] aplica-se diretamente ao solenóide e compreende, assim, o caso no qual ele é um cilindro, que é apenas uma espécie particular de solenóide.

⁸³[N. T.] Segundo Joubert, [Amp87c, Nota 1 na pág. 46], a demonstração deste teorema, de que a ação sobre um elemento devida a um circuito fechado plano muito pequeno é independente da forma do circuito e é proporcional à sua área, foi obtida depois de 12 de setembro de 1825.

ou seja

$$u : \delta u :: z - \frac{q}{\cos \zeta} : \delta z .$$

Obtendo desta proporção o valor de δz e a transferindo para o valor de δr , obtém-se:

$$\delta z = \frac{z \cos \zeta - q}{\cos \zeta} \delta u , \quad \delta r = \frac{(u^2 + z^2) \cos \zeta - qz}{ur \cos \zeta} \delta u = \frac{r^2 \cos \zeta - qz}{ur \cos \zeta} \delta u .$$

[Páginas 55 e 227]

Substituindo este valor em C, vem que:⁸⁴

$$\begin{aligned} C &= \int \left[\frac{(n+1)(r^2 \cos \zeta - qz)}{r^{n+3} \cos \zeta} - \frac{2}{r^{n+1}} \right] u \delta u d\varphi \\ &= \int \left[\frac{n-1}{r^{n+1}} - \frac{(n+1)qz}{r^{n+3} \cos \zeta} \right] u \delta u d\varphi . \end{aligned}$$

Sendo o circuito muito pequeno, pode-se considerar os valores de r e de z como constantes e iguais, por exemplo, aos valores que se relacionam com o centro de gravidade da área do circuito, para que os termos de terceira ordem se anulem. Representando estes valores [de r e de z] por l e z_1 , a integral anterior tomará a forma

$$C = \left[\frac{n-1}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)qz_1}{l^{n+3} \cos \zeta} \right] \int u d\varphi \delta u .$$

Mas $u d\varphi$ é o arco PK descrito a partir de A com o raio u , e $PQ = \delta u$. Logo $u d\varphi \delta u$ é a área infinitamente pequena $PQqp$. E a integral $\int u d\varphi \delta u$ exprime a área total da projeção do circuito, ou seja, $\lambda \cos \zeta$, já que ζ é o ângulo do plano do circuito com o plano xy . Teremos então, enfim

$$C = \left[\frac{(n-1) \cos \zeta}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)qz_1}{l^{n+3}} \right] \lambda .$$

Obtêm-se valores análogos para B e A, a saber:

$$B = \left[\frac{(n-1) \cos \eta}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)qy_1}{l^{n+3}} \right] \lambda ,$$

$$A = \left[\frac{(n-1) \cos \xi}{l^{n+1}} - \frac{(n+1)qx_1}{l^{n+3}} \right] \lambda .$$

Assim se conhecerão os ângulos que a diretriz faz com os eixos, pois tem-se para os seus co-senos A/D , B/D , A/D , fazendo

[Páginas 56 e 228]

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} .$$

⁸⁴[N. T.] Na primeira integral aparece no original a expressão $(r^2 \cos \xi - qz)$ em vez de $(r^2 \cos \zeta - qz)$. Isto é um erro tipográfico.

Quanto à força produzida pela ação do circuito sobre o elemento situado na origem, ela terá, como viu-se acima, a expressão $\frac{1}{2}ii'ds'D \sin \varepsilon$, sendo ε o ângulo que este elemento faz com a diretriz. Esta força é perpendicular à diretriz assim como à direção deste elemento.

No caso em que o pequeno circuito que se considera está no mesmo plano⁸⁵ que o elemento ds' sobre o qual ele age, tem-se, fazendo este plano como sendo o [plano] xy ,

$$q = 0, \cos \zeta = 1, \cos \eta = 0, \cos \xi = 0 .$$

Segue que

$$A = 0, B = 0, C = \frac{n-1}{l^{n+1}}\lambda .$$

Portanto, D se reduz a C, ε é igual a $\pi/2$, e a ação do circuito sobre o elemento⁸⁶ ds' torna-se⁸⁷

$$\frac{n-1}{2} \frac{ii'ds'\lambda}{l^{n+1}} .$$

Vou agora expor uma nova maneira de considerar a ação dos circuitos planos que possuem uma forma e uma grandeza qualquer.

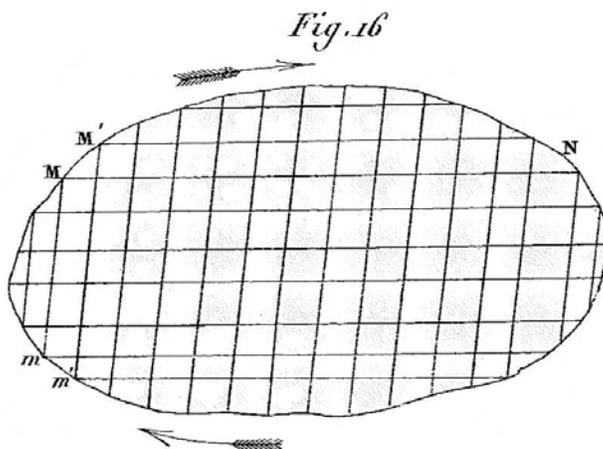


Figura 16.

Seja um circuito plano qualquer MNm (Figura 16).⁸⁸ Vamos dividir sua superfície em elementos infinitamente pequenos pelas retas paralelas cortadas por um segundo sistema de retas paralelas que fazem ângulos retos com as primeiras. Imaginemos correntes direcionadas no mesmo sentido que a corrente MNm ao redor de cada uma destas áreas infinitamente pequenas. Todas as partes destas correntes que se encontram ao longo das linhas retas serão destruídas, porque ali existirão duas [correntes] de sentidos contrários

[Páginas 57 e 229]

⁸⁵[N. T.] Ver [Amp87e].

⁸⁶[N. T.] Por um erro tipográfico aparece ds em vez de ds' no original.

⁸⁷[N. T.] No original está escrito $iids'\lambda$ o que é um erro tipográfico, pois se está falando da ação entre os dois elementos de corrente com intensidades i e i' .

⁸⁸[N. T.] No *Théorie* publicado em 1827 não aparecem as duas setas indicando o sentido da corrente. Isto foi corrigido na versão de 1826 reproduzida aqui.

que percorrem a mesma reta. E somente restará as partes curvilíneas destas correntes, tais como MM' e mm' , que formarão o circuito total MNm .

Disto segue que as três integrais A, B e C serão obtidas para o circuito plano de uma grandeza finita, substituindo nos valores que acabamos de obter para estas três quantidades, no lugar de λ um elemento qualquer de área do circuito que poderemos representar por $d^2\lambda$ e integrando por toda a extensão desta área.

Por exemplo, quando o elemento está situado no mesmo plano que o circuito, e que consideramos este plano como sendo o plano xy , tem-se

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = (n - 1) \int \int \frac{d^2\lambda}{l^{n+1}},$$

e o valor da força torna-se

$$\frac{n - 1}{2} ii' ds' \int \int \frac{d^2\lambda}{l^{n+1}}.$$

De onde segue que, se a cada ponto da área do circuito traça-se uma perpendicular igual a $1/l^{n+1}$, o volume do prisma que terá por base o circuito e que será limitado pela superfície formada pelas extremidades destas perpendiculares, representará o valor de⁸⁹ $\int \int \frac{d^2\lambda}{l^{n+1}}$. E este volume multiplicado por $\frac{n-1}{2} ii' ds'$ exprimirá a ação procurada.

É importante observar que tendo o problema sido levado ao cálculo do volume de um sólido, pode-se adotar o sistema de coordenadas e a divisão da área do circuito em elementos que conduzirão aos cálculos mais simples.

14.10 Ação Mútua entre Dois Circuitos Fechados Situados em um Mesmo Plano, Inicialmente Supondo que Todas as Dimensões São Muito Pequenas, e em Seguida no Caso para o Qual estes Dois Circuitos Possuem uma Forma e um Tamanho Arbitrários

Passemos à ação mútua entre dois circuitos muito pequenos

[Páginas 58 e 230]

O e O' (Figura 18)⁹⁰ situados em um mesmo plano. Seja MN um elemento ds' qualquer do segundo [circuito]. A ação do circuito O sobre ds' é, tendo em vista o que precede,⁹¹

$$\frac{n - 1}{2} \frac{ii' \lambda ds'}{r^{n+1}}.$$

Denominando o ângulo MNO por $d\varphi$, e traçando o arco MP entre os lados deste ângulo, se poderá substituir a pequena corrente MN por duas correntes MP e NP cujos comprimentos

⁸⁹[N. T.] Nas versões impressas em 1826 e em 1827 aparece na integral l^{n+2} . Mas em uma errata que aparece no final do trabalho chama-se a atenção que o correto é l^{n+1} .

⁹⁰[N. T.] Algumas Figuras de Ampère aparecem fora de ordem no *Théorie*. Um exemplo é esta Figura 18 que aparece no texto antes da Figura 17.

⁹¹[N. T.] Por um erro tipográfico aparece no original $ds' \lambda d\varphi$ em vez de $\lambda ds'$.

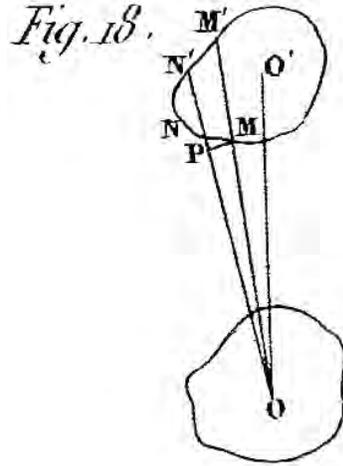


Figura 18.

são, respectivamente, $rd\varphi$ e dr . A ação do circuito O sobre o elemento MP, que é normal à sua direção, se obterá substituindo na expressão precedente ds' por MP, e será dada por

$$\frac{n-1}{2} \frac{ii' \lambda d\varphi}{r^n}.$$

A ação sobre NP, perpendicular à sua direção, será do mesmo modo

$$\frac{n-1}{2} \frac{ii' \lambda dr}{r^{n+1}}.$$

Esta última [equação] integrada em toda a extensão do circuito fechado O' é nula. [Portanto,] basta considerar a primeira [componente da força] que está direcionada para o ponto O, de onde resulta imediatamente que a ação dos dois circuitos pequenos está ao longo da reta que os une.

Prolonguemos os raios OM e ON até que eles reencontrem a curva em M' e N' . A ação de $M'N'$ deve ser subtraída da [ação] de MN, e a ação resultante se obterá tomando como antes a variação da ação de MN com sinal invertido, o que fornece

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{ii' \lambda d\varphi \delta r}{r^{n+1}} \text{ ou } \frac{n(n-1)}{2} \frac{ii' \lambda r d\varphi \delta r}{r^{n+2}}.$$

Ora, $rd\varphi\delta r$ é a medida do seguimento infinitamente pequeno $MNN'M'$.

[Páginas 59 e 231]

Fazendo a soma de todas as expressões análogas relativas aos diferentes elementos do circuito O' e considerando r constante e igual à distância entre os centros de gravidade das áreas λ e λ' dos dois circuitos, se terá para a ação que eles exercem um sobre o outro

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{ii' \lambda \lambda'}{r^{n+2}},$$

e esta ação estará direcionada ao longo da reta OO' . Disto resulta que se obterá a ação mútua dos dois circuitos finitos situados em um mesmo plano, considerando suas áreas divididas em

elementos infinitamente pequenos em todos os sentidos, e supondo que estes elementos agem um sobre o outro ao longo da reta que os une, em razão direta de suas superfícies e em razão inversa da potência $n + 2$ da distância entre eles.

Sendo então a ação mútua das correntes fechadas função apenas da distância [entre elas], obtém-se esta consequência importante, a saber, que jamais pode resultar desta ação um movimento de rotação contínua.

14.11 Determinação das Duas Constantes Desconhecidas que Entram na Fórmula Fundamental

A fórmula que acabamos de encontrar para reescrever a ação mútua entre dois circuitos fechados e planos em [termos de ações] entre os elementos de área destes circuitos, conduz à determinação do valor de n . Com efeito, ao se considerar dois sistemas semelhantes compostos de dois circuitos fechados e planos, os elementos semelhantes de suas áreas serão proporcionais aos quadrados das linhas homólogas, e as distâncias entre estes elementos serão proporcionais às primeiras potências destas mesmas linhas. Chamando de m à razão entre as linhas homólogas dos dois sistemas, as ações de dois elementos do primeiro sistema e seus correspondentes do segundo [sistema] serão,

[Páginas 60 e 232]

respectivamente,

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{ii'\lambda\lambda'}{r^{n+2}} \text{ e } \frac{n(n-1)}{2} \frac{ii'\lambda\lambda'm^4}{r^{n+2}m^{n+2}} .$$

Logo, a razão entre estas ações e, por conseguinte, entre as ações totais, será m^{2-n} . Ora, descrevemos antes uma experiência pela qual se pode provar diretamente que estas duas ações são iguais. Portanto, é necessário [a partir de $m^{2-n} = 1$] que $n = 2$. E, em virtude da equação $1 - n - 2k = 0$, [isto implica] que $k = -1/2$. Estes valores de n e de k reduzem para uma fórmula muito simples a expressão⁹²

$$-\frac{ii'}{1+k} r^{1-n-k} \frac{d^2(r^{1+k})}{ds ds'} ds ds' ,$$

da ação mútua entre ds e de ds' . Esta expressão torna-se

$$-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \frac{d^2(\sqrt{r})}{ds ds'} ds ds' .$$

Segue também do fato de que $n = 2$, no caso onde as direções dos dois elementos permanecem as mesmas, que esta ação fica em razão inversa do quadrado da distância entre os elementos. Sabe-se que o Sr. de La Place estabeleceu a mesma lei — a partir de uma experiência do Sr. Biot — quando se trata da ação mútua entre um elemento de condutor voltaico e uma molécula

⁹²[N. T.] No original está escrito

$$-\frac{1+k}{ii'} r^{1-n-k} \frac{d^2(r^{1+k})}{ds ds'} ,$$

o que é um erro tipográfico, pois se está falando da expressão obtida anteriormente dada pela ação entre os dois elementos de corrente.

magnética. Mas este resultado somente poderia ser estendido à ação entre dois elementos de condutores, admitindo que a ação dos ímãs é devida à [ação] das correntes elétricas. Por outro lado, a demonstração experimental que acabo de fornecer [baseada apenas na interação eletrodinâmica entre duas correntes elétricas] é independente de todas as hipóteses que se poderia fazer sobre a constituição dos ímãs.

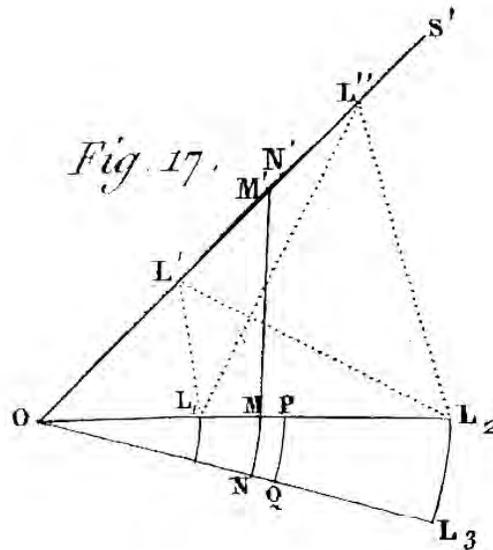


Figura 17.

14.12 Ação de um Fio Condutor Formando um Setor de Círculo sobre um Condutor Retilíneo Passando pelo Centro do Setor

Seja MON (Figura 17) um circuito que forma um setor cujos lados formam um ângulo infinitamente pequeno, e procuremos a ação que ele exerce sobre um condutor retilíneo OS' que passa

[Páginas 61 e 233]

pelo centro O do setor,⁹³ e calculemos inicialmente [a ação] de um elemento MNQP da área deste setor sobre um elemento M'N' do condutor OS'. Façamos OM = u, MP = du, OM' = s', MM' = r, S'ON = ε e NOM = dε. O torque de MNQP para fazer M' girar ao redor de O, observando que a área MNQP tem por expressão $udude$, será dado por

$$\frac{1}{2}ii's'ds'\frac{udude}{r^3}.$$

⁹³[N. T.] E situado na plano do setor.

E o torque do setor sobre o condutor s' se obterá integrando esta expressão em relação a u e s' . Temos

$$r^2 = s'^2 + u^2 - 2us' \cos \varepsilon ,$$

de onde

$$r \frac{dr}{du} = u - s' \cos \varepsilon , \quad r \frac{dr}{ds'} = s' - u \cos \varepsilon ,$$

e, diferenciando uma segunda vez,

$$r \frac{d^2r}{duds'} + \frac{dr}{ds'} \frac{dr}{du} = -\cos \varepsilon ,$$

ou, substituindo dr/ds' e dr/du por seus valores,

$$r \frac{d^2r}{duds'} + \frac{(u - s' \cos \varepsilon)(s' - u \cos \varepsilon)}{r^2} = -\cos \varepsilon ,$$

o que se torna, efetuando os cálculos e simplificando,

$$r \frac{d^2r}{duds'} + \frac{us' \operatorname{sen}^2 \varepsilon}{r^2} = 0 ,$$

de onde sai

$$\frac{us'}{r^3} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varepsilon} \frac{d^2r}{duds'} .$$

Substituindo este valor no elemento de torque, tem-se

[Páginas 62 e 234]

para a expressão do torque total [o seguinte valor:]

$$\frac{1}{2} ii' d\varepsilon \int \int \frac{us' duds'}{r^3} = -\frac{1}{2} ii' \frac{d\varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \varepsilon} \int \int \frac{d^2r}{duds'} duds' .$$

Considerando a porção $L'L''$ da corrente s' , e a porção L_1L_2 do setor, e fazendo $L'L_1 = r'_1$, $L''L_1 = r''_1$, $L'L_2 = r'_2$, $L''L_2 = r''_2$, o valor desta integral fica sendo, evidentemente,

$$\frac{1}{2} ii' \frac{d\varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \varepsilon} (r'_2 + r''_1 - r''_2 - r'_1) .$$

Como é a partir do centro O que começam o setor e o condutor s' , a distância $r'_1 = 0$. E ao se fazer $OL_2 = a$, $OL'' = b$, $L''L_2 = r$, encontra-se que a ação mútua entre eles é expressa por

$$\frac{1}{2} ii' \frac{d\varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \varepsilon} (a + b - r) .$$

Quando o condutor $L'L''$ (Figura 19) tem por ponto médio o centro L_1 do setor, e quando seu comprimento é o dobro do raio a deste setor, tem-se $a = b$, e fazendo $L'L_1L_2 = 2\theta = \pi - \varepsilon$,

$$r'_1 = r''_1 = a, \quad r'_2 = 2a \operatorname{sen} \theta, \quad r''_2 = 2a \cos \theta, \quad d\varepsilon = -2d\theta ,$$

de modo que o valor do torque fica na forma

$$aii' \frac{d\varepsilon}{\operatorname{sen}^2 \varepsilon} (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta) = \frac{1}{2} \frac{aii' d\theta (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta} .$$

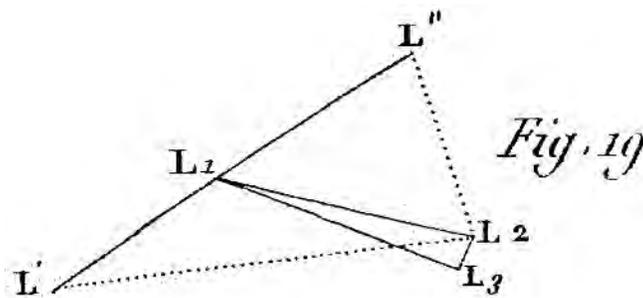


Figura 19.

14.13 Descrição de um Instrumento Destinado a Verificar os Resultados da Teoria sobre os Condutores desta Forma

Pode-se deduzir deste resultado uma maneira de verificar minha fórmula por meio de um instrumento ao qual darei a descrição.⁹⁴

Nos dois pontos a e a' (Figura 20)⁹⁵ da mesa mn elevam-se dois suportes ab e $a'b'$ cujas partes superiores cb e $c'b'$ são isolantes. Eles sustentam uma lâmina de cobre $HdeH'd'e'$

[Páginas 63 e 235]

dobrada em duas [partes] seguindo a reta HH' , e que é terminada por duas taças H e H' onde coloca-se mercúrio. Nos pontos A , C , A' e C' da mesa existem quatro cavidades também cheias de mercúrio. De A parte um condutor de cobre $AEFGSRQ$, sustentado por HH' e que termina em uma taça Q . De A' parte um segundo [condutor] $A'E'F'G'S'R'Q'$ simétrico ao primeiro. Os dois estão envoltos em seda para estarem isolados um do outro e do condutor HH' . Na taça Q mergulha-se a ponta de um condutor móvel $QPONMLKIH$ retornando sobre ele mesmo de K até I — tendo nesta parte os dois ramos PO e KI envoltos em seda. Ele é terminado em uma segunda ponta que mergulha na taça H . [O ramo] NML forma uma semi-circunferência cujo diâmetro é LN , sendo K o centro. A haste PKp é vertical. Ela é terminada em p por uma ponta presa por três círculos horizontais B , D e T que podem girar ao redor de seus centros e servem para diminuir o atrito.

[Nesta Figura] XY é uma placa fixa que recebe em uma ranhura um condutor $VUifkhgoZC$ voltando sobre ele mesmo de g até o e revestido de seda nesta parte. [O ramo] $ifkhg$ é um setor

⁹⁴[N. T.] Esta experiência está indicada na Memória de 12 de setembro de 1825, [Amp25b], [Amp25c] e [Amp87b]. Ela foi descrita completamente, juntamente com o aparelho destinado a executá-la, na Memória de 21 de novembro de 1825, [Amp87e, pág. 208, Fig. 2]. No último parágrafo do *Théorie* Ampère informa que até aquele momento ainda não havia construído este instrumento. Aparentemente ele nunca foi construído e a experiência que deveria ser realizada com ele nunca foi feita, ver nossa página 321.

⁹⁵[N. T.] Na Figura 20b colocamos toda a Figura 20 de lado, ampliada, ver a nossa página 225. Colocamos na Figura 20c apenas a metade da Figura 20, para que as letras possam ser lidas, ver a nossa página 226. No *Théorie* publicado em 1826 foram retiradas as letras d , e , O , d' , e' e O' , que apareciam na versão publicada em 1827. Já as letras i' e g' na versão de 1826 reproduzida aqui aparecem como i e g na Figura de 1827. Em ambas as Figuras a letra f' aparece como f . Na figura de 1827 as letras d' e e' não correspondem aos seus análogos d e e . Na Figura que reproduzimos com um software gráfico, Figura A.20, mantivemos as letras d , e , O , d' , e' e O' como no *Théorie* de 1827.

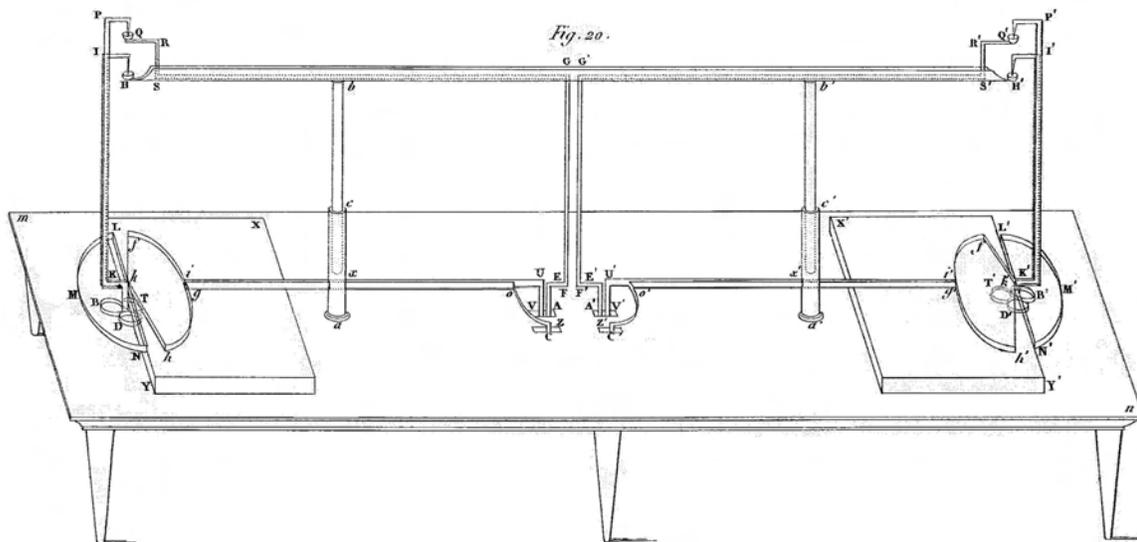


Figura 20.

de círculo que tem por centro o ponto k . As partes Ui e go são retilíneas. Elas atravessam em x o suporte ab — no qual perfurou-se uma abertura para isso — e se separam em o para mergulhar, respectivamente, nas cavidades A e C. À direita de FG encontra-se um conjunto de condutores fixos e móveis perfeitamente semelhante ao que acabamos de descrever. Quando mergulhamos o reóforo positivo da pilha em C e o negativo em C', a corrente elétrica percorre os condutores CZoghkfiUV e AEFGRQ. Daí ela passa para o condutor móvel QPONMLKIH, e se dirige a H' por HH'. Em seguida [a corrente] percorre o condutor móvel simétrico

[Páginas 64 e 236]

H'I'K'L'M'N'O'P'Q', chega em Q', segue o condutor Q'R'S'G'F'E'A' que a conduz na cavidade A', de onde se dirige a C' pelo condutor V'U'i'f'k'h'g'o'Z'C', e dali para o reóforo negativo.

Fluindo a corrente na direção LN no diâmetro LN, e de h até k , depois de k até f , nos raios hk e kf , existe uma repulsão entre estes raios e o diâmetro. Além do mais, não produzindo o circuito fechado $ghkfi$ qualquer ação sobre o semi-círculo LMN cujo centro encontra-se no eixo fixo pH , o condutor móvel só pode ser posto em movimento pela ação do setor $ghkfi$ sobre o diâmetro LN, visto que em todas as outras partes do aparelho passam duas correntes opostas cujas ações se destroem.⁹⁶ O equilíbrio se estabelecerá quando o diâmetro LN fizer ângulos iguais com os raios kf e kh . E ao afastar-se [o condutor móvel] desta posição, ele oscilará somente pela ação do setor $ghkfi$ sobre este diâmetro.

Seja 2η o ângulo ao centro do setor. Na posição de equilíbrio se terá⁹⁷

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + \eta \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2},$$

de onde se conclui

$$\cos \theta - \sin \theta = \cos \theta - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$$

⁹⁶[N. T.] Em virtude do caso de equilíbrio da não existência de forças tangenciais.

⁹⁷[N. T.] No texto original está escrito $\theta = \pi/4 + \eta$ no lado direito desta última igualdade, o que é um erro tipográfico.

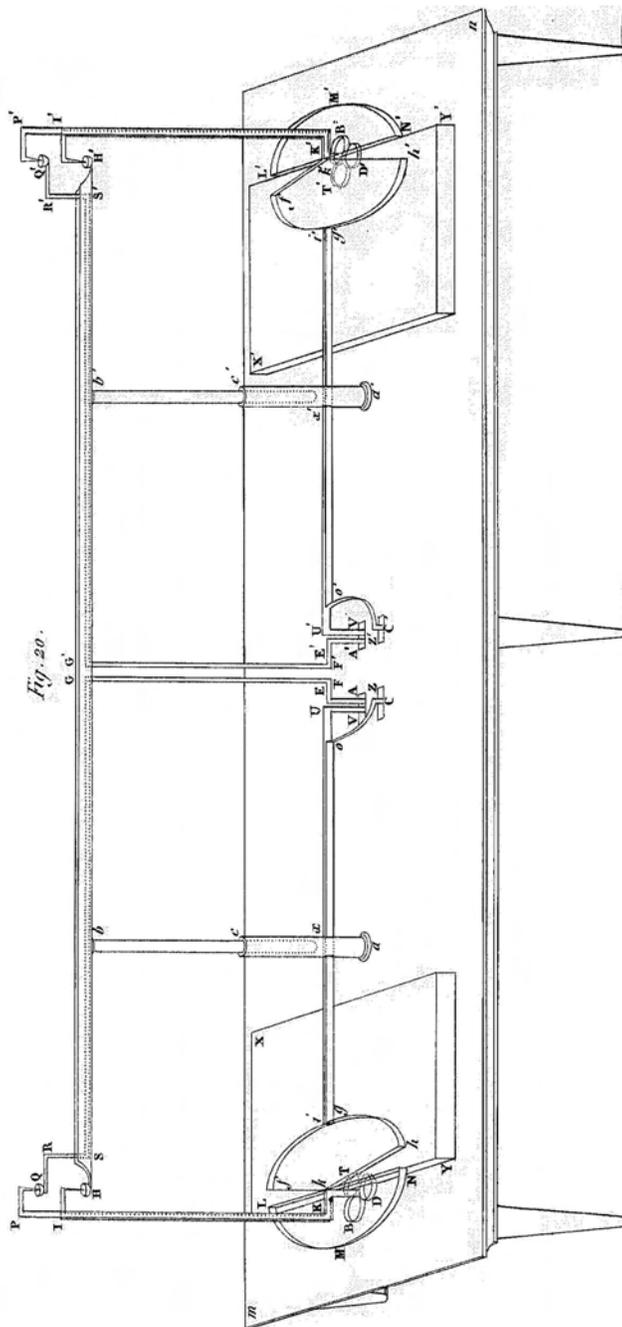


Figura 20b.

$$= -\sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \eta ,$$

e

$$\operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{2} \cos \eta .$$

Mas é fácil de ver que quando se desloca o condutor L/L'' de sua posição de equilíbrio de uma quantidade igual a $2d\theta$, o torque das forças que tendem a trazê-lo de volta [à sua posição original] se compõe destes [torques]

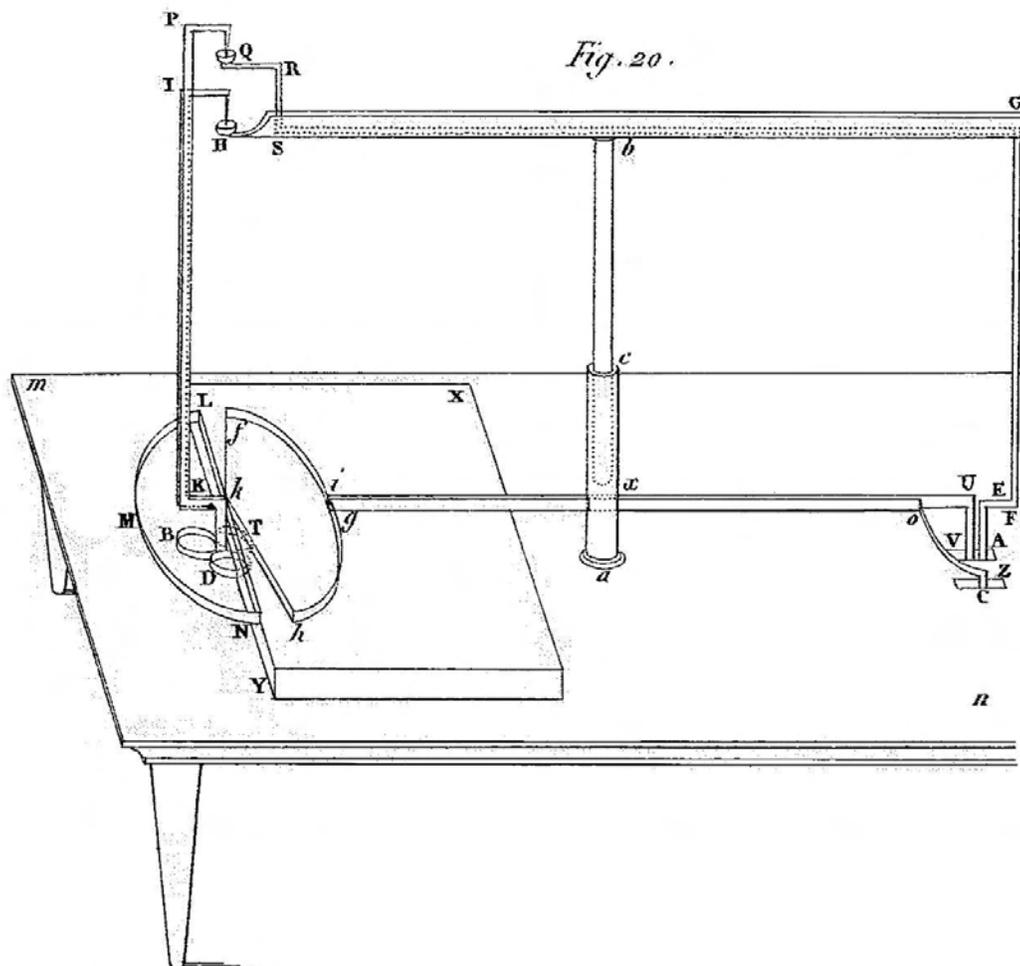


Figura 20c.

[Páginas 65 e 237]

que produzem dois pequenos setores cujo ângulo é igual a este deslocamento, e cujas ações são iguais, torque este cujo valor é, tendo em vista o que vimos até agora,

$$\frac{1}{2} \frac{a i i' (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta} d\theta = - \frac{2 a i i' \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \eta}{\cos^2 \eta} d\theta .$$

De onde segue que as durações das oscilações — para o mesmo diâmetro — serão proporcionais a

$$\frac{\sqrt{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \eta}}{\cos \eta} .$$

Fazendo então oscilar simultaneamente os condutores móveis nas duas partes simétricas do aparelho — supondo diferentes os ângulos dos setores — se terá correntes de mesma intensidade e se observará se os números das oscilações feitas em um mesmo tempo são proporcionais às duas expressões

$$\frac{\sqrt{\sin \frac{1}{2}\eta}}{\cos \eta} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{2}\eta'}}{\cos \eta'} ,$$

chamando de 2η e $2\eta'$ os ângulos ao centro dos dois setores.

14.14 Ação Mútua entre Dois Condutores Retilíneos

Examinaremos agora a ação mútua entre dois condutores retilíneos. Lembremo-nos inicialmente que chamando de β o ângulo compreendido entre a direção do elemento ds' e a direção da reta r , o valor da ação [isto é, a força] que os dois elementos de corrente elétrica ds e ds' exercem um sobre o outro já foi colocada sob a forma

$$ii' ds' r^k d (r^k \cos \beta) .$$

Multiplicando-a e dividindo-a por $\cos \beta$ e prestando atenção que $k = -1/2$ dando $r^{2k} = 1/r$, veremos que podemos

[Páginas 66 e 238]

escrevê-la assim:

$$\frac{ii' ds'}{\cos \beta} r^k \cos \beta d (r^k \cos \beta) = \frac{1}{2} \frac{ii' ds'}{\cos \beta} d \frac{(r^k \cos^2 \beta)}{r} .$$

De onde será fácil concluir que a componente desta ação ao longo da tangente ao elemento ds' , é igual a

$$\frac{1}{2} ii' ds' d \left(\frac{\cos^2 \beta}{r} \right) ,$$

e que a componente normal ao mesmo elemento é [igual] a

$$\frac{1}{2} ii' ds' \tan \beta d \left(\frac{\cos^2 \beta}{r} \right) ,$$

expressão que pode ser posta na forma

$$\frac{1}{2} ii' ds' \left[d \left(\frac{\sin \beta \cos \beta}{r} \right) - \frac{d\beta}{r} \right] .$$

Estes valores das duas componentes se encontram na página 331 do meu *Recueil d'Observations électro-dynamiques*, publicado em 1822.⁹⁸

Aplicamos a última [componente normal] no caso de duas correntes retilíneas paralelas, situadas a uma distância a uma da outra.⁹⁹

Tem-se então,

$$r = \frac{a}{\sin \beta} ,$$

⁹⁸[N. T.] Ver [Amp22e, pág. 331] e [Amp23a, pág. 9].

⁹⁹[N. T.] Os próximos cálculos relativos à ação entre duas correntes retilíneas são uma reprodução textual da Memória de 12 de setembro de 1825, [Amp25b, págs. 402-404].

e a componente normal se torna

$$\frac{1}{2}ii'ds' \left[\frac{d(\text{sen}^2\beta \cos \beta)}{a} - \frac{\text{sen} \beta d\beta}{a} \right].$$

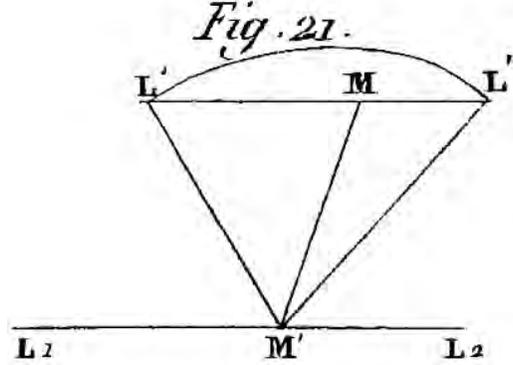


Figura 21.

Seja M' (Figura 21) um ponto qualquer da corrente que percorre a reta L_1L_2 . E [sejam] β' e β'' os ângulos $L'M'L_2$ e $L''M'L_2$ formados

[Páginas 67 e 239]

pelos raios vetores extremos $M'L'$ e $M'L''$ com L_1L_2 . A ação de ds' sobre L/L'' será obtida integrando a expressão anterior entre os limites β' e β'' , o que fornece

$$\frac{1}{2a}ii'ds' (\text{sen}^2\beta'' \cos \beta'' + \cos \beta'' - \text{sen}^2\beta' \cos \beta' - \cos \beta').$$

Mas tem-se em cada limite, representando os valores de s por b' e b'' ,

$$s' = b'' - a \cot \beta'' = b' - a \cot \beta', \quad ds' = \frac{ad\beta''}{\text{sen}^2\beta''} = \frac{ad\beta'}{\text{sen}^2\beta'}.$$

Substituindo estes valores e integrando outra vez entre os limites β'_1, β'_2 e β''_1, β''_2 , tem-se para o valor da força procurada,

$$\frac{1}{2}ii' \left(\text{sen} \beta''_2 - \text{sen} \beta''_1 - \text{sen} \beta'_2 + \text{sen} \beta'_1 - \frac{1}{\text{sen} \beta''_2} + \frac{1}{\text{sen} \beta''_1} + \frac{1}{\text{sen} \beta'_2} - \frac{1}{\text{sen} \beta'_1} \right),$$

ou¹⁰⁰

$$\frac{1}{2}ii' \left(\frac{a}{r''_2} - \frac{a}{r''_1} - \frac{a}{r'_2} + \frac{a}{r'_1} + \frac{r''_1 + r'_2 - r''_2 - r'_1}{a} \right).$$

¹⁰⁰[N. T.] Nas versões impressas em 1826 e em 1827 aparece

$$\frac{1}{2}ii' \left(\frac{a}{r''_2} - \frac{a}{r''_1} - \frac{a}{r'_2} + \frac{a}{r'_1} \right) + \frac{r''_1 + r'_2 - r''_2 - r'_1}{a}.$$

Se os dois condutores têm o mesmo comprimento e são perpendiculares às retas que unem as duas extremidades de um mesmo lado, tem-se

$$r'_1 = r''_2 = a, \quad \text{e} \quad r'_2 = r''_1 = c,$$

denominando de c a diagonal do retângulo formado por estas duas retas e pelas duas direções das correntes. A expressão anterior torna-se então

$$ii' \left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right) = \frac{ii'l^2}{ac},$$

[Páginas 68 e 240]

denominando de l o comprimento dos condutores. E quando este retângulo torna-se um quadrado, tem-se $ii'/\sqrt{2}$ para o valor da força. Enfim, ao se supor um destes condutores indefinido nos dois sentidos [isto é, de comprimento infinito], e que l seja o tamanho do outro, os termos onde r'_1 , r'_2 , r''_1 e r''_2 se encontram no denominador desaparecerão. Se terá então

$$r'_2 + r''_1 - r''_2 - r'_1 = 2l,$$

e a expressão da força se tornará

$$\frac{ii'l}{a},$$

que se reduz a ii' quando o comprimento l é igual à distância a .

Quanto à ação de duas correntes paralelamente à direção de s' , ela pode ser obtida qualquer que seja a forma da corrente s . Com efeito, sendo a componente ao longo de ds' [igual a]

$$\frac{1}{2} ii' ds' d \left(\frac{\cos^2 \beta}{r} \right),$$

a ação total que exerce ds' nesta direção sobre a corrente $L'L''$ (Figura 21) vale

$$\frac{1}{2} ii' ds' \left(\frac{\cos^2 \beta''}{r''} - \frac{\cos^2 \beta'}{r'} \right),$$

e é notável que ela [a ação ou força] depende somente da posição das extremidades L' e L'' do condutor s . Ela é então a mesma, qualquer que seja a forma deste condutor, que pode ser curvado ao longo de uma linha qualquer.

Ao se denominar de a' e a'' às perpendiculares traçadas a partir das

[Páginas 69 e 241]

Na errata que aparece no final do trabalho de 1827 pede-se para mudar esta expressão para a seguinte equação:

$$\frac{1}{2} ii' \left(\frac{a}{r''_2} - \frac{a}{r''_1} - \frac{a}{r'^2} + \frac{a}{r'_1} + \frac{r''_1 + r'_2 - r''_2 - r'_1}{a} \right).$$

Já a errata de 1826 corrige não apenas as versões impressas nos textos de 1826 e de 1827, quanto a própria errata de 1827. Esta errata de 1827 havia corrigido o fechamento do parêntese, mas ao mesmo tempo introduziu um erro na terceira fração. A errata de 1826 indica que o correto é a forma exibida no texto.

duas extremidades da porção do condutor $L'L''$ — que se considera como móvel — sobre o condutor retilíneo ao qual se trata de calcular a ação [exercida sobre o condutor móvel] paralela à sua direção, se terá

$$r'' = \frac{a''}{\text{sen } \beta''}, \quad r' = \frac{a'}{\text{sen } \beta'},$$

$$ds' = -\frac{dr''}{\cos \beta''} = \frac{a'' d\beta''}{\text{sen}^2 \beta''} = -\frac{dr'}{\cos \beta'} = \frac{a' d\beta'}{\text{sen}^2 \beta'},$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{ds'}{r''} = \frac{d\beta''}{\text{sen } \beta''}, \quad \frac{ds'}{r'} = \frac{d\beta'}{\text{sen } \beta'}.$$

De onde é fácil concluir que a integral procurada é

$$-\frac{1}{2}ii' \int \left(\frac{\cos^2 \beta'' d\beta''}{\text{sen } \beta''} - \frac{\cos^2 \beta' d\beta'}{\text{sen } \beta'} \right)$$

$$= -\frac{1}{2}ii' \left(\ln \frac{\tan \frac{1}{2}\beta''}{\tan \frac{1}{2}\beta'} + \cos \beta'' - \cos \beta' + C \right).$$

Se precisará tomar esta integral entre os limites determinados pelas duas extremidades do condutor retilíneo. Denominando β'_1, β'_2 e β''_1, β''_2 os valores de β' e β'' relativos a estes limites, tem-se imediatamente [o valor] da força exercida pelo condutor retilíneo, e este último [valor] somente depende, evidentemente, dos quatro ângulos $\beta'_1, \beta'_2, \beta''_1$ e β''_2 .

Quando se quer o valor desta força para o caso onde o condutor retilíneo se estende indefinidamente nos dois sentidos, é necessário fazer $\beta'_1 = \beta''_1 = 0$ e $\beta'_2 = \beta''_2 = \pi$. Parece, a primeira vista, que [o valor da força] será nulo, o que seria contrário à experiência. Mas vê-se facilmente que a parte da integral onde entram os co-senos destes quatro ângulos é a

[Páginas 70 e 242]

única que vai a zero neste caso, e que o restante da integral

$$\frac{1}{2}ii' \left(\ln \frac{\tan \frac{1}{2}\beta''_1}{\tan \frac{1}{2}\beta'_1} - \ln \frac{\tan \frac{1}{2}\beta''_2}{\tan \frac{1}{2}\beta'_2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}ii' \ln \frac{\tan \frac{1}{2}\beta''_1 \cot \frac{1}{2}\beta'_2}{\tan \frac{1}{2}\beta'_1 \cot \frac{1}{2}\beta''_2},$$

já que se tem $\beta''_2 = \pi - \beta''_1$ e $\beta'_2 = \pi - \beta'_1$, torna-se [igual a:]

$$\frac{1}{2}ii' \ln \frac{\tan^2 \frac{1}{2}\beta''_1}{\tan^2 \frac{1}{2}\beta'_1} = \frac{1}{2}ii' \ln \frac{\tan \frac{1}{2}\beta''_1}{\tan \frac{1}{2}\beta'_1} = ii' \ln \frac{a''}{a'}.$$

Este valor mostra então que a força procurada depende somente da razão entre as duas perpendiculares a'' e a' ,¹⁰¹ traçadas sobre o condutor retilíneo indefinido a partir das duas extremidades da porção do condutor sobre o qual ele age. [Este valor mostra] ainda que ela é independente da forma desta porção, e somente torna-se nula — como deve ser — quando as duas perpendiculares são iguais entre si.

¹⁰¹[N. T.] No original aparece a' e a' por um erro tipográfico.

Para ter a distância desta força até o condutor retilíneo, cuja direção é paralela à sua, é necessário multiplicar cada uma das forças elementares nas quais ela se compõe por sua distância do condutor, e integrar o resultado com relação aos mesmos limites. Se terá assim o torque que será preciso dividir pela força para encontrar a distância procurada.

Encontra-se facilmente, conforme os valores acima, que o torque elementar tem por valor

$$\frac{1}{2}ii'ds'r \operatorname{sen} \beta d \frac{\cos^2 \beta}{r} .$$

Este valor somente pode ser integrado quando se tenha substituído nesta expressão uma das variáveis r ou β por seu valor em função da outra [variável], obtido a partir das equações que determinam a forma da porção

[Páginas 71 e 243]

móvel do condutor. Ele se torna muito simples quando esta porção se encontra sobre uma reta traçada por um ponto qualquer do condutor retilíneo que se considera como fixo, perpendicularmente à sua direção, pois ao considerar este ponto como a origem de s' , tem-se

$$r = \frac{s'}{\cos \beta} ,$$

e [tem-se] que s' é uma constante em relação à diferencial

$$d \frac{\cos^2 \beta}{r} .$$

O valor do torque elementar torna-se então

$$\frac{1}{2}ii'ds' \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} d(\cos^3 \beta) = -\frac{3}{2}ii'ds' \operatorname{sen}^2 \beta \cos \beta d\beta ,$$

cuja integral entre os limites β'' e β' é

$$-\frac{1}{2}ii'ds' (\operatorname{sen}^3 \beta'' - \operatorname{sen}^3 \beta') .$$

Substituindo ds' pelos valores desta diferencial encontradas acima, e integrando outra vez, tem-se, entre os limites determinados do condutor retilíneo,

$$\frac{1}{2}ii' [a'' (\cos \beta_2'' - \cos \beta_1'') - a' (\cos \beta_2' - \cos \beta_1')] .$$

Ao se supor que o condutor se estende indefinidamente nos dois sentidos, será necessário fornecer a β_1' , β_1'' , β_2' e β_2'' os valores que já indicamos para eles neste caso. Com isto se terá para o valor do torque procurado,

$$-ii' (a'' - a') ,$$

que será, conseqüentemente,

[Páginas 72 e 244]

proporcional ao comprimento $a'' - a'$ do condutor móvel — e não mudará em nada enquanto este comprimento permanecer o mesmo — quaisquer que sejam, além disso, as distâncias das extremidades deste último condutor ao condutor que é considerado como fixo.

Calculemos agora a ação exercida por um arco NM curvado de uma maneira arbitrária para fazer um arco do círculo L_1L_2 girar ao redor de seu centro.

Fig. 23.

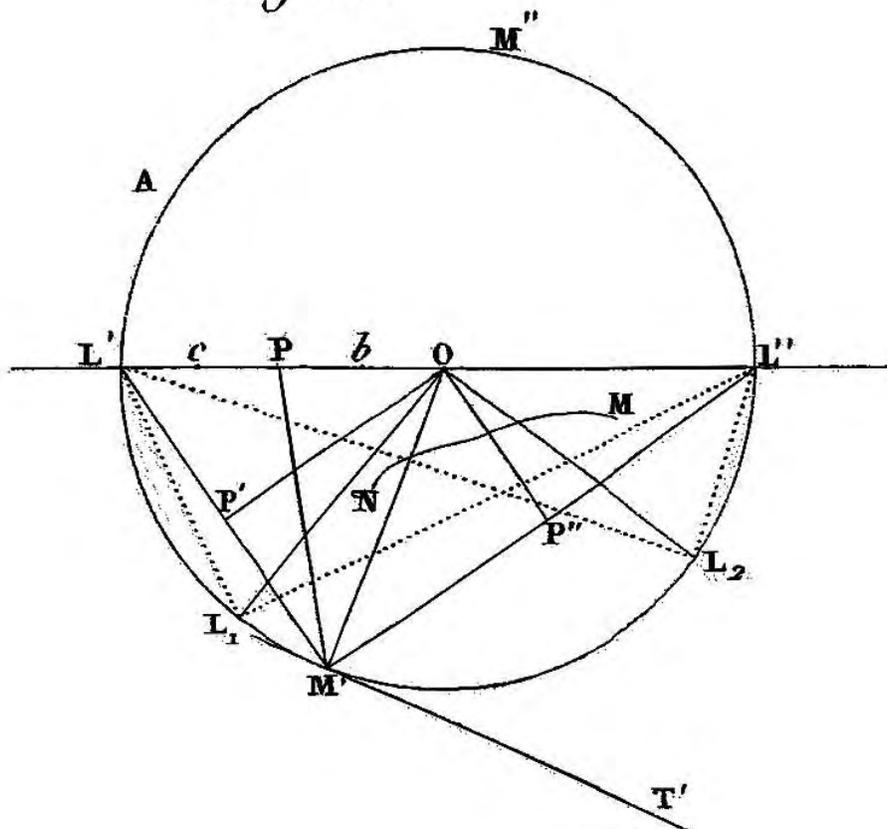


Figura 23.

Seja M' (Figura 23)¹⁰² o centro de um elemento qualquer ds' do arco L_1L_2 , e a o raio do círculo. O torque de um elemento ds de MN para fazer ds' girar em torno do centro O se obtém multiplicando a componente tangente em M' por sua distância a até o ponto fixo. Isto fornece

$$\frac{1}{2} a i i' ds' d \frac{\cos^2 \beta}{r} .$$

Denominando β' , β'' e r' , r'' os valores de β e de r relativos aos limites M e N , tem-se para o torque sobre ds'

$$\frac{1}{2} a i i' ds' \left(\frac{\cos^2 \beta''}{r''} - \frac{\cos^2 \beta'}{r'} \right) .$$

Este resultado só depende da posição das extremidades M e N .

Concluiremos o cálculo supondo que a linha MN seja um diâmetro $L'L''$ do mesmo círculo.

¹⁰²[N. T.] Na Figura 23 do *Théorie* publicado em 1827 aparece uma letra p no segmento de reta entre as letras c e P desta Figura 23 de 1826. Esta letra p não é mencionada no texto de Ampère.

Denominando 2θ o ângulo $M'OL'$, sendo $M'T'$ a tangente em M' , os ângulos $L'M'T'$ e $L''M'T'$ serão, respectivamente, β' e β'' , e se terá evidentemente

$$\cos \beta' = -\cos \theta, \quad \cos \beta'' = \sin \theta, \quad r' = 2a \sin \theta, \quad r'' = 2a \cos \theta .$$

A ação do diâmetro $L'L''$ para fazer o elemento situado em M' girar

[Páginas 73 e 245]

será então

$$\frac{1}{4}ii'ds' \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right) .$$

Quando se considera um ponto qualquer A da circunferência como sendo a origem dos arcos, e quando se faz $AL' = C$, tem-se

$$s' = C + 2a\theta \quad \text{e} \quad ds' = 2ad\theta ,$$

o que muda a expressão anterior para

$$\frac{1}{2}a ii' \left(\frac{\sin^2 \theta d\theta}{\cos \theta} - \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sin \theta} \right) .$$

É necessário integrar [a expressão anterior] em toda a extensão do arco L_1L_2 para ter o torque sobre este arco ao redor de seu centro.

Ora, tem-se que

$$\int \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\cos \theta} = \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\theta \right) - \sin \theta + C_1 ,$$

$$\int \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sin \theta} = \ln \tan \frac{1}{2}\theta + \cos \theta + C' .$$

Logo, se chamamos os ângulos $L'OL_1$ e $L'OL_2$ de $2\theta_1$ e de $2\theta_2$ o torque total sobre o arco L_1L_2 será

$$\frac{a}{2}ii' \left\{ \ln \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\theta_2 \right) \tan \frac{1}{2}\theta_1}{\tan \frac{1}{2}\theta_2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\theta_1 \right)} - \sin \theta_2 - \cos \theta_2 + \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \right\} .$$

Esta expressão — trocando de sinal — fornece o valor do torque sobre o diâmetro $L'L''$ devido à ação do arco L_1L_2 .

No aparelho que descrevi anteriormente, um condutor que tem a forma de um setor circular, age sobre um outro condutor composto de um diâmetro e de uma semi-circunferência que é móvel ao redor de um eixo passando pelo

[Páginas 74 e 246]

centro desta semi-circunferência e perpendicular a seu plano. A ação que ele sofre da parte do setor é destruída pela resistência do eixo, já que o contorno que forma o setor é fechado. Portanto, somente resta a ação sobre o diâmetro. Já calculamos [a ação] do arco, nos resta apenas obter [as ações] dos raios deste setor sobre o mesmo diâmetro.

Para determiná-las, procuraremos o torque que resulta da ação mútua entre as duas correntes retilíneas situadas no mesmo plano, e que tende a fazê-las girar em sentido contrário ao redor do ponto de encontro de suas direções.

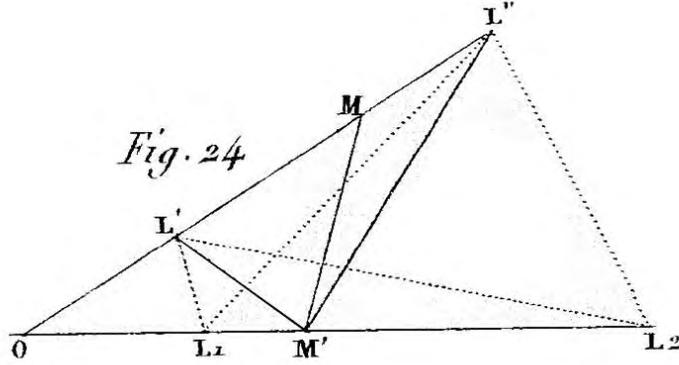


Figura 24.

A componente normal ao elemento ds' situado em M' (Figura 24) é, como vimos anteriormente,

$$\frac{1}{2}ii'ds' \left(d \frac{\text{sen } \beta \cos \beta}{r} - \frac{d\beta}{r} \right).$$

O torque de ds para fazer ds' girar ao redor de O é obtido multiplicando esta força por s' . Se terá então, denominando por M o torque total¹⁰³

$$\frac{d^2 M}{ds ds'} ds ds' = \frac{1}{2}ii' s' ds' \left(d \frac{\text{sen } \beta \cos \beta}{r} - \frac{d\beta}{r} \right),$$

de onde, integrando em relação a s ,

$$\frac{dM}{ds'} ds' = \frac{1}{2}ii' s' ds' \left(\frac{\text{sen } \beta \cos \beta}{r} - \int \frac{d\beta}{r} \right).$$

Mas — da maneira em que os ângulos foram considerados no cálculo da fórmula que representa a ação mútua entre dois elementos de condutores voltaicos — o ângulo $MM'L_2 = \beta$ é externo ao triângulo OMM' . E, denominando por ε o ângulo MOM' compreendido entre as direções das duas correntes, encontra-se que o terceiro ângulo OMM' é igual a $\beta - \varepsilon$, o que fornece

[Páginas 75 e 247]

$$r = \frac{s' \text{sen } \varepsilon}{\text{sen } (\beta - \varepsilon)},$$

tem-se então

$$\frac{dM}{ds'} ds' = \frac{1}{2}ii' \frac{ds'}{\text{sen } \varepsilon} [\cos \beta \text{sen } \beta \text{sen } (\beta - \varepsilon) + \cos(\beta - \varepsilon) + C].$$

Substituindo nesta expressão $\cos(\beta - \varepsilon)$ por

$$\cos^2 \beta \cos(\beta - \varepsilon) + \text{sen}^2 \beta \cos(\beta - \varepsilon),$$

¹⁰³[N. T.] No original o torque total é representado por M por vir da expressão em francês “moment de rotation.”

vê-se facilmente que ela se reduz a

$$\frac{dM}{ds'} ds' = \frac{1}{2} ii' \frac{ds'}{\text{sen } \varepsilon} [\cos \varepsilon \cos \beta + \text{sen }^2 \beta \cos(\beta - \varepsilon) + C] ,$$

onde é necessário considerá-la entre os limites β' e β'' . Tem-se assim a diferença de duas funções de mesma forma, uma de β'' , a outra de β' , que é necessário integrar outra vez para ter o torque procurado. É suficiente fazer esta segunda integração sobre apenas uma destas duas grandezas. Seja então a'' a distância OL'' que corresponde a β'' , tem-se, no triângulo $OM'L''$,¹⁰⁴

$$s' = \frac{a'' \text{sen}(\beta'' - \varepsilon)}{\text{sen } \beta''} = a'' \cos \varepsilon - a'' \text{sen } \varepsilon \cot \beta'' , \quad ds' = \frac{a'' \text{sen } \varepsilon d\beta''}{\text{sen }^2 \beta''} .$$

Logo, a quantidade que nos propusemos a integrar inicialmente, torna-se

$$\frac{1}{2} a'' ii' \left[\frac{\cos \varepsilon \cos \beta'' d\beta''}{\text{sen }^2 \beta''} + \cos(\beta'' - \varepsilon) d\beta'' \right] ,$$

onde a integral tomada entre os limites β''_1 e β''_2 é

$$\frac{1}{2} a'' ii' \left[\text{sen}(\beta''_2 - \varepsilon) - \text{sen}(\beta''_1 - \varepsilon) - \frac{\cos \varepsilon}{\text{sen } \beta''_2} + \frac{\cos \varepsilon}{\text{sen } \beta''_1} \right] .$$

Designando por p''_2 e p''_1 ,¹⁰⁵ as perpendiculares traçadas

[Páginas 76 e 248]

do ponto O sobre as distâncias $L''L_2 = r''_2$ e $L''L_1 = r''_1$, tem-se evidentemente

$$a'' \text{sen}(\beta''_2 - \varepsilon) = p''_2 , \quad a'' \text{sen}(\beta''_1 - \varepsilon) = p''_1 ,$$

$$\frac{a''}{\text{sen } \beta''_2} = \frac{r''_2}{\text{sen } \varepsilon} , \quad \frac{a''}{\text{sen } \beta''_1} = \frac{r''_1}{\text{sen } \varepsilon} ,$$

e a integral anterior fica na forma

$$\frac{1}{2} ii' [p''_2 - p''_1 - (r''_2 - r''_1) \cot \varepsilon] .$$

Caso se preste atenção que denominando a distância OL' por a' , tem-se também, no triângulo $OM'L'$,

$$s' = \frac{a' \text{sen}(\beta' - \varepsilon)}{\text{sen } \beta'} = a' \cos \varepsilon - a' \text{sen } \varepsilon \cot \beta' , \quad ds' = \frac{a' \text{sen } \varepsilon d\beta'}{\text{sen }^2 \beta'} ,$$

[então] vê-se facilmente que a integral da outra grandeza é encontrada a partir da integral que acabamos de obter, mudando nela p''_2 , p''_1 , r''_2 e r''_1 por p'_2 , p'_1 , r'_2 e r'_1 . Isto fornece para o valor do torque que é a diferença das duas integrais,

$$\frac{1}{2} ii' [p''_2 - p''_1 - p'_2 + p'_1 - (r''_2 - r''_1 - r'_2 + r'_1) \cot \varepsilon] .$$

¹⁰⁴[N. T.] No original a última fração está escrita como $ds' = \frac{a'' \text{sen } r d\beta''}{\text{sen }^2 \beta''}$. Isto é um erro tipográfico, pois se está diferenciando a expressão de s' em relação a β'' e não tem porque aparecer uma variável em r .

¹⁰⁵[N. T.] No original está escrito p''_2 e p''_2 . Isto é um erro tipográfico. Na continuação observa-se que Ampère está associando p''_2 com r''_2 e p''_1 com r''_1 . Este erro tipográfico também consta na reedição do *Théorie* de 1887, [Amp87c, pág. 68], assim como na reedição de 1958, [Amp58, pág. 57].

Este valor se reduz ao que encontramos acima, no caso onde o ângulo ε é reto, porque então $\cot \varepsilon = 0$.

Quando¹⁰⁶ se supõe que as duas correntes partem do ponto O, e que seus comprimentos OL'' e OL₂ (Figura 22)¹⁰⁷ estão representados por a e b , respectivamente, a perpendicular OP [é representada] por p , e a distância L''L₂ [é representada] por r , tem-se $p'' = p$, $p'_1 = p'_2 = p'_1 = 0$, $r'' = r$, $r''_1 = a$, $r'_2 = b$, $r'_1 = 0$, e tem-se então para o valor assumido pelo torque [a seguinte expressão:]

$$\frac{1}{2}ii' [p + (a + b - r) \cot \varepsilon] .$$

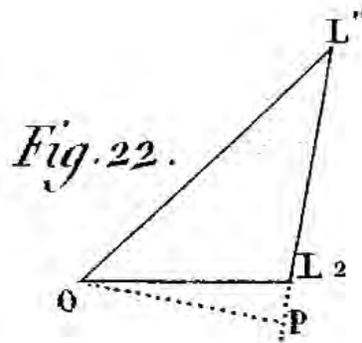


Figura 22.

[Páginas 77 e 249]

A grandeza $a + b - r$, que é o excesso da soma dos dois lados de um triângulo em relação ao terceiro lado, é sempre positiva. De onde segue que o torque é maior que o valor $ii'p/2$ que ele assume quando o ângulo ε entre os dois condutores é reto, desde que $\cot \varepsilon$ seja positivo, ou seja, desde que este ângulo seja agudo. Mas ele torna-se menor quando este mesmo ângulo é obtuso, porque então $\cot \varepsilon$ é negativo. Por outro lado, é evidente que seu valor é tanto maior quanto menor for o ângulo ε , e que ele cresce para o infinito como $\cot \varepsilon$ na medida em que ε se aproxima de zero. Mas é importante mostrar que ele permanece sempre positivo por mais próximo que este ângulo esteja de dois [ângulos] retos.

É suficiente para isso prestar atenção que denominando por α o ângulo do triângulo OL''L₂ compreendido entre os lados a e r , e por β o [ângulo] que está entre os lados b e r , tem-se

$$\cot \varepsilon = -\cot(\alpha + \beta), \quad p = a \sin \alpha = b \sin \beta, \quad r = a \cos \alpha + b \cos \beta ,$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} a + b - r &= a(1 - \cos \alpha) + b(1 - \cos \beta) \\ &= p \tan \frac{1}{2}\alpha + p \tan \frac{1}{2}\beta , \end{aligned}$$

¹⁰⁶[N. T.] Nas versões impressas em 1826 e em 1827 aparece a palavra “quant” em vez de “quand.” Mas em uma errata que aparece no final do trabalho chama-se a atenção que o correto é esta última palavra.

¹⁰⁷[N. T.] Nos originais publicados em 1826 e em 1827 estava escrito Figura 24. Mas de acordo com a errata no final do trabalho, o correto é mesmo Figura 22.

e

$$\frac{1}{2}ii' [p + (a + b - r) \cot \varepsilon] = \frac{1}{2}ii' p \left(1 - \frac{\tan \frac{1}{2}\alpha + \tan \frac{1}{2}\beta}{\tan(\alpha + \beta)} \right) ,$$

valor que sempre permanece positivo, por menores que sejam os ângulos α e β , já que $\tan(\alpha + \beta)$, para ângulos menores que $\pi/4$, é sempre maior que $\tan \alpha + \tan \beta$, e [cresce] em uma taxa maior do que $\tan \frac{1}{2}\alpha + \tan \frac{1}{2}\beta$. Este valor

[Páginas 78 e 250]

tende evidentemente para o limite $ii'p/4$ na medida que os ângulos α e β se aproximam de zero. E este valor vai a zero com p quando estes ângulos tornam-se nulos.

Retomemos agora o valor geral do torque fazendo aparecer apenas as distâncias¹⁰⁸ $OL'' = a''$ (Figura 24) e $OL' = a'$, e os diferentes ângulos, valor que é dado por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}ii' [a'' \text{sen}(\beta_2'' - \varepsilon) - a'' \text{sen}(\beta_1'' - \varepsilon) - a' \text{sen}(\beta_2' - \varepsilon) \\ & + a' \text{sen}(\beta_1' - \varepsilon) - \frac{a'' \cos \varepsilon}{\text{sen} \beta_2''} + \frac{a'' \cos \varepsilon}{\text{sen} \beta_1''} + \frac{a' \cos \varepsilon}{\text{sen} \beta_2'} - \frac{a' \cos \varepsilon}{\text{sen} \beta_1'}] , \end{aligned}$$

e apliquemo-lo ao caso onde um dos condutores $L'L''$ (Figura 25) é retilíneo e móvel ao redor de seu centro L_1 , e onde o outro [condutor] parte deste centro. Fazendo $L'L'' = 2a$, tem-se

$$a'' = a, \quad a' = -a, \quad \beta_1' = \pi + \varepsilon, \quad \text{sen} \beta_1' = -\text{sen} \beta_1'' ,$$

e designando como anteriormente as perpendiculares traçadas a partir de L_1 sobre¹⁰⁹ $L'L_2$ e $L''L_2$, a expressão do torque torna-se

$$\frac{1}{2}ii' \left(p_2'' + p_2' - \frac{a \cos \varepsilon}{\text{sen} \beta_2''} - \frac{a \cos \varepsilon}{\text{sen} \beta_2'} \right) .$$

Ora

$$\text{sen} \beta_2'' : a :: \text{sen} \varepsilon : r_2'' \quad \text{e} \quad -\text{sen} \beta_2' : a :: \text{sen} \varepsilon : r_2' ,$$

e os valores de r_2'' e de r_2' obtidos destas proporções e substituídos na expressão anterior a transformam em

$$\frac{1}{2}ii' [p_2'' + p_2' - \cot \varepsilon (r_2' - r_2'')] .$$

Quando se supõe L_1L_2 infinito, tem-se $p_2'' = p_2' = a \text{sen} \varepsilon$, $r_2' - r_2'' = 2a \cos \varepsilon$, e este valor do torque se reduz a

$$\frac{1}{2}aai' \left(2 \text{sen} \varepsilon + \frac{2 \cos^2 \varepsilon}{\text{sen} \varepsilon} \right) = \frac{aai'}{\text{sen} \varepsilon} .$$

¹⁰⁸[N. T.] Tanto no *Théorie* de 1826 quanto no de 1827 aparece aqui $OL'' = a''$ e $OL' = a'$. Apenas na versão de 1826 aparece uma errata informando para escrever $OL'' = a''$ (Figura 24) e $OL' = a'$. Esta Figura 24 aparece na nossa página 234.

¹⁰⁹[N. T.] Nas versões impressas em 1826 e em 1827 aparece $L'L_2L''L_2$ em vez de $L'L_2$ e $L''L_2$. Mas em uma errata que aparece no final do trabalho chama-se a atenção que o correto é esta última forma.

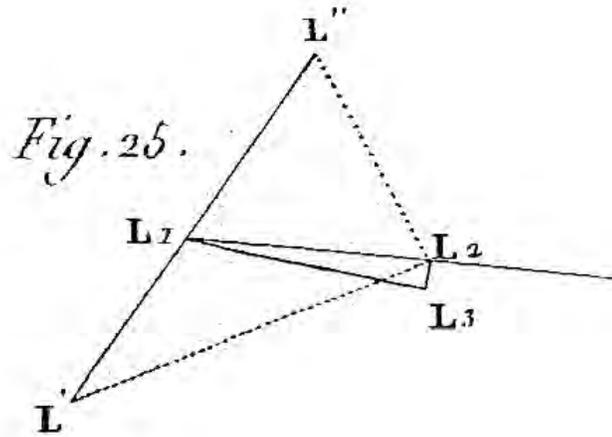


Figura 25.

[Páginas 79 e 251]

Portanto, ele é inversamente proporcional ao seno do ângulo entre as duas correntes, e proporcional ao comprimento da corrente finita.

Quando $L_1L_2 = L'L''/2 = a$ e quando se representa o ângulo $L'L_1L_2$ por 2θ , tem-se $p'_2 = a \operatorname{sen} \theta$, $p'_2 = a \cos \theta$, $r'_2 = 2a \operatorname{sen} \theta$, $r'_2 = 2a \cos \theta$ e $\cot \varepsilon = -\cot 2\theta$, e o torque torna-se

$$\frac{1}{2} a i i' [\cos \theta + \operatorname{sen} \theta + 2 \cot 2\theta (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)] .$$

Substituindo $2 \cot 2\theta$ pelo seu valor

$$\frac{1 - \tan^2 \theta}{\tan \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} = \frac{(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} ,$$

encontra-se que o valor deste torque é igual a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a i i' (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) \left[1 + \frac{(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta)^2}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \right] \\ & = \frac{1}{2} a i i' (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} - 1 \right) . \end{aligned}$$

Para ter a soma das ações dos dois raios entre os quais compreende-se um setor infinitamente pequeno cujo arco é $d\varepsilon$, é necessário prestar atenção que estes dois raios estando percorridos [por correntes fluindo] em sentidos contrários, esta soma torna-se igual à diferencial da expressão anterior. Encontra-se assim que ela é representada por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a i i' \left[(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta) \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} - 1 \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta} \right] d\theta \\ & = \frac{1}{2} a i i' (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta) \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} - 1 - \frac{(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta} \right) d\theta \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}aii' (\cos \theta - \sin \theta) \left(\frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} + 1 \right) d\theta .$$

Mas a ação do arco L_2L_3 sobre o diâmetro $L'L''$ é igual e

[Páginas 80 e 252]

oposta à ação que o diâmetro exerce sobre o arco para fazê-lo girar ao redor de seu centro. O torque desta ação, de acordo com o que acabamos de ver, é então igual a

$$\frac{1}{2}aii' \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) d\theta = \frac{1}{2}aii' (\cos \theta - \sin \theta) \left(\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} + 1 \right) d\theta .$$

E somando-o ao anterior, tem-se para o torque que resulta da ação do setor infinitamente pequeno sobre o diâmetro $L'L''$ [o seguinte valor:]

$$-\frac{1}{2}aii' (\cos \theta - \sin \theta) \frac{d\theta}{\sin \theta \cos \theta} .$$

Este valor somente difere pelo sinal do [valor] que já encontramos para o mesmo torque, diferença que vem, evidentemente, [do fato] que obtivemos esta última [expressão] da fórmula relativa à ação de um circuito fechado muito pequeno sobre um elemento, onde tínhamos mudado o sinal de C para torná-la positiva.

Examinemos agora a ação que duas correntes retilíneas, que não estão em um mesmo plano, exercem uma sobre a outra, seja para se mover paralelamente à perpendicular comum, seja para girar ao redor desta reta.

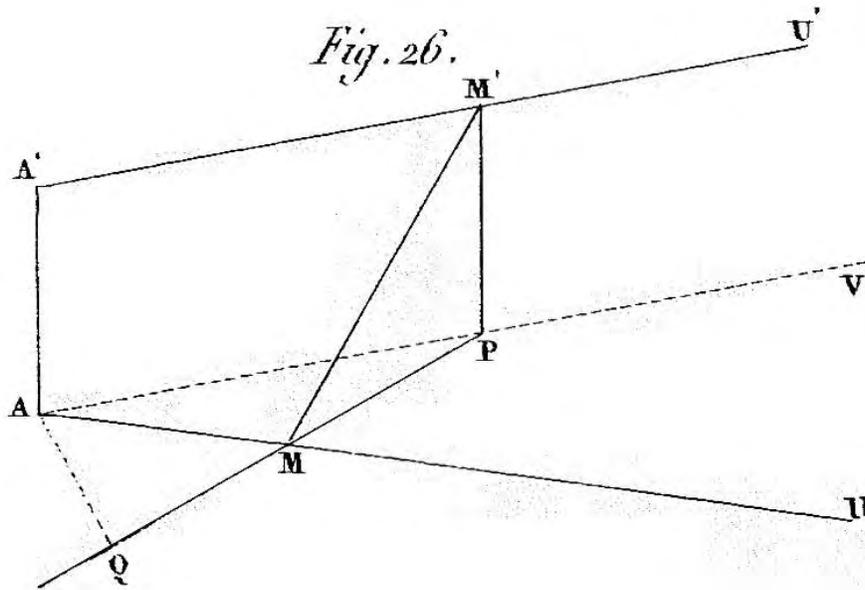


Figura 26.

Sejam AU e $A'U'$ as duas correntes (Figura 26), $AA' = a$ sua perpendicular comum e AV uma [reta] paralela à [corrente] $A'U'$. A ação [isto é, a força] entre dois elementos situados em M e M' , quando se faz $n = 2$ e $h = k - 1 = -3/2$ na fórmula geral

$$\frac{ii' ds ds'}{r^n} (\cos \varepsilon + h \cos \theta \cos \theta') ,$$

se torna

$$\frac{1}{2} \frac{ii' ds ds'}{r^2} \left(2 \cos \varepsilon + 3 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right),$$

devido a que

$$\cos \theta = \frac{dr}{ds}, \quad \cos \theta' = -\frac{dr}{ds'}.$$

[Páginas 81 e 253]

Mas fazendo $AM = s$, $A'M' = s'$ e $VAU = \varepsilon$, tem-se

$$r^2 = a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon,$$

de onde [tem-se]

$$r \frac{dr}{ds} = s - s' \cos \varepsilon, \quad r \frac{dr}{ds'} = s' - s \cos \varepsilon, \quad r \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} = -\cos \varepsilon.$$

E como

$$\frac{d\frac{1}{r}}{ds} = -\frac{\frac{dr}{ds}}{r^2},$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'} = -\frac{r \frac{d^2 r}{ds ds'} - 2 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}}{r^3} = \frac{\cos \varepsilon + 3 \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'}}{r^3},$$

o valor da ação entre os dois elementos torna-se

$$\frac{1}{2} ii' ds ds' \left(\frac{\cos \varepsilon}{r^2} + r \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'} \right).$$

Para ter a componente paralela à [reta] AA' , é necessário multiplicar esta expressão pelo co-seno do ângulo $MM'P$ que MM' faz com $M'P$ paralela à [reta] AA' , ou seja, por $M'P/M'M$, ou por a/r , o que fornece

$$\frac{1}{2} aii' ds ds' \left(\frac{\cos \varepsilon}{r^3} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'} \right).$$

E integrando em toda a extensão das duas correntes, encontra-se para a ação total

$$\frac{1}{2} aii' \left(\frac{1}{r} + \cos \varepsilon \int \int \frac{ds ds'}{r^3} \right).$$

Se as duas correntes fazem entre si um ângulo reto, tem-se $\cos \varepsilon = 0$, e a ação paralela à [reta] AA' se reduz a, tomando

[Páginas 82 e 254]

a integral entre os limites convenientes, e empregando as mesmas notações acima:

$$\frac{1}{2} ii' \left(\frac{a}{r_2''} - \frac{a}{r_1''} - \frac{a}{r_2'} + \frac{a}{r_1'} \right).$$

Esta expressão é proporcional à distância mais curta entre as correntes e, conseqüentemente, torna-se nula quando elas estão em um mesmo plano, como deveria ser, evidentemente.

Se as correntes são paralelas, tem-se $\varepsilon = 0$ e

$$r^2 = a^2 + (s - s')^2 ,$$

de onde

$$\begin{aligned} \int \int \frac{ds ds'}{r^3} &= \int ds' \int \frac{ds}{[a + (s - s')^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int ds' \frac{s - s'}{a^2 \sqrt{a^2 + (s - s')^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - (s - s')^2}}{a^2} = -\frac{r}{a^2} , \end{aligned}$$

ou seja, entre os limites de integração,

$$\frac{r'_2 + r''_1 - r'_1 - r''_2}{a^2} .$$

E como $\cos \varepsilon = 1$, a ação total torna-se

$$\frac{1}{2} ii' \left(\frac{a}{r''_2} - \frac{a}{r'_2} - \frac{a}{r''_1} + \frac{a}{r'_1} + \frac{r''_1 + r'_2 - r''_2 - r'_1}{a^2} \right) .$$

Veremos mais adiante como se faz a integração no caso de um ângulo ε qualquer.

Procuramos agora o torque ao redor da perpendicular comum. Para isso é necessário inicialmente conhecer a componente ao longo de MP, e multiplicá-la pela perpendicular AQ traçada de A sobre MP, o que significa

[Páginas 83 e 255]

multiplicar a força ao longo de MM' por $\frac{MP}{MM'}AQ$, ou por, $ss' \sin \varepsilon / r$. Assim se terá

$$\frac{1}{2} ii' \sin \varepsilon \left(ss' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'} ds ds' + ss' \frac{\cos \varepsilon ds ds'}{r^3} \right) .$$

Colocando $ss'/r = q$, se terá

$$\frac{dq}{ds} = \frac{s'}{r} + \frac{ss' d \frac{1}{r}}{ds} ,$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{ds ds'} &= \frac{1}{r} - \frac{s'}{r^2} \frac{dr}{ds'} - \frac{s}{r^2} \frac{dr}{ds} + ss' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{s'(s' - s \cos \varepsilon) + s(s - s' \cos \varepsilon)}{r^3} + ss' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'} . \end{aligned}$$

E, simplificando

$$\frac{d^2 q}{ds ds'} = \frac{a^2}{r^3} + \frac{ss' d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'} ,$$

de onde se obterá

$$ss' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'} = \frac{d^2 q}{ds ds'} - \frac{a^2}{r^3} .$$

Ora, encontramos anteriormente

$$r \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} = -\cos \varepsilon ,$$

ou

$$r \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{(s - s' \cos \varepsilon)(s' - s \cos \varepsilon)}{r^2} = -\cos \varepsilon .$$

Efetuada a multiplicação e substituindo $s^2 + s'^2$ pelo seu valor obtido de

$$r^2 = a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon ,$$

[Páginas 84 e 256]

se obtém, simplificando

$$\frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{ss' \sin^2 \varepsilon + a^2 \cos \varepsilon}{r^3} = 0 ,$$

de onde

$$\frac{ss'}{r^3} = -\frac{1}{\sin^2 \varepsilon} \left(\frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{a^2 \cos \varepsilon}{r^3} \right) .$$

Substituindo este valor assim como o valor de $ss' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'}$ na expressão do torque do elemento, esta [expressão] fica na forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} ii' \sin \varepsilon ds ds' \left[\frac{d^2 q}{ds ds'} - \frac{a^2}{r^3} - \frac{\cos \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon} \left(\frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{a^2 \cos \varepsilon}{r^3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} ii' ds ds' \left(\sin \varepsilon \frac{d^2 q}{ds ds'} - \frac{a^2 \sin \varepsilon}{r^3} - \cot \varepsilon \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{\cos^2 \varepsilon a^2}{\sin \varepsilon r^3} \right) \\ &= \frac{1}{2} ii' ds ds' \left(\sin \varepsilon \frac{d^2 q}{ds ds'} - \cot \varepsilon \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{1}{\sin \varepsilon} \frac{a^2}{r^3} \right) . \end{aligned}$$

E integrando em relação a s e s' , tem-se para o torque total

$$\frac{1}{2} ii' \left(q \sin \varepsilon - r \cot \varepsilon - \frac{a^2}{\sin \varepsilon} \iint \frac{ds ds'}{r^3} \right) .$$

O cálculo se reduz então, como anteriormente, a encontrar o valor da integral dupla $\iint \frac{ds ds'}{r^3}$.

Se as correntes estão em um mesmo plano, tem-se $a = 0$, e o torque se reduz a

$$\frac{1}{2} ii' (q \sin \varepsilon - r \cot \varepsilon) ,$$

resultado que coincide com aquele que obtivemos tratando diretamente de duas correntes situadas em um mesmo

[Páginas 85 e 257]

plano. Como q é apenas ss'/r , e r sendo MP, tem-se

$$q \operatorname{sen} \varepsilon = \frac{ss' \operatorname{sen} \varepsilon}{r} = \frac{\text{MP} \cdot \text{AQ}}{\text{MP}} = \text{AQ} .$$

Tínhamos encontrado pelo outro procedimento,

$$\frac{1}{2} ii'' (p - r \cot \varepsilon) ,$$

com p designando a perpendicular AQ. Portanto, os dois resultados são idênticos. A integração feita entre os limites fornece

$$\frac{1}{2} ii' [p_2'' - p_1'' - p_2' + p_1' + \cot \varepsilon (r_1'' + r_2' - r_2'' - r_1')] .$$

Se o ângulo ε é reto, este torque se reduz a

$$\frac{1}{2} ii' (p_2'' - p_1'' - p_2' + p_1') .$$

Quando $\varepsilon = \pi/2$, mas quando a não é nulo, o torque acima torna-se

$$\frac{1}{2} ii' \left(q - a^2 \int \int \frac{ds ds'}{r^3} \right) .$$

A integral que se precisa calcular neste caso é

$$\int ds' \int \frac{ds}{r^3} = \int ds' \int \frac{ds}{(a^2 + s^2 + s'^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{s}{(a^2 + s'^2) \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}} ds' ,$$

que é necessário integrar outra vez em relação a s' . Disto vem que

$$\begin{aligned} \int \frac{s ds'}{(a^2 + s'^2) \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}} &= \int \frac{(a^2 + s^2) s ds'}{(a^4 + a^2 s'^2 + a^2 s^2 + s^2 s'^2) \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}} = \\ \int \frac{s(a^2 + s^2) \frac{ds'}{\sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}}}{a^2(a^2 + s^2 + s'^2) + s^2 s'^2} &= \int \frac{\frac{s(a^2 + s^2) ds'}{(a^2 + s^2 + s'^2)^{\frac{3}{2}}}}{a^2 + \frac{s^2 s'^2}{a^2 + s^2 + s'^2}} = \int \frac{\frac{dq}{ds'} ds'}{a^2 + q^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{q}{a} + C . \end{aligned}$$

[Páginas 86 e 258]

Seja M o valor do torque quando as duas correntes elétricas, cujos comprimentos são s e s' , partem dos pontos onde suas direções encontram com a reta que tem a menor distância, com isto se terá

$$M = \frac{1}{2} ii' \left(q - a \arctan \frac{q}{a} \right) ,$$

expressão que se reduz, quando $a = 0$, à expressão $M = ii'q/2$, o que concorda com o valor $M = ii'p/2$ que já encontramos para este caso, pois q se torna a perpendicular que havíamos designado por p . Ao se supor a infinito, M torna-se nulo, como deveria sê-lo, dado que isto resulta de

$$a \arctan \frac{q}{a} = q .$$

Se denominamos por z ao ângulo cuja tangente é

$$\frac{ss'}{a\sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}} ,$$

virá que

$$M = \frac{1}{2} ii' q \left(1 - \frac{z}{\tan z} \right) .$$

Este é o valor do torque que será produzido por uma força igual a

$$\frac{1}{2} ii' \left(1 - \frac{z}{\tan z} \right) ,$$

agindo ao longo da reta que une as duas extremidades dos condutores opostas àquelas [extremidades] nas quais eles se encontram [unidos] pela reta que possui a menor distância.

Basta quadruplicar estas expressões para ter o torque

[Páginas 87 e 259]

produzido pela ação mútua entre dois condutores onde um seria móvel ao redor da reta que mede a menor distância, no caso onde esta reta encontra com os condutores em seus centros, e onde seus comprimentos são representados por $2s$ e $2s'$, respectivamente.

De resto, é fácil de ver que se, no lugar de supor que as duas correntes partem do ponto onde elas encontram com a reta, tivéssemos feito o cálculo entre quaisquer limites, se encontraria um valor de M composto de quatro termos da forma deste termo que obtivemos neste caso particular, dois destes termos sendo positivos e os outros dois negativos.

Consideremos agora duas correntes retilíneas $A'S'$ e $L'L''$ (Figura 27),¹¹⁰ não situadas em um mesmo plano e cujas direções formam um ângulo reto.

Seja $A'A$ a perpendicular comum, e procuremos a ação de $L'L''$ para fazer $A'S'$ girar ao redor de uma paralela OV a $L'L''$ traçada à distância $A'O = b$ de A .

Sejam M e M' dois elementos quaisquer destas correntes. A expressão geral da componente da sua ação paralela à perpendicular comum AA' , torna-se, fazendo $\varepsilon = \pi/2$,

$$\frac{1}{2} aii' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'} ds ds' .$$

Seu torque em relação ao ponto O é então igual a, considerando A' como sendo a origem de s' ,

$$\frac{1}{2} aii' (s' - b) \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'} ds ds' .$$

[Páginas 88 e 260]

¹¹⁰[N. T.] No *Théorie* publicado em 1827 não aparece o segmento de reta ligando M' com S' . Isto foi corrigido na versão de 1826 reproduzida aqui.

Fig. 27.

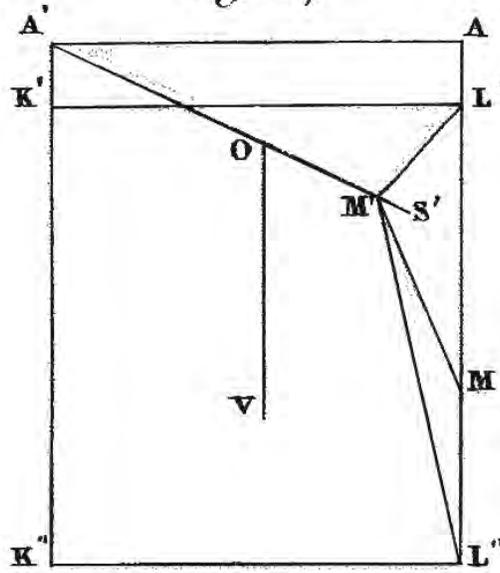


Figura 27.

Integrando com relação a s vem que

$$\frac{1}{2} aii'(s' - b) \frac{d\frac{1}{r}}{ds'} .$$

Denominando por r' e r'' as distâncias $M'L'$ e $M'L''$ de M' aos pontos L' e L'' , e integrando entre estes limites, a ação de $L'L''$ para fazer o elemento M' girar é

$$\frac{1}{2} aii'(s' - b) ds' \left(\frac{d\frac{1}{r''}}{ds'} - \frac{1}{r'} \right) ,$$

expressão esta que precisa ser integrada com relação a s' . Ora,

$$\frac{1}{2} aii' \int (s' - b) d\frac{1}{r''} = \frac{1}{2} aii' \left(\frac{s' - b}{r''} - \int \frac{ds'}{dr''} \right) ,$$

e por outro lado é fácil de ver que denominando de c o valor de AL'' de s correspondente a r'' , e que é uma constante na presente integração, tem-se $A'L'' = \sqrt{a^2 + c^2}$, de onde segue que

$$r'' = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\text{sen } \beta''} , \quad s' = -\sqrt{a^2 + c^2} \cot \beta'' , \quad ds' = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\text{sen}^2 \beta''} d\beta'' .$$

Assim

$$\int \frac{ds'}{r''} = \int \frac{d\beta''}{\text{sen } \beta''} = \ln \frac{\tan \frac{1}{2} \beta''_2}{\tan \frac{1}{2} \beta''_1} .$$

O segundo termo se integrará de mesma maneira, e se terá enfim para o torque procurado

$$\frac{1}{2} aii' \left(\frac{s'_2 - b}{r''_2} - \frac{s'_1 - b}{r''_1} - \frac{s'_2 - b}{r'_2} + \frac{s'_1 - b}{r'_1} - \ln \frac{\tan \frac{1}{2} \beta''_2 \tan \frac{1}{2} \beta'_1}{\tan \frac{1}{2} \beta''_1 \tan \frac{1}{2} \beta'_2} \right) .$$

No caso onde o eixo de rotação paralelo à reta $L'L''$ ou s passa pelo ponto de intersecção A' das retas a e s' , tem-se $b = 0$. E ao se supor, além disso, que a corrente que

[Páginas 89 e 261]

percorre s' parte deste ponto de intersecção, se terá ainda

$$s'_1 = 0, \beta'_1 = \frac{\pi}{2}, \beta''_1 = \frac{\pi}{2},$$

de modo que o torque se reduzirá para

$$\frac{1}{2} a i i' \left(\frac{s'_2}{r''_2} - \frac{s'_2}{r'_2} - \ln \frac{\tan \frac{1}{2} \beta''_2}{\tan \frac{1}{2} \beta'_2} \right).$$

Vou agora procurar a ação de um fio condutor dobrado ao longo do perímetro de um retângulo $K'K''L'L''$ para fazer girar um condutor retilíneo $A'S' = s'_2$, perpendicular ao plano deste retângulo e móvel ao redor de um de seus lados $K'K''$ que ele encontra no ponto A' . O torque produzido pela ação do lado $K'K''$ sendo então evidentemente nulo, se necessitará somar o [torque] devido à ação de $L'L''$ — cujo valor acabamos de calcular — com o torque produzido por $K'L'$ no mesmo sentido que o [produzido] por $L'L''$, e subtrair [o torque produzido] por $K'L''$ cuja ação tende a girar $A'S'$ em sentido contrário. Ora, de acordo com os cálculos anteriores, denominando por g e h às menores distâncias $A'K'$ e $A'K''$, de AS' até as retas $K'L'$ e $K''L''$ que são todas duas iguais ao valor a , tem-se para os valores absolutos destes torques [as seguintes expressões:]

$$\frac{1}{2} i i' (q' - g \arctan \frac{q'}{g}), \quad \frac{1}{2} i i' (q'' - h \arctan \frac{q''}{h}).$$

Fazendo

$$q' = \frac{a s'_2}{\sqrt{g^2 + a^2 + s'^2}} = \frac{a s'_2}{r'_2}, \quad q'' = \frac{a s'_2}{\sqrt{h^2 + a^2 + s'^2}} = \frac{a s'_2}{r''_2},$$

[o valor] do torque total é então

$$\frac{1}{2} i i' \left(h \arctan \frac{q''}{h} - g \arctan \frac{q'}{g} - a \ln \frac{\tan \frac{1}{2} \beta''_2}{\tan \frac{1}{2} \beta'_2} \right).$$

[Páginas 90 e 262]

Este é o valor do torque resultante da ação de um condutor tendo por forma o perímetro de um retângulo, e agindo sobre um condutor móvel ao redor de um dos lados do retângulo, quando a direção deste condutor é perpendicular ao plano do retângulo, qualquer que seja, além disso, sua distância aos outros lados do retângulo e as dimensões deste. Ao se determinar pela experiência o instante quando o condutor móvel está em equilíbrio entre as ações opostas de dois retângulos situados no mesmo plano, mas de tamanhos diferentes e a distâncias diferentes do condutor móvel, tem-se um meio bem simples para se procurar verificações de minha fórmula passíveis de uma grande precisão. Pode-se fazer isso facilmente com um instrumento cuja construção é muito fácil de se conceber para que seja necessário explicá-la aqui.

Integremos agora a expressão¹¹¹ $\int \int \frac{dsds'}{r^3}$ na extensão de duas correntes retilíneas não situadas no mesmo plano, e fazendo entre elas um ângulo qualquer ε , no caso onde estas correntes começam da perpendicular comum. Os outros casos são deduzidos imediatamente a partir deste.

Seja A (Figura 28)¹¹² o ponto onde a perpendicular comum encontra a direção AM da corrente s , seja AM' uma paralela traçada por esse ponto até a corrente s' , e mm' a projeção sobre o plano MAM' da reta que liga os dois elementos ds e ds' .

Tracemos por A uma linha An paralela e igual à [reta] mm' , e formemos em n um pequeno paralelogramo nn' tendo seus lados paralelos às retas MAN e AM', e iguais a ds e ds' .

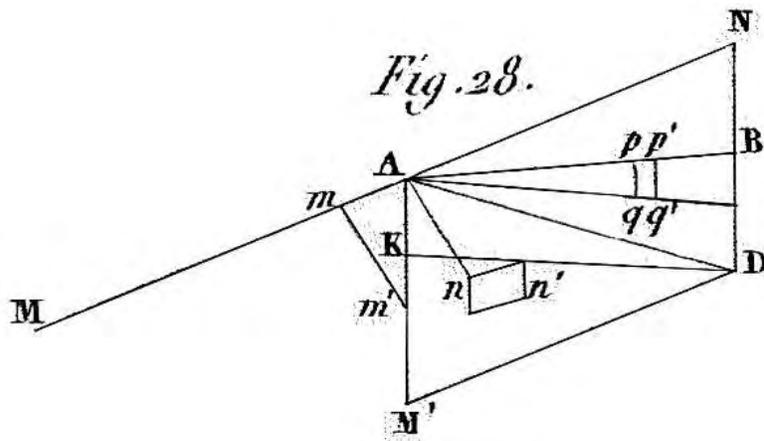


Figura 28.

Ao se repetir a mesma construção para todos os elementos, os paralelogramos assim formados comporão o paralelogramo inteiro NAM'D, e, a superfície deles tendo por tamanho

[Páginas 91 e 263]

$dsds' \sin \varepsilon$, se obterá a integral proposta multiplicada por $\sin \varepsilon$, procurando o volume tendo por base NAM'D e limitado pela superfície cujas ordenadas traçadas aos diferentes pontos desta base têm por valor $1/r^3$, sendo r a distância entre os dois elementos das correntes que correspondem — de acordo com a nossa construção — a todos estes pontos da superfície NAM'D.¹¹³

Ora, para calcular este volume, podemos repartir a base em triângulos tendo como vértice comum o ponto A.

Seja Ap uma reta traçada a um ponto qualquer da área do triângulo AND, e $pqq'p'$ a área compreendida entre as duas retas infinitamente vizinhas Ap e Aq' e os dois arcos de círculo descritos a partir de A com os raios $Ap = u$ e $Aq' = u + du$. Teremos, pois o ângulo $NAM' = \pi - \varepsilon$ e denominando por φ o ângulo NAP,

$$\sin \varepsilon \int \int \frac{dsds'}{r^3} = \int \int \frac{udud\varphi}{r^3} .$$

¹¹¹[N. T.] No original aparece $\int \int \frac{dsds}{r^3}$ por um erro tipográfico.

¹¹²[N. T.] No *Théorie* publicado em 1827 aparece a letra m' entre M e A. Isto foi corrigido na versão de 1826 para a letra m .

¹¹³[N. T.] No original está escrito NAMD o que é um erro tipográfico, pois se está falando do paralelogramo NAM'D.

Ora, se a designa a perpendicular comum às direções dos dois condutores, sendo que s e s' [designam] as distâncias calculadas de A sobre as duas correntes, tem-se

$$r = \sqrt{a^2 + u^2}, \quad u = \sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}.$$

Então, integrando de início de $u = 0$ até $u = AR = u_1$,

$$\text{sen } \varepsilon \iint \frac{ds ds'}{r^3} = \iint \frac{u du d\varphi}{(a^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int d\varphi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + u_1^2}} \right).$$

Falta integrar esta última expressão com relação a φ . Para isso calcularemos u em função de φ pela proporção AN:AR::sen($\varphi + \varepsilon$):sen ε , ou $s:u$::sen($\varphi + \varepsilon$):sen ε .

[Páginas 92 e 264]

Substituindo $a^2 + u_1^2$ pelo valor obtido desta proporção, teremos de calcular

$$\begin{aligned} \int d\varphi \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{s^2 \text{sen }^2 \varepsilon}{\text{sen }^2(\varphi + \varepsilon)}}} \right] &= \frac{\varphi}{a} - \int \frac{d\varphi \text{sen}(\varphi + \varepsilon)}{\sqrt{s^2 \text{sen }^2 \varepsilon + a^2 \text{sen }^2(\varphi + \varepsilon)}} \\ &= \frac{\varphi}{a} + \frac{1}{a} \int \frac{d \cos(\varphi + \varepsilon)}{\sqrt{\frac{a^2 + s^2 \text{sen }^2 \varepsilon}{a^2} - \cos^2(\varphi + \varepsilon)}} \\ &= \frac{1}{a} \left[\varphi + \text{arcsen} \frac{a \cos(\varphi + \varepsilon)}{\sqrt{a^2 + s^2 \text{sen }^2 \varepsilon}} + C \right]. \end{aligned}$$

Denominemos os ângulos NAD e M'AD por μ e μ' , e tomemos a integral precedente entre $\varphi = 0$ e $\varphi = \mu$. Ela se torna então

$$\frac{1}{a} \left[\mu + \text{arcsen} \frac{a \cos(\mu + \varepsilon)}{\sqrt{a^2 + s^2 \text{sen }^2 \varepsilon}} - \text{arcsen} \frac{a \cos \varepsilon}{\sqrt{a^2 + s^2 \text{sen }^2 \varepsilon}} \right].$$

Por causa de $\mu + \varepsilon = \pi - \mu'$, ela se transforma em

$$\frac{1}{a} \left[\mu - \text{arcsen} \frac{a \cos \mu'}{\sqrt{a^2 + s^2 \text{sen }^2 \varepsilon}} - \text{arcsen} \frac{a \cos \varepsilon}{\sqrt{a^2 + s^2 \text{sen }^2 \varepsilon}} \right].$$

Ora,

$$\cos \mu' = \frac{AK}{AD} = \frac{s' - s \cos \varepsilon}{\sqrt{(s' - s \cos \varepsilon)^2 + s^2 \text{sen }^2 \varepsilon}} = \frac{s' - s \cos \varepsilon}{\sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}},$$

de onde se obtém para a integral a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left[\mu - \text{arcsen} \frac{a(s' - s \cos \varepsilon)}{\sqrt{a^2 + s^2 \text{sen }^2 \varepsilon} \sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}} \right. \\ \left. - \text{arcsen} \frac{a \cos \varepsilon}{\sqrt{a^2 + s^2 \text{sen }^2 \varepsilon}} \right], \end{aligned}$$

ou, passando do seno à tangente para os dois arcos,

$$\frac{1}{a} \left[\mu - \arctan \frac{a(s' - s \cos \varepsilon)}{s \operatorname{sen} \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}} - \arctan \frac{a \cot \varepsilon}{\sqrt{a^2 + s^2}} \right].$$

E como se encontra a integral relativa ao triângulo M'AD

[Páginas 93 e 265]

mudando nesta expressão μ em μ' e s em s' , tem-se para a integral total, por causa que $\mu + \mu' = \pi - \varepsilon$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \left(\pi - \varepsilon - \arctan \frac{a(s' - s \cos \varepsilon)}{s \operatorname{sen} \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}} \right. \\ & - \arctan \frac{a \cot \varepsilon}{\sqrt{a^2 + s^2}} - \arctan \frac{a(s - s' \cos \varepsilon)}{s' \operatorname{sen} \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}} \\ & \left. - \arctan \frac{a \cot \varepsilon}{\sqrt{a^2 + s'^2}} \right). \end{aligned}$$

Calculando a tangente da soma dos dois arcos cujos valores contêm s e s' , muda-se esta expressão para,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \left(\pi - \varepsilon - \arctan \frac{a \operatorname{sen} \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}}{ss' \operatorname{sen}^2 \varepsilon + a^2 \cos \varepsilon} \right. \\ & \left. - \arctan \frac{a \cot \varepsilon}{\sqrt{a^2 + s^2}} - \arctan \frac{a \cot \varepsilon}{\sqrt{a^2 + s'^2}} \right). \end{aligned}$$

E como¹¹⁴

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{a \operatorname{sen} \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}}{ss' \operatorname{sen}^2 \varepsilon + a^2 \cos \varepsilon} \\ & = \arctan \frac{ss' \operatorname{sen}^2 \varepsilon + a^2 \cos \varepsilon}{a \operatorname{sen} \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}}, \end{aligned}$$

tem-se,¹¹⁵ dividindo por $\operatorname{sen} \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \iint \frac{ds ds'}{r^3} &= \frac{1}{a \operatorname{sen} \varepsilon} \left(\arctan \frac{ss' \operatorname{sen}^2 \varepsilon + a^2 \cos \varepsilon}{a \operatorname{sen} \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}} \right. \\ & \left. - \arctan \frac{a \cot \varepsilon}{\sqrt{a^2 + s^2}} - \arctan \frac{a \cot \varepsilon}{\sqrt{a^2 + s'^2}} + \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Esta expressão, quando se supõe $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, se reduz a

$$\frac{1}{a} \left(\arctan \frac{ss'}{a \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2}} \right),$$

¹¹⁴[N. T.] No lado direito da equação a seguir aparece, no original publicado em 1827, $2ss \cot \varepsilon$ no denominador do lado direito da igualdade, em vez de $2ss' \cos \varepsilon$. Isto é um erro tipográfico que foi corrigido na versão publicada em 1826.

¹¹⁵[N. T.] Na Memória de 12 de setembro de 1825 apresenta o valor da integral que aparece a seguir, mas sem os cálculos que conduzem a este valor, [Amp25c, pág. 41].

como encontramos anteriormente.

[Páginas 94 e 266]

Pode-se destacar que o primeiro termo do valor que acabamos de encontrar no caso geral é a integral indefinida de¹¹⁶

$$\frac{dsds'}{(a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon)^{\frac{3}{2}}},$$

como se pode verificar pela diferenciação, e que os outros três [termos] se obtêm fazendo sucessivamente nesta integral indefinida:

$$1^\circ \quad s' = 0; \quad 2^\circ \quad s = 0; \quad 3^\circ \quad s' = 0 \quad \text{e} \quad s = 0.$$

Se as correntes não partissem da perpendicular comum, se teria ainda uma integral composta de quatro termos que seriam todos da mesma forma que a integral indefinida.

14.15 Ação Exercida sobre um Elemento de Fio Condutor pelo Conjunto de Circuitos Fechados de Dimensões Muito Pequenas, que Recebeu o Nome de *Solenóide Eletrodinâmico*

Consideramos até aqui a ação mútua entre correntes elétricas situadas em um mesmo plano, e de correntes retilíneas situadas de uma maneira qualquer no espaço. Resta-nos examinar a ação mútua de correntes curvilíneas que não estão em um mesmo plano. Inicialmente suporemos que estas correntes descrevem curvas planas e fechadas, nas quais todas as suas dimensões são infinitamente pequenas.¹¹⁷ Vimos que a ação de uma corrente desta espécie depende de três integrais A, B e C, cujos valores são¹¹⁸

$$A = \lambda \left(\frac{\cos \xi}{l^3} - \frac{3qx}{l^5} \right),$$

$$B = \lambda \left(\frac{\cos \eta}{l^3} - \frac{3qy}{l^5} \right),$$

$$C = \lambda \left(\frac{\cos \zeta}{l^3} - \frac{3qz}{l^5} \right).$$

¹¹⁶[N. T.] Tanto no *Théorie* de 1826 quanto no de 1827 esta equação aparece na forma

$$\frac{dsds'}{(a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon)^{\frac{5}{2}}}.$$

Apenas na versão de 1826 aparece uma errata informando que o correto é a expressão que colocamos no texto.

¹¹⁷[N. T.] Os parágrafos seguintes relativos à teoria do solenóide são a reprodução de [Amp24c, págs. 151-162] e de [Amp24d, págs. 246-258]. Uma diferença é que enquanto nos trabalhos de 1824 Ampère ainda trabalhava com solenóides com áreas de seção reta circular representadas por πm^2 , no *Théorie* estes cálculos são generalizados para solenóides possuindo áreas de seção reta de formato arbitrário, representadas por λ .

¹¹⁸[N. T.] Ver as nossas páginas 204 até 216.

Imaginemos agora no espaço uma linha qualquer MmO (Figura 29),¹¹⁹ que é envolta por correntes elétricas formando circuitos fechados muito pequenos ao redor desta linha, em planos infinitamente próximos que sejam perpendiculares [a esta linha], de maneira que as áreas compreendidas por estes circuitos sejam todas iguais entre si e representadas por λ , que seus centros de gravidade estejam sobre MmO , e que exista por todo lado a mesma distância, medida sobre esta linha, entre dois planos consecutivos. Denominando por g esta distância que consideraremos como infinitamente pequena, o número de correntes correspondendo a um elemento ds da linha MmO , será ds/g . Será necessário multiplicar por este número os valores de A , B e C que acabamos de encontrar para um único circuito, a fim de ter [os valores] que correspondem aos circuitos do elemento ds . Integrando em seguida, desde uma das extremidades L' do arco s , até a outra extremidade L'' deste arco, teremos os valores de A , B e C relativos ao conjunto de todos os circuitos que o envolvem. Denominei este conjunto de *solenóide eletrodinâmico*, a partir da palavra grega $\sigma\omega\lambda\eta\nu\omicron\epsilon\iota\delta\eta\zeta$,¹²⁰ cujo significado exprime precisamente algo que tem a forma de um canal, ou seja, a superfície desta forma sobre a qual se encontram todos os circuitos.

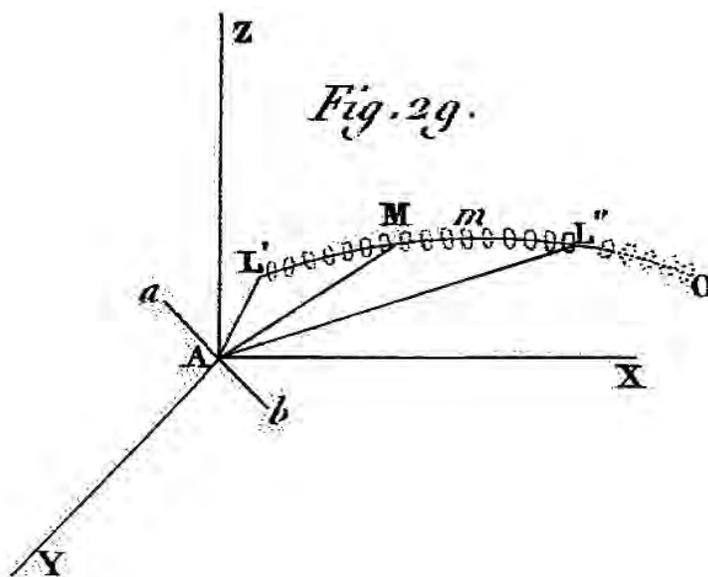


Figura 29.

Tem-se assim para todo o solenóide,

$$A = \frac{\lambda}{g} \int \left(\frac{\cos \xi ds}{l^3} - \frac{3qx ds}{l^5} \right),$$

$$B = \frac{\lambda}{g} \int \left(\frac{\cos \eta ds}{l^3} - \frac{3qy ds}{l^5} \right),$$

$$C = \frac{\lambda}{g} \int \left(\frac{\cos \zeta ds}{l^3} - \frac{3qz ds}{l^5} \right).$$

¹¹⁹[N. T.] As espiras entre L'' e O no *Théorie* publicado em 1826 aparecem pontilhadas, enquanto que na versão de 1827 elas aparecem como as outras espiras, ou seja, como linhas contínuas.

¹²⁰[N. T.] *Solenóide*. Ampère introduziu esta denominação em 1824, ver [Amp24c].

[Páginas 96 e 268]

Ora, a direção da linha g , perpendicular ao plano de λ , estando paralela à tangente da curva s , tem-se

$$\cos \xi = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \eta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \zeta = \frac{dz}{ds} .$$

Além disso, q é evidentemente igual à soma das projeções das três coordenadas x , y e z sobre sua direção. Assim

$$q = \frac{xdx + ydy + zdz}{ds} = \frac{ldl}{ds} ,$$

já que $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$.¹²¹ Substituindo estes valores no que acabamos de encontrar para C, ela [isto é, esta integral] torna-se [igual a:]¹²²

$$C = \frac{\lambda}{g} \int \left(\frac{dz}{l^3} - \frac{3zdl}{l^4} \right) = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{z}{l^3} + C \right) .$$

Denominando x' , y' , z' , l' e x'' , y'' , z'' , l'' aos valores de x , y , z , l , relativos às duas extremidades L' e L'' do solenóide, tem-se

$$C = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{z''}{l''^3} - \frac{z'}{l'^3} \right) .$$

Operando da mesma maneira para as duas outras integrais A e B, encontram-se expressões semelhantes para as representar, e os valores das três grandezas que nos propusemos a calcular para todo o solenóide são

$$A = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{x''}{l''^3} - \frac{x'}{l'^3} \right) ,$$

$$B = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{y''}{l''^3} - \frac{y'}{l'^3} \right) ,$$

[Páginas 97 e 269]

$$C = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{z''}{l''^3} - \frac{z'}{l'^3} \right) .$$

Se o solenóide tivesse por diretriz uma curva fechada, teríamos $x'' = x'$, $y'' = y'$, $z'' = z'$, $l'' = l'$, e, conseqüentemente, $A = 0$, $B = 0$ e $C = 0$. Se ele fosse estendido ao infinito nos dois sentidos, todos os termos dos valores de A, B e C, seriam nulos separadamente. E é evidente que nestes dois casos a ação exercida pelo solenóide se reduz a zero. Ao se supor que ele se estende ao infinito somente de um lado — ao que me referirei denominando-o de solenóide indefinido em um único sentido — só teríamos de considerar a extremidade cujas coordenadas x' , y' e z' , possuem

¹²¹[N. T.] Por um erro tipográfico no original está impresso $l^2 = x^2 + y^2 + z_2$.

¹²²[N. T.] A grandeza C que aparece no lado direito desta equação é apenas uma constante de integração e não deve ser confundida com a grandeza C que aparece no lado esquerdo desta equação.

valores finitos, pois a outra extremidade, sendo suposta a uma distância infinita, os primeiros termos destes [valores] que encontramos para A, B e C, são necessariamente nulos. Se terá assim

$$A = -\frac{\lambda x'}{gl'^3}, \quad B = -\frac{\lambda y'}{gl'^3}, \quad C = -\frac{\lambda z'}{gl'^3}.$$

Portanto, $A : B : C :: x' : y' : z'$. Disto segue que a normal ao plano diretor que passa pela origem e que forma com os eixos [ortogonais cartesianos] ângulos cujos co-senos são

$$\frac{A}{D}, \quad \frac{B}{D}, \quad \frac{C}{D},$$

fazendo sempre $D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, passa também pela extremidade do solenóide cujas coordenadas são x' , y' e z' .

Vimos, no caso geral, que a resultante total é perpendicular a esta normal. Assim, a ação de um solenóide indefinido sobre um elemento é perpendicular à reta que une o ponto médio deste elemento à extremidade do solenóide.

[Páginas 98 e 270]

E como [a ação ou força] também é [perpendicular] ao elemento, segue que ela é perpendicular ao plano traçado por este elemento e pela [reta que liga o centro do elemento à] extremidade do solenóide.

Sua direção estando determinada, resta somente conhecer seu valor. Ora, de acordo com o cálculo feito no caso geral, este valor é

$$-\frac{Dii'ds' \operatorname{sen} \varepsilon'}{2},$$

sendo ε' o ângulo do elemento ds' com a normal ao plano diretor. E como $D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, encontra-se facilmente

$$D = -\frac{\lambda}{gl'^2},$$

o que fornece para o valor da resultante¹²³

$$\frac{\lambda i i' ds' \operatorname{sen} \varepsilon'}{2gl'^2}.$$

Vê-se então que a ação que um solenóide indefinido cuja extremidade está em L' (Figura 29) exerce sobre o elemento ab , é normal em A ao plano bAL' , proporcional ao seno do ângulo bAL' , [diminui] em razão inversa do quadrado da distância AL' , e que permanece sempre a mesma, quaisquer que sejam a forma e a direção da curva indefinida L/L'' sobre a qual se supõem dispostos todos os centros de gravidade das correntes que compõem o solenóide indefinido.

Ao se desejar passar deste caso para o caso de um solenóide definido no qual as duas extremidades estejam situadas em dois pontos dados L' e L'' , será suficiente supor um segundo

¹²³[N. T.] Na versão impressa aparece $\frac{\lambda i i' ds' \operatorname{sen} \varepsilon}{2gl'^2}$. Isto é um erro tipográfico, pois aqui se trata do ângulo definido anteriormente, ε' . Este erro também aparece na tradução parcial para o inglês desta obra de Ampère, ver [Tri65, pág. 185], e nas reedições em francês, [Amp87c, pág. 88] e [Amp58, pág. 76].

solenóide indefinido começando no ponto L'' do primeiro e coincidindo com ele desde este ponto até o infinito, tendo suas correntes a mesma

[Páginas 99 e 271]

intensidade, mas direcionadas em sentido contrário. A ação deste último [solenóide] terá sinal contrário à do primeiro solenóide indefinido partindo do ponto L' , e a destruirá em toda a parte que se estende desde L'' até o infinito na direção $L''O$ onde eles estarão superpostos. A ação do solenóide $L'L''$ será então a mesma que exerceria a união destes dois solenóides indefinidos, e se comporá, conseqüentemente, da força que acabamos de calcular e de uma outra força agindo em sentido contrário, passando também pelo ponto A , perpendicular ao plano bAL'' , e tendo por valor

$$\frac{\lambda i' ds' \operatorname{sen} \varepsilon''}{2gl''^2},$$

sendo ε'' o ângulo bAL'' , e sendo l'' a distância AL'' . A ação total do solenóide $L'L''$ é a resultante destas duas forças e passa — como elas — pelo ponto A .

14.16 Ação Exercida sobre um Solenóide por um Elemento ou por uma Porção Finita de Fio Condutor, por um Circuito Fechado ou por um Sistema de Circuitos Fechados

Como a ação de um solenóide definido se deduz imediatamente, da [ação] do solenóide indefinido, começaremos — em tudo o que falta por dizer sobre este assunto — por considerar o solenóide indefinido que oferece os cálculos mais simples e, portanto, é sempre fácil concluir o que se passa com relação a um solenóide definido.

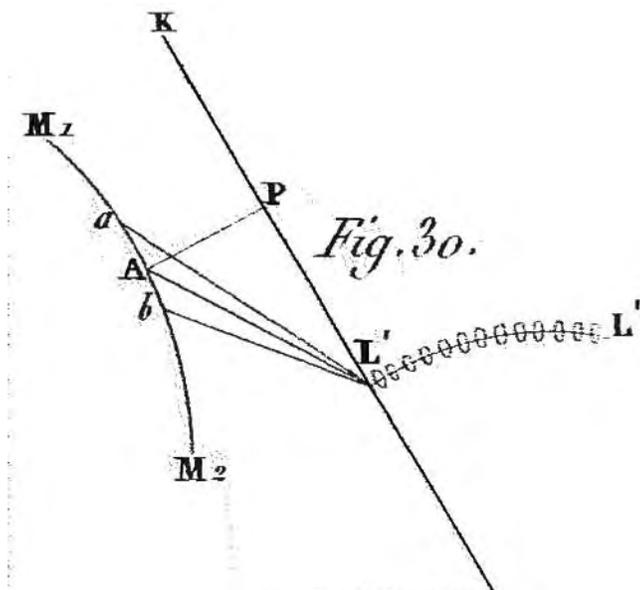


Figura 30.

Seja L' (Figura 30) a extremidade de um solenóide indefinido, A o ponto médio de um elemento qualquer ba de uma corrente elétrica M_1AM_2 e $L'K$ uma reta fixa qualquer traçada pelo ponto L' . Denominemos por θ ao ângulo variável $KL'A$, por μ à inclinação entre os planos bAL' e $AL'K$, e por l' à distância $L'A$. Sendo a ação do elemento ba sobre o solenóide igual e oposta à ação que este último exerce sobre o elemento, é necessário, para determinar esta ação, considerar um ponto situado em A , invariavelmente ligado ao solenóide, e submetido a uma força cuja expressão, ignorando o sinal, seja dada por

[Páginas 100 e 272]

$$\frac{\lambda i i' ds' \operatorname{sen} bAL'}{2gl'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda i i' d\nu}{gl'^3},$$

chamando de $d\nu$ à área $aL'b$ que é igual a

$$\frac{l' ds' \operatorname{sen} bAL'}{2}.$$

Como esta força é normal em A ao plano $AL'b$, será necessário, para ter seu torque em relação ao eixo $L'K$, procurar sua componente perpendicular ao [plano] $AL'K$ e multiplicá-la pela perpendicular à [reta] AP traçada do ponto A até a reta $L'K$. Sendo μ o ângulo compreendido entre os planos $AL'b$ e $AL'K$, obtém-se esta componente multiplicando a expressão precedente por $\cos \mu$. Mas $d\nu \cos \mu$ é a projeção da área $d\nu$ sobre o plano $AL'K$, de onde segue que representando esta projeção por du , o valor da componente procurada é

$$\frac{\lambda i i' du}{gl'^3}.$$

Ora, a projeção do ângulo $aL'b$ sobre $AL'K$ pode ser considerada como a diferença infinitamente pequena entre os ângulos $KL'a$ e $KL'b$, que será então $d\theta$, e se terá

$$du = \frac{l'^2 d\theta}{2}.$$

Isto simplifica a última expressão para

$$\frac{\lambda i i' d\theta}{2gl'}.$$

E como $AP = l' \operatorname{sen} \theta$, tem-se para o torque procurado [o valor dado por]

$$\frac{\lambda i i'}{2g} \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

[Páginas 101 e 273]

Esta expressão integrada em toda a extensão da curva M_1AM_2 , fornece o torque desta corrente para fazer o solenóide girar ao redor $L'K$. Ora, se a corrente é fechada, a integral, que é em geral

$$C - \frac{\lambda i i' \cos \theta}{2g},$$

vai a zero entre os limites, e o torque é nulo em relação a uma reta qualquer L'K passando pelo ponto L'.

Segue disto que na ação de um circuito fechado, ou de um sistema qualquer de circuitos fechados sobre um solenóide indefinido, todas as força aplicadas aos diversos elementos do sistema produzem, ao redor de um eixo qualquer, os mesmos torques como se elas estivessem na própria extremidade do solenóide. E [segue disto] que sua resultante passa por esta extremidade, e que estas forças não podem, em nenhum caso, tender a imprimir ao solenóide um movimento de rotação ao redor de uma reta traçada por sua extremidade, o que está em conformidade com os resultados das experiências. Se a corrente representada pela curva M₁AM₂ não fosse fechada, seu torque para fazer o solenóide girar ao redor de L'K, denominando de θ'₁ e θ'₂ os valores extremos de θ relativos ao ponto L' a às extremidades M₁ e M₂ da curva M₁AM₂, seria [dado por]

$$\frac{\lambda i i'}{2g} (\cos \theta'_1 - \cos \theta'_2) .$$

Fig. 31.

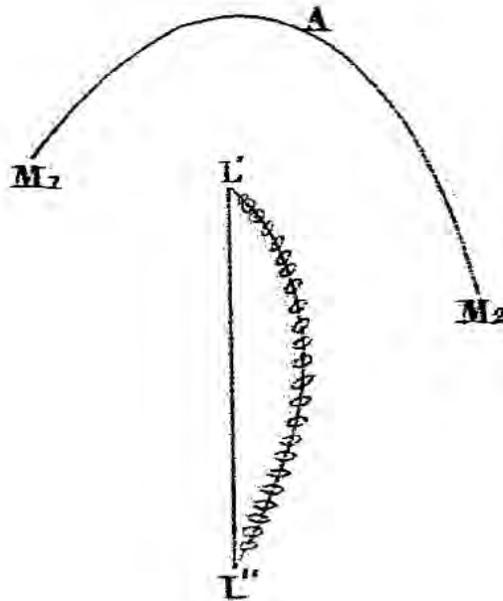


Figura 31.

Consideremos agora um solenóide definido L'L'' (Figura 31) que somente pode girar ao redor de um eixo que passa por suas duas extremidades. Poderemos substituí-lo, como anteriormente, por dois solenóides indefinidos. E a soma das ações da corrente M₁AM₂ sobre cada um deles será sua ação sobre L'L''. Acabamos de encontrar o torque da primeira [ação].

[Páginas 102 e 274]

E denominando por θ''₁ e θ''₂ aos ângulos correspondentes a θ'₁ e θ'₂, mas relativos à extremidade L'', se terá para o [torque] da segunda [ação o seguinte valor]

$$-\frac{\lambda i i'}{2g} (\cos \theta''_1 - \cos \theta''_2) .$$

O torque total produzido pela ação de M_1AM_2 , para fazer o solenóide girar ao redor de seu eixo $L'L''$, será então

$$\frac{\lambda i i'}{2g} (\cos \theta'_1 - \cos \theta''_1 - \cos \theta'_2 + \cos \theta''_2) .$$

Este torque é independente da forma do condutor M_1AM_2 , de seu tamanho e da sua distância ao solenóide $L'L''$, e permanece o mesmo quando [estas grandezas] variam de maneira que os quatro ângulos θ'_1 , θ'_2 , θ''_1 e θ''_2 não mudem de valor. [O torque] é nulo não somente quando a corrente M_1M_2 forma um circuito fechado, mas também quando se supõe que esta corrente se estende ao infinito nos dois sentidos, pois então suas duas extremidades, estando a uma distância infinita das [extremidades] do solenóide, o ângulo θ'_1 torna-se igual ao [ângulo] θ''_1 , e o ângulo θ'_2 [torna-se igual] a θ''_2 .

Sendo nulos todos os torques ao redor das retas traçadas pela extremidade de um solenóide indefinido, [vem que] esta extremidade é o ponto de aplicação da resultante das forças exercidas sobre o solenóide por um circuito elétrico fechado ou por um sistema de correntes formando circuitos fechados. Pode-se então supor que todas estas forças são transferidas [para esta extremidade], e a tomaremos como sendo a origem A (Figura 32) das coordenadas. Seja então BM uma porção de uma das correntes que agem sobre o solenóide. A força devida a um elemento qualquer Mm de BM é, de acordo com o que precede, normal ao plano AMm e é expressa por

$$\frac{\lambda i i' d\nu}{gr^3} ,$$

sendo $d\nu$ a área AMm , e r a distância variável AM.

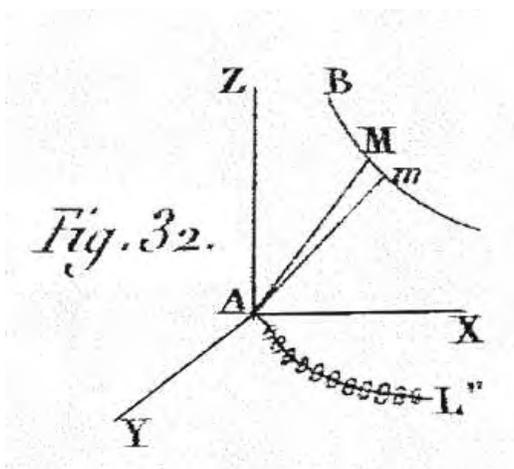


Figura 32.

[Páginas 103 e 275]

Para ter a componente desta ação ao longo de AX, deve-se multiplicá-la pelo co-seno do ângulo que ela faz com AX, cujo ângulo é o mesmo que o ângulo entre os planos AMm e ZAY. Mas $d\nu$ multiplicado por este co-seno é a projeção de AMm sobre ZAY, que é igual a

$$\frac{ydz - zdy}{2} .$$

Portanto, caso se deseje ter a ação ao longo de AX exercida por um número qualquer de correntes formando circuitos fechados, será necessário tomar a integral seguinte em toda a extensão destas correntes¹²⁴

$$\frac{\lambda ii'}{2g} \int \frac{ydz - zdy}{r^3} \text{ que é igual a } \frac{\lambda ii' A}{2g},$$

onde A continua sempre designando a mesma grandeza que anteriormente, na qual substituiu-se¹²⁵ $n + 1$ pelo seu valor 3. Se encontrará igualmente que a ação ao longo de AY é expressa por

$$\frac{\lambda ii' B}{2g},$$

e a ação que ocorre ao longo de AZ é dada por

$$\frac{\lambda ii' C}{2g}.$$

A resultante destas três forças, que é a ação total exercida por um número qualquer de circuitos fechados sobre o solenóide indefinido, é então igual a

$$\frac{\lambda ii' D}{2g},$$

designando sempre $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ por D. E os co-senos dos ângulos que [a ação resultante] faz com os eixos de x , de y e de z , têm como valores

[Páginas 104 e 276]

$$\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D},$$

que são precisamente os valores dos co-senos dos ângulos que faz com os mesmos eixos a normal ao plano diretor que se obteria ao considerar a ação dos mesmos circuitos sobre um elemento situado em A. Ora, este elemento seria levado pela ação do sistema em uma direção compreendida no plano diretor. De onde se obtém esta conseqüência notável, que quando um sistema qualquer de circuitos fechados age alternadamente sobre um solenóide indefinido e sobre um elemento situado na extremidade deste solenóide, as direções ao longo das quais são movidos, respectivamente, o elemento e a extremidade do solenóide, são perpendiculares entre elas. Ao se supor o elemento situado no próprio plano diretor, a ação que o sistema exerce sobre ele está no seu máximo e tem por valor

$$\frac{ii' D ds'}{2}.$$

E acabou-se de encontrar a ação que o mesmo sistema exerce sobre o solenóide como sendo igual a

$$\frac{\lambda ii' D}{2g}.$$

¹²⁴[N. T.] No numerador da integral aparece no original $ydz - rdy$ em vez de $ydz - zdy$ por um erro tipográfico.

¹²⁵[N. T.] No original afirma-se que “ n foi substituído por seu valor 3.” Mas o correto é que $n + 1$ foi substituído por seu valor 3, sendo $n + 1$ a potência a que a distância r é elevada para se calcular a integral A.

Estas duas forças estão sempre em uma proporção constante entre elas para um mesmo elemento e para um mesmo solenóide [dada por]

$$ds' : \frac{\lambda}{g} .$$

Ou seja, como o comprimento do elemento está para a área da curva fechada que descreve uma das correntes do solenóide dividida pela distância entre duas correntes consecutivas. E esta proporção é independente da forma e da intensidade das correntes do sistema que age sobre o elemento e sobre o solenóide.

[Páginas 105 e 277]

14.17 Ação Mútua entre Dois Solenóides

Quando o sistema de circuitos fechados que acabamos de considerar é ele mesmo um solenóide indefinido, a normal ao plano diretor que passa pelo ponto A é, como vimos há pouco, a reta que une este ponto A à extremidade do solenóide. Disto segue que a ação mútua entre dois solenóides indefinidos ocorre ao longo da reta que une a extremidade de um à extremidade do outro. Para encontrar seu valor, designaremos por λ' à área dos circuitos formados pelas correntes deste novo solenóide, por g' à distância entre os planos de dois destes circuitos consecutivos e por l à distância entre as extremidades dos dois solenóides indefinidos. E teremos $D = -\lambda'/(g'l^2)$, o que fornece para a sua ação mútua

$$\frac{\lambda i' D}{2g} = -\frac{\lambda \lambda' i i'}{2g g' l^2} ,$$

que está em razão inversa do quadrado da distância l . Quando um dos solenóides é definido, pode-se substituí-lo por dois solenóides indefinidos, e a ação se encontra composta de duas forças, uma atrativa e outra repulsiva, dirigidas ao longo das retas que unem as duas extremidades do primeiro à extremidade do segundo. Enfim, no caso em que dois solenóides definidos L/L'' e L_1/L_2 (Figura 33) agem um sobre o outro, existem quatro forças direcionadas, respectivamente, ao longo das retas L/L_1 , L/L_2 , $L''L_1$ e $L''L_2$, que unem suas extremidades duas a duas. E se, por exemplo, existir repulsão ao longo de L/L_1 , existirá atração ao longo de L/L_2 e $L''L_1$, e repulsão ao longo de $L''L_2$.

Para justificar a maneira com a qual concebi os fenômenos que apresentam os ímãs — considerando-os como conjuntos de correntes elétricas formando circuitos muito pequenos ao redor de suas partículas — seria necessário demonstrar, partindo da fórmula pela qual representei a ação

[Páginas 106 e 278]

mútua entre dois elementos de corrente elétrica, que de certos conjuntos destes pequenos circuitos resultam forças que dependem somente da posição de dois pontos determinados deste sistema. [E seria necessário demonstrar que estas forças] possuem, relativamente a estes dois pontos, todas as propriedades que se atribui ao que se denomina de moléculas de fluido austral e de fluido boreal, sempre que se explica, por estes dois fluidos, os fenômenos que os ímãs apresentam, seja na ação mútua entre eles, seja na ação que eles exercem sobre um fio condutor. Ora, sabe-se que os físicos que preferem as explicações nas quais se supõe a existência destas moléculas ao invés [das

Fig. 33.

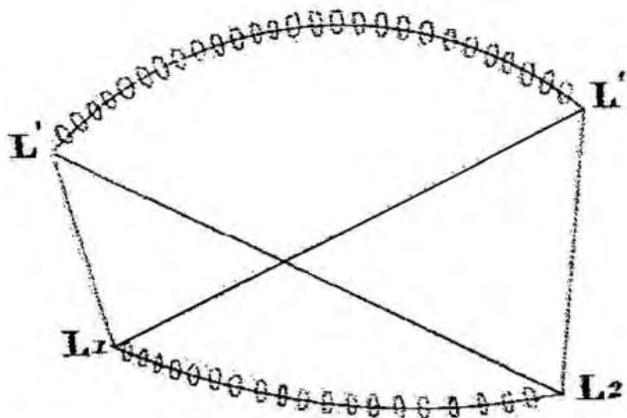


Figura 33.

explicações] que deduzi das propriedades das correntes elétricas, admitem que para cada molécula de fluido austral corresponde sempre, em cada partícula do corpo imantado, uma molécula de fluido boreal de mesma intensidade. Ao chamar de elemento magnético¹²⁶ ao conjunto destas duas moléculas que se pode considerar como os dois pólos deste elemento, uma explicação para os fenômenos que apresentam os dois tipos de ação a que se refere aqui necessita:

1. Que a ação mútua entre dois elementos magnéticos seja composta de quatro forças, duas atrativas e duas repulsivas, dirigidas ao longo das linhas retas que unem as duas moléculas de um destes elementos às duas moléculas da outra, e cuja intensidade seja em razão inversa ao quadrado destas linhas retas;
2. Que quando um destes elementos age sobre uma porção infinitamente pequena do fio condutor, resultem duas forças perpendiculares aos planos que passam pelas duas moléculas do elemento e pela direção da pequena porção do fio, que [estas forças] sejam proporcionais aos senos dos ângulos que esta direção forma com as retas que medem as distâncias às duas moléculas, e [que estas forças estejam] em razão inversa do quadrado destas distâncias.

Enquanto não se admite

[Páginas 107 e 279]

a maneira como concebo a ação dos ímãs, e enquanto se atribui estas duas espécies de forças às moléculas de um fluido austral e de um fluido boreal, é impossível de reduzi-las a um único princípio. Mas desde que se adote meu ponto de vista sobre a constituição dos ímãs, vê-se, pelos cálculos precedentes, que os dois tipos de ações e os valores das forças que delas resultam se deduzem imediatamente de minha fórmula. Para encontrar estes valores é necessário substituir o conjunto de duas moléculas, uma de fluido austral e outra de fluido boreal, por um solenóide com extremidades que são os dois pontos determinados de que dependem as forças em questão,

¹²⁶[N. T.] O “elemento magnético” de Ampère é chamado hoje em dia de “dipolo magnético.” Isto é, um pólo Norte e um pólo Sul de mesma intensidade separados por uma distância ℓ .

e que estejam situadas precisamente nos mesmos pontos onde se supunha estarem dispostas as moléculas dos dois fluidos.

14.18 Identidade entre Solenóides e Ímãs, no que diz Respeito à Ação Exercida sobre Eles, seja pelos Fios Condutores, seja por Outros Solenóides ou por Outros Ímãs. Discussão sobre as Conseqüências que se Pode Tirar desta Identidade, em Relação à Natureza dos Ímãs e em Relação à Ação que se Observa entre o Globo Terrestre e um Ímã ou um Fio Condutor

Sendo assim, dois sistemas [compostos] de solenóides muito pequenos agirão um sobre o outro, de acordo com minha fórmula, como dois ímãs compostos de tantos elementos magnéticos [isto é, de tantos dipolos magnéticos] quantos são os solenóides que se supõem nestes dois sistemas. Um destes mesmos sistemas agirá também sobre um elemento de corrente elétrica, assim como faz um ímã. Conseqüentemente, todos os cálculos e todas as explicações, fundadas tanto sobre a consideração de forças atrativas e repulsivas destas moléculas em razão inversa dos quadrados das distâncias, quanto sobre a consideração de forças giratórias entre uma destas moléculas e um elemento de corrente elétrica — sendo que acabo de mencionar a lei admitida pelos físicos que não adotam minha teoria — são necessariamente as mesmas, seja como eu explicando os fenômenos que os ímãs produzem nestes dois casos por correntes elétricas, ou [então] preferindo-se a hipótese de dois fluidos. Portanto, não são nestes cálculos ou

[Páginas 108 e 280]

nestas explicações que se pode procurar nem as objeções contra a minha teoria, nem as provas a seu favor. As provas sobre as quais a suporto, resultam sobretudo de que ela reduz a um único princípio três tipos de ações¹²⁷ que o conjunto de fenômenos provam ser devidos a uma causa comum, e que não podem ser reduzidas de outra forma. Na Suécia, na Alemanha e na Inglaterra, se acreditou poder explicá-los apenas pelo fato da ação mútua entre dois ímãs, tal como Coulomb havia determinado. As experiências que nos oferecem os movimentos de rotações contínuas estão em contradição manifesta com esta idéia. Na França, os que não adotaram a minha teoria, são obrigados a considerar os três gêneros de ação que reduzi a uma lei comum, como sendo três tipos de fenômenos absolutamente independentes entre si. Deve-se levar em conta, entretanto, que se poderia deduzir da lei proposta pelo Sr. Biot para a ação mútua entre um elemento de fio condutor e o que ele chama de uma molécula magnética, [a lei] estabelecida por Coulomb relativamente à ação entre dois ímãs, caso se admitisse que um destes ímãs é composto de pequenas correntes elétricas, tal como as correntes que concebo. Mas então, por que não admitir que o outro [ímã] é composto da mesma forma [por pequenas correntes elétricas], e [por qual motivo não] adotar, conseqüentemente, toda a minha maneira de ver?

¹²⁷[N. T.] A saber, as ações eletrodinâmicas entre dois condutores com corrente, as ações eletromagnéticas entre condutores com corrente e ímãs, e as ações magnéticas entre dois ímãs ou entre um ímã e a Terra.

Além disso, embora o Sr. Biot tenha denominado de força elementar^{128,129} àquela cujo valor e direção ele determinou para o caso onde um elemento de fio condutor age sobre cada uma das partículas de um ímã, está claro que não se pode considerar

[Páginas 109 e 281]

como verdadeiramente elementar, nem uma força que se manifesta na ação entre dois elementos que não são de mesma natureza, nem uma força que não age ao longo da linha reta que une os dois pontos entre os quais ela se exerce. Entretanto, na Memória que este físico habilidoso

¹²⁸[N. A.] *Précis élémentaire de physique*, volume II, pág. 122 da segunda edição.

¹²⁹[N. T.] Na terceira edição de seu livro, publicada em 1823, Biot ainda continua chamando de *força elementar* à interação entre um elemento de corrente e um pólo magnético, [BS85, pág. 113]:

A ação de um fio conjuntivo indefinido e retilíneo sobre um elemento magnético, tal como acabamos de obter pelas experiências precedentes, ainda é apenas um resultado composto. Pois, ao dividir pelo pensamento todo o comprimento do fio em uma infinidade de pedaços de uma altura muito pequena, vê-se que cada pedaço deve agir sobre a agulha com uma energia diferente, de acordo com sua distância e segundo a direção de acordo com a qual é exercida sua ação. Ora, estas forças elementares são precisamente o resultado simples que é especialmente importante conhecer, pois a força total exercida pelo fio é apenas a soma aritmética de seus efeitos.

comunicou para a Academia em 30 de outubro e 18 de dezembro de 1820,^{130,131} ele considera

[Páginas 110 e 282]

como elementar a força que exerce um elemento de fio condutor sobre uma molécula de fluido austral ou de fluido boreal, ou seja, sobre o pólo de um elemento magnético, e ele considera como um fenômeno composto a ação mútua entre dois elementos de condutores voltaicos. Ora, concebe-se facilmente que se existem de fato moléculas magnéticas,

¹³⁰[N. A.] Como esta última Memória não foi publicada a parte, conheço a fórmula que está dada para exprimir esta força somente pela passagem que segue da segunda edição do *Précis élémentaire de physique*, volume II, págs. 122 e 123.

“Ao se dividir pelo pensamento todo o comprimento do fio conector $Z'C'$ (Figura 34 [ver a nossa página 265]) em uma infinidade de pedaços com uma altura muito pequena, vê-se que cada pedaço deve agir sobre a agulha [imantada] com uma energia diferente, de acordo com sua distância e com sua direção. Ora, estas forças elementares são precisamente o resultado simples que é necessário conhecer; pois a força total exercida por todo o fio não é nada mais que a soma de suas ações. Contudo, o cálculo é suficiente para recobrar a ação simples a partir desta resultante. É o que fez o Sr. Laplace. Ele deduziu de nossas observações que a lei individual das forças elementares exercidas por cada pedaço do fio condutor, estava na razão inversa do quadrado da distância, isto é, ela é precisamente a mesma que se sabe existir nas ações magnéticas ordinárias. Esta análise mostrou que para completar o conhecimento da força, faltava ainda determinar se a ação de cada pedaço do fio era a mesma em todas as direções a igual distância, ou se ela teria mais energia em certos sentidos que em outros. Para decidir esta questão, estendi em um plano vertical um longo fio de cobre ZMC (Figura 34), dobrando-o em M, de maneira que os dois ramos [retilíneos] ZM e MC fizessem ângulos iguais com a horizontal MH. Diante deste fio estendi um outro $Z'M'C'$ de mesmo material, de mesmo diâmetro e selecionados da mesma triagem. No entanto, dispus este último verticalmente, de maneira que fosse separado do primeiro em MM' apenas por uma tira de papel muito fina. Em seguida suspendi nossa agulha imantada AB em frente deste sistema à altura dos pontos M e M' , e observei suas oscilações para diversas distâncias, fazendo sucessivamente passar a corrente voltaica pelo fio dobrado e pelo fio reto. Encontrei assim que, [tanto] para um [fio] como para o outro, a ação era inversamente proporcional à distância até os pontos M e M' . Mas a intensidade absoluta era mais fraca para o fio oblíquo do que para o fio reto, na proporção em que o ângulo ZMH está para a unidade. Este resultado analisado pelo cálculo, me pareceu indicar que a ação de cada elemento μ do fio oblíquo sobre cada molécula m de magnetismo austral ou boreal é inversamente proporcional ao quadrado da sua distância μm a esta molécula, e [diretamente] proporcional ao seno do ângulo $m\mu M$ formado pela distância μm com o comprimento do fio.”

É bastante notável que esta lei que é uma consequência rigorosa da fórmula pela qual exprimi a ação mútua entre dois elementos de fios condutores — quando se substitui, conforme a minha teoria, cada elemento magnético por um solenóide eletrodinâmico muito pequeno — foi encontrada inicialmente por um erro de cálculo. Com efeito, para que ela seja verdadeira, é necessário que a *intensidade absoluta* da força seja proporcional, não ao ângulo ZMH, mas à tangente da metade deste ângulo, assim como demonstrou o Sr. Savary na Memória que leu à Academia em 3 de fevereiro de 1823, que foi publicada neste meio tempo e que se encontra também no *Journal de physique*, volume XCVI, páginas 1-25 e seguintes. Parece, por outro lado, que o Sr. Biot reconheceu este erro, pois na terceira edição da mesma obra que acaba de aparecer, ele fornece, na verdade sem citar a Memória de onde ela foi corrigida, novas experiências nas quais a intensidade da força total é, conforme o cálculo do Sr. Savary, proporcional à tangente da metade do ângulo ZHM, e ele conclui a partir disto outra vez, com mais razão do que tinha com suas primeiras experiências, que a força que ele chama de elementar é, a distâncias iguais, proporcional ao seno do ângulo compreendido entre a direção do elemento de fio condutor e a direção da reta que une seu ponto médio à molécula magnética (*Précis élémentaire de physique expérimentale*, terceira edição, Vol. II, págs. 740-745).

¹³¹[N. T.] Ver também [Bio85a, págs. 116-117]. Na Figura 34 do *Théorie* publicado em 1827, as letras que aparecem na parte debaixo da Figura são Z e Z' . Isto foi corrigido na versão de 1826 reproduzida aqui para Z' e Z' .

[Páginas 111 e 283]

a ação mútua entre elas pode ser considerada como a força elementar. Este era o ponto de vista dos físicos da Suécia e da Alemanha, que não pôde suportar a prova experimental. Pois esta força, sendo proporcional a uma função da distância, não pode jamais originar um movimento sempre acelerado no mesmo sentido,¹³² ao menos na medida que, como eles supunham, as moléculas magnéticas sejam consideradas como fixas em pontos determinados dos fios condutores que eles entendiam como conjuntos de pequenos ímãs e, em tal caso, os outros gêneros de ação eram fenômenos compostos, já que o elemento voltaico era [considerado composto de pequenos ímãs]. Concebe-se de mesmo modo que é a ação mútua entre dois elementos de fios condutores que oferece a força elementar. Neste caso a ação mútua entre dois elementos magnéticos, e a ação que um destes elementos exerce sobre uma porção infinitamente pequena de condutor voltaico, são ações compostas, já que o elemento magnético deve, neste caso, ser considerado como composto. Mas como conceber que a força elementar seja a que se manifesta entre um elemento magnético e uma porção infinitamente pequena de condutor voltaico, ou seja, entre dois corpos de volumes muito pequenos na verdade, mas na qual um [corpo] é necessariamente composto, qualquer que seja as duas maneiras de interpretar os fenômenos dos quais acabamos de falar?

A circunstância que apresenta a força exercida por um elemento de fio condutor sobre um pólo de um elemento magnético, de agir em uma direção perpendicular à reta que une os dois pontos entre os quais se desenvolve esta força, enquanto que a ação mútua entre dois elementos de condutores se estabelece ao longo da linha que os une, não é uma prova menos

[Páginas 112 e 284]

demonstrativa do fato de que a primeira destas duas forças é um fenômeno composto. Todas as vezes que dois pontos materiais agem um sobre o outro, seja em virtude de uma força que lhes seja inerente, ou de uma força que nasça por uma causa qualquer — tal como um fenômeno químico, uma decomposição ou uma recomposição de um fluido neutro resultante da reunião das duas eletricidades — não se pode conceber esta força de outro modo se não como uma tendência destes dois pontos a se aproximar ou a se afastar um do outro ao longo da reta que os une, com as velocidades inversamente proporcionais a suas massas, e isto mesmo quando esta força se transmite de uma das partículas materiais à outra somente por um fluido interposto [entre elas], como a massa da bala de canhão que somente é transportada para frente com uma certa velocidade, pela pressão do ar solto pela pólvora, o mesmo tanto que a massa do canhão é levada para trás seguindo a mesma linha reta, passando pelos centros de inércia¹³³ da bala e do canhão, com uma velocidade [do canhão] que está para a velocidade da bala, assim como a massa desta está para a massa daquele.

Este é um resultado necessário a partir da inércia da matéria, que Newton aponta como um dos principais fundamentos da teoria física do universo, no último dos três axiomas que ele colocou no começo do *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, dizendo que a ação é sempre igual e oposta à reação. Pois duas forças que fornecem a duas massas velocidades [proporcionalmente] inversas a suas massas, são forças que as fariam produzir pressões iguais sobre obstáculos que se oporiam invencivelmente a que elas se colocassem em movimento, ou seja, forças iguais. Para que este princípio seja aplicável no caso da ação mútua

¹³²[N. T.] Ampère está se referindo aqui ao sentido horário ou anti-horário de rotação, como nas experiências de rotação contínua de Faraday.

¹³³[N. T.] Isto é, aos centros de massa.

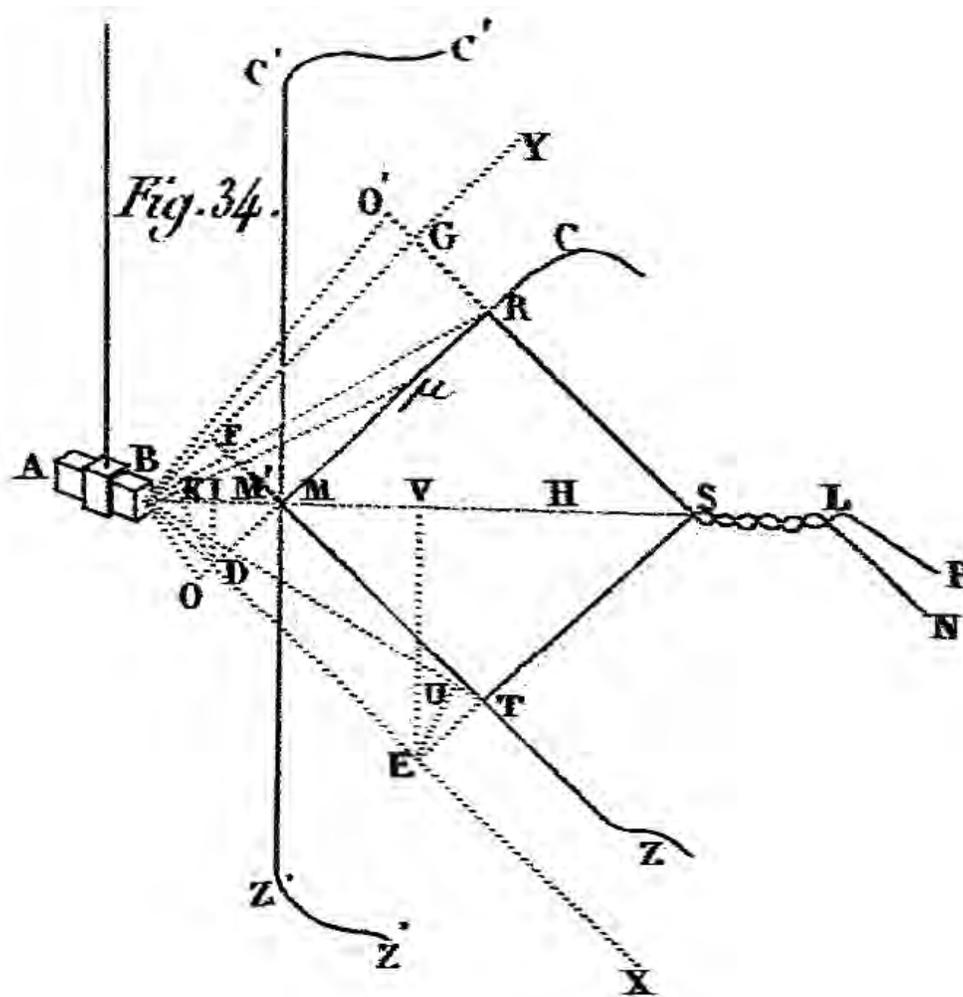


Figura 34.

[Páginas 113 e 285]

entre duas partículas materiais atravessadas pela corrente elétrica, quando se supõe esta ação transmitida pelo fluido eminentemente elástico que permeia o espaço, e cujas vibrações constituem a luz,^{134,135} é preciso admitir que este fluido não possui nenhuma inércia apreciável, como o ar no caso da bola e do canhão. Ao menos disto não se pode duvidar, já que ele não apresenta nenhuma resistência ao movimento dos planetas. O fenômeno de rotação do molinete elétrico¹³⁶

¹³⁴[N. A.] Este fluido somente pode ser aquele que resulta da combinação das duas eletricidades. A fim de evitar de repetir a mesma frase para designá-lo, creio que se deve empregar, como Euler, o nome de éter, entendendo sempre por esta palavra o fluido assim definido.

¹³⁵[N. T.] Ampère está se referindo aqui a L. Euler (1707-1783).

¹³⁶[N. T.] O molinete elétrico (também chamado de torniquete elétrico ou de moinho de vento elétrico) foi inventado por Hamilton, professor de filosofia na Universidade de Dublin ao redor de 1750, ver [Wil60, págs. 905-906]. Neste artigo aparece esta informação e é a primeira publicação mencionando este instrumento. Apresentamos aqui duas ilustrações deste instrumento, [Jef73, Cap. 3: Electric wind motors]. Normalmente o instrumento gira em um plano horizontal ao redor de um eixo vertical quando está ligado a uma fonte de alta tensão. Seu princípio de funcionamento é baseado no chamado vento elétrico, sendo que ele não funciona no vácuo. Ao longo da história tem havido uma controvérsia muito grande sobre os princípios de funcionamento deste instrumento, [Rob62].

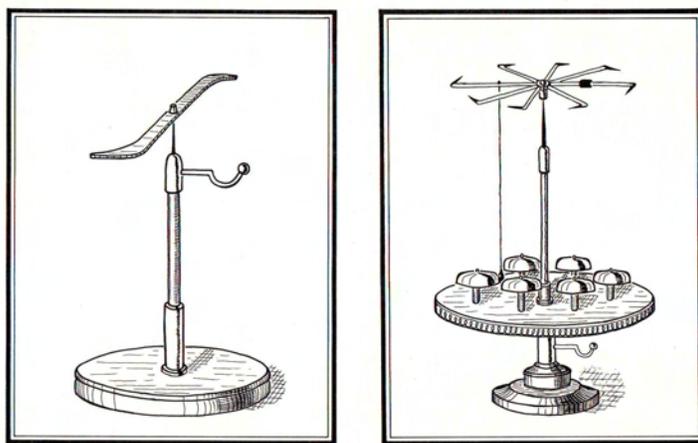
levou vários físicos a admitir [a existência de] uma inércia considerável nos dois fluidos elétricos e, conseqüentemente, no [fluido] que resulta de sua combinação. Mas esta suposição, por outro lado, é contrária a tudo o que sabemos destes fluidos [elétricos], e [está em contradição] com o fato de que os movimentos planetários não sentem nenhuma resistência por parte do éter. Além disso, não existe nenhum motivo a mais para conceber [esta suposição de uma grande inércia dos fluidos elétricos], desde que mostrei que a rotação do molinete elétrico é devida a uma repulsão eletrodinâmica produzida entre a ponta do molinete e as partículas do ar ambiente, pela corrente elétrica que escapa desta ponta.^{137,138}

Quando o Sr. Oersted descobriu a ação que o fio condutor exerce sobre um ímã, se devia, na verdade, ser levado a supor que poderia haver uma ação mútua entre dois fios condutores. Porém, esta não seria uma conseqüência

[Páginas 114 e 286]

necessária da descoberta deste célebre físico, já que uma barra de ferro doce age também sobre uma agulha imantada e, contudo, não existe qualquer ação mútua entre duas barras de ferro doce. Enquanto que somente se conhecia o fato da deflexão da agulha imantada pelo fio condutor, não se poderia supor que a corrente elétrica somente comunicava a este fio a propriedade de ser influenciado pela agulha, de uma maneira análoga à maneira em que o ferro doce é [influenciado] por esta mesma agulha — o que seria suficiente para que ele agisse sobre ela — sem que, para isso, resultasse alguma ação entre dois fios condutores quando eles se encontrassem fora da influência de qualquer corpo imantado? Somente a experiência podia decidir esta questão. Realizei-a no mês de setembro de 1820 e foi demonstrada a ação mútua entre os condutores voltaicos.

Com respeito à ação do nosso globo sobre um fio condutor, a analogia entre a Terra e um ímã bastava sem dúvida para tornar esta ação extremamente provável, e não vejo muito o porquê de inúmeros dos mais hábeis físicos da Europa pensarem que ela não existia. Não somente, como o Sr. Erman,¹³⁹ antes que eu tivesse feito a experiência em que a constatei,¹⁴⁰ mas [também]



¹³⁷[N. A.] Ver a *Nota* que li à Academia em 24 de junho de 1822 e que está inserida nos *Annales de chimie*, volume XX, págs. 419-421, e no meu *Recueil d'observations électro-dynamiques*, págs. 316-318.

¹³⁸[N. T.] Ver [Amp22i, págs. 419-421] e [Amp22p, págs. 316-318], [Amp85l, págs. 287-289] e [Amp85g, pág. 291]. Os assuntos tratados nesta Nota foram discutidos no Cap. 7.

¹³⁹[N. T.] Paul Erman (1764-1851), físico alemão.

¹⁴⁰[N. A.] Em uma Memória notável, impressa em 1820, este célebre físico diz que o fio condutor teria esta vantagem sobre a agulha imantada que se usa para experiências delicadas, [a saber,] que o movimento que ele assume nestas experiências não seria influenciado de forma alguma pela ação da Terra.

após esta experiência ter sido comunicada à Academia de Ciências, na seção de 30 de outubro de 1820, e repetida muitas vezes, ao longo do [mês] de novembro do mesmo ano, na presença de vários de

[Páginas 115 e 287]

seus membros e de um grande número de outros físicos, que me autorizaram, ao longo do tempo, a citá-los como tendo sido testemunhas dos movimentos produzidos pela ação da Terra sobre as partes móveis dos aparelhos descritos e representados nos *Annales de chimie et de physique*,¹⁴¹ volume XV, páginas 191-196, Gravura 2, Figura 5, e Gravura 3, Figura 71, assim como no meu *Recueil d'observations électro-dynamiques*,¹⁴² páginas 43-48, já que perto de um ano depois, os físicos ingleses ainda levantavam dúvidas sobre os resultados de experiências tão completas e feitas diante de um grande número de testemunhas.^{143,144} Não se pode negar a importância destas experiências, nem se recusar a admitir que a descoberta da ação da Terra sobre os fios condutores me pertence tão completamente quanto a [descoberta] da ação mútua entre dois condutores. Mas era pouco ter descoberto estes dois gêneros de ações e de tê-los constatado pela experiência. Ainda era preciso:

1. Encontrar a fórmula que exprime a ação mútua entre dois elementos de corrente elétrica.
2. Mostrar a partir da lei expressa por esta fórmula (que governa a atração entre correntes que vão no mesmo sentido e a repulsão entre correntes que vão em sentido contrário, estejam estas correntes paralelas ou formando um ângulo qualquer),^{145,146} que a ação da Terra sobre os fios condutores

[Páginas 116 e 288]

é idêntica, em todas as circunstâncias que ela apresenta, à ação que exerceria sobre estes mesmos fios um conjunto de correntes elétricas dirigidas de Leste para Oeste e situadas ao Sul da Europa, onde foram feitas as experiências que constataam esta ação.

3. Calcular inicialmente, partindo da minha fórmula, e da maneira como expliquei os fenômenos magnéticos por correntes elétricas formando circuitos fechados muito pequenos ao redor das partículas dos corpos imantados, a ação que devem exercer uma sobre a outra duas partículas de ímãs consideradas como dois pequenos solenóides, equivalendo cada um a

¹⁴¹[N. T.] Ver [Amp20f].

¹⁴²[N. T.] Ver [Amp22m, págs. 43-48].

¹⁴³[N. A.] Ver a Memória do Sr. Faraday, publicada em 11 de setembro de 1821. A tradução desta Memória se encontra nos *Annales de chimie et de physique*, volume XVIII, págs. 337-370, e no meu *Recueil d'observations électro-dynamiques*, págs. 125-158. É por um erro de impressão que ela leva a data de 4 de setembro de 1821, no lugar de 11 de setembro de 1821.

¹⁴⁴[N. T.] Ver [Far52b], [Far21] e [Far22].

¹⁴⁵[N. A.] As experiências que evidenciam a ação mútua entre duas correntes retilíneas nestes dois casos, foram comunicadas à Academia na seção de 9 de outubro de 1820. Os aparelhos que empreguei estão descritos e representados no volume XV dos *Annales de chimie et de physique*, a saber: 1° Para a ação mútua entre duas correntes paralelas, pág. 72, Gravura 1, Figura 1, e com mais detalhes no meu *Recueil d'observations électro-dynamiques*, págs. 16-18. 2° Para a ação mútua entre duas correntes formando um ângulo qualquer, pág. 171 do mesmo volume XV dos *Annales de chimie et de physique*, Gravura 2, Figura 2, e no meu *Recueil*, pág. 23. As Figuras levam no meu *Recueil* os mesmos números que nos *Annales*.

¹⁴⁶[N. T.] Ver [Amp20c, pág. 72], [Amp22m, págs. 16-18 e 23] e [Amp20f, pág. 171].

duas moléculas magnéticas, uma de fluido austral e outra de fluido boreal, e [a ação] que uma destas partículas deve exercer sobre um elemento de fio condutor. Em seguida, [era preciso ainda] se assegurar que estes cálculos fornecem precisamente para os dois tipos de ações, no primeiro caso a lei estabelecida por Coulomb para a ação entre dois ímãs, e no segundo a lei que o Sr. Biot propôs relacionada às forças que se desenvolvem entre um ímã e um fio condutor.

É assim que reduzi a um princípio único estes dois tipos de ações, e aquele [tipo de ação] que descobri entre dois fios condutores. Era sem dúvida fácil, de acordo com o conjunto

[Páginas 117 e 289]

dos fatos, conjecturar que estes três tipos de ações dependem de uma causa única. Mas é somente pelo cálculo que se poderia justificar esta conjectura, e foi o que fiz, sem prejudicar sobre a natureza da força que dois elementos de fios condutores exercem um sobre o outro. Procurei, de acordo apenas com os dados da experiência, a expressão analítica desta força. E a tomando como ponto de partida, demonstrei que se pode deduzir por um cálculo puramente matemático os valores das duas outras forças tais como são dadas pela experiência (uma entre um elemento condutor e o que se chama de uma molécula magnética, e a outra entre duas destas moléculas), substituindo, em um caso e no outro, como se deve fazer de acordo com minha maneira de conceber a constituição dos ímãs, cada molécula magnética por uma das duas extremidades de um solenóide eletrodinâmico. Depois disso, tudo o que se pode deduzir dos valores destas últimas forças subsiste necessariamente na minha maneira de considerar os efeitos que elas produzem, e se tornam uma consequência necessária da minha fórmula, e somente ela bastará para demonstrar que a ação mútua entre dois elementos de fios condutores é realmente o caso mais simples e de onde se deve partir para explicar todos os outros. As considerações seguintes me parecem apropriadas para confirmar da maneira mais completa este resultado geral de meu trabalho, elas se deduzem facilmente das noções mais simples sobre a composição das forças, e estão relacionadas à ação mútua entre dois sistemas, compostos todos os dois de pontos infinitamente próximos uns dos outros, nos diversos casos que podem se apresentar tendo em conta que estes sistemas contêm somente

[Páginas 118 e 290]

ou pontos do mesmo tipo, isto é, que todos atraem ou repelem os mesmos pontos do outro sistema, ou que existam, seja em um destes sistemas, seja nos dois, pontos de duas espécies opostas, em que uns atraem o que os outros repelem e repelem o que eles atraem.

Suponhamos inicialmente que cada um dos dois sistemas seja composto de moléculas de mesma espécie, ou seja, que todas as [moléculas] de um agem por atração ou por repulsão sobre as do outro, com forças proporcionais às suas massas. Sejam M, M', M'' etc. (Figura 35), as moléculas que compõem o primeiro [sistema], e m uma [molécula] qualquer que compõe o segundo. Ao compor sucessivamente todas as ações ma, mb, md , etc., exercidas por M, M', M'' etc., obteremos as resultantes mc, me , etc. onde a última será a ação do sistema $MM'M''$ sobre o ponto m , e passará aproximadamente pelo centro de inércia do sistema. Raciocinando da mesma maneira relativamente às outras moléculas do segundo sistema, encontraremos que todas as resultantes correspondentes passarão também aproximadamente pelo centro de inércia do primeiro sistema e terão uma resultante geral que também passará aproximadamente pelo centro de inércia do segundo. Denominaremos de *centros de ação* aos dois pontos extremamente

vizinhos dos respectivos centros de inércia dos dois sistemas pelos quais passa esta resultante geral. É evidente que ela tenderá, por causa das pequenas distâncias [que os pontos] estão dos centros de inércia, a imprimir em cada sistema somente um movimento de translação.

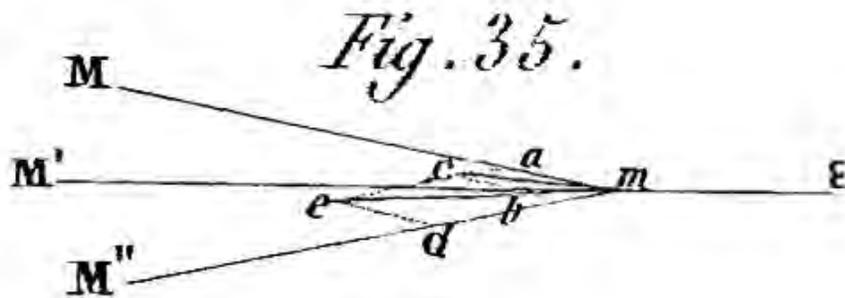


Figura 35.

Suponhamos, em segundo lugar, que todas as moléculas do segundo sistema sejam da mesma espécie, enquanto que as do primeiro sejam umas atrativas e outras repulsivas com respeito às moléculas do segundo sistema. As primeiras darão uma resultante of (Figura 36), passando pelo seu centro de ação N

[Páginas 119 e 291]

e pelo centro de ação o do outro sistema. Da mesma forma, as partículas repulsivas darão uma resultante oe , passando pelo seu centro de ação P e pelo mesmo ponto o . A resultante geral será então a diagonal og . E como ela passa aproximadamente pelo centro de inércia do segundo sistema, ela ainda tenderá a lhe imprimir apenas um movimento de translação. Além disso, esta resultante está no plano traçado pelos três centros de ação o , N e P . E quando as moléculas atrativas estão em mesmo número que as repulsivas, e agem com a mesma intensidade, sua direção é, ademais, perpendicular à reta oO que divide o ângulo PoN em duas partes iguais.

Consideremos, por fim, o caso em que os dois sistemas sejam compostos, tanto um quanto o outro, de moléculas de espécies diferentes. Sejam N e P (Figura 37) os centros de ação respectivos das moléculas atrativas e repulsivas do primeiro, sejam n e p os centros correspondentes do segundo, de modo que exista atração entre N e p , assim como entre n e P , e que exista repulsão entre N e n , assim como entre P e p . As ações combinadas de N e P sobre p darão uma resultante dirigida ao longo da diagonal pe . Da mesma forma, as ações de N e P sobre n darão uma resultante nf . Para ter a resultante geral, estas duas linhas são prolongadas até seu encontro em o , toma-se¹⁴⁷ $oh = pe$, e $ok = nf$, [então] a diagonal ol será a resultante procurada que dará a ação exercida pelo sistema PN sobre o sistema pn . Mas como o ponto o não faz parte do sistema pn , será necessário conceber que ele está ligado a este sistema de uma maneira invariável sem estar [ligado] ao primeiro sistema PN . E a força ol tenderá geralmente, em virtude desta ligação, a gerar sobre pn um

¹⁴⁷[N. T.] Nas versões impressas em 1826 e em 1827 aparece on em vez de oh . Mas em uma errata que aparece no final do trabalho chama-se a atenção que o correto é esta última forma.

Fig. 36.

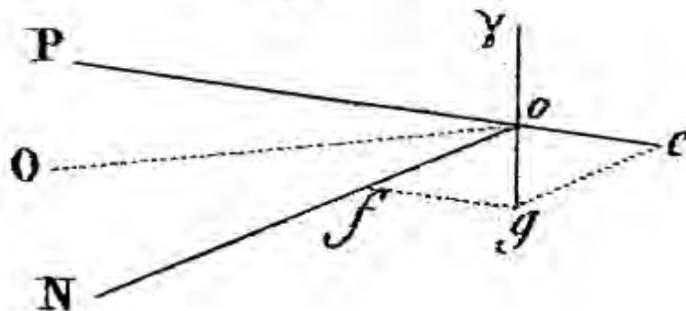


Figura 36.

[Páginas 120 e 292]

movimento de translação e um movimento de rotação ao redor de seu centro de inércia.

Fig. 37.

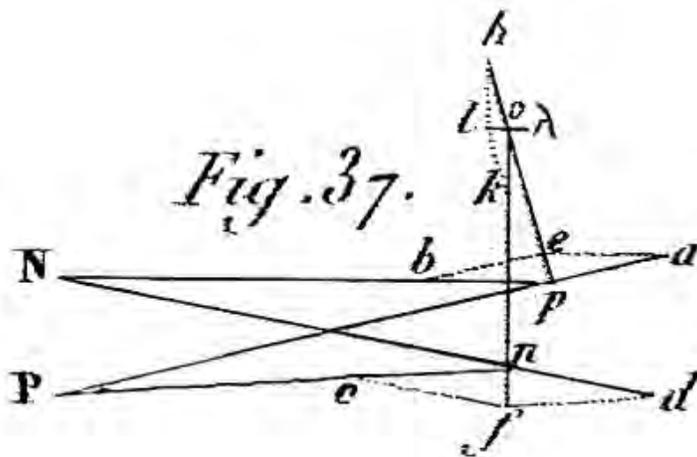


Figura 37.

Examinemos agora a reação exercida pelo segundo sistema sobre o primeiro. De acordo com o axioma fundamental da mecânica — que a ação e a reação de duas partículas uma sobre a outra são iguais e diretamente opostas — será necessário, para obtê-la, compor sucessivamente de forças iguais e diretamente opostas àquelas que as partículas do primeiro sistema exercem sobre o segundo, e é evidente que a reação total assim encontrada será sempre igual e diretamente oposta à ação total.

Portanto, no primeiro caso, a reação será representada pela linha $m\varepsilon$ (Figura 35), igual e oposta à resultante me , e que se poderá supor aplicada ao centro de ação do primeiro sistema que se encontra sobre sua direção. De onde segue que desconsiderando sempre a pequena diferença de posição do centro de ação e do centro de inércia, se terá aqui somente um movimento de translação.

No segundo caso, a reação será representada igualmente pela linha $o\gamma$ (Figura 36), igual e oposta à linha og . Mas como o ponto o não pertence ao primeiro sistema e como, geralmente, este não será atravessado pela direção $o\gamma$, será necessário conceber que este ponto o esteja ligado invariavelmente ao primeiro sistema, sem estar ligado ao segundo. E, por esta ligação, a força $o\gamma$ tenderá geralmente a gerar sobre o sistema PN um movimento duplo de translação e de rotação. De resto, esta força $o\gamma$ está no plano PoN . E quando as moléculas atrativas estão na mesma quantidade que as repulsivas e agem com a mesma intensidade, sua direção é, como a de og , perpendicular à [reta] oO .

Enfim, no terceiro caso, a reação será representada

[Páginas 121 e 293]

pela linha $o\lambda$ (Figura 37), igual e oposta à resultante ol , e aplicada como ela ao ponto o . Para ter a ação de ol sobre pn , nós concebemos agora há pouco que este ponto o estava ligado a este segundo sistema pn sem estar [ligado] ao primeiro PN. Para ter agora a reação exercida sobre este [primeiro sistema], conceberemos a força $o\lambda$ aplicada em um ponto situado em o , e ligada ao primeiro sistema PN sem estar [ligada] ao segundo. Esta força ainda tenderá geralmente a gerar em PN um duplo movimento de translação e de rotação.

Se compararmos estes resultados com as indicações da experiência, relacionadas com as direções das forças que se exercem nos três tipos de ações que distinguimos acima, veremos que os três casos que acabamos de examinar lhes correspondem exatamente. Quando dois elementos de condutores voltaicos agem um sobre o outro, a ação e a reação são, como no primeiro caso, direcionadas ao longo da reta que une estes dois elementos. Quando se trata da força que ocorre entre um elemento de fio condutor e uma partícula do ímã¹⁴⁸ contendo dois pólos de espécies opostas — que agem em sentidos contrários com intensidades iguais — a ação e a reação são, como no segundo caso, direcionadas perpendicularmente à reta que une a partícula ao elemento. E duas partículas de uma barra imantada — que nada mais são do que dois ímãs bem pequenos — exercem uma sobre o outra uma ação mais complicada, semelhante à ação que apresenta o terceiro caso, onde se pode explicá-la considerando-a como o resultado de quatro forças, duas atrativas e duas repulsivas. É fácil de concluir que somente existe o elemento de fio condutor no qual se pode supor que todos os pontos exercem a mesma espécie de ação,

[Páginas 122 e 294]

e [é fácil] de julgar que ela é, dos três tipos de forças das quais se trata aqui, aquela que se deve observar como a mais simples.

Mas do fato de que a força que ocorre entre dois elementos de fios condutores é a mais simples, e de que estas [forças] que se desenvolvem dela — uma entre um de seus elementos e uma partícula de ímã onde sempre se encontram dois pólos de mesma intensidade, e outra entre duas destas partículas — são resultados mais ou menos complicadas, é necessário concluir que a primeira destas forças deve ser considerada como verdadeiramente elementar? Sempre estive longe de pensar assim, motivo pelo qual — nas *Notes sur l'exposé sommaire des nouvelles expériences électro-magnétiques*, publicadas em 1822^{149,150} — tentei explicá-la pela reação do fluido espalhado no espaço, e cujas vibrações produzem os fenômenos da luz. Somente disse que se deve

¹⁴⁸[N. T.] Cada “partícula” do ímã será considerada aqui como um dipolo magnético.

¹⁴⁹[N. A.] *Recueil d'observations électro-dynamiques*, pág. 215.

¹⁵⁰[N. T.] Ver [Amp22j, págs. 215] e [Amp85i, pág. 250].

considerá-la como *elementar*, no sentido em que os químicos colocam na classe dos corpos simples todos os corpos que ainda não conseguiram decompor, quaisquer que sejam por outro lado os pressupostos fundamentados sobre a analogia que poderia levar a crer que eles são realmente compostos, e porque depois que se deduziu dela o valor das experiências e dos cálculos expostos neste trabalho, era partindo deste único valor que se deveria calcular [os valores] de todas as forças que se manifestam nos casos mais complicados.

Mas mesmo se ela for devida, seja à reação de um fluido cuja raridade não permite supor que ele reaja em virtude de sua massa, seja a uma combinação das forças próprias aos dois fluidos elétricos, não deixaria de resultar

[Páginas 123 e 295]

que a ação seja sempre oposta à reação ao longo de uma mesma linha reta. Pois, assim como se viu nas considerações que se acaba de ler, esta circunstância se encontra necessariamente em toda ação complexa, quando ela ocorre devido a forças verdadeiramente elementares que compõem a ação complexa. Aplicando o mesmo princípio à força que se exerce entre o que se denomina uma molécula magnética e um elemento de fio condutor, vê-se que se esta força — considerada como agindo sobre o elemento — passa pelo seu ponto médio, a reação do elemento sobre a molécula deve também estar dirigida de maneira a passar pelo seu ponto médio e não pela molécula. Esta consequência de um princípio que todos os físicos admitiram até o presente momento, não parece, ademais, fácil de demonstrar pela experiência, quando se trata da força que falamos, porque em todas as experiências onde se faz agir uma porção de um fio condutor formando um circuito fechado sobre um ímã, o resultado que se obtém para a ação total é o mesmo, quer se suponha que esta força passe pelo elemento de fio condutor ou pela molécula magnética, assim como se viu nesta Memória. Isto é o que levou vários físicos a supor que a ação exercida pelo elemento de fio condutor passava somente por este elemento, e que a reação que lhe é oposta e paralela não era dirigida ao longo da mesma reta, que ela passava pela molécula e formava com a primeira força o que eles denominaram um torque primitivo.

Os cálculos que seguem me fornecerão em breve a oportunidade de examinar em detalhe está hipótese singular. Por este exame se verá que ela não é somente oposta a um dos princípios fundamentais da mecânica, mas que ela é por outro lado absolutamente inútil para a explicação dos fatos observados

[Páginas 124 e 296]

e que somente uma falsa interpretação destes fatos pôde levar a adotá-la os físicos que não admitem que os ímãs devem suas propriedades realmente à ação das correntes elétricas que rodeiam suas partículas.

Os fenômenos produzidos pelos dois fluidos elétricos em movimento nos condutores voltaicos pareciam tão diferentes dos [fenômenos] que se manifestam quando eles estão em repouso nos corpos eletrizados à maneira comum, que também se presumiu que os primeiros [fenômenos] não deviam ser atribuídos aos mesmos fluidos que [são os responsáveis] pelos segundos [fenômenos]. É precisamente como se fosse concluído [ao observar] que a suspensão do mercúrio no barômetro é um fenômeno inteiramente diferente do som, que não se devia lhes atribuir ao mesmo fluido atmosférico — em repouso no primeiro caso e em movimento no segundo — mas que fosse necessário admitir, para dois fatos tão diferentes, dois fluidos onde um agisse somente para pressionar a superfície livre do mercúrio e onde o outro transmitisse os movimentos de vibração

que produzissem o som.

Além disso, nada prova que a força expressa pela minha fórmula não pode resultar das atrações e repulsões de dois fluidos elétricos, na razão inversa dos quadrados das distâncias destas moléculas. O fato de um movimento de rotação que se acelera continuamente até que os atritos e a resistência do líquido no qual mergulha o ímã ou o condutor voltaico que apresenta este tipo de movimento torne a velocidade constante, de início parece absolutamente oposto a este gênero de explicação dos fenômenos eletrodinâmicos. Com efeito, do princípio da conservação das forças vivas,¹⁵¹ que é uma consequência necessária das leis de movimento, segue necessariamente que quando as

[Páginas 125 e 297]

forças elementares — que seriam aqui atrações e repulsões na razão inversa do quadrado das distâncias — são expressas por simples funções das distâncias mútuas dos pontos entre os quais elas se exercem, e que uma parte destes pontos estão constantemente ligados entre eles e se movem somente em virtude destas forças, os outros ficando fixos, os primeiros não podem retornar à mesma situação, com relação aos segundos, com velocidades maiores do que as que tinham quando partiram desta mesma situação.¹⁵² Ora, no movimento de rotação contínua imprimido a um condutor móvel pela ação de um condutor fixo, todos os pontos do primeiro [condutor] retornam à mesma posição com velocidades cada vez maiores a cada volta, até que os atritos e a resistência da água acidulada onde mergulha a coroa do condutor introduzem um limite no aumento da velocidade de rotação deste condutor. Ela se torna então constante, apesar destes atritos e da resistência.

Portanto, está completamente demonstrado que não se saberia explicar os fenômenos produzidos pela ação de dois condutores voltaicos, supondo que moléculas elétricas agindo em razão inversa do quadrado da distância estivessem distribuídas sobre os fios condutores, de maneira a permanecer fixas ali e poder, conseqüentemente, ser consideradas como constantemente ligadas entre elas. Deve-se concluir disto que estes fenômenos são devidos a que os dois fluidos elétricos

¹⁵¹[N. T.] O conceito de “força viva” foi introduzido por Leibniz (1646-1716). Ele corresponde ao dobro da moderna energia cinética. Poisson, por exemplo, na época de Ampère definia este conceito com as seguintes palavras, [Poi33, pág. 29]: “Denomina-se *força viva* de um ponto material, ou, mais geralmente, de um corpo para o qual todos os pontos possuem a mesma velocidade, ao produto de sua massa pelo quadrado desta velocidade.”

O chamado princípio de conservação das forças vivas corresponde ao teorema de conservação da energia cinética atual, válido para forças conservativas. Este é o caso, por exemplo, das forças centrais que diminuem com o quadrado da distância entre os corpos que estão interagindo.

Na nossa página 316 Ampère apresenta o princípio de conservação das forças vivas com as seguintes palavras:

Que toda ação reduzível a forças, [que são apenas] funções das distâncias, agindo entre pontos materiais formando dois sistemas rígidos, um fixo e o outro móvel, jamais pode dar lugar a um movimento que seja indefinidamente contínuo, apesar das resistências e dos atritos que sofre o sistema móvel.

¹⁵²[N. T.] Por exemplo, quando se arremessa uma pedra para cima na superfície da Terra e não se interfere mais em sua trajetória, ela retorna ao ponto de onde partiu com uma velocidade de mesma intensidade com a qual iniciou seu movimento, supondo um movimento livre sem atrito.

percorrem^{153,154} continuamente os fios condutores, com um movimento

[Páginas 126 e 298]

extremamente rápido, se reunindo e se separando alternadamente nos espaços entre as partículas destes fios.¹⁵⁵ É pelo fato de os fenômenos discutidos aqui somente poderem ser produzidos pela eletricidade em movimento, que acreditei dever designá-los sob a denominação de *fenômenos eletrodinâmicos*.¹⁵⁶ A [denominação] de *fenômenos eletromagnéticos*, que se havia lhes dado

[Páginas 127 e 299]

até agora era conveniente desde que se tratasse somente da ação descoberta pelo Sr. Oersted entre um *ímã* e uma *corrente elétrica*, mas ela somente podia apresentar uma idéia falsa desde que descobri que se produzem fenômenos do mesmo tipo sem *ímã*, e somente pela ação entre duas *correntes elétricas*.

É somente no caso onde se supõe as moléculas elétricas em repouso nos corpos onde elas manifestam sua presença pelas atrações ou repulsões produzidas por elas entre estes corpos, que se demonstra que um movimento indefinidamente acelerado não pode resultar do fato que as forças que exercem as moléculas elétricas neste estado de repouso dependem unicamente de suas distâncias mútuas. Quando, ao contrário, se supõe que elas, postas em movimento nos fios condutores pela ação da pilha, mudam continuamente de lugar — se reunindo ali a cada instante em fluido neutro, se separando outra vez, e indo imediatamente se reunir a outras moléculas de

¹⁵³[N. A.] Na época dos primeiros trabalhos dos físicos sobre os fenômenos eletrodinâmicos, vários sábios acreditaram poder explicá-los pelas distribuições de moléculas, sejam elétricas, sejam magnéticas, em repouso nos condutores voltaicos. Desde que a descoberta do primeiro movimento de rotação contínua feito pelo Sr. Faraday foi publicada, vi imediatamente que ela contradizia completamente esta hipótese, e eis aqui em que termos anunciei esta observação, onde o que disse aqui é apenas o desenvolvimento, na *Exposé sommaire des nouvelles expériences électro-magnétiques*, feitas por diferentes físicos desde o mês de março de 1821, que li na seção pública da Academia Real de Ciências de 8 de abril de 1822.

“Tais são os novos progressos que acaba de fazer um ramo da física, dos quais nem suspeitávamos a existência há somente dois anos, e que nos fizeram conhecer fatos mais surpreendentes talvez que tudo o que a ciência nos tinha oferecido até agora de fenômenos maravilhosos. Um movimento que continua sempre no mesmo sentido, apesar dos atritos, apesar da resistência do meio, movimento este produzido pela ação mútua entre dois corpos que permanecem constantemente no mesmo estado, é um fato sem precedentes dentro de tudo o que sabíamos sobre as propriedades que a matéria inorgânica pode oferecer. Ele prova que a ação que emana dos condutores voltaicos, não pode ser devida a uma distribuição particular de certos fluidos em repouso nestes condutores, como são as atrações e as repulsões elétricas comuns. Pode-se somente atribuir esta ação a fluidos em movimento no condutor, que o percorrem se dirigindo rapidamente de uma extremidade da pilha para a outra extremidade.”

Veja o *Journal de physique* onde esta exposição foi inserida na época, volume XCIV, página 65, e meu *Recueil d'observations électro-dynamiques*, página 205.

¹⁵⁴[N. T.] Ver [Amp22f, pág. 205] e [Amp85d, págs. 242-243].

¹⁵⁵[N. T.] Ørsted também compartilhava desta idéia. Segundo ele, a eletricidade se propaga “por um tipo de contínua decomposição e recomposição, ou melhor, por uma ação que perturba o equilíbrio em cada momento, e o restabelece no instante seguinte. Pode-se exprimir essa sucessão de forças opostas que existe na transmissão da eletricidade, dizendo que a eletricidade sempre se propaga de modo ondulatório,” (Ørsted, apud [Mar86, pág. 96]).

¹⁵⁶[N. T.] Ampère definiu pela primeira vez o conceito dos *fenômenos eletrodinâmicos* em [Amp22d], ver a Seção 1.3.

natureza oposta — não é mais contraditório admitir que as ações em razão inversa dos quadrados das distâncias que exercem cada molécula, possa resultar entre dois elementos de fios condutores uma força que não depende somente da distância entre eles, mas também da direção dos dois elementos [de fios condutores] ao longo dos quais as moléculas elétricas se movem, se reunindo a moléculas da espécie oposta, e se separando no instante seguinte para se reunir a outras. Ora, é precisamente e unicamente desta distância e destas direções que depende a força que se desenvolve então, e cujas experiências e cálculos expostos nesta Memória me forneceram o valor. Para se ter uma idéia nítida do que acontece no fio

[Páginas 128 e 300]

condutor, deve-se prestar atenção que entre as moléculas metálicas de que ele é composto, está espalhado um fluido composto de fluido positivo e de fluido negativo, não nas proporções que constituem um fluido neutro, mas com um excesso de um destes dois fluidos que é de natureza oposta à eletricidade própria das moléculas do metal, e que oculta esta eletricidade, como expliquei na carta que escrevi ao Sr. Van-Beek no início de 1822.^{157,158} É neste fluido elétrico intermolecular que acontecem todos os movimentos, todas as decomposições e recomposições que constituem a corrente elétrica.

Como o líquido interposto entre as placas da pilha é, sem comparação, um condutor pior do que o fio metálico que une suas extremidades, se passa um tempo, muito curto na verdade, mas contudo apreciável, durante o qual a eletricidade intermolecular, suposta inicialmente em equilíbrio, se decompõe em cada um dos intervalos compreendidos entre duas moléculas desse fio. Esta decomposição aumenta gradualmente até que a eletricidade positiva de um intervalo se reúna à eletricidade negativa do intervalo que o segue imediatamente no sentido da corrente, e sua eletricidade negativa à eletricidade positiva do intervalo precedente. Esta reunião não pode ser tão instantânea quanto a descarga de uma garrafa de Leiden. E a ação entre os fios condutores, que se desenvolve, enquanto que ela [a reunião] ocorre, em sentido contrário daquela [ação] que eles exerciam durante a decomposição, não pode, conseqüentemente, diminuir o efeito desta ação, pois o efeito produzido por uma força ocorre em razão composta de sua intensidade

[Páginas 129 e 301]

e do tempo durante o qual ela age. Ora aqui a intensidade deve ser a mesma, seja quando os dois se separam ou se reúnem. Mas o tempo durante o qual se opera sua separação é sem comparação maior do que aquele que exige sua reunião.

[Para calcular] a ação que varia com as distâncias entre as moléculas dos dois fluidos elétricos enquanto que se faz esta separação, seria necessário integrar, com relação ao tempo e por toda a duração da separação, o valor da força que ocorreria em cada instante, e dividir, em seguida, por esta duração, a integral assim obtida. Sem fazer o cálculo, para o qual seria necessário ter os dados, que ainda nos faltam, sobre a maneira como variam as distâncias das moléculas com o tempo, em cada intervalo intermolecular do fio condutor, é fácil de ver que as forças produzidas desta maneira, entre dois elementos deste fio, devem depender das direções da corrente elétrica

¹⁵⁷[N. A.] *Journal de physique*, volume XCIII, páginas 450-453, e *Recueil d'observations électro-dynamiques*, páginas 174-177.

¹⁵⁸[N. T.] Ver [Amp22o, págs. 174-177] e [Amp85k, págs. 217-219]. Abertus van Beek (1787-1856) foi um físico holandês. Informações sobre sua vida e sua obra, assim como sobre seu relacionamento com Ampère, podem ser obtidas em [Sne75].

em cada um destes elementos.

Se fosse possível, partindo desta consideração, encontrar que a ação mútua entre dois elementos é, com efeito, proporcional à fórmula pela qual a representei, esta explicação do fato fundamental de toda a teoria dos fenômenos eletrodinâmicos deveria, evidentemente, ser preferida a qualquer outra. Mas ela exigiria pesquisas com as quais não tenho tempo de me ocupar, não mais que as pesquisas mais difíceis ainda às quais seria necessário se dedicar para ver se a explicação contrária, onde se atribuem os fenômenos eletrodinâmicos aos movimentos causados no éter pelas correntes elétricas, pode conduzir à mesma fórmula. Qualquer que seja destas hipóteses e de outras

[Páginas 130 e 302]

suposições que se possa fazer para explicar estes fenômenos, eles serão sempre representados pela fórmula que deduzi dos resultados da experiência, interpretados pelo cálculo. E permanecerá matematicamente demonstrado que, considerando os ímãs como conjuntos de correntes elétricas dispostas ao redor de suas partículas assim como disse, os valores das forças que são, em cada caso, dadas pela experiência, e todas as circunstâncias dos três tipos de ações que ocorrem — um [tipo de ação] entre dois ímãs, um outro entre um fio condutor e um ímã, e o terceiro entre dois fios condutores — se deduzem de uma força única, que age entre dois elementos de corrente elétrica ao longo da reta que une seus centros.

Quanto à própria expressão desta força, ela é uma das mais simples entre aquelas que não dependem somente da distância, mas também da direção dos dois elementos. Pois estas direções aparecem [na fórmula] somente [no fato de] que ela contém a segunda diferencial da raiz quadrada da distância entre os dois elementos, obtida fazendo variar alternadamente os dois arcos de corrente elétrica dos quais esta distância é uma função, diferencial que depende ela mesma das direções dos dois elementos e que entra, além disso, no valor dado por minha fórmula de uma maneira muito simples, já que se tem para este valor a segunda diferencial assim definida, multiplicada por um coeficiente constante e dividida pela raiz quadrada da distância, observando que a força é repulsiva quando a segunda diferencial é positiva, e atrativa quando ela é negativa. É isto que expressa o sinal — que se encontra diante da expressão geral

$$-\frac{2ii' d^2\sqrt{r}}{\sqrt{r} ds ds'} ds ds'$$

[Páginas 131 e 303]

desta força, de acordo com o uso segundo o qual se consideram as atrações como forças positivas e as repulsões como forças negativas.

As épocas nas quais se reduziu a um princípio único fenômenos considerados anteriormente como devidos a causas absolutamente diferentes, foram quase sempre acompanhadas da descoberta de um grande número de fatos novos, pois uma nova maneira de conceber as causas sugere uma infinidade de experiências a serem tentadas e de explicações a serem verificadas. Foi assim que a demonstração dada por Volta da identidade entre o galvanismo e a eletricidade foi acompanhada da construção da pilha e seguida de todas as descobertas que surgiram deste admirável instrumento. A julgar pelos resultados tão importantes dos trabalhos do Sr. Becquerel sobre a influência da eletricidade nas combinações químicas, e dos [trabalhos] dos Srs. Prévost e Dumas sobre as causas das contrações musculares, pode-se esperar que uma igual quantidade de fatos

novos descobertos nos últimos quatro anos, e sua redução a um princípio único — ou seja, a leis de forças atrativas e repulsivas observadas entre os condutores de corrente elétrica — também serão seguidos de uma avalanche de outros resultados que estabelecerão entre a física por um lado, e a química e mesmo a fisiologia por outro lado, a ligação que se percebia a necessidade, embora sem conseguir se orgulhar de tê-la realizado depois de tanto tempo.

14.19 Identidade das Ações Exercidas, seja sobre o Pólo de um Ímã, seja sobre a Extremidade de um Solenóide, por um Circuito Voltaico Fechado e por um Conjunto de Duas Superfícies Muito Próximas que Delimitam este Circuito, e sobre as Quais são Espalhados e Fixados Dois Fluidos tais como se Supõem os Dois Fluidos Magnéticos, Austral e Boreal, de Maneira que a Intensidade Magnética seja a Mesma em Todas as Partes

Nos resta agora ocupar-nos das ações que um circuito fechado, qualquer que seja a sua forma, seu tamanho e sua posição, exerce, seja sobre um solenóide, seja sobre um outro circuito de uma forma, de um tamanho e de uma posição quaisquer.¹⁵⁹ O principal resultado destas pesquisas consiste na analogia que existe entre as forças produzidas por este circuito, seja quando ele age sobre um outro circuito fechado ou sobre

[Páginas 132 e 304]

um solenóide, e as forças que exerceriam os pontos onde a ação seria precisamente aquela que se atribui às moléculas do que se denomina fluido austral e fluido boreal, quando estes pontos estão distribuídos da maneira que vou explicar sobre as superfícies delimitadas pelos circuitos, e as extremidades do solenóide sendo substituídas por duas moléculas magnéticas de espécies opostas. Esta analogia parece de início tão completa, que todos os fenômenos eletrodinâmicos parecem assim ser levados à teoria na qual se admite estes dois fluidos. Mas se reconhece prontamente que ela ocorre somente com respeito aos condutores voltaicos que formam circuitos rígidos e fechados, que existem somente os fenômenos deste tipo que são produzidos por condutores formando tais circuitos que se podem explicar desta maneira e que, por fim, somente as forças expressas pela minha fórmula podem concordar com o conjunto dos fatos. Além disso, é desta mesma analogia que deduzirei a demonstração de um teorema importante que se pode enunciar assim: A ação mútua entre dois circuitos rígidos e fechados, ou a ação entre um circuito rígido e fechado e um ímã, não pode jamais produzir movimento contínuo com uma velocidade que se acelera indefinidamente até que as resistências e os atritos dos aparelhos tornem esta velocidade constante.

¹⁵⁹[N. T.] Os próximos resultados foram apresentados à Academia de Ciências na sessão de 28 de novembro de 1825. O extrato lido para a Academia encontra-se publicado em [Amp87b]. Já o resumo publicado em 1825 pode ser encontrado em [Amp87e].

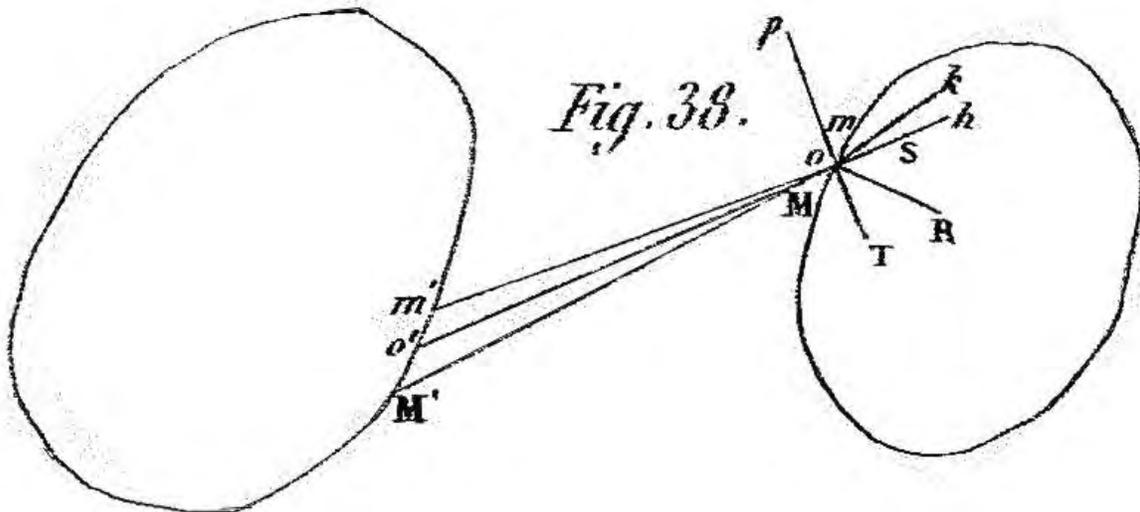


Figura 38.

A fim de não deixar nada a desejar a este respeito, começarei por dar às fórmulas relativas à ação mútua entre dois fios condutores uma forma mais geral e mais simétrica. Sejam para isso s e s' duas curvas quaisquer que se supõem percorridas por correntes elétricas às quais continuaremos a designar as intensidades por i e i' . Seja $ds = Mm$ (Figura 38) um elemento da primeira curva, $ds' = M'm'$ um elemento da segunda. Sejam x, y, z e x', y', z' as

[Páginas 133 e 305]

coordenadas de seus pontos médios o e o' , e seja r a reta oo' que os une, a qual deve ser considerada como uma função de duas variáveis independentes s e s' que representam os arcos das duas curvas consideradas a partir de dois pontos fixos tomados sobre elas. A ação mútua entre dois elementos ds e ds' é, como vimos acima, uma força dirigida ao longo da reta r , e tendo por valor

$$-ii' ds ds' r^k \frac{d(r^k \frac{dr}{ds})}{ds'}$$

Pode-se escrevê-la de maneira mais simples como segue:¹⁶⁰

$$-ii' r^k d'(r^k dr),$$

distinguindo pelas características d e d' as diferenciais relativas apenas à variação das coordenadas x, y e z do elemento ds , daquelas que se obtêm fazendo variar somente as coordenadas x', y' e z' do elemento ds' . Utilizaremos esta distinção todas as vezes nas quais tivermos que considerar algumas diferenciais tomadas de uma destas maneiras, e as outras tomadas da outra maneira.

Esta força sendo atrativa, é preciso, para obter aquela de suas componentes que é paralela ao eixo x , multiplicar o valor por $(x - x')/r$ ou por $-(x - x')/r$, caso ela seja considerada, [respectivamente,] como agindo sobre o elemento ds' ou sobre o elemento ds . Neste último caso, a componente é então igual a

$$ii' r^{k-1} (x - x') d'(r^k dr)$$

¹⁶⁰[N. T.] Comparando as duas equações vem que Ampère está definindo d' por $ds' \frac{d}{ds'}$ e d por $ds \frac{d}{ds}$. Em notação moderna e representando uma definição pelo símbolo \equiv vem que esta definição de Ampère poderia ser escrita na forma: $\partial' \equiv ds' \frac{\partial}{\partial s'}$ e $\partial \equiv ds \frac{\partial}{\partial s}$.

Pode-se colocar esta expressão sob uma outra forma fazendo uso do valor que se obtém para udv , com u e v

[Páginas 134 e 306]

representando grandezas quaisquer, quando se soma, membro a membro, as duas identidades

$$\begin{aligned}udv + vdu &= d(uv) , \\udv - vdu &= u^2 d\left(\frac{v}{u}\right) .\end{aligned}$$

Este valor é

$$udv = \frac{1}{2}d(uv) + \frac{1}{2}u^2 d\frac{v}{u} .$$

E fazendo

$$u = r^{k-1}(x - x'), \quad v = r^k dr ,$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}r^{k-1}(x - x')d'(r^k dr) &= \frac{1}{2}d'[r^{2k-1}(x - x')dr] + \\r^{2k-2}(x - x')^2 d'\frac{rdr}{x - x'} &= \frac{1}{2}d'\frac{(x - x')dr}{r^n} + \frac{1}{2}\frac{(x - x')^2}{r^{n+1}}d'\frac{rdr}{x - x'} ,\end{aligned}$$

já que $2k + n = 1$, o que fornece

$$2k - 1 = -n, \quad 2k - 2 = -n - 1 .$$

Mas

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 ,$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{rdr}{x - x'} = dx + \frac{y - y'}{x - x'}dy + \frac{z - z'}{x - x'}dz ,$$

de onde¹⁶¹

$$d'\frac{rdr}{x - x'} = \frac{(z - z')dx' - (x - x')dz'}{(x - x')^2}dz - \frac{(x - x')dy' - (y - y')dx'}{(x - x')^2}dy .$$

[Páginas 135 e 307]

¹⁶¹[N. T.] No *Théorie* publicado em 1990, [Amp90, pág. 306], esta equação aparece com um erro tipográfico no primeiro termo, a saber:

$$\frac{rdr}{x - x'} = \frac{(z - z')dx' - (x - x')dz'}{(x - x')^2}dz - \frac{(x - x')dy' - (y - y')dx'}{(x - x')^2}dy .$$

Este erro está corrigido no *Théorie* publicado em 1826.

A componente paralela ao eixo x tem, então, por valor

$$\frac{1}{2}ii'd' \frac{(x-x')dr}{r^n} + \frac{1}{2}ii' \left[\frac{(z-z')dx' - (x-x')dz'}{r^{n+1}} dz - \frac{(x-x')dy' - (y-y')dx'}{r^{n+1}} dy \right].$$

Os dois termos desta expressão podem ser considerados separadamente como duas forças cuja soma equivale à força procurada. Ora, é fácil de ver que quando a curva s' forma um circuito fechado, todas as forças tais que aquela que tem como expressão a parte $\frac{1}{2}ii'd' \frac{(x-x')dr}{r^n}$, procedendo da ação de todos os elementos ds' do circuito s' sobre o mesmo elemento ds , se destroem mutuamente. Com efeito, todas estas forças são aplicadas ao mesmo ponto o , ponto médio do elemento ds , ao longo de uma mesma reta paralela ao eixo x . É preciso então, para ter a força produzida ao longo desta reta pela ação de uma porção qualquer do condutor s' , integrar $\frac{1}{2}ii'd' \frac{(x-x')dr}{r^n}$ de uma das extremidades à outra desta porção, e se encontra¹⁶²

$$\frac{1}{2}ii' \left[\frac{(x-x'_2)dr_2}{r_2^n} - \frac{(x-x'_1)dr_1}{r_1^n} \right].$$

Denominando x'_1 , r_1 e dr_1 , os valores que correspondem a uma extremidade e x'_2 , r_2 e dr_2 os que se relacionam à outra, este valor se torna evidentemente nulo quando, o circuito estando fechado, suas duas extremidades estão no mesmo ponto.

Quando o condutor s' forma assim um circuito fechado, se precisará então, para ter mais simplesmente a ação que ele exerce sobre o elemento ds paralelamente ao eixo x , suprimir,

[Páginas 136 e 308]

na expressão da componente paralela a este eixo, a parte $\frac{1}{2}ii'd' \frac{(x-x')dr}{r^n}$, e considerar somente a outra parte

$$\frac{1}{2}ii' \left[\frac{(z-z')dx' - (x-x')dz'}{r^{n+1}} dz - \frac{(x-x')dy' - (y-y')dx'}{r^{n+1}} dy \right]$$

que representaremos por X .

Aplicando as mesmas considerações às duas outras componentes da mesma força que são paralelas aos eixos y e z , as substituiremos pelas forças Y e Z , tendo por valores

$$Y = \frac{1}{2}ii' \left[\frac{(x-x')dy' - (y-y')dx'}{r^{n+1}} dx - \frac{(y-y')dz' - (z-z')dy'}{r^{n+1}} dz \right],$$

$$Z = \frac{1}{2}ii' \left[\frac{(y-y')dz' - (z-z')dy'}{r^{n+1}} dy - \frac{(z-z')dx' - (x-x')dz'}{r^{n+1}} dx \right].$$

Assim, quando se trata de um circuito fechado, a resultante R das três forças X , Y e Z , nas quais são reduzidas as componentes da força $-ii'r^k d'(r^k dr)$, substitui esta força. E o conjunto de todas as forças R é equivalente ao [conjunto] de todas as forças exercidas por cada um dos elementos ds' do circuito fechado s' , e representa a ação total deste circuito sobre o elemento ds . Vejamos agora qual é o valor e a direção desta força R .

¹⁶²[N. T.] Por um erro tipográfico, a última fração no trabalho original esta escrito na forma $\frac{x-x'_1 dr_1}{r_1^n}$.

Sejam u , v e w , as projeções da linha r sobre os planos yz , xz e xy , fazendo, respectivamente, ângulos φ , χ e ψ , com os eixos y , z e x . Consideremos o setor $M'om'$ (Figura 38), que tem por base o elemento ds' e por vértice o ponto o , ponto médio de ds , cujas coordenadas são x , y e z . Chamemos de λ , μ e ν , aos ângulos que a normal ao plano deste setor faz com os eixos, e de θ' ao ângulo compreendido entre

[Páginas 137 e 309]

as direções de ds' e de r . O dobro da área deste setor é $rds' \sin \theta'$, e suas projeções sobre os planos de coordenadas são

$$\begin{aligned} u^2 d'\varphi &= rds' \sin \theta' \cos \lambda = (y' - y)dz' - (z' - z)dy' , \\ v^2 d'\chi &= rds' \sin \theta' \cos \mu = (z' - z)dx' - (x' - x)dz' , \\ w^2 d'\psi &= rds' \sin \theta' \cos \nu = (x' - x)dy' - (y' - y)dx' . \end{aligned}$$

Pode-se então dar esta nova forma aos valores das forças X , Y e Z :¹⁶³

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} ii' \left(\frac{v^2 d'\chi}{r^{n+1}} dz - \frac{w^2 d'\psi}{r^{n+1}} dy \right) = \frac{1}{2} \frac{ii' ds ds' \sin \theta'}{r^n} \left(\frac{dz}{ds} \cos \mu - \frac{dy}{ds} \cos \nu \right) , \\ Y &= \frac{1}{2} ii' \left(\frac{u^2 d'\psi}{r^{n+1}} dx - \frac{v^2 d'\chi}{r^{n+1}} dz \right) = \frac{1}{2} \frac{ii' ds ds' \sin \theta'}{r^n} \left(\frac{dx}{ds} \cos \nu - \frac{dz}{ds} \cos \lambda \right) , \\ Z &= \frac{1}{2} ii' \left(\frac{u^2 d'\varphi}{r^{n+1}} dy - \frac{v^2 d'\chi}{r^{n+1}} dx \right) = \frac{1}{2} \frac{ii' ds ds' \sin \theta'}{r^n} \left(\frac{dy}{ds} \cos \lambda - \frac{dx}{ds} \cos \mu \right) . \end{aligned}$$

Ora, estes valores fornecem

$$\begin{aligned} X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} &= 0 , \\ X \cos \lambda + Y \cos \mu + Z \cos \nu &= 0 . \end{aligned}$$

Isto significa que a direção da força R com a direção do elemento $mM = ds$, e com a normal op ao plano do setor $M'om'$, faz ângulos cujos co-senos são nulos, de modo que esta força está no plano do setor e é perpendicular ao elemento ds . Quanto à sua intensidade, tem-se pelas fórmulas conhecidas¹⁶⁴

¹⁶³[N. T.] No trabalho original está escrito no termo após a primeira igualdade $X = \frac{1}{2} ii(\dots)$ o que é o erro tipográfico, pois se está falando da interação de duas correntes com intensidades i e i' .

¹⁶⁴[N. T.] É interessante reproduzir aqui a seguinte Nota de Joubert relativa à próxima equação, [Amp87c, pág. 123]:

Esta fórmula foi reproduzida pelo Sr. Reynard (*Annales de Chimie et de Physique* [4], Vol. XIX, p. 272; 1870) [[Rey70]], e, freqüentemente, é desinada pelo nome de *fórmula de Reynard*. Do ponto de vista analítico é a [expressão] mais simples pela qual se pode representar a ação recíproca entre dois elementos de corrente. Ao juntar a cada uma de suas componentes uma diferencial exata das coordenadas x' , y' e z' , se obterá uma fórmula que satisfará igualmente às experiências, pois suas integrais realizadas no contorno do circuito fechado fornecem para estes termos valores nulos. Caso se imponha à nova força assim obtida a condição de que ela esteja dirigida ao longo da reta que une os dois elementos, encontra-se que este termo é aquele que foi desprezado anteriormente, e voltamos na fórmula de Ampère. Portanto, [a fórmula de Ampère] é a única que satisfaz à condição imposta [de ação e reação ao longo da reta que une os dois elementos].

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{2} \frac{ii' ds ds' \text{ sen } \theta' \text{ sen } \text{pom}}{r^n}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{ii' ds ds' \text{ sen } \theta' \text{ cos } \text{mok}}{r^n} .$$

[Páginas 138 e 310]

[Nesta equação] ok é a projeção de om sobre o plano do setor $M'om'$. Pode-se decompor esta força no plano do mesmo setor em duas outras [forças], uma S dirigida ao longo da linha $oo' = r$, a outra T perpendicular a esta linha. Esta última é

$$T = R \text{ cos } ToR = R \text{ cos } \text{hok} = \frac{1}{2} \frac{ii' ds ds' \text{ sen } \theta' \text{ cos } \text{mok} \text{ cos } \text{hok}}{r^n} .$$

E como o ângulo triedro formado pelas direções de om , ok e oh fornece

$$\text{cos } \text{mok} \text{ cos } \text{hok} = \text{cos } \text{moh} = \text{cos } \theta ,$$

vem que

$$T = \frac{1}{2} \frac{ii' ds ds' \text{ sen } \theta' \text{ cos } \theta}{r^n} .$$

A força S ao longo de oh é

$$S = R \text{ sen } \text{hok} = T \text{ tan } \text{hok} .$$

Mas designando por ω a inclinação do plano moh sobre o plano hok , que é o plano do setor $M'om'$, tem-se

$$\text{tan } \text{hok} = \text{tan } \theta \text{ cos } \omega .$$

Assim,

$$S = \frac{1}{2} \frac{ii' ds ds' \text{ sen } \theta \text{ sen } \theta' \text{ cos } \omega}{r^n} .$$

Caso se integrem as expressões de X , Y e Z por toda a extensão do circuito fechado s' , teremos as três componentes da ação exercida por todo este circuito sobre o elemento ds . Substituindo n por seu valor 2, estas três componentes ficam na forma:

[Páginas 139 e 311]

$$\frac{1}{2} ii' \left(dz \int \frac{v^2 d' \chi}{r^3} - dy \int \frac{w^2 d' \psi}{r^3} \right) ,$$

$$\frac{1}{2} ii' \left(dx \int \frac{w^2 d' \psi}{r^3} - dz \int \frac{u^2 d' \varphi}{r^3} \right) ,$$

$$\frac{1}{2} ii' \left(dy \int \frac{u^2 d' \varphi}{r^3} - dx \int \frac{v^2 d' \chi}{r^3} \right) .$$

As forças semelhantes aplicadas a todos os elementos ds da curva s darão a ação total exercida pelo circuito s' sobre o circuito s . Elas são obtidas integrando outra vez as expressões precedentes em toda a extensão deste último circuito.

Vamos conceber agora duas superfícies arbitrárias σ e σ' , delimitadas pelos contornos s e s' , onde todos os pontos estejam ligados constantemente entre si e com todos os pontos da superfície correspondente, e [vamos supor] sobre estas superfícies camadas infinitamente finas de um mesmo fluido magnético que seja retido sobre elas por uma força coercitiva suficiente para que não possa se deslocar de nenhuma maneira. Considerando sobre estas duas superfícies duas porções infinitamente pequenas de segunda ordem que representaremos por $d^2\sigma$ e $d^2\sigma'$,¹⁶⁵ cujas posições estejam determinadas pelas coordenadas x, y, z para a primeira e x', y', z' para a segunda, e cuja distância [entre elas] seja r , a ação mútua entre elas será uma força repulsiva dirigida ao longo da linha r e representada por¹⁶⁶ $-\mu\varepsilon\varepsilon'd^2\sigma d^2\sigma'/r^2$, que consideraremos como agindo sobre o elemento $d^2\sigma$. Aqui ε e ε' designam o que se denomina espessura da camada magnética sobre cada superfície. O coeficiente μ é uma constante, tal que $\mu\varepsilon\varepsilon'$ representa a ação repulsiva que ocorreria, caso se reunissem em dois pontos situados a uma distância igual à unidade, de um lado todo o fluido espalhado sobre uma área igual à unidade de superfície — onde o espaçamento seria

[Páginas 140 e 312]

constante e igual a ε — e do outro todo o fluido espalhado sobre uma outra área igual à unidade de superfície — onde o espaçamento seria também constante e igual a ε' .

Decompondo esta força paralelamente aos três eixos, tem-se as três componentes:

$$\frac{\mu\varepsilon\varepsilon'd^2\sigma d^2\sigma'(x-x')}{r^3}, \quad \frac{\mu\varepsilon\varepsilon'd^2\sigma d^2\sigma'(y-y')}{r^3}, \quad \frac{\mu\varepsilon\varepsilon'd^2\sigma d^2\sigma'(z-z')}{r^3}.$$

Vamos agora conceber uma nova superfície delimitada pelo mesmo contorno s que limita a superfície σ , e tal que todas as porções das normais à superfície σ compreendidas entre ela e a nova superfície sejam muito pequenas. Suponhamos que sobre esta última superfície seja distribuído¹⁶⁷ o fluido magnético da espécie contrária ao da superfície σ , de maneira que se tenha sobre a porção da nova superfície circunscrita pelas normais traçadas por todos os pontos do contorno do elemento de superfície $d^2\sigma$ uma quantidade igual àquela do fluido espalhado sobre $d^2\sigma$. Denominando de h ao comprimento da pequena porção da normal à superfície σ , traçada pelo ponto cujas coordenadas são x, y, z , e compreendida entre as duas superfícies, a qual mede em toda a extensão da área infinitamente pequena $d^2\sigma$ a distância de seus pontos aos pontos correspondentes da outra superfície, e designando por ξ, η, ζ aos ângulos que esta normal faz com os eixos, as três componentes da ação mútua entre o elemento $d^2\sigma'$ e a pequena porção da nova superfície circunscrita como acabamos de dizer — que é sempre igual a $d^2\sigma$ enquanto h for muito pequeno e que se desconsidere nos cálculos, como o fazemos aqui, as potências de h superiores à primeira — serão obtidas da expressão que acabamos de encontrar,

¹⁶⁵[N. T.] Ou seja, considerando duas áreas infinitesimais $d^2\sigma$ e $d^2\sigma'$.

¹⁶⁶[N. T.] Nas versões originais publicadas em 1826 e em 1827 está escrito $\frac{\mu\varepsilon\varepsilon'd^2\sigma d^2\sigma'}{r^2}$. Mas uma errata que aparece no final do trabalho chama a atenção que o correto seria (no texto alteramos “sobre o elemento ds ” por “sobre o elemento $d^2\sigma$,” por tratar-se de um novo erro tipográfico):

$-\frac{\mu\varepsilon\varepsilon'd^2\sigma d^2\sigma'}{r^2}$, que consideraremos como agindo sobre o elemento ds .

¹⁶⁷[N. T.] Às vezes se denomina por *folha magnética* a esta distribuição dos fluidos magnéticos Norte e Sul sobre os dois lados de uma superfície.

substituindo x, y e z por $x+h \cos \xi, y+h \cos \eta$ e $z+h \cos \zeta$. E como os dois fluidos espalhados sobre as duas áreas iguais a $d^2\sigma$ são de natureza contrária, será necessário subtrair os novos valores destas componentes dos valores encontrados anteriormente. O que se reduzirá, já que estamos desprezando as potências de h superiores à primeira, a diferenciar estes valores, a substituir no resultado as diferenciais de x, y e z por $h \cos \xi, h \cos \eta$ e $h \cos \zeta$, e a trocar o sinal. Sendo tomadas estas diferenciais passando da primeira superfície σ para a outra, as designaremos por δ , seguindo a notação do cálculo variacional. Teremos assim para a componente [da ação] paralela ao [eixo] x o que vem a ser $-\mu\varepsilon\varepsilon' d^2\sigma d^2\sigma' \delta \frac{x-x'}{r^3}$, quando se substitui [nesta expressão] δx por $h \cos \xi$, ou seja

$$-\mu\varepsilon\varepsilon' d^2\sigma d^2\sigma' h \cos \xi \left(\frac{3(x-x') \frac{\delta x}{\delta x}}{r^4} - \frac{1}{r^3} \right).$$

Determinaremos agora a forma e a posição do elemento $d^2\sigma$.

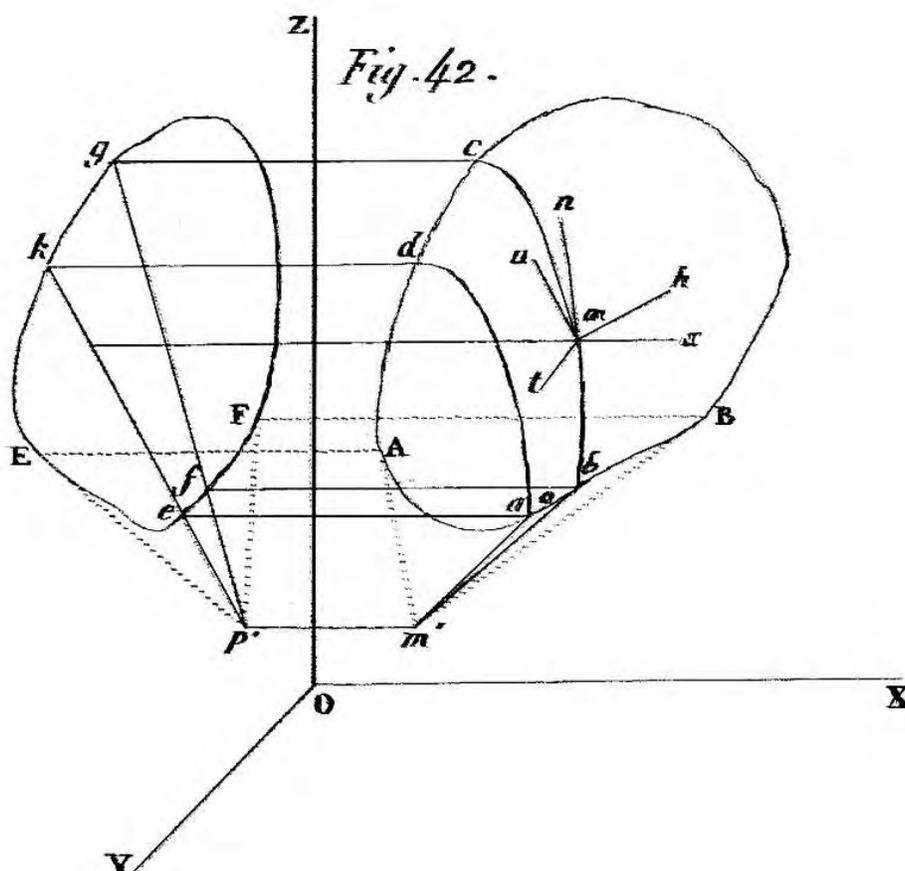


Figura 42.

Como anteriormente, vamos designar por u, v e w às projeções da linha r sobre os planos yz, zx e xy , e por φ, χ e ψ aos ângulos que estas projeções fazem com os eixos y, z e x , respectivamente. Vamos decompor a primeira superfície σ em uma infinidade de zonas infinitamente estreitas, tais

como $abcd$ (Figura 42), por uma série de planos perpendiculares ao plano yz traçados pela coordenada $m'p' = x$ do ponto m' . Cada zona limitando-se nas duas bordas do contorno s da superfície σ , terá como projeção sobre o plano yz uma área decomponível ela mesma em elementos quadrangulares infinitamente pequenos, aos quais corresponderão a mesma quantidade

[Páginas 142 e 314]

de elementos da superfície σ sobre a zona que se está tratando. São estes elementos que se deve considerar como os valores de $d^2\sigma$. O [elemento] cuja posição, com respeito ao elemento $d^2\sigma'$, está determinado pelas coordenadas polares r , u e φ , é igual à sua projeção $udud\varphi$ sobre o plano yz dividido pelo co-seno do ângulo ξ compreendido entre este plano e o plano tangente à superfície σ com o qual coincide o elemento $d^2\sigma$. Portanto, será necessário substituir $d^2\sigma$ por $\frac{udud\varphi}{\cos \xi}$ na fórmula precedente, e se terá

$$\mu h \varepsilon \varepsilon' d^2 \sigma' u d u d \varphi \left(\frac{3(x-x') \frac{\delta r}{\delta x}}{r^4} - \frac{1}{r^3} \right) .$$

Para calcular o valor de $(x-x') \frac{\delta r}{\delta x}$, seja mx o prolongamento da coordenada $mp = x$ do ponto m onde está situado o elemento $d^2\sigma$, seja mu uma paralela ao plano yz traçada no plano $pmm'p'$, e seja mt perpendicular a este último plano no ponto m . É fácil de ver que a reta mn — ao longo da qual $pmm'p'$ corta o plano tangente à superfície σ em m — faz com as três linhas mx , mu e mt — que são perpendiculares entre si — ângulos cujos co-senos são, respectivamente,

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + du^2}}, \quad \frac{du}{\sqrt{dx^2 + du^2}} \quad \text{e} \quad 0 ,$$

e que a normal mh faz com as mesmas direções ângulos cujos co-senos são¹⁶⁸

$$\frac{\delta x}{\sqrt{\delta x^2 + \delta u^2 + \delta t^2}}, \quad \frac{\delta u}{\sqrt{\delta x^2 + \delta u^2 + \delta t^2}}, \quad \frac{\delta t}{\sqrt{\delta x^2 + \delta u^2 + \delta t^2}},$$

tendo δt lugar da projeção de mh sobre mt . Portanto, tem-se¹⁶⁹

[Páginas 143 e 315]

$$\frac{dx\delta x + du\delta u}{\sqrt{dx^2 + du^2} \sqrt{\delta x^2 + \delta u^2 + \delta t^2}},$$

para o co-seno do ângulo compreendido entre a reta mn e a normal mh , e como este ângulo é reto, $dx\delta x + du\delta u = 0$, de onde $dx/du = -\delta u/\delta x$. Mas a equação

$$r^2 = (x-x')^2 + u^2 ,$$

fornece

$$r\delta r = (x-x')\delta x + u\delta u ,$$

e

¹⁶⁸[N. T.] Por um erro tipográfico no trabalho original, o termo δu^2 na primeira expressão aparece como δ^2 .

¹⁶⁹[N. T.] No trabalho original consta no numerador a forma $dx\delta x + du\delta u$ o que é um erro tipográfico.

$$rdr = udu + (x - x')dx ,$$

de onde se deduz

$$\frac{\delta r}{\delta x} = \frac{x - x'}{r} + \frac{u}{r} \frac{\delta u}{\delta x} ,$$

e

$$\frac{dr}{du} = \frac{u}{r} + \frac{x - x'}{r} \frac{dx}{du} = \frac{u}{r} - \frac{x - x'}{r} \frac{\delta u}{\delta x} .$$

Eliminando $\delta u/\delta x$ entre estas duas equações, vem que

$$(x - x') \frac{\delta r}{\delta x} + u \frac{dr}{du} = \frac{(x - x')^2}{r} + \frac{u^2}{r} = r .$$

Se tirarmos agora desta equação o valor de $(x - x') \frac{\delta r}{\delta x}$ para substituí-lo no valor da força paralela ao eixo x , teremos

$$\begin{aligned} \mu h \varepsilon \varepsilon' u d u d \varphi \left(\frac{3r - 3u \frac{dr}{du}}{r^4} - \frac{1}{r^3} \right) = \\ \mu h \varepsilon \varepsilon' d \varphi \left(\frac{2u du}{r^3} - \frac{3u^2 dr}{r^4} \right) = \mu h \varepsilon \varepsilon' d \varphi d \frac{u^2}{r^3} . \end{aligned}$$

[Páginas 144 e 316]

A altura h e o espaçamento ε da camada infinitamente fina de fluido espalhado sobre a superfície σ , podem variar de um ponto desta superfície a um outro [ponto]. E para atingir o objetivo que nos propusemos de representar, com a ajuda dos fluidos magnéticos, as ações que exercem os condutores voltaicos, é necessário supor que estas duas grandezas ε e h , variam em razão inversa uma da outra, de maneira que seu produto¹⁷⁰ $h\varepsilon$ conserve o mesmo valor por toda a extensão da superfície σ . Denominando por g ao valor constante deste produto, a expressão precedente torna-se

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' d \varphi d \frac{u^2}{r^3} ,$$

e se integra imediatamente. Sua integral $\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' d \varphi \left(\frac{u^2}{r^3} - C \right)$ expressa a soma das forças paralelas ao eixo x que agem sobre os elementos $d^2 \sigma$ da zona da superfície σ contida entre os dois planos traçados por $m'p'$ que compreendem o ângulo $d\varphi$. Estando a superfície σ delimitada pelo contorno fechado s , é preciso tomar esta integral entre os limites determinados pelos dois elementos ab e cd deste contorno que estão compreendidos no ângulo $d\varphi$ dos dois planos que acabamos de falar, de modo que denominando u_1, r_1 e u_2, r_2 aos valores de u e de r relativos a estes dois elementos, tem-se

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' d \varphi \left(\frac{u_2^2}{r_2^3} - \frac{u_1^2}{r_1^3} \right) ,$$

para a soma de todas as forças exercidas pelo elemento $d^2 \sigma'$ sobre a zona paralelamente ao eixo x .

¹⁷⁰[N. T.] Às vezes denomina-se este produto por *potência magnética da folha*.

Se a superfície σ , ao invés de ser delimitada por um contorno, contivesse de todos os lados um espaço de forma qualquer,¹⁷¹ a zona desta superfície compreendida no ângulo diedro φ seria

[Páginas 145 e 317]

fechada, e se teria $u_2 = u_1$ e $r_2 = r_1$. De modo que a ação exercida sobre esta zona paralelamente ao eixo x seria nula e, conseqüentemente, também [seria nula a ação] que o elemento $d^2\sigma'$ exerceria sobre toda a superfície σ composta então de zonas semelhantes. E como a mesma coisa aconteceria relativamente às forças paralelas aos eixos y e z , vê-se que o conjunto de duas superfícies muito próximas uma da outra, contendo em todos os lados um espaço de forma qualquer, e cobertas, da maneira que acabamos de dizer, uma de fluido austral e outra de fluido boreal, não atua sobre uma molécula magnética, qualquer que seja o lugar onde ela esteja colocada e, conseqüentemente, [não atua] de forma alguma sobre um corpo imantado. Retomemos a expressão precedente

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(\frac{u_2^2 d\varphi}{r_2^3} - \frac{u_1^2 d\varphi}{r_1^3} \right),$$

e nos será fácil de ver que, para ter a soma total das forças paralelas ao eixo x que o elemento $d^2\sigma'$ exerce sobre toda a superfície σ , é preciso integrar, com relação a φ , as duas partes que compõem esta expressão, respectivamente nas duas porções¹⁷² $3AabB$ e $BcdA$ do contorno s , determinadas pelos dois planos tangentes $p'm'A$ e $p'm'B$, traçados pela linha $m'p'$. Mas dá no mesmo integrar $\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3}$ em toda a extensão do circuito s . Pois ao se colocar para u e φ seus valores em funções de r deduzidos das equações da curva s , observa-se que passando da parte $AabB$ para a parte $BcdA$, $d\varphi$ muda de sinal e, conseqüentemente, os elementos de uma destas partes possuem um sinal contrário em relação aos [elementos] da outra.

De acordo com isso, se designarmos por X à soma das forças

[Páginas 146 e 318]

paralelas ao eixo x que o elemento $d^2\sigma'$ exerce sobre o conjunto das duas superfícies limitadas pelo mesmo contorno s , teremos

$$X = \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{u^2 d\varphi}{r^3},$$

ou, o que é a mesma coisa,

$$X = \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{(y - y') dz - (z - z') dy}{r^3},$$

os x , y e z estando relacionados somente ao contorno s .

Igualmente se terá, designando por Y e por Z às somas das forças paralelas aos [eixos] y e z que agem sobre o mesmo conjunto de superfícies,¹⁷³

$$Y = \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{v^2 d\chi}{r^3} = g \mu \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{(z - z') dx - (x - x') dz}{r^3},$$

¹⁷¹[N. T.] Ou seja, se esta superfície limitasse um volume de forma arbitrária.

¹⁷²[N. T.] Nos textos originais publicados em 1826 e em 1827 está escrito $BabA$, mas uma errata que aparece no final do trabalho chama a atenção que o correto é $BcdA$. Estas letras referem-se à Figura 42 na nossa página 284.

¹⁷³[N. A.] É inútil destacar que estes X , Y e Z expressam forças totalmente diferentes das que já tínhamos designado pelas mesmas letras, quando se tratava da ação mútua entre dois elementos de circuitos voltaicos.

$$Z = \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{w^2 d\psi}{r^3} = g \mu \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{(x - x') dy - (y - y') dx}{r^3}.$$

Como todas as forças elementares que o elemento $d^2 \sigma'$ exerce sobre estas superfícies passam pelo ponto m' onde ele está situado, observa-se que todas estas forças possuem uma resultante única cuja direção passa pelo ponto m' , e cujas componentes paralelas aos eixos são X , Y e Z . Portanto, os torques desta resultante com relação aos mesmos eixos são

$$Y z' - Z y', \quad Z x' - X z' \quad \text{e} \quad X y' - Y x'.$$

Suponhamos agora que no lugar destas forças se aplique

[Páginas 147 e 319]

ao ponto médio de cada um dos elementos ds do contorno s uma força igual a $\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{ds \operatorname{sen} \theta}{r^2}$, e perpendicular ao plano do setor que tem ds por base, o ponto m' por vértice, e cuja área é $\frac{1}{2} r ds \operatorname{sen} \theta$. Sendo as três componentes desta força iguais a, respectivamente,

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3}, \quad \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{v^2 d\chi}{r^3} \quad \text{e} \quad \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{w^2 d\psi}{r^3},$$

paralelas às componentes que passam pelo elemento $d^2 \sigma$ e dirigidas no mesmo sentido, teremos os mesmos valores para as três forças X , Y e Z que tendem a mover o circuito s . Mas as somas dos torques que resultam disso, ao invés de serem representadas por

$$\begin{aligned} \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(z' \int \frac{v^2 d\chi}{r^3} - y' \int \frac{w^2 d\psi}{r^3} \right), \quad \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(x' \int \frac{w^2 d\psi}{r^3} - z' \int \frac{u^2 d\varphi}{r^3} \right) \quad \text{e} \\ \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(y' \int \frac{u^2 d\varphi}{r^3} - x' \int \frac{v^2 d\chi}{r^3} \right), \end{aligned}$$

serão representadas por

$$\begin{aligned} \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(\int \frac{z v^2 d\chi}{r^3} - \int \frac{y w^2 d\psi}{r^3} \right), \quad \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(\int \frac{x w^2 d\psi}{r^3} - \int \frac{z u^2 d\varphi}{r^3} \right) \quad \text{e} \\ \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(\int \frac{y u^2 d\varphi}{r^3} - \int \frac{x v^2 d\chi}{r^3} \right). \end{aligned}$$

De início parece que esta mudança irá contribuir com um à ação exercida sobre o contorno s , mas não é assim desde que este contorno forme um circuito fechado, pois ao se subtrair a primeira soma dos torques, relativa ao eixo x por exemplo, da quarta que se relaciona com o mesmo eixo, prestando atenção que x' , y' e z' devem ser consideradas como constantes nestas integrações, se terá

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{(z - z') v^2 d\chi - (y - y') w^2 d\psi}{r^3} =$$

[Páginas 148 e 320]

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{(z - z')^2 dx - (z - z')(x - x') dz - (y - y')(x - x') dy + (y - y')^2 dx}{r^3} =$$

$$\begin{aligned} \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{[(z - z')^2 + (y - y')^2] dx - (x - x') [(z - z') dz + (y - y') dy]}{r^3} = \\ \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{[r^2 - (x - x')^2] dx - (x - x') [r dr - (x - x') dx]}{r^3} = \\ \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \int \left[\frac{r dx - (x - x') dr}{r^2} \right] = \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(\frac{x_2 - x'}{r_2} - \frac{x_1 - x'}{r_1} \right), \end{aligned}$$

denominando de x_1 , x_2 e r_1 , r_2 aos valores de x e de r nas duas extremidades do arco s para o qual se calcula o valor da diferença dos dois torques. Quando este arco forma um circuito fechado, é evidente que $x_2 = x_1$ e $r_2 = r_1$, o que torna nula a integral assim obtida. Tem-se então,¹⁷⁴

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \int \frac{z v^2 d\chi - y w^2 d\psi}{r^3} = \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \left(z' \int \frac{v^2 d\chi}{r^3} - y' \int \frac{w^2 d\psi}{r^3} \right).$$

Encontra-se por um cálculo parecido que os torques relativos aos outros dois eixos são os mesmos, para um circuito fechado, quando se supõe que as direções das forças

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3}, \quad \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{v^2 d\chi}{r^3} \quad \text{e} \quad \mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{w^2 d\psi}{r^3},$$

passam pelo elemento $d^2 \sigma'$ ou [quando se supõe que elas passam] pelo ponto médio de ds . De onde segue que nestes dois casos a ação que ocorre sobre o contorno s é exatamente a mesma, estando este contorno invariavelmente ligado às duas superfícies extremamente próximas que ele delimita. Portanto, a ação exercida sobre estas duas superfícies pelo elemento $d^2 \sigma'$ se reduzirá, desde que o contorno s seja uma curva fechada, às forças aplicadas como acabamos de dizer a cada um dos elementos deste contorno, aquela que age sobre o elemento ds tendo por valor

$$\mu g \varepsilon' d^2 \sigma' \frac{ds \operatorname{sen} \theta}{r^2}.$$

[Páginas 149 e 321]

A força aplicada ao ponto médio o do elemento $ab = ds$, que é proporcional a $ds \operatorname{sen} \theta$ dividido pelo quadrado da distância r deste elemento ao ponto m' , e cuja direção é perpendicular ao plano que passa pelo elemento ab e pelo ponto m' , é precisamente a força que exerce, como vimos, a extremidade de um solenóide eletrodinâmico indefinido, quando se dispõe esta extremidade no ponto m' , sobre o elemento ds . Esta é também a força que é produzida, de acordo com as últimas experiências do Sr. Biot, pela ação mútua entre o elemento ab e uma molécula magnética situada em m' .

Mas dando a esta força o mesmo valor e a mesma direção perpendicular ao plano $m'ab$ — que se deve dar a ela quando ela é determinada, como fiz, substituindo a molécula magnética pela extremidade de um solenóide indefinido — o Sr. Biot supõe que é em m' que se encontra seu ponto de aplicação, ou melhor, [o ponto de aplicação] da força igual e oposta que o elemento ds exerce sobre o ponto m' , pois é a este último ponto que se referem as experiências que ele fez; ao passo que a direção da força exercida por este elemento sobre a extremidade situada em m' de um solenóide indefinido deve passar pelo ponto m , como aquela que o solenóide exerce

¹⁷⁴[N. T.] No original está escrito $d^2 s'$ em vez de $d^2 \sigma'$ no lado direito desta equação. Isto é um erro tipográfico. Este erro ainda aparece em [Amp87c, pág. 132] e em [Amp58, pág. 113].

sobre o elemento, quando se obtém esta força a partir da minha fórmula. Assim, conservando as notações que empregamos e representando, para simplificar, por ρ ao coeficiente constante $g\mu\varepsilon'd^2\sigma'$, as somas dos torques, de acordo com a maneira que o Sr. Biot dispõe os pontos de aplicação das forças, seriam para os três eixos e mudando de sinal, já que se tratam das forças agindo sobre o ponto m' ,

$$-\rho \int \frac{z'v^2d\chi - y'w^2d\psi}{r^3},$$

[Páginas 150 e 322]

$$-\rho \int \frac{x'w^2d\psi - z'u^2d\varphi}{r^3},$$

$$-\rho \int \frac{y'u^2d\varphi - x'v^2d\chi}{r^3}.$$

Enquanto que, considerando os pontos de aplicação [da maneira] como os encontrei, tem-se para estas somas dos torques

$$-\rho \int \frac{zv^2d\chi - yw^2d\psi}{r^3},$$

$$-\rho \int \frac{xw^2d\psi - zu^2d\varphi}{r^3},$$

$$-\rho \int \frac{yu^2d\varphi - xv^2d\chi}{r^3}.$$

Mas acabamos de ver que estes últimos valores são iguais, respectivamente, aos três precedentes, quando a porção de condutor forma um circuito fechado. Disto segue que neste caso, a experiência não pode decidir se o ponto de aplicação das forças é realmente no ponto m' ou no ponto médio m do elemento ds . E como — dentre aquelas [experiências] feitas pelo físico hábil¹⁷⁵ a quem devemos as experiências discutidas aqui — se tratava, com efeito, de um circuito completamente fechado, composto de duas porções retilíneas formando um ângulo ao qual ele fornecia diferentes valores sucessivamente, [composto] do restante do fio condutor e da pilha, [circuito este] que ele fazia agir sobre um pequeno ímã, para deduzir a razão das forças correspondentes aos diversos valores deste ângulo [a partir] dos números de oscilações do pequeno ímã, durante um tempo dado, que correspondiam a estes diversos valores; portanto, os resultados das experiências feitas desta maneira devem ser identicamente os mesmos, quer se suponha o ponto de aplicação das

[Páginas 151 e 323]

forças em o ou em m' . [Logo, os resultados destas experiências] não podem servir para decidir qual destas duas suposições deve ser preferida, esta questão sobre o ponto de aplicação somente pode ser resolvida por outras considerações. É por isso que penso ser necessário, antes de ir mais adiante, de examiná-la com alguns detalhes.

¹⁷⁵[N. T.] J. B. Biot

É na Memória que li na seção de 4 de dezembro de 1820, que comuniquei à Academia a fórmula fundamental de toda a teoria exposta nesta Memória, fórmula que fornece o valor da ação mútua entre dois fios condutores expressa desta maneira:^{176,177}

$$\frac{ii' ds ds' (\sin \theta \sin \theta' \cos \omega + k \cos \theta \cos \theta')}{r^2},$$

sendo k um número constante, que depois determinei o valor, provando, por outras experiências, que é igual a $-1/2$.

14.20 Exame das Três Hipóteses sobre a Natureza da Ação Mútua entre um Elemento de Fio Condutor e Aquilo que se Denomina de *Uma Molécula Magnética*

Algum tempo depois, na seção de 18 do mesmo mês, o Sr. Biot leu uma Memória onde descrevia as experiências que fizera sobre as oscilações de um pequeno ímã submetido à ação de um condutor angular, de onde concluiu destas experiências — através do erro de cálculo exposto mais acima — que a ação de cada elemento do condutor sobre o que se denomina uma molécula magnética, é representada por uma força perpendicular ao plano traçado pela molécula e pelo elemento, em razão inversa do quadrado da distância entre eles, e proporcional ao seno do ângulo que a reta que mede

[Páginas 152 e 324]

esta distância forma com a direção do elemento. Vê-se pelos cálculos precedentes, que esta força é precisamente aquela que fornece minha fórmula para a ação mútua entre um elemento de fio condutor e a extremidade de um solenóide eletrodinâmico, e que ela é também a [força] que resulta da lei de Coulomb, na hipótese de dois fluidos magnéticos, quando se procura a ação que ocorre entre uma molécula magnética e os elementos do contorno que delimita duas superfícies infinitamente vizinhas — uma recoberta de fluido austral e a outra de fluido boreal — supondo as moléculas destes fluidos distribuídas sobre as duas superfícies como acabo de explicar.

Nestas duas maneiras de conceber as coisas, encontram-se os mesmos valores para as três componentes, paralelas a três eixos escolhidos livremente, da resultante de todas as forças exercidas pelos elementos do contorno e, para cada uma destas forças, a ação é oposta à reação seguindo as retas que unem dois a dois os pontos entre os quais elas se exercem. Ocorre o mesmo para a própria resultante [da ação] e para sua reação. Mas no primeiro caso, o ponto O (Figura 36) representa a extremidade do solenóide ao qual pertencem os pontos P e N , e sendo o o [ponto] onde está situado o elemento, as duas forças iguais e opostas og e $o\gamma$ passam por este elemento. No segundo caso, ao contrário, é em O que é necessário conceber disposto o elemento do contorno das superfícies recobertas de moléculas magnéticas P e N , e [deve-se supor localizada] em o a molécula sobre a qual agem estas superfícies, de modo que as duas forças iguais e opostas passam pela molécula. Enquanto se admite que não pode existir ação de um ponto material sobre um outro, sem que este último [ponto material] reaja sobre o primeiro com uma força

¹⁷⁶[N. A.] *Journal de Physique*, volume XCI, págs. 226-230.

¹⁷⁷[N. T.] Esta Memória, lida em 4 de dezembro de 1820, foi publicada em [Amp20e]. O manuscrito contendo o que Ampère apresentou nesta data foi publicado por Joubert, [Amp85f]. Ampère apresentou outra versão deste trabalho em [Amp20d].

igual e dirigida em sentido contrário seguindo uma mesma reta — o que leva à mesma condição relacionada à ação e reação entre dois sistemas de pontos rigidamente ligados — se terá que escolher somente entre estas duas hipóteses. E como a experiência do Sr. Faraday, sobre a rotação de uma porção de um fio condutor ao redor de um ímã, está, assim como o explicarei em breve, em contradição manifesta com a primeira [hipótese], não deveria mais haver dificuldade em considerar, como fiz, como admissível apenas [a hipótese] que se faz passar pelo ponto médio do elemento a reta segundo a qual estão dirigidas as duas forças. Mas muitos físicos supuseram neste caso que na ação mútua entre um elemento AB (Figura 39)¹⁷⁸ de fio condutor e uma molécula magnética M, a ação e reação, mesmo que iguais e dirigidas em sentidos contrários, não estavam ao longo de uma mesma reta, mas ao longo de duas retas paralelas, de modo que a molécula M, agindo sobre o elemento AB, tenderia a movê-lo ao longo da reta OR traçada pelo ponto médio¹⁷⁹ O do elemento AB perpendicularmente ao plano MAB, e que a ação que exerceria reciprocamente este elemento sobre a molécula M tenderia a levá-la, com uma força igual, na direção MS, paralela à [reta] OR.

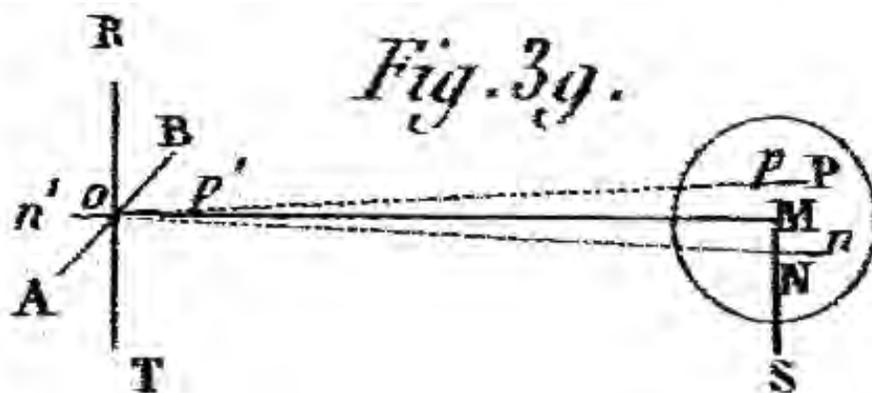


Figura 39.

Resultaria desta hipótese singular, se ela fosse verdadeira, que seria matematicamente impossível de reduzir os fenômenos produzidos pela ação mútua entre um fio condutor e um ímã, em termos de forças agindo, como todas aquelas que reconhecemos até hoje existentes na natureza, de maneira que a ação e a reação sejam iguais e opostas ao longo da direção das retas que unem dois a dois os pontos entre os quais elas se exercem. Pois,

todas as vezes que esta condição é satisfeita para forças elementares quaisquer, ela também o é, evidentemente, de acordo com o próprio princípio da composição das forças, para suas resultantes. Assim, os físicos que adotaram esta opinião são forçados a admitir uma ação realmente elementar, consistindo em duas forças iguais em sentidos contrários ao longo de retas paralelas, e formando

¹⁷⁸[N. T.] O ponto médio do elemento AB da Figura 39 deveria ser representado pela letra O e não pela letra o, como aparece tanto no *Théorie* de 1826 quanto no de 1827, já que neste e nos próximos parágrafos Ampère sempre se refere a este ponto pela letra O. Isto foi corrigido em nossa Figura feita com um software gráfico, ver a Fig. A.39.

¹⁷⁹[N. T.] Ver a nota de rodapé 178.

assim um torque primitivo, que não pode ser reduzido em termos de forças para as quais a ação e reação seriam opostas ao longo de uma mesma reta. Sempre considerei esta hipótese dos torques primitivos como absolutamente contrária às primeiras leis da mecânica, entre as quais se deve considerar, com Newton, a igualdade da ação e da reação agindo em sentidos contrários ao longo da mesma reta. E reduzi os fenômenos que se observa quando um fio condutor e um ímã agem um sobre o outro, assim como todos os outros fenômenos eletrodinâmicos, a uma ação entre dois elementos de corrente elétrica, de onde resultam duas forças iguais e opostas, todas as duas dirigidas ao longo da reta que une os dois elementos. Se encontra assim justificada esta primeira característica das outras forças observadas na natureza. E quanto à [característica] que consiste em que as forças que se considera como realmente elementares sejam, além disso, simplesmente funções das distâncias dos pontos entre os quais elas se exercem, nada se opõe, assim como já destaquei, que a força cujo valor determinei com experiências precisas, um dia não se reduza a forças elementares que também satisfaçam a esta segunda condição, desde que se faça entrar no cálculo o movimento contínuo, nos fios condutores, das moléculas elétricas para as quais seriam inerentes estas últimas forças.

[Páginas 155 e 327]

A consideração destes movimentos introduzirá necessariamente no valor da força que resultaria entre dois elementos [de corrente], além da distância entre eles, os ângulos que determinam as direções ao longo das quais se movem as moléculas elétricas, e que dependem das próprias direções destes elementos. São precisamente apenas estes ângulos, ou, o que dá no mesmo, as diferenciais da distância entre os dois elementos considerada como uma função dos arcos formados pelos fios condutores, que entram na minha fórmula juntamente com esta distância. Não se deve esquecer que, na única maneira de conceber as coisas que me parece admissível, as duas forças iguais e opostas¹⁸⁰ OR e OT são as resultantes de uma infinidade de forças iguais e opostas duas a duas. [Isto é,] OR é a [resultante] das forças On' , Op' , etc., em que todas passam pelo ponto O, de modo que a sua resultante OR passa ali também, enquanto que OT é a resultante das forças Nn , Pp , etc., exercidas pelo elemento AB sobre pontos tais como N, P, etc. ligados invariavelmente à extremidade M do solenóide eletrodinâmico, pela qual suponho ter sido substituída o que se denomina uma molécula magnética. Estes pontos estão muito próximos de M quando este solenóide é muito pequeno, mas são sempre distintos, e por isso a sua resultante OT não passa pelo ponto M, mas pelo ponto O para o qual estão dirigidas todas as forças Nn , Pp etc.

Vê-se, por tudo isso que acabamos de dizer, que conservando nas duas forças iguais que resultam da ação mútua entre um fio condutor e um ímã — e que agem, uma sobre o fio ao qual pertence o elemento AB, e outra sobre o ímã ao qual pertence o ponto M — o mesmo valor e a mesma direção perpendicular ao plano MAB, pode-se fazer

[Páginas 156 e 328]

três hipóteses sobre o ponto de aplicação destas forças. Na primeira, se supõe que as duas forças passam pelo ponto M. Na segunda, que é a que resulta da minha fórmula, as duas forças passam pelo ponto médio O do elemento. Na terceira, onde as forças são OR e MS, a [força] que age sobre o elemento é aplicada no ponto O, e a outra no ponto M. Estas três hipóteses estão inteiramente de acordo:

¹⁸⁰[N. T.] Ver a Figura 39 e a nota de rodapé 178.

1. Com respeito ao valor destas forças que são igualmente, em todas as três [hipóteses], em razão inversa do quadrado da distância MO , e em razão direta do seno do ângulo MOB que a reta OM que mede esta distância faz com o elemento AB .
2. Com respeito à direção das mesmas forças, sempre perpendiculares ao plano MAB que passa pela molécula e pela direção do elemento.

Mas com respeito aos seus pontos de aplicação, eles estão dispostos diferentemente para as duas forças, nas duas primeiras hipóteses. E existe identidade entre a primeira e a terceira somente para as forças que agem sobre o ímã, e entre a segunda e a terceira somente para as forças que agem sobre o condutor.

Em virtude da identidade dos valores e das direções das forças que ocorrem nas três hipóteses, as componentes de suas resultantes, consideradas paralelamente a três eixos quaisquer, serão as mesmas. Mas os torques que dependem, além disso, dos pontos de aplicação destas forças, só serão os mesmos, em geral, com respeito às forças que tendem a mover o ímã, na primeira e na terceira [hipóteses] e, no que diz respeito às forças que agem sobre o fio condutor, [os torques só serão os mesmos] na segunda e na terceira [hipóteses].

Acabamos de ver que no caso onde se discute a ação de uma porção de fio condutor formando um

[Páginas 157 e 329]

circuito fechado, os valores dos torques são os mesmos, quer se considere, para cada elemento, o ponto de aplicação das forças em O ou em M . Neste caso existirá então, além disso, identidade para os valores dos torques nas três hipóteses.

14.21 Impossibilidade de Produzir um Movimento Indefinidamente Acelerado pela Ação Mútua entre um Circuito Rígido Fechado e um Ímã, ou [entre um Circuito Rígido Fechado] e um Solenóide Eletrodinâmico

O movimento de um corpo no qual todas as partes estão rigidamente ligadas entre si, só pode depender das três componentes [da força] paralelas a três eixos tomados arbitrariamente, e de três torques ao redor dos mesmos eixos. De onde segue que existe identidade completa nas três hipóteses para o movimento produzido, seja no ímã, seja no condutor, quando este forma um circuito rígido e fechado. Devido à impossibilidade de um movimento indefinidamente acelerado — sendo em geral uma consequência da primeira hipótese, já que nela as forças elementares são funções apenas das distâncias dos pontos entre os quais elas se exercem — segue evidentemente que este movimento é igualmente impossível, nas outras duas hipóteses, somente quando o condutor forma um circuito rígido e fechado.

Além disso, é fácil de ver que a demonstração assim obtida da impossibilidade de produzir um movimento indefinidamente acelerado pela ação mútua entre um ímã e um circuito elétrico rígido e fechado, não é somente uma consequência necessária da minha teoria, mas que ela resulta também, na hipótese dos torques primitivos, apenas do valor dado pelo Sr. Biot para a força

perpendicular ao plano MAB, assim como demonstrei diretamente, com todos os detalhes que se possa desejar, em uma carta que escrevi sobre este assunto ao Sr. doutor Gherardi.¹⁸¹ Portanto, caso tivesse sido possível produzir um movimento acelerado fazendo agir um condutor formando um circuito rígido e fechado sobre um ímã,

[Páginas 158 e 330]

não seria somente a minha fórmula que estaria com defeito, mas também a que forneceu o Sr. Biot, que todas as observações feitas desde então demonstraram completamente [minha fórmula], e cujos físicos que admitem a hipótese dos torques primitivos, jamais contestaram sua exatidão.

14.22 Exame dos Diferentes Casos nos Quais um Movimento Indefinidamente Acelerado Pode Resultar da Ação que um Circuito Voltaico, no Qual uma Parte é Móvel Separadamente do Restante deste Circuito, Exerce sobre um Ímã ou sobre um Solenóide Eletrodinâmico

Quando uma porção do circuito voltaico torna-se móvel, deve-se distinguir três casos:

1. Aquele no qual ela forma um circuito quase fechado.¹⁸²
2. Aquele no qual, podendo girar somente ao redor de um eixo, ela possui suas duas extremidades neste eixo.
3. Aquele no qual a porção móvel não forma um circuito fechado, e onde ao menos uma de suas extremidades percorre um certo espaço enquanto ela se move. Este último caso compreende aquele no qual esta porção é formada por um líquido condutor.

Acabamos de ver que, no primeiro destes três casos, o movimento que adquire a porção móvel pela ação de um ímã, é identicamente o mesmo nas três hipóteses, e não pode jamais se acelerar indefinidamente, mas tende somente a levar a porção para uma determinada posição onde ela permanece em equilíbrio após ter oscilado por algum tempo ao redor desta posição em virtude da velocidade adquirida.

Ocorre o mesmo no segundo [caso], que somente difere do primeiro na aparência. Pois caso se acrescentasse no eixo uma corrente

[Páginas 159 e 331]

¹⁸¹[N. T.] S. Gherardi (1802-1879). Formou-se em matemática e ciência natural em Bolonha em 1822. Foi titular da cátedra de física e diretor do gabinete científico da Universidade de Torino. A carta a que Ampère se refere foi publicada em [Amp87a].

¹⁸²[N. A.] O circuito formado por uma porção móvel do fio condutor não está nunca rigorosamente fechado, já que é necessário que suas duas extremidades se comuniquem separadamente com as extremidades da pilha. Mas é fácil de tornar o intervalo que as separam suficientemente pequeno para que se possa considerá-lo como se estivesse praticamente fechado.

que unisse as duas extremidades da porção móvel, teríamos um circuito fechado sem ter mudado em nada o torque ao redor deste eixo, já que os torques das forças exercidas sobre a corrente adicionada seriam evidentemente nulos. De onde segue que o movimento da porção móvel seria identicamente o mesmo que o movimento do circuito fechado assim obtido.

Mas quando a porção móvel não forma um circuito fechado, e quando suas duas extremidades não estão em um eixo ao redor do qual a porção estaria sujeita a girar, os torques produzidos pela ação, seja de uma molécula magnética, seja da extremidade de um solenóide indefinido, são os mesmos somente na segunda e na terceira hipótese, e possuem um valor diferente na primeira. Considerando como eixo dos x a reta ao redor da qual se supõe a porção móvel ligada de maneira a poder girar somente ao redor desta reta, e conservando as denominações que empregamos nos cálculos precedentes, concluiríamos que o valor do torque produzido pelas forças que agem sobre a porção móvel, seria

$$\rho \int \frac{z'v^2d\chi - y'w^2d\psi}{r^3},$$

na primeira hipótese, e

$$\rho \int \frac{z'v^2d\chi - y'w^2d\psi}{r^3} + \rho \left(\frac{x_2 - x'}{r_2} - \frac{x_1 - x'}{r_1} \right),$$

nas outras duas.

É por esta diferença nos valores do torque, que podemos provar pela experiência que a primeira hipótese está em contradição com os

[Páginas 160 e 332]

fatos. Pois ao se considerar um ímã como reduzido a duas moléculas magnéticas de uma força como infinita dispostas nos seus dois pólos, e que depois de ter colocado em uma posição vertical a reta que os une, se submetesse uma porção de fio condutor a girar ao redor desta reta considerada como eixo x , então os dois torques relativos aos dois pólos serão expressados pela fórmula precedente substituindo nela x' , y' e z' , por x'_1 , y'_1 e z'_1 , para um dos pólos, e por x'_2 , y'_2 e z'_2 , para o outro, tendo cuidado de mudar o sinal de um dos torques — o primeiro, por exemplo — já que os dois pólos são necessariamente de natureza oposta, um austral e o outro boreal.

Quando os dois pólos estão, como supomos aqui, situados no eixo x , tem-se $y'_1 = 0$, $y'_2 = 0$, $z'_1 = 0$, $z'_2 = 0$, e os dois torques ao redor do eixo x tornam-se nulos na primeira hipótese. O que era fácil de prever, já que nesta hipótese as direções de todas as forças aplicadas no condutor móvel passam por um dos dois pólos e lá reencontram o eixo fixo, o que torna os torques destas forças necessariamente nulos.

Nas outras duas hipóteses, ao contrário, nas quais as direções das forças passam pelo ponto médio do elemento, somente as partes dos torques iguais às da primeira hipótese se anulam. E após suprimí-los, se reúne o que resta de cada torque, obtendo-se¹⁸³

$$\rho \left(\frac{x_2 - x'_2}{r_{2,2}} - \frac{x_1 - x'_2}{r_{1,2}} - \frac{x_2 - x'_1}{r_{2,1}} + \frac{x_1 - x'_1}{r_{1,1}} \right),$$

onde foram designadas por $r_{2,2}$; $r_{1,2}$; $r_{2,1}$ e $r_{1,1}$ as distâncias do pontos cujas abscissas são, respectivamente, x_2 , x'_2 ; x_1 , x'_2 ; x_2 , x'_1 e x_1 , x'_1 .

¹⁸³[N. T.] Devido a um erro tipográfico, no original não aparece o sinal entre as duas primeiras frações desta equação.

[Páginas 161 e 333]

É fácil ver que os quatro termos da grandeza que está compreendida entre os parênteses nesta expressão, são precisamente os co-senos dos ângulos que as retas que medem as distâncias $r_{2,2}$; $r_{1,2}$; $r_{2,1}$ e $r_{1,1}$ formam com o eixo x . Isto torna o valor que acabamos de encontrar para o torque produzido pela ação dos dois pólos sobre o condutor móvel, idêntico ao [valor] que já obtivemos para o [torque] que resulta da ação sobre o mesmo condutor de um solenóide cujas extremidades estariam situadas nestes pólos, e cujas correntes elétricas tivessem uma intensidade i e respectivas distâncias tais que se tivesse

$$\frac{\lambda i i'}{2g} = \rho ,$$

sendo i' a intensidade de corrente do condutor [móvel].

O torque sendo sempre nulo na primeira hipótese, a porção móvel do circuito voltaico jamais giraria pela ação de um ímã [quando] disposta, como acabamos de dizer, ao redor do eixo deste ímã. Nas outras duas hipóteses, ao contrário, ela deve girar em virtude do torque cujo valor acabamos de calcular, sempre igual nestas duas hipóteses. O Sr. Faraday, que foi o primeiro a produzir este movimento — consequência necessária das leis que eu havia estabelecido sobre a ação mútua entre os condutores voltaicos, e da maneira que eu havia considerado os ímãs como conjuntos de correntes elétricas — demonstrou por este movimento que a direção da ação exercida pelo pólo do ímã sobre um elemento de fio condutor passa com efeito pelo ponto médio do elemento, em conformidade com a explicação que dei desta ação, e não pelo pólo do ímã. Desde então o conjunto dos

[Páginas 162 e 334]

fenômenos eletrodinâmicos não pode mais ser explicado pela substituição da ação entre moléculas austrais e boreais, espalhadas da maneira que acabo de explicar sobre duas superfícies muito próximas e delimitadas pelos fios condutores do circuito voltaico, no lugar da ação expressa por minha fórmula, que exercem as correntes destes fios. Esta substituição somente pode ser feita quando se trata da ação entre circuitos rígidos e fechados, e sua principal utilidade é de demonstrar a impossibilidade de um movimento indefinidamente acelerado, seja pela ação mútua entre dois condutores rígidos e fechados, seja pela [ação] entre um condutor deste tipo e um ímã.

Quando o ímã é móvel, também é preciso distinguir três casos:

1. Aquele no qual todas as partes do circuito voltaico que agem sobre este ímã são imóveis.
2. Aquele no qual algumas partes deste circuito são móveis, mas sem ligação com o ímã. Além disso, estas porções podem ser formadas por um fio metálico ou por um condutor líquido.
3. Enfim, aquele no qual uma parte da corrente passa pelo ímã, ou por uma porção do condutor ligado ao ímã.

No primeiro caso, o circuito total composto de condutores e da pilha, é necessariamente fechado. E como todas as suas partes são imóveis, as três somas dos torques das forças exercidas sobre os pontos do ímã considerado, seja como [composto] de moléculas de fluido austral ou boreal, seja como [composto] das extremidades de solenóides eletrodinâmicos, são idênticas nas três hipóteses, assim como são iguais as próprias resultantes destas forças. De modo que os

movimentos produzidos no ímã, e todas as circunstâncias destes movimentos, são precisamente os mesmos, qualquer que seja

[Páginas 163 e 335]

a hipótese que se adote dentre estas. É o que acontece, por exemplo, para a duração das oscilações feitas pelo ímã, sob influência deste circuito fechado e imóvel. E é por isso que as últimas experiências do Sr. Biot, das quais resulta que a força que produz estas oscilações é proporcional à tangente do quarto de ângulo que formam os dois ramos do condutor que ele usa, concordam tão bem com esta conseqüência de minha teoria de que as direções das forças que agem sobre o ímã passam pelos pontos médios dos elementos do fio condutor, quanto com a hipótese que ele adotou na qual admite que estas direções passam pelos pontos do ímã onde ele dispõe as moléculas magnéticas.

A identidade que existe neste caso entre as três hipóteses, mostra ao mesmo tempo a impossibilidade que o movimento do ímã se acelere indefinidamente, e prova que a ação do circuito voltaico pode somente tender a levá-lo para uma determinada posição de equilíbrio.

Parece, à primeira vista, que a mesma impossibilidade deveria ocorrer no segundo caso, o que é contrário à experiência, ao menos quando uma parte do circuito é formada por um líquido. É evidente, com efeito, que a mobilidade de uma porção de condutor não impede que esta porção não agisse a cada instante como se ela estivesse fixa na posição que ela ocupa neste instante. E não se vê inicialmente como esta mobilidade pode mudar as condições de movimento do ímã de tal forma que ele se torne suscetível de uma aceleração indefinida cuja impossibilidade está demonstrada quando todas as partes do circuito voltaico são imóveis.

Mas desde que se examine com atenção o que

[Páginas 164 e 336]

deve acontecer de acordo com as leis de ação mútua entre um corpo condutor e um ímã — quando o condutor é líquido, quando um cilindro imantado vertical flutua neste líquido, e quando a superfície do cilindro está coberta por um verniz isolante para que a corrente não possa atravessá-lo, o que seria o terceiro caso — se reconhece imediatamente como resulta da mobilidade da porção líquida do circuito voltaico que o ímã flutuando adquire um movimento que se acelera indefinidamente. Para isto basta aplicar a este caso a explicação que forneci ao mesmo movimento nos *Annales de Chimie et de Physique* (Volume XX, págs. 68-70),¹⁸⁴ quando se supõe que o ímã, não estando envernizado, as correntes do líquido onde ele flutua atravessam-no livremente.

Com efeito, estando esta explicação fundamentada em que as porções de corrente que se encontram no interior do ímã não podem ter sobre ele nenhuma ação, e as [porções de corrente] que estão dentro do líquido [mas] fora do ímã agem todas para acelerar seu movimento sempre no mesmo sentido, segue evidentemente que tudo o que acontece neste caso deve também acontecer quando a substância isolante que reveste o ímã somente suprime precisamente as porções das correntes que não têm nenhuma ação, e que ela permite existir e agir, sempre da mesma maneira, as correntes que, estando fora do ímã, tendem todas a acelerar seu movimento constantemente no mesmo sentido. Para que se possa avaliar melhor que, com efeito, não há nada para mudar na explicação que acabo de falar, devo recordá-la aqui, aplicando-a no caso em que o ímã está coberto por uma substância isolante. Considerarei, para tornar esta explicação mais simples, que se substitua

¹⁸⁴[N. T.] Ver [Amp22d, págs. 68-70].

— o reóforo negativo, por exemplo — enquanto que se mergulha em P o reóforo positivo. Então se formam no mercúrio correntes que vão do centro P do círculo ETFT' para a sua circunferência.

Representemos a seção horizontal do solenóide pelo pequeno círculo $etft'$, cujo centro está em A e cuja circunferência $etft'$ é uma das correntes elétricas de que ele é composto. Supondo que esta corrente se move no sentido $etft'$, ela será atraída pelas correntes [elétricas] do mercúrio tal como PUT — que se encontram, na Figura, à direita de $etft'$ — porque a semi-circunferência etf , na qual a corrente vai no mesmo sentido, está mais próxima dela do que $ft'e$, na qual ela vai em sentido contrário. Seja AS esta atração igual à diferença das forças exercidas pelas correntes PUT sobre as duas semi-circunferências, e que passa necessariamente pelo seu centro A, já que ela resulta das forças que estas correntes exercem sobre todos

[Páginas 166 e 338]

os elementos da circunferência $etft'$ que lhe são perpendiculares e estão, conseqüentemente, dirigidas ao longo dos raios desta circunferência. A mesma corrente $etft'$ do solenóide é, ao contrário, repelida pelas correntes que, como PU'T', estão, na Figura, à esquerda desta corrente $etft'$, pois elas estão em sentido contrário na semi-circunferência $ft'e$ [que é] a mais próxima de PU'T'. Seja AS' a repulsão que resulta da diferença das ações exercidas pelas correntes PU'T' sobre as duas semi-circunferências $ft'e$ e etf , ela será igual a AS, e fará, com o raio PAF, o ângulo FAS' = PAS, já que tudo é igual dos dois lados deste raio. A resultante AR destas duas forças lhe será então perpendicular. E como ela passará pelo centro A, assim como suas duas componentes AS e AS', o solenóide não terá nenhuma tendência de girar ao redor de seu eixo, como, com efeito, se observa a respeito do ímã flutuante que representa este solenóide. Mas ele tenderá, em cada instante, a mover-se ao longo da perpendicular AR ao raio PAF, e como — quando se faz esta experiência com um ímã flutuante — a resistência do mercúrio destrói em cada instante a velocidade adquirida, se vê este ímã descrever a curva perpendicular a todas as retas que passam como PAF pelo ponto P, ou seja, a circunferência ABC cujo centro é este ponto.

Esta bela experiência, devida ao Sr. Faraday, foi explicada pelos físicos que não admitem minha teoria,¹⁸⁶ atribuindo o movimento do ímã ao reóforo mergulhado em P no mercúrio, ao qual se dá comumente uma direção perpendicular à superfície do mercúrio. É verdade que, neste caso, a corrente deste reóforo tende a levar o ímã no sentido em que ele realmente se movimenta. Mas é fácil de se assegurar,

[Páginas 167 e 339]

por experiências comparativas, que é com uma força muito mais fraca para vencer a resistência do mercúrio e produzir, apesar desta resistência, o movimento que se observa. Fiquei inicialmente surpreso de ver que estes físicos não levaram em consideração a ação que as correntes do mercúrio devem exercer de acordo com sua própria teoria, minha surpresa aumentou quando reconheci a causa em um erro manifesto que se encontra enunciado nestes termos na obra já citada:^{187,188}

“A ação transversal deste fio fictício (a corrente elétrica que está no mercúrio) sobre o magnetismo austral de A (Figura 43), também tenderá, portanto, a empurrar

¹⁸⁶[N. T.] Em particular por Biot, como será visto a seguir.

¹⁸⁷[N. A.] *Précis élémentaire de physique expérimentale*, terceira edição, volume II, página 753.

¹⁸⁸[N. T.] Ampère está citando aqui do livro de Biot, ver [Bio24].

constantemente A da direita para a esquerda de um observador que tivesse a cabeça em C', e os pés em Z. Mas uma tendência contrária se exercerá sobre o pólo B, e mesmo com uma energia igual, se a linha horizontal C'FF'Z se encontrar na altura precisa do centro da barra [imantada]. De modo que, em resumo, não resultará qualquer movimento de translação. Portanto, será somente a força exercida por CF que determinará a rotação da barra AB."

Como o autor não viu que as ações que o fio fictício, disposto como ele diz, exerce sobre os dois pólos da barra AB, tendem a levá-la no mesmo sentido, e que elas se somam ao invés de se destruírem, já que sendo de espécies contrárias, estes pólos se encontram dos dois lados opostos do fio?

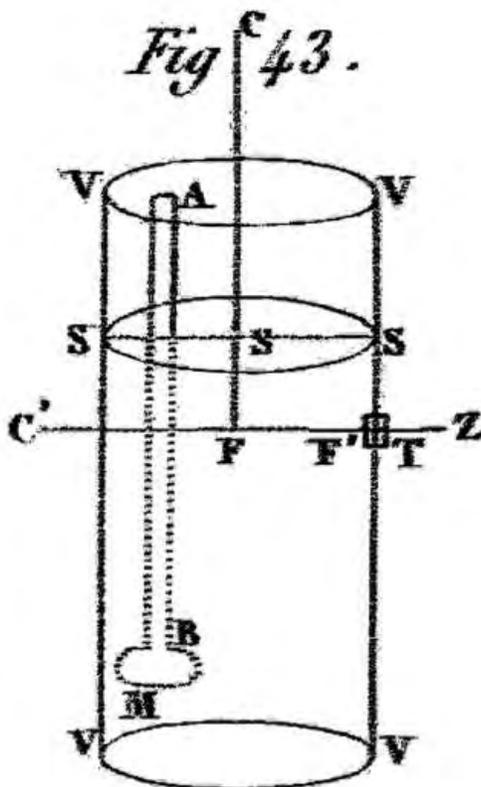


Figura 43.

É importante observar sobre este assunto, que se porções de corrente, fazendo parte [das correntes] do mercúrio, pudessem se encontrar no interior do pequeno círculo $etft'$ e agir

[Páginas 168 e 340]

sobre ele, elas tenderiam a fazê-lo girar ao redor do ponto P em sentido contrário, e com uma força que, no lugar de ser a diferença das ações exercidas sobre as duas semi-circunferências etf e $ft'e$, é a soma, pois se uv representa uma destas porções, é evidente que ela atrairá o arco utv e repelirá o arco $vt'u$, de onde resultam duas forças que conspiram para mover $etft'$ na direção AZ oposta a AR. Evidentemente esta circunstância não pode existir com o ímã flutuante que ocupa todo o interior do pequeno círculo $etft'$, pois ele exclui as correntes quando ele está revestido de

matéria isolante, e porque, no caso contrário, as porções de corrente compreendidas no interior deste círculo, existindo nas partículas do ímã ligadas invariavelmente àquelas [partículas] sobre as quais elas agem, a ação que elas produzem é destruída por uma reação igual e oposta. De modo que somente permanecem, nos dois casos, as forças exercidas pelas correntes do mercúrio, que tendem todas a mover o ímã ao longo de AR.

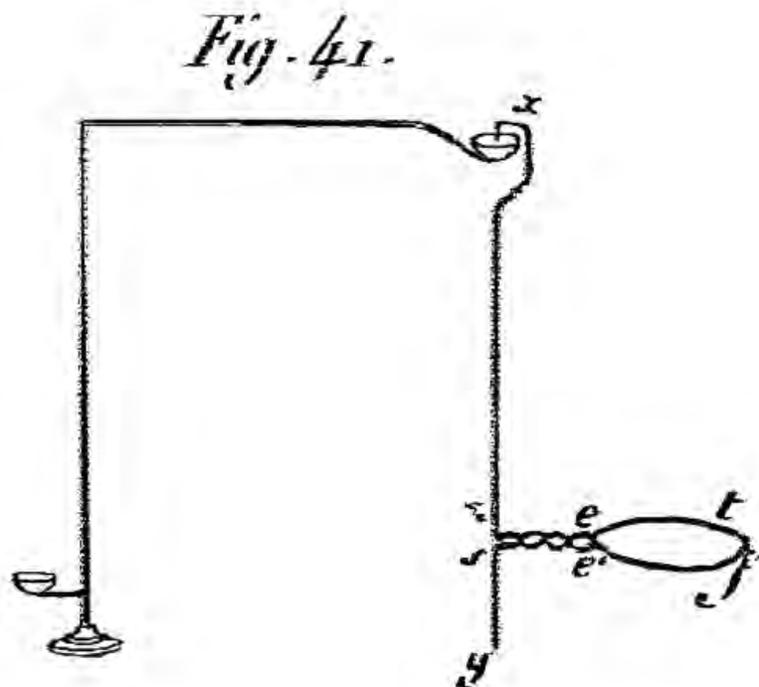


Figura 41.

É unicamente por isso que ele gira ao redor do ponto P neste sentido, como podemos nos assegurar substituindo o ímã por um condutor móvel $xzft'sy$ (Figura 41),¹⁸⁹ formado por um fio de cobre bem fino, revestido de seda, cuja parte intermediária $etft'$ está curvada na forma de um círculo, e onde as duas porções extremas, retorcidas junto de e em z , vão, uma ezx terminar em x em uma taça de mercúrio se comunicando a um dos reóforos, e outra $t'sy$ mergulhar em P (Figura 40)¹⁹⁰ no mercúrio que se comunica, como dissemos, com o outro reóforo. Suspende-se este condutor móvel de modo que o círculo $etft'$ (Figura 41) esteja muito próximo da superfície do mercúrio, e se observa que ele permanece imóvel, em virtude do equilíbrio estabelecido entre as forças exercidas pelas

[Páginas 169 e 341]

porções de corrente compreendidas dentro do círculo $etft'$, e aquelas [forças] que são [exercidas] pelas correntes e porções de corrente exteriores a este círculo. Mas desde que sejam suprimidas

¹⁸⁹[N. T.] Tanto na Figura 41 do *Théorie* de 1826 quanto na de 1827 as letras que aparecem na coluna central, de cima para baixo, são x , z (sendo que esta letra não é muito visível na versão de 1826, que se pode ver aqui), s e t . Um pouco à direita aparecem, de cima para baixo, as letras e e e' . Para que esta Figura fique de acordo com o texto, deveríamos ter z no lugar de x , assim como t' no lugar de e' . Isto está corrigido em nossa Figura feita com um software gráfico, Fig. A.41, na página 372.

¹⁹⁰[N. T.] Ver a página 299.

as porções de corrente compreendidas dentro do espaço $etft'$ (Figura 40), afundando no mercúrio abaixo do círculo $etft'$ (Figura 41) um cilindro de material isolante cuja base lhe seja igual para imitar o que acontece ao ímã flutuante, vê-se [o condutor] se mover, como este ímã, no sentido AR. Quando se deixa o cilindro de material isolante onde estava, inicialmente, o círculo $etft'$, este não gira indefinidamente como o ímã, mas vai parar, após algumas oscilações, em uma posição de equilíbrio. Esta diferença é devida a que o ímã flutuante permite, por trás de si, que seja preenchido de mercúrio o lugar que ocupava antes, e afasta sucessivamente o mercúrio dos diversos lugares para onde se encontra transportado. É esta mudança na posição de uma parte do mercúrio que ocasiona uma [mudança na posição] das correntes elétricas, e faz com que — mesmo que o circuito voltaico total seja fechado — o movimento contínuo do ímã, que é impossível pela ação de um circuito rígido e fechado, não deixe de existir neste caso onde o circuito fechado muda de forma pelo próprio movimento do ímã. Para produzir este movimento empregando, no lugar do ímã, o condutor móvel que acabamos de descrever, é preciso — depois que se constatou que ele se move somente quando se suprime, pelo cilindro de matéria isolante, as porções de corrente internas ao pequeno círculo $etft'$, e que deixando este cilindro no mesmo lugar, ele pára em uma posição determinada de equilíbrio após oscilar em volta dela — imitar o que acontece quando se trata de um ímã flutuante, fazendo deslizar o cilindro de matéria isolante sobre o fundo do

[Páginas 170 e 342]

recipiente de modo que ele esteja sempre sob o círculo $etft'$ (Figura 41), e que seu centro corresponda sempre verticalmente ao [centro] do círculo. Então, [nestas condições], o condutor móvel se põe a girar indefinidamente ao redor do ponto P (Figura 40), [assim] como o ímã [se movia].

É, em geral, substituindo os ímãs por condutores móveis curvados na forma de círculo, que se pode ter uma idéia justa das causas dos diversos movimentos dos ímãs, quando se deseja analisar estes movimentos pela experiência sem recorrer ao cálculo, pois esta substituição fornece o meio de variar as circunstâncias de diferentes maneiras, o que seria geralmente impossível de obter com ímãs, e que somente [estas variações] podem esclarecer as dificuldades que apresentam fenômenos frequentemente tão complicados. É assim, por exemplo, que no que acabamos de dizer, é impossível, com um ímã, verificar este resultado da teoria, [a saber,] que se porções de corrente de mercúrio pudessem atravessar o ímã e, apesar disso, agir sobre ele conservando a intensidade e a direção que elas possuem quando se tira o ímã, este não giraria ao redor do ponto P, e que a verificação torna-se fácil quando se substitui [o ímã], como acabamos de dizer, pelo condutor móvel representado aqui (Figura 41).

A identidade da ação que se observa constantemente entre os movimentos de um condutor móvel e os de um ímã, todas as vezes que eles se encontram nas mesmas circunstâncias, não permite duvidar, quando se fez a experiência precedente, que o ímã não permaneceria imóvel também — quando ele é atravessado pelas porções de corrente interiores ao círculo $etft'$ — se estas porções pudessem agir sobre ele. E como se vê, ao contrário, que quando ele não está revestido

[Páginas 171 e 343]

de uma substância isolante, e quando as correntes o atravessam livremente, ele se move precisamente como quando ele está [revestido] e que nenhuma porção de corrente pode penetrar no interior deste ímã, tem-se uma prova direta do princípio sobre o qual repousa uma parte das

explicações que forneci, a saber: Que as porções de corrente que atravessam o ímã não agem de forma alguma sobre ele, pois as forças que resultariam de sua ação sobre as próprias correntes do ímã, ou sobre o que se denomina de moléculas magnéticas, ao ocorrerem entre as partículas de um mesmo corpo sólido, são necessariamente destruídas por uma reação igual e oposta.

Confesso que esta prova experimental de um princípio que não é mais que uma consequência necessária das primeiras leis da mecânica, me parece completamente inútil, como pareceria a todos os físicos que consideraram este princípio como um dos fundamentos da ciência. Não teria nem mesmo feito a observação, se não tivesse sido suposto [por outros] que a ação mútua entre um elemento de fio condutor e uma molécula magnética, consistia em um torque primitivo composto de duas forças iguais e paralelas sem estarem diretamente opostas, em virtude da qual uma porção de corrente que se estabelece dentro de um ímã poderia movê-lo. [Esta] suposição é contrária ao princípio que está em questão aqui, e que se encontra desmentida pela experiência precedente de acordo com a qual não existe ação exercida sobre o ímã pelas porções de corrente que lhe atravessam quando ele não está revestido de uma camada isolante, posto que o movimento que existe neste caso permanece o mesmo quando se impede as correntes de atravessar o ímã, cobrindo-o com esta camada.

[Páginas 172 e 344]

É necessário partir deste princípio para ver quais são os fenômenos que deve apresentar um ímã móvel sob a influência da corrente voltaica, no terceiro caso que nos falta considerar, no qual uma porção da corrente passa pelo ímã, ou por uma porção de fio condutor rigidamente ligada a ele. Acabamos de ver que quando se trata do movimento de revolução de um ímã ao redor de um fio condutor, o movimento deve ser o mesmo e, com efeito, o é, seja quando a corrente atravessa ou não atravessa o ímã. Mas não é mais assim quando se trata do movimento de rotação contínua de um ímã ao redor da reta que une seus dois pólos.

Demonstrei pela teoria e pelas experiências variadas de diversas maneiras cujos resultados confirmaram sempre os da teoria, que a possibilidade ou impossibilidade deste movimento se deve unicamente a que uma porção do circuito voltaico total esteja separada do ímã em todos os seus pontos, ou [se deve unicamente] a que ela [a corrente] passe, seja dentro deste ímã, seja em uma porção de condutor ligada rigidamente a ele. Com efeito, no primeiro caso, o conjunto da pilha e dos fios condutores forma um circuito sempre fechado, e onde todas as partes agem igualmente sobre o ímã, estejam elas fixas ou móveis. Neste último caso, elas exercem, a cada instante, precisamente as mesmas forças que [exerceriam] se elas estivessem fixas na posição em que elas se encontram neste instante. Ora, demonstramos primeiramente de forma sintética, com a ajuda das considerações que nos forneceram as Figuras 30 e 31,¹⁹¹ em seguida calculando diretamente os torques, que um circuito fechado não pode imprimir a um ímã um movimento contínuo ao redor da reta que une seus dois

[Páginas 173 e 345]

pólos, seja quando se considera, em conformidade com a minha teoria, [estes pólos como sendo] as duas extremidades de um solenóide equivalente ao ímã, ou como duas moléculas magnéticas cuja intensidade seja suficientemente grande para que as ações exercidas permaneçam as mesmas quando elas são substituídas por todas aquelas [moléculas] nas quais se considera o ímã como composto na hipótese dos dois fluidos. A impossibilidade do movimento de rotação do ímã ao

¹⁹¹[N. T.] Páginas 254 e 256, respectivamente.

redor de seu eixo, na medida em que o circuito total fechado está separado dele em toda parte, se encontra assim completamente demonstrada, não somente aplicando minha fórmula às correntes do solenóide substituindo o ímã, mas também partindo da consideração de uma força que existiria entre um elemento de fio condutor e uma molécula magnética perpendicularmente ao plano que passa por esta molécula e pela direção do elemento, em razão inversa do quadrado da distância, e que seria proporcional ao seno do ângulo compreendido entre a reta que mede esta distância e a direção do elemento. Mas quando se supõe, neste último caso, que a força passa pelo ponto médio do elemento — tanto se ela agisse sobre ele ou reagisse sobre a molécula magnética, assim como ocorreria, de acordo com a minha teoria, com respeito ao solenóide — o mesmo movimento se torna possível desde que uma porção da corrente passe pelo ímã, ou por uma porção de condutor rigidamente ligada a ele. Pois sendo destruídas todas as ações exercidas por esta porção sobre as partículas pelas reações iguais e opostas que exercem sobre ela¹⁹² estas mesmas partículas, somente permanecem as ações exercidas pelo restante do circuito total que não é mais fechado e pode, conseqüentemente, fazer o ímã girar.

Para conceber bem tudo o que se refere a este tipo

[Páginas 174 e 346]

de movimento, vamos supor que a haste TVUS (Figura 13),¹⁹³ que sustenta a pequena taça S na qual mergulha a ponta *o* do condutor móvel *oab*, seja dobrada em V e U como se vê na Figura, de maneira a deixar livre a porção VU da reta TS considerada como eixo de rotação, para que se possa suspender o ímã cilíndrico GH, por um fio muito fino ZK, ao gancho K preso em U a esta haste, e que o condutor móvel *oab* mantido na posição onde o vemos na Figura pelo contra-peso *c*, seja delimitado em *b* por uma lâmina de cobre *bef*, que mergulha na água acidulada com a qual está cheio o vaso MN, para que este condutor se comunique com o reóforo *pP* mergulhado no mercúrio da taça P, enquanto que o outro reóforo *rR* está em comunicação com a haste TVUS pelo mercúrio que se insere na taça R, e que a pilha *pr* fecha o circuito total.

No instante em que se estabelece a corrente neste aparelho, vê-se o condutor móvel girar ao redor da reta TS. Mas o ímã é levado somente a uma posição determinada ao redor da qual oscila durante algum tempo, e onde em seguida permanece imóvel. Em virtude do princípio de igualdade da ação e da reação, que ocorre com respeito aos torques ao redor de um mesmo eixo assim como ocorre com respeito às forças, se representarmos por M o torque produzido pela ação do ímã sobre o condutor móvel *oab*, a reação deste tenderá necessariamente a fazer girar o ímã ao redor de seu eixo com o torque $-M$, igual a M, mas agindo em sentido contrário.

Evidentemente, a imobilidade do ímã vem de que se o condutor móvel *oab* age sobre ele, o restante *bMPprRTS* do circuito total, não pode deixar de igualmente fazê-lo. O

[Páginas 175 e 347]

torque da ação que ele [isto é, o restante do circuito] exerce sobre o ímã, unido ao de *oab*, fornece o torque do circuito fechado *oabMPprRTS* que é nulo. Disto segue que o torque de *bMPprRTS* é M, igual e oposto a $-M$.

Mas se o ímã GH for preso ao condutor móvel *oab*, disto resulta um sistema de forma invariável, no qual a ação e reação que eles exercem um sobre o outro se destroem mutuamente. E este sistema permaneceria evidentemente imóvel, se a parte *bMPprRTS* não agisse como antes

¹⁹²[N. T.] No original aparece “elles.” Mas nos parece que o correto seria “elle,” se referindo à porção de corrente.

¹⁹³[N. T.] Ver a página 210.

sobre o ímã para fazê-lo girar imprimindo nele o torque M . É em virtude deste torque que o ímã e o condutor móvel, reunidos em um sistema de forma invariável, giram ao redor da reta TS . E como este torque é, como acabamos de ver, de mesmo valor e de mesmo sinal que o torque que o ímã imprimia ao condutor oab quando este condutor estava separado e girava sozinho, vê-se que estes dois movimentos ocorrem necessariamente no mesmo sentido, mas com velocidades reciprocamente proporcionais ao momento de inércia do condutor e à soma deste momento de inércia e do momento de inércia do ímã.

Deixei de lado nas considerações precedentes a ação exercida pela porção $bMPprRTS$ do circuito sobre o condutor móvel oab , seja no caso onde este condutor está separado do ímã, seja no caso onde está unido a ele, não somente porque ela é muito pequena em relação à ação que o ímã exerce, mas porque ela tende unicamente a levar o condutor móvel na posição determinada pela repulsão mútua dos elementos destas duas porções do circuito total e, conseqüentemente, somente contribui

[Páginas 176 e 348]

nos dois casos no que diz respeito aos movimentos de rotação de oab , para fazer a velocidade variar um pouco, que sem isso seria constante.

Para facilmente poder unir e separar alternadamente o ímã e o condutor móvel, sem interromper as experiências, convém fixar ao gancho Z pelo qual o ímã está suspenso no fio ZK , um pedaço de fio de cobre ZX terminado em X por uma forquilha na qual os dois ramos Xx e Xy apertam o condutor móvel oab , que se encontra preso entre elas, quando se curva convenientemente a haste ZX . Dobrando-a em sentido contrário, dá-se a ela a posição que está representada na Figura,¹⁹⁴ e o condutor volta a estar livre.

Expliquei em detalhe esta experiência, porque ela parece, mais que qualquer outra, apoiar a hipótese do torque primitivo, quando ela não é analisada da maneira como acabo de fazer. Com efeito, nesta hipótese se admite, assim como eu [admito], que as forças exercidas pelo ímã GH ,¹⁹⁵ sobre os elementos do condutor móvel oab , passam por estes elementos e que, supondo-os todos no plano vertical $TSab$, traçado pela reta TS , as forças são normais a este plano. Portanto, elas tendem a fazer oab girar sempre no mesmo sentido ao redor de TS . Estas forças são, de acordo com a lei proposta pelo Sr. Biot, precisamente as mesmas — em grandeza, em direção e em relação aos seus pontos de aplicação — que as forças dadas pela minha fórmula. Elas produzem então o mesmo torque M em virtude do qual se executa o movimento do condutor oab quando ele está livre. Mas, segundo os físicos que admitem a hipótese que está sendo questionada aqui, as forças devidas à reação dos elementos do condutor

[Páginas 177 e 349]

sobre o ímã somente são as mesmas em grandeza e no fato de que elas são perpendiculares ao plano $TSab$. Eles pensam que estas forças estão aplicadas às moléculas magnéticas, ou, o que vem a ser o mesmo, aos dois pólos do ímã GH que estão ao longo da reta TS . Sendo assim, seus torques são nulos em relação a esta reta. É a esta causa que eles atribuem a imobilidade do ímã quando ele não está ligado a nenhuma porção do circuito voltaico. Mas para explicar o movimento de rotação do ímã no caso em que ele está unido ao condutor móvel oab , por meio da haste ZX , eles supõem que a união destes dois corpos em um sistema de forma invariável,

¹⁹⁴[N. T.] Ampère ainda está se referindo à Figura 13, ver a página 210.

¹⁹⁵[N. T.] Da Figura 13, ver a página 210.

não impede o ímã de sempre agir para imprimir ao condutor móvel o mesmo torque M , sem que este condutor reaja sobre o ímã de maneira a impedir o movimento do sistema, que deve girar conseqüentemente no mesmo sentido que girava o condutor móvel antes de estar invariavelmente ligado ao ímã, mas com uma velocidade menor na razão recíproca entre os momentos de inércia do condutor sozinho e do condutor unido ao ímã.

É assim que se encontra nesta hipótese os mesmos resultados que quando se supõe a ação oposta à reação ao longo da mesma reta, e que se leva em consideração a ação exercida sobre o ímã pelo restante *bMPprRTS* do circuito voltaico. Resulta de tudo isto que foi demonstrado nesta Memória, que esta identidade dos efeitos produzidos e dos valores das forças que acabamos de encontrar, na caso que examinamos, entre a maneira com a qual expliquei os fenômenos e a hipótese do torque primitivo, é uma conseqüência necessária do fato de que o circuito voltaico que se faz agir sobre

[Páginas 178 e 350]

o ímã é sempre fechado, e que desde que se trate de um circuito fechado, não somente as três forças paralelas a três eixos que resultam da ação que um tal circuito exerce sobre um ímã, mais ainda os três torques ao redor destes três eixos, são os mesmos nas duas maneiras de conceber as coisas, assim como o movimento do ímã, que somente pode depender destas seis grandezas.

Conseqüentemente, a mesma identidade se reencontrará em todas as experiências do mesmo gênero, e não é nem por estas experiências, nem pela medida das forças que ocorrem entre os fios condutores e os ímãs, que esta questão pode ser decidida. Ela deve ser [resolvida]:

1. Pela necessidade do princípio de que a ação mútua das diversas partes de um sistema de forma invariável, não pode, em nenhum caso, imprimir a este sistema um movimento qualquer. Este princípio é apenas uma conseqüência da própria idéia que temos das forças e da inércia da matéria.
2. Por esta circunstância, [a saber,] que a hipótese do torque primitivo somente foi imaginada por estes que a propuseram, porque acreditaram que os fenômenos de onde partiram não poderiam ser explicados de outra maneira, [o que foi um] erro por terem levado em conta a ação que a totalidade do circuito voltaico exerce sobre o ímã. Pois eles não prestaram atenção que este circuito é sempre fechado, e não deduziram, como o fiz, da lei proposta pelo Sr. Biot, esta conseqüência rigorosa que, para um circuito fechado, as forças e os torque são identicamente os mesmos, seja quando se supõe que as direções das forças exercidas sobre o ímã passam pelas moléculas magnéticas, ou [quando se supõe que elas passam] pelos pontos médios dos elementos dos fios condutores.
3. Sobre isto, quando se admite que os fenômenos com os quais nos

[Páginas 179 e 351]

ocupamos podem ser produzidos, em última análise, pelas forças expressas em função das distâncias que exercem as moléculas dos dois fluidos elétricos, e que se atribui também aos dois fluidos magnéticos quando os consideramos como a causa dos fenômenos, puramente elétricos segundo creio, que apresentam os ímãs, pode-se conceber bem que se estas moléculas estão em movimento nos fios condutores, disto resultam forças entre seus elementos que não dependem somente das distâncias entre estes elementos, mas também das

direções ao longo das quais ocorre o movimento das moléculas elétricas que os percorrem, tais como são precisamente as forças fornecidas por minha fórmula, desde que estas forças satisfaçam à condição que a ação e a reação estejam dirigidas ao longo da mesma reta, enquanto que é contraditório supor que forças — quaisquer que sejam, por outro lado, seus valores em função das distâncias, dirigidas ao longo das retas que unem as moléculas entre as quais se exercem — possam produzir, por qualquer combinação que seja, mesmo que estas moléculas estejam em movimento, forças pelas quais a ação e a reação não estejam dirigidas ao longo da mesma reta, mas ao longo de duas retas paralelas, como na hipótese do torque primitivo.

Sabe-se, com efeito, que mesmo quando as moléculas elétricas ou magnéticas estão em movimento, elas agem a cada instante como se estivessem em repouso na posição em que se encontram nesse instante. Portanto, ao se considerar dois sistemas de moléculas — tais que cada molécula de um [sistema] exerce sobre cada molécula do outro uma força igual e oposta, ao longo da reta que as une, à força exercida pela segunda molécula sobre a primeira — e que parando em um dado instante

[Páginas 180 e 352]

todas as moléculas na posição onde elas se encontram, se supõe que todas elas estejam rigidamente ligadas em conjunto nesta situação, necessariamente haverá equilíbrio no sistema de forma invariável, composto dos dois outros [sistemas], que resultará desta suposição, já que existirá equilíbrio entre as forças elementares tomadas duas a duas. A resultante de todas as forças exercidas pelo primeiro sistema sobre o segundo será então igual e oposta, ao longo da mesma reta, à resultante de todas as forças exercidas pelo segundo sobre o primeiro. E estas duas resultantes jamais poderão produzir um torque capaz de girar o sistema total, quando todas as partes deste sistema estão rigidamente ligadas entre si, como contudo o supõem aqueles que — adotando a hipótese de um torque na ação mútua entre uma molécula magnética e um elemento de fio condutor — pretendem que esta ação resulte de que o elemento somente age sobre a molécula porque ele próprio é um conjunto de moléculas magnéticas, cujas ações sobre aquela [molécula] que se considera são tais como Coulomb as estabeleceu, ou seja, dirigidas ao longo das retas que as unem a esta última, e em razão inversa dos quadrados das distâncias.

Basta ler com alguma atenção o que escreveu o Sr. Biot sobre os fenômenos com os quais nos ocupamos, no nono livro da terceira edição de seu *Traité élémentaire de physique expérimentale*, para ver que após ter considerado constantemente as forças que os elementos dos fios condutores exercem sobre os ímãs, como [sendo] aplicadas às moléculas magnéticas perpendicularmente aos planos que passam por cada elemento e cada molécula, ele supõe em seguida quando fala do movimento dos fios condutores ao redor dos

[Páginas 181 e 353]

ímãs, que as forças exercidas pelas moléculas magnéticas sobre os elementos dos fios, passam por estes elementos em direções paralelas às [direções] das forças exercidas sobre o ímã, e formam, conseqüentemente, torques com as primeiras [forças], em vez de lhes ser opostas ao longo da mesma reta. Ele explica em particular, na página 754 do volume II desta obra, o movimento de rotação de um ímã ao redor de seu eixo, quando uma porção de corrente o atravessa, supondo que o ímã gira pela ação que esta mesma porção exerce sobre o restante do ímã sendo que, entretanto, [o ímã] forma com ela [a porção de corrente que o atravessa] um sistema de forma

invariável na qual todas as partes estão rigidamente ligadas entre si.¹⁹⁶

[Páginas 182 e 354]

Evidentemente, isto supõe que a ação e a reação desta porção de corrente e do restante do ímã formam um torque. Segundo isso, como conceber que o físico que admite uma suposição semelhante, possa se expressar assim na página 769 do mesmo livro:

“Ao se calcular a ação a distância que exerceria uma agulha imantada de um comprimento infinitamente pequeno e quase molecular, se verá facilmente que se pode formar conjuntos de tais agulhas, que exerceriam forças transversais. A única dificuldade — mas enorme sem dúvida — é de combinar tais sistemas de maneira que resulte para as seções retas de um fio conector de dimensão perceptível [isto é, finita], as leis precisas de ações transversais demonstradas pela experiência, e que expusemos mais acima.”

Sem dúvida que a partir da ação entre dois sistemas de pequenos ímãs, cujas moléculas austrais e boreais se atraem ou se repelem em razão inversa dos quadrados de suas distâncias, ao longo das retas que as unem duas a duas, podem resultar *ações transversais*, mas não [podem resultar] *ações que não sejam iguais e opostas às reações dirigidas ao longo das mesmas retas*, como as que supõe o Sr. Biot.

Em uma palavra, o valor da ação entre dois elementos de fios

[Páginas 183 e 355]

condutores, que deduzi unicamente da experiência, depende dos ângulos que determinam a direção respectiva dos dois elementos. De acordo com a lei proposta pelo Sr. Biot, a força que ocorre entre um elemento de fio condutor e uma molécula magnética, também depende do ângulo que determina a direção do elemento. Se chamei de *elementar* à força cujo valor determinei, é porque ela se exerce entre dois elementos de fios condutores e porque ela ainda não foi

¹⁹⁶[N. A.] Não sei se é necessário recordar sobre este assunto aquilo que já destaquei em outro lugar, a saber, que os fluidos elétricos — de acordo com o conjunto dos fatos, sobretudo de acordo com a nulidade de ação sobre os corpos mais leves de eletricidade que se movem no vácuo — devem ser considerados como incapazes de agir em virtude de sua massa que se pode dizer como sendo infinitamente pequena com respeito à massa dos corpos ponderáveis, e que assim toda atração ou repulsão exercida entre estes corpos e os fluidos elétricos pode muito bem colocar estes [fluidos elétricos] em movimento, mas não os corpos ponderáveis. Para que estes últimos se movam, é preciso, quando se trata das atrações e repulsões elétricas comuns, que a eletricidade esteja retida sobre a superfície deles [isto é, dos corpos ponderáveis], para que a força que supera a inércia de um, se apóie — se é que se pode falar assim — sobre a inércia do outro. É preciso igualmente, para que a ação mútua entre dois fios condutores coloque estes fios em movimento, que as decomposições e recomposições do fluido neutro que ocorrem a cada instante em todos os elementos ao longo dos comprimentos dos dois fios, determinem entre suas partículas ponderáveis as forças capazes de vencer a inércia destas partículas imprimindo aos dois fios velocidades inversamente proporcionais às suas massas. Quando se fala da ação mútua entre duas correntes elétricas, se quis dizer, e é evidente que só se pode compreender, como [sendo a ação] entre os condutores que elas percorrem. Os físicos que admitem moléculas magnéticas agindo sobre os elementos de um fio condutor, conforme a lei proposta pelo Sr. Biot, admitem também sem dúvida que esta ação move o fio somente porque a molécula magnética está presa pelas partículas ponderáveis do ímã que constituem o elemento magnético do qual ela faz parte. Segundo isso, é evidente que supondo que o ímã se move pela ação da porção de corrente elétrica que o atravessa, se supõe necessariamente que seu movimento resulta da ação mútua que ocorre entre cada uma de suas partículas que atravessa a corrente e todas as outras partículas do mesmo corpo.

reduzida em termos de forças mais simples. Ele também chamou de *elementar* à força que ele supõe entre uma molécula magnética e um elemento de fio condutor. Até aqui tudo é parecido com respeito a estes dois tipos de forças. Mas para a [força] que admito, a ação e a reação são opostas ao longo da mesma reta, e nada impede de conceber que ela resulte de atrações e de repulsões inerentes às moléculas de dois fluidos elétricos, desde que se suponha estas moléculas em movimento nos fios condutores, para [com isto] explicar a influência da direção dos elementos destes fios sobre o valor da força. Enquanto que o Sr. Biot, ao admitir uma força para a qual a ação e a reação não estão dirigidas em sentido contrário sobre uma mesma reta, mas sobre retas paralelas e formando um torque, se coloca na impossibilidade absoluta de reduzir esta força às atrações e repulsões dirigidas ao longo das retas que unem duas a duas as moléculas magnéticas, tais como as admitem todos os físicos que se serviram delas para explicar a ação mútua entre dois ímãs. Não é evidente que é desta hipótese do Sr. Biot, sobre as forças de giro pelas quais a ação e a reação não são opostas ao longo de uma mesma reta, que se deveria dizer o que ele diz (página 771) sobre o assunto da ação

[Páginas 184 e 356]

mútua entre dois elementos de fios condutores, tais como determinei por minhas experiências e pelos cálculos que deduzi dela, a saber: Que uma tal suposição *é desde o início ela própria completamente fora das analogias que nos apresentam todas as outras leis de atração?* Existe uma hipótese mais contrária a estas analogias, do que imaginar forças tais que a ação mútua entre as diversas partes de um sistema com forma invariável possa colocar este sistema em movimento?

Não é em nada me afastando assim de uma das leis que Newton considerou como os fundamentos da teoria física do universo, que após ter descoberto um grande número de fatos que ninguém observara antes de mim, determinei, somente pela experiência e seguindo o caminho traçado por este grande homem, inicialmente as leis da ação eletrodinâmica, em seguida a expressão analítica da força que ocorre entre dois elementos de fios condutores, e que enfim deduzi desta expressão todas as conseqüências expostas nesta Memória. O Sr. Biot, ao citar os nomes de uma parte dos físicos que observaram novos fatos ou inventaram instrumentos que foram úteis para a ciência, não falou nem do meio pelo qual consegui tornar móveis as porções de fios condutores, suspendendo-as sobre pontas de aço em taças cheias de mercúrio — meio sem o qual não se saberia nada das ações exercidas sobre estes fios, seja por outros condutores, seja pelo globo terrestre ou pelos ímãs — nem [falou] dos aparelhos que construí para evidenciar todas as circunstâncias que apresentam estas ações, e determinar com precisão os casos de equilíbrio a partir dos quais deduzi as leis a que elas estão sujeitas, nem destas mesmas leis determinadas por minhas experiências,

[Páginas 185 e 357]

nem da fórmula que concluí a partir delas, nem das aplicações que fiz desta fórmula. E a respeito dos fatos que fui o primeiro a observar, ele cita somente um, o da atração mútua entre dois fios condutores. E se ele o cita, é para lhe dar a explicação que havia sido proposta inicialmente por alguns físicos estrangeiros, em uma época na qual não haviam sido feitas as experiências que demonstraram depois de muito tempo que ela era completamente inadmissível. Esta explicação consiste, como se sabe, em supor que dois fios condutores agem um sobre o outro, como eles fariam em virtude da ação mútua de agulhas imantadas infinitamente pequenas, tangentes às seções [retas] circulares que se pode fazer ao longo de todo o comprimento de fios supostos

cilíndricos. O conjunto de pequenas agulhas de uma mesma seção forma assim um anel imantado, semelhante ao anel que os Srs. Gay-Lussac e Velter [Welter] utilizaram para fazer, em 1820, uma experiência decisiva com respeito à explicação que aqui está em questão. Esta experiência provou, como se sabe, que um anel semelhante não exerce absolutamente nenhuma ação, contanto que ele forme assim uma circunferência inteira, ainda que seja imantado de tal maneira que — sendo formado de um aço próprio para conservar todo seu magnetismo ao ser rompido — encontra-se, ao quebrá-lo, que todas as suas porções estão fortemente imantadas.

Sir H. Davy¹⁹⁷ e o Sr. Erman¹⁹⁸ obtiveram o mesmo resultado com relação a um anel de aço com uma forma qualquer. Isto, de resto, é uma consequência necessária [tanto] da teoria dos dois fluidos magnéticos quanto da minha, assim como é fácil de se certificar por um cálculo muito semelhante a este pelo qual demonstrei, nesta Memória, a nulidade da ação de um solenóide formando uma curva fechada, conforme o que

[Páginas 186 e 358]

o Sr. Savary foi o primeiro a encontrar, por um cálculo que não difere essencialmente do meu, e que se pode ver, seja na adição que se encontra na seqüência da Memória sobre a aplicação do cálculo aos fenômenos eletrodinâmicos, que ele publicou em 1823, seja no *Journal de Physique*, volume XCVI, páginas 295 e seguintes.¹⁹⁹ Ao dar outra vez esta explicação, o Sr. Biot mostra que ele não conhece nem a experiência dos Srs. Gay-Lussac e Velter [Welter], nem o cálculo do Sr. Savary.

E ademais, as pequenas agulhas tangentes às circunferências das seções dos fios condutores, são consideradas pelo Sr. Biot como as próprias partículas da superfície do fio condutor imantadas pela corrente elétrica que separaria nestas partículas o fluido austral do fluido boreal, levando-os em sentido contrário, sem que as moléculas destes fluidos pudessem sair das partículas do fio onde elas se encontravam inicialmente reunidas em fluido neutro. Assim, quando a corrente é estabelecida durante algum tempo no fluido e continua indefinidamente, a distribuição das moléculas magnéticas nos fios condutores não pode mudar mais. É, então, como se existisse nestes fios uma multidão de pontos determinados que não mudariam de posição enquanto a corrente continuasse com a mesma intensidade, e da qual [isto é, da corrente] emanariam forças atrativas e repulsivas devidas às moléculas magnéticas e, conseqüentemente, reciprocamente proporcionais aos quadrados das distâncias.

Assim, dois fios condutores agiriam um sobre o outro somente em virtude de forças expressas por uma função das distâncias entre os pontos fixos em um dos fios e de outros pontos igualmente fixos no outro fio. Mas então um destes fios, suposto imóvel, só poderia levar o outro

[Páginas 187 e 359]

para uma posição de equilíbrio onde a integral das forças vivas, que se obtém sempre em função das coordenadas dos pontos do fio móvel quando as forças são funções das distâncias, atingiria seu valor máximo. Tais forças jamais poderiam produzir um movimento de rotação no qual a velocidade fosse sempre aumentando no mesmo sentido, até que esta velocidade se tornasse constante, por causa dos atritos, ou da resistência do líquido no qual é preciso que se mergulhem os condutores móveis para manter os contatos [elétricos]. Ora, obtive este movimento de rotação

¹⁹⁷[N. T.] H. Davy (1778-1829), químico inglês.

¹⁹⁸[N. T.] Paul Erman (1764-1851), físico alemão.

¹⁹⁹[N. T.] Ver [Sav85b] e [Sav85a].

[contínua] fazendo agir um condutor espiral, com formato próximo de um círculo, sobre um fio condutor retilíneo, girando ao redor de uma de suas extremidades situada no centro do círculo, enquanto que sua outra extremidade se encontrava bem perto do condutor espiral.

Esta experiência, na qual o movimento é rápido e pode durar muitas horas, quando se emprega uma pilha bem forte, está em clara contradição com a maneira de ver do Sr. Biot. E se esta experiência não está [em contradição] com a opinião de que a ação entre dois fios condutores resulta de forças atrativas e repulsivas inerentes às moléculas dos dois fluidos elétricos, é porque estas moléculas não permanecem circunscritas — como aquelas nas quais se supõem compostos os dois fluidos magnéticos — em espaços muito pequenos nos quais a distribuição delas é determinada por uma causa permanente, mas que, pelo contrário, elas percorrem todo o comprimento da cada fio por uma seqüência de composições e de decomposições, que se sucedem em intervalos muito curtos. Disto pode resultar, como já observei, movimentos sempre contínuos no mesmo sentido, incompatíveis com a suposição de que os pontos

[Páginas 188 e 360]

de onde emanam as forças atrativas e repulsivas não mudam de maneira nenhuma de lugar nos fios.

Enfim, o Sr. Biot repete na terceira edição de seu *Traité élémentaire de physique* (volume II, página 773), o que ele já havia dito na nota que publicou nos *Annales de Chimie et de Physique*, sobre as primeiras experiências relacionadas com o assunto do qual nos ocupamos, que ele fez com o Sr. Savart, a saber: Que quando um elemento de fio de conexão muito fino e indefinido age sobre uma molécula magnética, “a natureza de sua ação é a mesma que aquela de uma agulha imantada que seria colocada sobre o contorno do fio em um sentido determinado e sempre constante com respeito à direção da corrente voltaica.” Entretanto, a ação desta agulha sobre uma molécula magnética é dirigida ao longo da mesma reta que a reação da molécula sobre a agulha e, além disso, é fácil de ver que a força que resulta [desta ação] é em razão inversa do cubo, e não do quadrado da distância, como o próprio Sr. Biot encontrou como sendo a [ação] do elemento de fio.

14.23 Identidade da Ação Mútua entre Dois Circuitos Voltaicos Fechados e da [Ação Mútua] entre Dois Conjuntos Compostos Cada Um de Duas Superfícies Muito Próximas Delimitadas pelo Circuito Correspondente a Cada Conjunto, e sobre as Quais são Espalhados e Fixados os Dois Fluidos Magnéticos, Austral e Boreal, de Maneira que a Intensidade Magnética Seja a Mesma por Toda Parte

Me falta agora estender à ação mútua entre dois circuitos fechado, de tamanhos e formas quaisquer, as considerações relativas às superfícies delimitadas por estes circuitos e cujos pontos agem como aquilo que se denomina de moléculas de fluido austral e de fluido boreal, que apliquei anteriormente à ação mútua entre um circuito fechado qualquer e um elemento de fio condutor.

Encontrei que a ação do elemento $d^2\sigma'$ sobre as duas superfícies delimitadas pelo contorno s , era expressa pelas três forças

$$\mu g \varepsilon' d^2\sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3}, \quad \mu g \varepsilon' d^2\sigma' \frac{v^2 d\chi}{r^3} \quad \text{e} \quad \mu g \varepsilon' d^2\sigma' \frac{w^2 d\psi}{r^3},$$

aplicadas a cada um dos elementos ds deste contorno. Vou

[Páginas 189 e 361]

agora fazer com respeito ao circuito s' , o que fiz então com respeito ao circuito s . Concebemos para isso uma nova superfície delimitada por todos os lados, como a superfície σ' , pela curva fechada s' , e que seja tal que as porções das normais da superfície σ' compreendidas entre ela e esta nova superfície, sejam muito pequenas por toda parte. Suponhamos, sobre a nova superfície, o fluido da espécie contrária ao fluido da superfície σ' , de maneira que existam as mesmas quantidades dos dois fluidos nas partes correspondentes das duas superfícies. Designando por ξ' , η' e ζ' , aos ângulos que a normal ao ponto m' , cujas coordenadas são x' , y' e z' , forma com os três eixos, e por h' a pequena porção desta normal que está compreendida entre as duas superfícies, podemos, como fizemos para o elemento $d^2\sigma'$, reduzir a ação do elemento da nova superfície que é representada por $d^2\sigma'$, sobre o conjunto das suas superfícies delimitadas pelo contorno s , às forças aplicadas, como se viu, na página 319,²⁰⁰ sobre os diversos elementos deste contorno. A [força] que é relativa ao elemento ds e paralela ao [eixo] x é obtida substituindo na expressão que encontramos para esta força

$$\mu g \varepsilon' d^2\sigma' \frac{u^2 d\varphi}{r^3},$$

ou

$$-\mu g \varepsilon' d^2\sigma' \frac{(y' - y)dz - (z' - z)dy}{r^3},$$

as novas coordenadas $x' + h' \cos \xi'$, $y' + h' \cos \eta'$ e $z' + h' \cos \zeta'$ no lugar de x' , y' e z' . Como as forças assim obtidas agem no sentido contrário das primeiras, é preciso subtraí-las, o que se reduz, quando se negligencia no cálculo, potências de h superiores à primeira, a diferenciar

$$-\mu g \varepsilon' d^2\sigma' \frac{(y' - y)dz - (z' - z)dy}{r^3},$$

[Páginas 190 e 362]

fazendo variar x' , y' e z' , substituindo $\delta x'$, $\delta y'$ e $\delta z'$ por $h' \cos \xi'$, $h' \cos \eta'$ e $h' \cos \zeta'$, [respectivamente,] e mudando o sinal do resultado, enquanto que x , y e z , assim como dx , dy e dz , devem ser consideradas como constantes já que elas pertencem ao elemento ds .

A fórmula na qual se deve substituir $h' \cos \xi'$, $h' \cos \eta'$ e $h' \cos \zeta'$ no lugar de $\delta x'$, $\delta y'$ e $\delta z'$, é então

$$\mu g \varepsilon' \left(dz d^2\sigma' \delta' \frac{y' - y}{r^3} - dy d^2\sigma' \delta' \frac{z' - z}{r^3} \right),$$

que se precisa integrar após esta substituição em toda a extensão da superfície σ' para ter a ação total desta superfície e daquela que lhe está unida sobre o conjunto das duas superfícies

²⁰⁰[N. T.] Página 319 do trabalho original de Ampère publicado em 1827, que corresponde à nossa página 288.

delimitadas pelo contorno s . Pode-se fazer esta dupla integração separadamente sobre cada um dos dois termos nos quais se compõe esta expressão. Executemos inicialmente a que está relacionada com o primeiro termo

$$\mu g \varepsilon' dz d^2 \sigma' \delta' \frac{y' - y}{r^3} .$$

Para isso, decompomos a superfície σ' em uma infinidade de zonas infinitamente estreitas por uma seqüência de planos perpendiculares ao plano xz traçados pela coordenada y do ponto médio o do elemento ds . Consideramos, sobre uma destas zonas, $d^2 \sigma'$ como [sendo] o elemento da superfície σ' que tem por expressão

$$\frac{v d' v d' \chi}{\cos \eta'} ,$$

e teremos então que integrar a grandeza

$$\mu g \varepsilon' dz \frac{v d' v d' \chi}{\cos \eta'} \delta' \frac{y' - y}{r^3} ,$$

que mudará, por uma transformação muito semelhante àquela

[Páginas 191 e 363]

que empregamos mais acima relacionada a

$$d^2 \sigma = \frac{u d u d \varphi}{\cos \xi} ,$$

nesta aqui

$$-\mu g dz h' \varepsilon' d' \chi d' \frac{v^2}{r^3} .$$

Supondo, como fizemos para a superfície σ , que as grandezas h' e ε' variam junto de maneira que o seu produto conserva um valor constante g' , integraremos esta última expressão, supondo o ângulo χ constante, em todo o comprimento da zona contida sobre a superfície σ' entre os dois planos que compreendem o ângulo $d' \chi$ desde uma das bordas do contorno s' até a outra. Esta primeira integração é efetuada imediatamente e fornece

$$-\mu g g' dz d' \chi \left(\frac{v_2^2}{r_2^3} - \frac{v_1^2}{r_1^3} \right) ,$$

onde r_1 , v_1 e r_2 , v_2 representam os valores de r e de v para as duas bordas do contorno s' . As duas partes desta expressão devem ser integradas agora com relação a χ respectivamente nas duas porções do contorno s' determinadas pelos dois planos tangentes a este contorno traçadas pela ordenada y do elemento ds . E de acordo com a observação que fizemos, na página 317,²⁰¹ com respeito ao valor da força paralela ao eixo x no cálculo relativo às duas superfícies delimitadas pelo contorno s , é fácil de ver que se terá aqui

$$-\mu g g' dz \int \frac{v^2 d' \chi}{r^3} ,$$

²⁰¹[N. T.] Página 317 do trabalho original de Ampère publicado em 1827, que corresponde à nossa página 287.

considerando esta integral em toda a extensão do contorno fechado s' . As variáveis r , v e χ estão relacionadas somente a este contorno.

[Páginas 192 e 364]

Faremos da mesma maneira a dupla integração do outro termo que é igual a

$$-\mu g \varepsilon' dy d^2 \sigma' \delta' \frac{z' - z}{r^3},$$

em toda a extensão da superfície σ' . Para isso será preciso dividir esta superfície em uma infinidade de zonas, por planos traçados pela coordenada z do ponto médio do elemento ds , e considerar, sobre uma destas zonas, $d^2 \sigma'$ como [sendo] a área infinitamente pequena expressa por $w d' w d' \psi / \cos \zeta'$. A fórmula, após ter sido transformada como a precedente, será integrada de início em todo o comprimento da zona. A integral envolverá então somente grandezas relacionadas ao contorno s' . Em seguida a segunda integração feita com relação a ψ sobre a extensão do contorno fechado s' , fornecerá

$$\mu g g' dy \int \frac{w^2 d' \psi}{r^3}.$$

Reunindo enfim os dois resultados obtidos por estas duas integrações se terá

$$\mu g g' \left(dy \int \frac{w^2 d' \psi}{r^3} - dz \int \frac{v^2 d' \chi}{r^3} \right),$$

para o valor da força paralela ao [eixo] x , cuja direção passa pelo ponto médio do elemento ds , e que provem da ação das duas superfícies delimitadas pelo contorno s .

Se terá igualmente, paralelamente aos outros dois eixos, as forças

$$\mu g g' \left(dz \int \frac{u^2 d' \varphi}{r^3} - dx \int \frac{w^2 d' \psi}{r^3} \right),$$

[Páginas 193 e 365]

[e]

$$\mu g g' \left(dx \int \frac{v^2 d' \chi}{r^3} - dy \int \frac{u^2 d' \varphi}{r^3} \right).$$

Assim, supondo as forças que acabamos de determinar aplicadas a cada elemento ds do contorno s , teremos a ação que resulta das atrações e repulsões dos dois fluidos magnéticos, espalhados e fixados sobre os dois conjuntos de superfícies delimitadas pelos dois contornos s e s' .

14.24 Impossibilidade de Produzir um Movimento Indefinidamente Acelerado pela Ação Mútua entre Dois Circuitos Voltaicos Rígidos e Fechados e, Conseqüentemente, pela [Ação Mútua] entre Dois Conjuntos Quaisquer de Circuitos deste Tipo

Mas estas forças aplicadas aos elementos ds diferem somente pelo sinal das [forças] que obtivemos na página 311,²⁰² para a ação entre dois circuitos s e s' , supondo-os percorridos por correntes elétricas, contanto que se tenha $\mu gg' = ii'/2$. Esta diferença [de sinal] vem de que no cálculo que realizamos, as diferenciais $d'\varphi$, $d'\chi$ e $d'\psi$ foram supostas com mesmo sinal que as diferenciais $d\varphi$, $d\chi$ e $d\psi$, enquanto que elas devem ser consideradas com sinais contrários quando as duas correntes fluem no mesmo sentido. Em tal caso, as forças produzidas pela ação mútua destas correntes são precisamente as mesmas que as que resultam da ação das duas superfícies σ' sobre as duas superfícies σ e, assim, está completamente demonstrado que a ação mútua entre dois circuitos rígidos e fechados, percorridos por correntes elétricas, pode ser substituída pela [ação mútua] entre dois conjuntos compostos cada um de superfícies tendo por contornos estes dois circuitos, e sobre as quais seriam fixadas moléculas de fluido austral e de fluido boreal, se atraindo e se repelindo segundo as linhas que os unem, em razão inversa dos quadrados das distâncias. Combinando este resultado com esta conseqüência rigorosa do princípio geral da conservação das forças vivas, lembrada já muitas vezes nesta Memória, — [a saber,] que

[Páginas 194 e 366]

toda ação reduzível a forças, [que são apenas] funções das distâncias, agindo entre pontos materiais formando dois sistemas rígidos, um fixo e o outro móvel, jamais pode dar lugar a um movimento que seja indefinidamente contínuo, apesar das resistências e dos atritos que sofre o sistema móvel — concluímos disto, como fizemos quando se tratava de um ímã e de um circuito voltaico rígido e fechado, que este tipo de movimento não pode resultar jamais da *ação mútua entre dois circuitos rígidos e fechados*.

No lugar de substituir cada circuito por duas superfícies muito próximas recobertas, uma de fluido austral e outra de fluido boreal, sendo estes fluidos distribuídos como foi dito mais acima, se poderia substituir cada circuito por uma única superfície sobre a qual seriam uniformemente distribuídos elementos magnéticos²⁰³ tais como foram definidos pelo Sr. Poisson, na Memória lida à Academia de Ciências em 2 de fevereiro de 1824.²⁰⁴

O autor desta Memória, ao calcular as fórmulas pelas quais fez entrar no domínio da análise todas as questões relacionadas com a imantação dos corpos, qualquer que seja a causa que se designe para ela, forneceu²⁰⁵ o valor das três forças exercidas por um elemento magnético sobre uma molécula de fluido austral ou boreal. Estes valores são idênticos aos que deduzi de minha fórmula, para as três grandezas A, B e C, no caso de um circuito muito pequeno fechado e plano, quando se supõe que os coeficientes constantes são os mesmos, e é fácil de concluir disto um

²⁰²[N. T.] Página 311 do trabalho original de Ampère publicado em 1827, que corresponde à nossa página 283.

²⁰³[N. T.] Cada “elemento magnético” é composto por um pólo austral e por um pólo boreal de mesma intensidade, separados por uma pequena distância fixa. Ou seja, cada elemento magnético é um dipolo magnético.

²⁰⁴[N. T.] Ver [Poi22a].

²⁰⁵[N. A.] *Mémoire sur la théorie du magnétisme*, pelo Sr. Poisson, página 22.

teorema de acordo com o qual se vê imediatamente:

1. Que a ação de um solenóide eletrodinâmico,

[Páginas 195 e 367]

calculada de acordo com a minha fórmula, é, em todos os casos, a mesma que [a ação de] uma série de elementos magnéticos de mesma intensidade, distribuídos uniformemente ao longo da linha reta ou curva que envolve todos os pequenos circuitos do solenóide, fornecendo, a cada um de seus pontos, aos eixos dos elementos, a própria direção desta linha.

2. Que a ação de um circuito voltaico rígido e fechado, igualmente calculada de acordo com minha fórmula, é precisamente a ação que exerceriam os elementos magnéticos de mesma intensidade, distribuídos uniformemente sobre uma superfície qualquer delimitada por este circuito, quando os eixos dos elementos magnéticos são em toda parte normais a esta superfície.

O mesmo teorema ainda conduz a esta consequência: Ao se conceber uma superfície envolvendo por todos os lados um espaço muito pequeno — quando se supõe, por um lado, moléculas de fluido austral e de fluido boreal em quantidades iguais distribuídas sobre esta pequena superfície, como elas devem estar [distribuídas] para constituir o elemento magnético tal como considerou o Sr. Poisson, e [quando se supõe], por outro lado, a mesma superfície recoberta de correntes elétricas, formando sobre esta superfície pequenos circuitos fechados em planos paralelos e eqüidistantes, e quando se calcula a ação destas correntes de acordo com a minha fórmula — as forças exercidas, nos dois casos, seja sobre um elemento de fio condutor, seja sobre uma molécula magnética, são precisamente as mesmas, independentes da forma da pequena superfície, e proporcionais ao volume que ela envolve, sendo os eixos dos elementos magnéticos representados pela reta perpendicular aos planos dos circuitos.

Uma vez demonstrada a identidade destas forças, se poderia considerar como sendo apenas simples corolários, todos os

[Páginas 196 e 368]

resultados que forneci nesta Memória, sobre a possibilidade de substituir os ímãs, sem mudar os efeitos produzidos, pelos conjuntos de correntes elétricas fechadas ao redor de suas partículas. Penso que será fácil ao leitor deduzir esta consequência, e o teorema sobre o qual ela se fundamenta, a partir dos cálculos precedentes. Aliás, já a desenvolvi em uma outra Memória²⁰⁶ na qual discuti igualmente, sobre este novo ponto de vista, tudo o que é relativo à ação mútua entre um ímã e um condutor voltaico.

²⁰⁶[N. T.] Esta outra Memória foi publicada por Joubert, [Amp87d], que é acompanhada de uma carta a Gherardi, [Amp87a]. Uma parte desta Memória foi publicada em [Amp28].

14.25 Experiência que Acaba de Confirmar a Teoria na Qual se Atribui as Propriedades dos Ímãs [como Sendo Devidas] a Correntes Elétricas, ao se Provar que um Fio Condutor Curvado em Espiral ou em Hélice e Percorrido pela Corrente Voltaica Sofre, da Parte de um Disco Metálico em Movimento, uma Ação em Tudo Similar Àquela que o Sr. Arago Descobriu entre este Disco e um Ímã

Enquanto eu redigia esta Memória, o Sr. Arago descobriu um novo gênero de ação exercida sobre os ímãs. Esta descoberta, tão importante como inesperada, consiste na ação mútua que se desenvolve entre um ímã e um disco ou anel de uma substância qualquer, cuja posição relativa muda continuamente. O Sr. Arago tendo tido a idéia que se devia poder, nesta experiência, substituir um condutor curvado em hélice no lugar da barra imantada, me engajou a verificar esta conjectura por uma experiência cujo sucesso não podia de forma nenhuma ser duvidado. Os defeitos do aparelho com o qual tentei constatar a existência desta ação nas experiências que fiz com o Sr. Arago, nos impediram de conseguir um resultado decisivo. Mas o Sr. Colladon²⁰⁷ quis muito se encarregar de dispor mais convenientemente o aparelho com o qual nos servimos. Verifiquei com ele da maneira a mais completa, hoje, 30 de agosto de 1826, a idéia do Sr. Arago, fazendo uso de uma hélice dupla muito pequena, cujas espiras possuíam ao redor de duas polegadas de diâmetro.

Esta experiência completa a identidade dos efeitos produzidos, seja por ímãs, seja por conjuntos de circuitos

[Páginas 197 e 369]

voltaicos rígidos e fechados.²⁰⁸ Ela acaba de demonstrar que a série de decomposições e recom-

²⁰⁷[N. T.] J.-D. Colladon (1802-1893).

²⁰⁸[N. A.] Parece inicialmente que esta identidade somente deveria ocorrer com respeito a circuitos voltaicos fechados com um diâmetro muito pequeno. Mas é fácil de ver que ela ocorre para os circuitos de uma grandeza qualquer, já que vimos que estes últimos podem ser substituídos por elementos magnéticos [isto é, podem ser substituídos por dipolos magnéticos] distribuídos uniformemente sobre as superfícies delimitadas por estes circuitos, e que se pode multiplicar a vontade o número de superfícies que delimita um mesmo circuito. O conjunto destas superfícies pode ser considerado como um sistema de ímãs equivalentes ao circuito. A mesma consideração prova que sem mudar em nada às forças que resultam disto, é sempre possível substituir as pequeninas correntes elétricas que envolvem as partículas de uma barra imantada, por correntes elétricas de uma grandeza finita, com estas correntes formando circuitos fechados ao redor do eixo da barra quando os [eixos] das partículas estão distribuídos simetricamente ao redor deste eixo. Para isso é suficiente imaginar nesta barra superfícies — delimitadas pela [superfície] do ímã — que por toda a parte cortam em ângulos retos as linhas de imantação, e que passam pelos elementos magnéticos que se pode sempre supor situados nos pontos onde estas linhas encontram com as superfícies. Em tal caso, se todos os elementos de uma mesma superfície tivessem intensidades iguais sobre áreas iguais, eles deveriam ser substituídos por uma só corrente elétrica percorrendo a curva formada pela intersecção entre esta superfície e a do ímã. Se eles variassem de intensidade aumentando da superfície ao eixo do ímã, de início se precisaria substituí-los por uma corrente nesta intersecção tal como deveria ser de acordo com a intensidade *mínima* das correntes particulares da superfície normal às linhas de imantação que se considera. Depois, a cada linha que circunscribe as porções desta superfície nas quais as pequenas correntes se tornassem mais

posições do fluido

[Páginas 198 e 370]

neutro, que constitui a corrente elétrica, é suficiente para produzir, neste caso como em todos os outros, os efeitos que se explica comumente pela ação de dois fluidos diferentes de eletricidade, e que são designados sob os nomes de *fluido austral* e de *fluido boreal*.

14.26 Conseqüências Gerais das Experiências e dos Cálculos Relativos aos Fenômenos Eletrodinâmicos

Após ter refletido muito tempo sobre todos estes fenômenos e sobre a engenhosa explicação que o Sr. Poisson forneceu ultimamente para o novo gênero de ação descoberto pelo Sr. Arago, me parece que o que se pode admitir como mais provável no estado atual da ciência, se compõe das seguintes proposições:

1. Sem que se seja autorizado a rejeitar as explicações fundamentadas sobre a reação do éter posto em movimento pelas correntes elétricas, nada obriga até o momento a recorrer a elas.
2. As moléculas dos dois fluidos elétricos, distribuídas

[Páginas 199 e 371]

sobre a superfície dos corpos condutores, sobre a superfície ou no interior dos corpos que não o são,²⁰⁹ e permanecendo [em repouso] nos pontos destes corpos onde elas se encontram, seja em equilíbrio no primeiro caso, seja porque elas são retidas neste lugares no segundo caso pela força coercitiva dos corpos não condutores, produzem, por suas atrações e repulsões reciprocamente proporcionais aos quadrados das distâncias, todos os fenômenos da eletricidade comum.

intensas, se imaginaria uma nova corrente concêntrica à precedente, e tal como exigiria a diferença de intensidade das correntes adjacentes — umas fora e outras dentro desta linha. Se a intensidade das correntes particulares fosse diminuindo da superfície ao eixo da barra, se precisaria imaginar, sobre a linha de separação, uma corrente concêntrica à precedente, mas indo em sentido contrário. Enfim, um aumento da intensidade que sucederia a esta diminuição, exigiria uma nova corrente concêntrica dirigida como a primeira.

De resto, faço aqui este destaque somente para não omitir uma conseqüência notável dos resultados obtidos nesta Memória, e não para deduzir disto quaisquer probabilidades a favor da suposição que as correntes elétricas dos ímãs formam circuitos fechados ao redor de seus eixos. Após ter inicialmente hesitado entre esta suposição e a outra maneira de conceber as correntes, considerando-as rodeando as partículas dos ímãs, reconheci — depois de muito tempo — que esta última [suposição] era a mais de acordo com o conjunto dos fatos, e não mudei em nada minha opinião a este respeito.

Além disso, esta conseqüência é útil no aspecto de que torna a semelhança entre as ações produzidas — de uma parte por uma hélice eletrodinâmica, de outra parte por um ímã — tão completa, sob o ponto de vista da teoria, da mesma forma que a encontramos [completa] quando se consulta a experiência, e no aspecto de que ela justifica as explicações nas quais se substitui, como fiz na [explicação] que forneci mais acima sobre o movimento de revolução de um ímã flutuante, um único circuito fechado pelo ímã que se considera.

²⁰⁹[N. T.] Isto é, as moléculas dos fluidos elétricos distribuídas sobre a superfície dos corpos condutores ou no interior dos corpos isolantes.

3. Quando as mesmas moléculas estão em movimento nos fios condutores, quando elas se reúnem em fluido neutro e se separam a cada instante, resultam, [a partir] da ação mútua entre elas, forças que dependem inicialmente da duração dos períodos extremamente curtos compreendidos entre duas reuniões ou duas separações consecutivas, [e que dependem] em seguida das direções ao longo das quais se operam as composições e decomposições alternadas do fluido neutro. As forças assim produzidas são constantes desde que este estado dinâmico dos fluidos elétricos nos fios condutores seja permanente. São elas que produzem todos os fenômenos de atração e de repulsão que descobri entre dois destes fios.
4. A ação — cuja existência descobri — entre a Terra e os condutores voltaicos, não permite mais duvidar que existam correntes, semelhantes às correntes dos fios condutores, no interior do nosso globo. Pode-se presumir que estas correntes são a causa do calor que lhe é próprio; que elas ocorrem principalmente lá onde a camada oxidada que o envolve por toda a parte repousa sobre um núcleo metálico, conforme a explicação que *sir* H. Davy forneceu sobre os vulcões, e que são elas que imantam os minerais magnéticos e os corpos expostos em circunstâncias convenientes para a ação

[Páginas 200 e 372]

eletrodinâmica da Terra. Contudo, não existe e não pode existir, de acordo com a identidade dos efeitos explicados na nota precedente, nenhuma prova sem réplica de que as correntes terrestres não ocorrem somente ao redor das partículas do globo.

5. O mesmo estado eletrodinâmico permanente consistindo em uma série de decomposições e de recomposições do fluido neutro que ocorre nos fios condutores, existe ao redor das partículas dos corpos imantados, e produz ali ações semelhantes às ações que exercem estes fios.
6. Ao calcular estas ações de acordo com a fórmula que representa [a ação] entre dois elementos voltaicos, encontra-se precisamente, para as forças que resultam deste cálculo, seja quando um ímã age sobre um condutor, seja quando dois ímãs agem entre si, os valores fornecidos pelas últimas experiências do Sr. Biot no primeiro caso, e pelas de Coulomb no segundo.
7. Esta identidade, puramente matemática, confirma da maneira a mais completa a opinião, fundamentada além disso no conjunto de todos os fatos, de que as propriedades dos ímãs são realmente devidas ao movimento contínuo dos dois fluidos elétricos ao redor de suas partículas.
8. Quando a ação de um ímã — ou de um fio condutor — estabelece este movimento ao redor das partículas de um corpo, as moléculas de eletricidade positiva e de eletricidade negativa — que devem se constituir no estado eletrodinâmico permanente do qual resultam as ações que ele exerce então — seja sobre um fio condutor, seja sobre um corpo imantado, somente podem chegar a este estado após um tempo sempre muito curto, mas que jamais é nulo, e cuja duração depende em geral da

[Páginas 201 e 373]

resistência que os corpos opõem ao deslocamento dos fluidos elétricos que o abrangem. Durante este deslocamento, seja antes de alcançar um estado de movimento permanente, seja quando este estado cessa, elas devem exercer forças que produzem provavelmente os efeitos singulares que o Sr. Arago descobriu. De resto, esta explicação é apenas a do Sr. Poisson aplicada à minha teoria, pois uma corrente elétrica formando um circuito fechado muito pequeno agindo precisamente como duas moléculas, uma de fluido austral e outra de fluido boreal, dispostas sobre seu eixo, de um lado e do outro do plano da pequena corrente, a distâncias iguais entre si destes planos, e tão maiores quanto maior for a intensidade da corrente elétrica, deve-se necessariamente encontrar os mesmos valores para as forças que se desenvolvem, seja quando se supõe que a corrente surge ou cessa de existir gradualmente, seja quando se concebe que as moléculas magnéticas — de início reunidas em fluido neutro — se separam, se afastando sucessivamente para distâncias cada vez maiores, e se aproximam em seguida para se reunir outra vez.

Acredito dever observar ao terminar esta Memória, que ainda não tive o tempo de fazer construir os instrumentos representados na Figura 4 e na Figura 20.²¹⁰ Portanto, as experiências para as quais [estes instrumentos] foram destinados ainda não foram feitas. Mas como estas experiências visam somente verificar resultados obtidos de outro modo e que, por outro lado, seria útil realizá-las como um contraprova das que forneceram estes resultados, acreditei que não deveria suprimir a descrição.

²¹⁰[N. T.] Ver as páginas 190 e 224, respectivamente.

Capítulo 15

Notas [do *Théorie* Publicado em 1826] Contendo Alguns Novos Desenvolvimentos sobre os Assuntos Tratados nesta Obra

[Página 202]

15.1 Sobre a maneira de demonstrar pelos quatro casos de equilíbrio expostos no começo desta Memória, que o valor da ação mútua entre dois elementos de fios condutores é $-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'} dsds'$

Ao seguir¹ a ordem das transformações pela qual fiz passar sucessivamente a este valor [da ação mútua entre dois elementos de corrente], encontra-se de início, em virtude dos dois primeiros casos de equilíbrio, que ela é

$$\frac{ii'(\sin\theta \sin\theta' \cos\omega + k \cos\theta \cos\theta') dsds'}{r^n}.$$

Deduz-se do terceiro [caso de equilíbrio] a relação $n + 2k = 1$ entre n e k , e do quarto [caso de equilíbrio deduz-se que] $n = 2$, de onde $k = -1/2$. Portanto, este quarto caso de equilíbrio é o que se emprega em último lugar para a determinação do valor da força que ocorre entre dois elementos de fios condutores. Mas pode-se seguir um outro caminho partindo de uma consideração com a qual o Sr. de Laplace se serviu, quando concluiu a partir das primeiras experiências do Sr. Biot sobre a ação mútua entre um ímã e um fio retilíneo indefinido, que a [força] que um elemento deste fio exerce sobre um dos pólos do ímã é em razão inversa do quadrado da distância entre eles, quando somente esta distância muda de valor e quando o ângulo compreendido entre a reta que mede [a distância] e a direção do elemento permanece o mesmo.

¹[N. T.] Por um erro tipográfico vem que a fórmula no título desta Seção aparece como $-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \frac{dsds'}{d^2r} dsds'$. O correto é o que colocamos, a saber, $-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'} dsds'$.

Ao aplicar esta consideração na ação mútua entre dois elementos de fios condutores, é fácil de ver, independentemente de toda pesquisa preliminar sobre o valor da força que resulta disto, que esta força também é inversamente proporcional ao quadrado da distância quando somente ela varia e quando os ângulos que determinam a posição respectiva dos dois elementos não sofrem qualquer mudança. Com efeito, de acordo com as considerações desenvolvidas no começo desta Memória, a força que está em questão aqui é necessariamente dirigida ao longo da reta r , e vale

$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega) ds ds' .$$

De onde segue que denominando por α , β e γ aos ângulos que esta reta forma com os três eixos, suas três componentes serão expressas por

$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \alpha ds ds' ,$$

$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \beta ds ds' ,$$

$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \gamma ds ds' ,$$

e as três forças paralelas aos três eixos que resultam [destas componentes] entre dois circuitos [serão obtidas] pelas integrais duplas destas expressões, sendo i e i' constantes.

Ora, segue do quarto caso de equilíbrio — substituindo os três círculos por curvas semelhantes quaisquer cujas dimensões homólogas estejam em progressão geométrica contínua — que estas três forças possuem valores iguais em dois sistemas semelhantes. Portanto, é necessário que as integrais que as exprimam sejam de dimensão nula com relação a todos os comprimentos que ali entram, de acordo com a observação do Sr. de Laplace que acabo de lembrar e que, conseqüentemente, ocorra o mesmo para as diferenciais nas quais elas se compõem, compreendendo ds e ds' entre os comprimentos que entram [nestas expressões], já que o número destas diferenciais, mesmo que [seja um número]

infinito de segunda ordem,² deve ser considerado como o mesmo nos dois sistemas.

Ora, o produto $ds ds'$ é de duas dimensões [espaciais]. Portanto, é necessário que³ [a expressão] $f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \alpha$, $f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \beta$ e $f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \gamma$ sejam de dimensão -2 . E como os ângulos θ , θ' , ω , α , β e γ são expressos por números que não contribuem em nada nas dimensões dos valores das diferenciais, e como $f(r, \theta, \theta', \omega)$ contém apenas o comprimento isolado r , necessariamente é preciso que esta função seja proporcional a $1/r^2$, de modo que a força exercida entre dois elementos de fios condutores é expressa por

²[N. T.] A integral ao longo do circuito fechado s é como se fosse uma somatória de infinitos termos proporcionais aos comprimentos infinitesimais ds . O mesmo vale para a integral ao longo do circuito s' em relação aos elementos ds' . Ao calcular a força de um circuito fechado sobre outro circuito fechado teremos então um número infinito de termos infinitesimais multiplicado por um outro número infinito de termos também infinitesimais. É a isto que Ampère se refere como sendo um número “infinito de segunda ordem.”

³[N. T.] No trabalho original, por um erro tipográfico, o último co-seno vem escrito como $\cos \alpha$. Este erro aparece em todas as edições do *Théorie*.

$$\frac{ii'\varphi(\theta, \theta', \omega)}{r^2} ds ds' .$$

Os dois primeiros casos de equilíbrio determinam em seguida a função φ , onde somente k permanece desconhecida, e tem-se para o valor da força procurada

$$\frac{ii'(\sin \theta \sin \theta' \cos \omega + k \cos \theta \cos \theta')}{r^2} ds ds' .$$

Como se sabe, foi com esta forma que a forneci na Memória que li na Academia em 4 de dezembro de 1820.⁴ Substituindo então $\sin \theta \sin \theta' \cos \omega$ e $\cos \theta \cos \theta'$ por seus valores

$$-\frac{rd^2r}{ds ds'} \quad \text{e} \quad -\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ,$$

vem que

$$\begin{aligned} & -\frac{ii'}{r^2} \left(\frac{d^2r}{ds ds'} + k \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) ds ds' \\ = & -\frac{ii'(rdd'r + kdrd'r)}{r^2} = -\frac{ii'r^k dd'r + kr^{k-1} drd'r}{r^{k+1}} \\ = & -\frac{ii'd(r^k d'r)}{r^{k+1}} = -\frac{ii'dd'(r^{k+1})}{(k+1)r^{k+1}} . \end{aligned}$$

[Página 205]

E fazendo, para abreviar, $k+1 = m$, tem-se para o valor da força procurada esta expressão muito simples

$$-\frac{ii'dd'(r^m)}{mr^m} ,$$

onde só resta provar que $r^m = \sqrt{r}$, isto é, que o número constante m é igual a $1/2$.

A experiência⁵ descrita nas págs.⁶ 22–25, com a qual me servi nesta Obra para determinar o valor de k e, conseqüentemente, o valor de $m = k+1$, é suscetível de pouca precisão devido ao atrito do arco AA' (Figura 3 [na página 187, reproduzida aqui na pág. 326]) com o mercúrio contido nas duas tinas M e M' , e [devido] à dificuldade que se observa para impedir que a repulsão que ocorre entre o arco e o mercúrio quando a corrente elétrica os atravessa, não os afaste bastante um do outro a ponto de interromper a comunicação [elétrica].⁷ Deduzi inicialmente o valor de k a partir de uma outra experiência⁸ que não apresentava os mesmos inconvenientes, já que tendo a porção móvel do circuito voltaico suas duas extremidades no eixo vertical ao redor do qual

⁴[N. T.] Esta Memória, lida em 4 de dezembro de 1820, foi publicada em [Amp20e]. O manuscrito contendo o que Ampère apresentou nesta data foi publicado por Joubert, [Amp85f]. Ampère apresentou outra versão deste trabalho em [Amp20d].

⁵[N. T.] Este parágrafo final não consta na Nota 1 do *Théorie* publicado em 1827. Em vez disto aparece o texto que vai das págs. 343 até 344.

⁶[N. T.] Págs. 22–25 do original de 1826, que correspondem aqui às págs. 186–189.

⁷[N. T.] As condições experimentais deste aparelho foram bem melhoradas por Ettingshausen (1796–1878) ao sustentar a barra ou suporte QO da Figura 3, presa ao arco AA' , por uma suspensão bifilar, [Ett78] e [Gri79].

⁸[N. T.] O caso de equilíbrio da não existência de rotação contínua, ver [Amp22i], [Amp22p], [Amp85i] e a Seção 6.5.

ela estava sujeita a girar, o atrito devido ao mercúrio só ocorria contra a superfície das duas pontas girando ao redor de si mesmas, o que o tornava essencialmente nulo, e devido a que, além disso, as pontas não podiam se separar do mercúrio no qual estavam mergulhadas. Esta experiência tem uma outra vantagem, que é a de não exigir um aparelho particular, mas apenas aquele [instrumento] que serve para fazer todas as outras experiências eletrodinâmicas, e que está descrito na Figura da obra que publiquei em 1825, pela editora Bachelier, [no endereço] *quais des Augustins* n° 55, com o título *Description d'un appareil électro-dynamique*, 2ª edição.⁹ Pode-se ver nesta descrição, págs. 19 e 20, como se faz a experiência que está sendo discutida aqui. Ela tem por finalidade constatar que uma porção móvel de fio condutor cujas duas extremidades estão no eixo vertical ao redor do qual ela gira livremente,

[Página 206]

não pode se mover continuamente ao redor deste eixo pela ação de um condutor circular horizontal cujo centro está no mesmo eixo. Em seguida abandonei esta maneira de determinar o valor de k , já que o cálculo que havia utilizado para deduzir [este valor] supunha como estando estabelecido em relação a cada um dos elementos do condutor circular aquilo que a experiência demonstrava apenas para a totalidade deste condutor. Mas depois reconheci que ao partir da não existência da ação do condutor circular sobre um condutor retangular cujos dois lados são verticais, que é a forma mais cômoda para [fazer] a experiência, se pode, por meio de uma transformação que será o assunto da Nota seguinte, determinar diretamente o valor de m e, conseqüentemente, [determinar o valor] de $k = m - 1$. Isto elimina a necessidade de ter de recorrer ao instrumento representado na Figura 3, e à experiência pouco suscetível de exatidão para a qual ele estava destinado.

15.2 Sobre uma transformação apropriada para simplificar o cálculo da ação mútua entre dois condutores retilíneos

Quando os dois condutores são retilíneos, o ângulo formado pelas direções dos dois elementos é constante e igual ao ângulo das próprias direções dos dois condutores. Portanto, este ângulo é considerado como conhecido. Designando-o por ε , tem-se, página 35,¹⁰

$$r \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} = - \frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} = - \cos \varepsilon .$$

De onde segue que¹¹

$$\frac{dd'(r^m)}{mr^m} = \frac{(m-1)drd'r + rdd'r}{r^2} = \frac{(m-2)drd'r - \cos \varepsilon dsds'}{r^2} .$$

Designando por p um outro expoente qualquer, tem-se igualmente

[Página 207]

⁹[N. T.] *Descrição de um aparelho eletrodinâmico*. Ver [Amp24a], [Amp24b] e [Amp26a].

¹⁰[N. T.] Página 35 do *Théorie* de 1826, que corresponde à nossa página 197.

¹¹[N. T.] Por um erro tipográfico no trabalho original o segundo e terceiro termos desta equação vêm escritos na forma $\frac{(m-1)drd'r + rdd'r}{r^2} = \frac{(m-2)drd'r - \cos \varepsilon dsds'}{r^2}$.

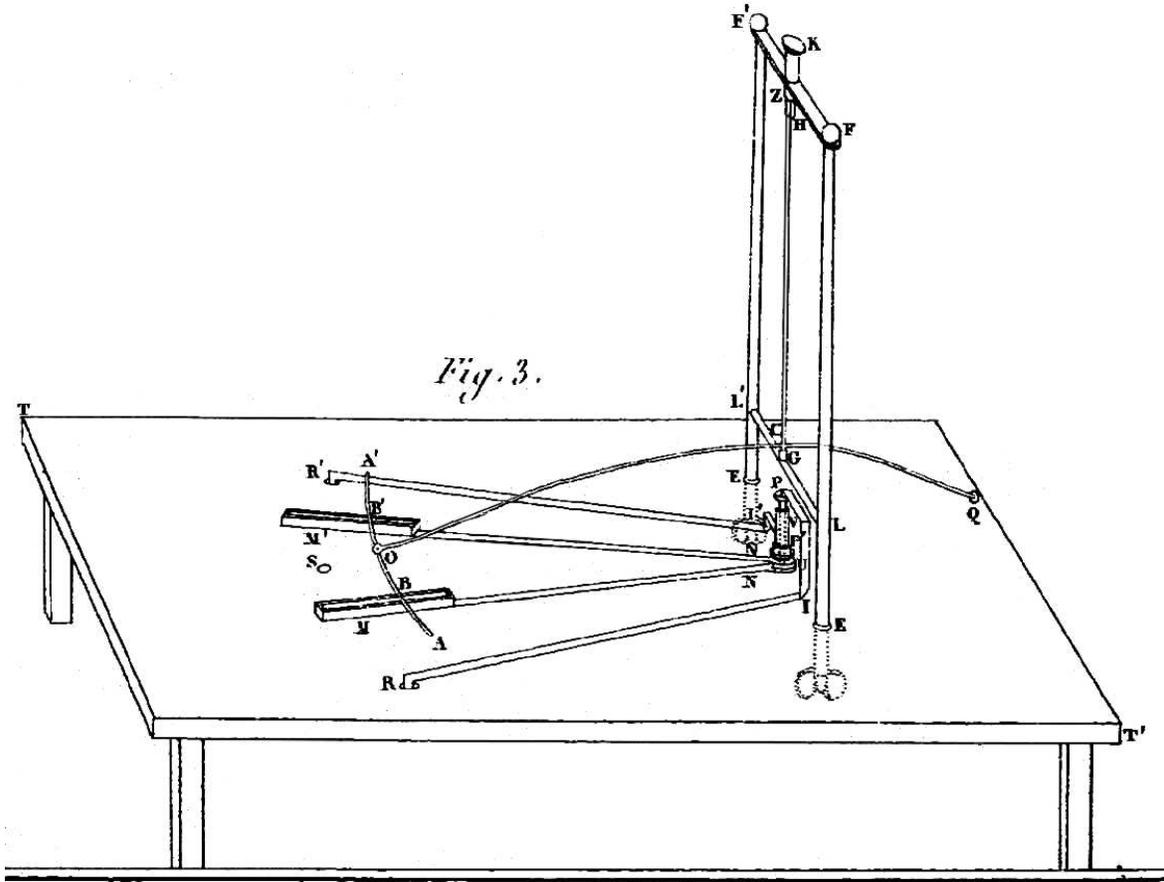


Figura 3.

$$\frac{dd'(r^p)}{p r^p} = \frac{(p-2)drd'r - \cos \varepsilon ds ds'}{r^2},$$

e, eliminando¹² $\frac{drd'r}{r^2}$ entre estas duas equações, se obtém

$$\frac{(p-2)dd'(r^m)}{m r^m} - \frac{(m-2)dd'(r^p)}{p r^p} = \frac{(m-p) \cos \varepsilon ds ds'}{r^2},$$

de onde

$$\frac{dd'(r^m)}{m r^m} = \frac{m-2}{p-2} \frac{dd'(r^p)}{p r^p} + \frac{m-p}{p-2} \frac{\cos \varepsilon ds ds'}{r^2}.$$

Ao¹³ multiplicar os dois membros desta equação por $-ii'$, obtém-se uma expressão da ação mútua entre dois elementos de condutores voltaicos na qual pode-se designar o valor que se quiser à constante indeterminada p . Esta expressão é

$$-ii' \frac{dd'(r^m)}{m r^m} = -ii' \left[\frac{m-2}{p-2} \frac{dd'(r^p)}{p r^p} + \frac{m-p}{p-2} \frac{\cos \varepsilon ds ds'}{r^2} \right].$$

¹²[N. T.] Por um erro tipográfico este termo aparece no original como $\frac{drdr'}{r^2}$.

¹³[N. T.] A parte final desta segunda Nota publicada em 1826 é diferente da parte final da segunda Nota publicada em 1827, ver nossa pág. 345.

15.3 Aplicação desta transformação para a determinação da constante m que entra na fórmula pela qual se exprime a força exercida entre dois elementos de fios condutores, e para a [determinação] do valor desta força que convém empregar quando se quer calcular os efeitos produzidos pela ação mútua entre dois elementos retilíneos

Inicialmente¹⁴ trata-se de aplicar a fórmula que acabamos de encontrar para a determinação do valor de m , partindo da experiência que prova que um condutor retangular móvel cujos dois lados são verticais não adquire qualquer movimento quando ele é submetido à ação de um condutor circular horizontal e quando ele somente pode girar ao redor do eixo do círculo

[Página 208]

cujá circunferência é formada por este último condutor. Para isto, ao executar uma das duas diferenciações 'indicadas no valor que acabamos de encontrar para a força exercida pelo elemento ds do condutor móvel sobre o elemento ds' do condutor circular, coloca-se [este valor] na forma¹⁵

$$-ii' \left[\frac{m-2}{p-2} \frac{d(r^{p-1}d'r)}{r^p} + \frac{m-p \cos \varepsilon ds ds'}{p-2 r^2} \right].$$

Em seguida toma-se sua componente ao longo da tangente ao condutor circular ao multiplicar [este valor] por $\cos \theta'$, e substitui-se¹⁶ $d'r$ por seu valor $-ds' \cos \theta'$. Isto resultará [no seguinte valor] para a expressão desta componente

$$ii' ds' \left[\frac{m-2}{p-2} r^{-p} \cos \theta' d(r^{p-1} \cos \theta') - \frac{m-p \cos \theta' \cos \varepsilon ds}{p-2 r^2} \right],$$

onde p pode ter o valor que se queira.

Ao multiplicar a expressão da componente pelo raio da circunferência, o qual denominarei por a , ao longo da qual está curvado o condutor fixo, se terá [o valor] do torque da ação que o elemento ds exerceria para fazer ds' girar ao redor do eixo, se este último elemento fosse móvel. Disto segue que ao trocar o sinal do produto, se obterá o valor do torque que resulta da ação de ds' para fazer ds girar ao redor do mesmo eixo. Como se pode escolher à vontade [o valor de] p , torna-se este valor [como sendo] o mais simples ao fazer $-p = p - 1$, ou $p = 1/2$. Tem-se então

$$r^{-p} \cos \theta' d(r^{p-1} \cos \theta') = \frac{\cos \theta'}{\sqrt{r}} d \frac{\cos \theta'}{\sqrt{r}} = \frac{1}{2} d \frac{\cos^2 \theta'}{r}.$$

E a expressão do torque fica na forma

¹⁴[N. T.] Esta terceira Nota do *Théorie* publicada em 1826 não consta nas Notas do *Théorie* publicadas em 1827.

¹⁵[N. T.] Por um erro tipográfico a primeira fração deste termo aparece na forma $\frac{m-2}{p-2} \frac{d(r^{p-1} dr')}{r^p}$.

¹⁶[N. T.] Por um erro tipográfico aparece aqui dr' em vez de $d'r$.

$$aii'ds' \left(\frac{m-2}{3} d \frac{\cos^2 \theta'}{r} - \frac{2m-1}{3} \frac{\cos \theta' \cos \varepsilon ds}{r^2} \right) .$$

Ao integrar com relação às diferenciais designadas pelo

[Página 209]

símbolo d , que são relativas à porção móvel do fio condutor, e denominando por r_1 , r_2 , $\cos \theta'_1$ e $\cos \theta'_2$ aos valores de r e de $\cos \theta'$ nas duas extremidades desta porção, obtém-se, para [o valor] do torque em virtude do qual ela [isto é, a parte móvel] tende a girar ao redor do eixo pela ação do elemento ds' [a seguinte expressão]:¹⁷

$$aii'ds' \left[\frac{m-2}{3} \left(\frac{\cos^2 \theta'_2}{r_2} - \frac{\cos^2 \theta'_1}{r_1} \right) - \frac{2m-1}{3} \int \frac{\cos \theta' \cos \varepsilon ds}{r^2} \right] .$$

Como as retas traçadas de todos os pontos do eixo até o centro do elemento ds' do condutor circular são perpendiculares à direção deste elemento, é evidente que obtém-se, quando as duas extremidades do condutor móvel estão ao longo do eixo, $\cos \theta'_1 = 0$ e $\cos \theta'_2 = 0$. Assim, o valor precedente reduz-se a¹⁸

$$-\frac{(2m-1)aii'ds'}{3} \int \frac{\cos \theta' \cos \varepsilon ds}{r^2} = \frac{(2m-1)aii'ds'}{3} \int \frac{dr \cos \varepsilon ds}{ds' r^2} .$$

A integral que entra nesta expressão deve ser tomada para todo o contorno do retângulo formado pelo condutor móvel, isto é, para as quatro porções deste condutor que são os quatro lados do retângulo. Mas inicialmente, para as duas porções verticais, o ângulo ε compreendido entre as direções do elemento horizontal ds' e dos elementos nos quais elas [isto é, as porções verticais] se compõem é, evidentemente, um ângulo reto. Portanto, o fator $\cos \varepsilon$ é nulo. Isto também anula a própria integral destas duas porções e, conseqüentemente, só fica faltando calcular as partes da integral relativas às duas porções horizontais.

Suponhamos que a circunferência $L'M'L''M''$ (Figura 23)¹⁹ represente

[Página 210]

o condutor horizontal, que o eixo seja traçado a partir do centro O deste círculo perpendicularmente ao plano da Figura, que as duas porções horizontais do condutor móvel sejam projetadas sobre o raio OL de b em c , e que P seja a projeção dos centros, situados sobre uma mesma vertical, de dois elementos iguais de cada uma destas porções, os dois [elementos] representados por ds e situados a uma distância $OP = s$ do centro O , considerando nas duas porções a origem dos s [como sendo] os pontos nos quais suas direções vão de encontro com a direção do eixo. Em vez de calcular a integral

¹⁷[N. T.] Por um erro tipográfico aparece no denominador da segunda fração r em vez de r_2 .

¹⁸[N. A.] Ocorre a mesma redução quando o condutor móvel forma um circuito fechado, já que neste caso, $r_2 = r_1$ e $\theta'_2 = \theta'_1$, o que fornece

$$\frac{\cos^2 \theta_2}{r_2} - \frac{\cos^2 \theta_1}{r_1} = 0 .$$

¹⁹[N. T.] Ver a página 232.

Fig. 23.

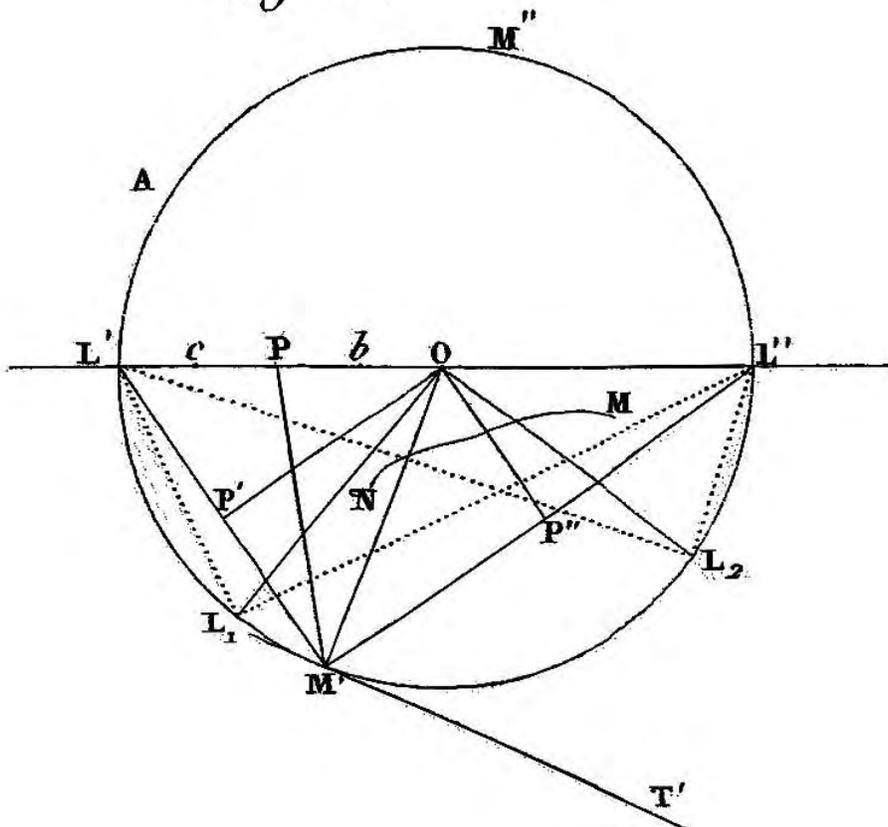


Figura 23.

$$\frac{2m - 1}{3} a i i' d s' \int \frac{d r \cos \varepsilon d s}{d s' r^2}$$

separadamente para cada uma de suas duas porções e de reunir os dois resultados, é melhor fazer a integral da soma dos dois torques das forças exercidas pelo elemento ds' sobre os dois elementos representados por ds , de $s = 0$ e $b = s_1$ até $s = 0$ e $c = s_2$. Denominando por γ ao ângulo $L'OM'$, tem-se $s = a\gamma + C$ e $ds' = ad\gamma$. E como o raio OM é perpendicular ao elemento ds' , e como as duas porções horizontais do condutor móvel são percorridas pela corrente elétrica em sentidos contrários, é evidente que para [a integral] na qual ela está dirigida em direção ao eixo, deve-se fazer $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \gamma$, e para a outra [integral na qual a corrente se afasta radialmente do eixo tem-se] $\varepsilon = \frac{\pi}{2} + \gamma$.

Se designarmos por r e por r' as distâncias do elemento ds' aos dois elementos de suas porções representados por ds , obteremos [o seguinte valor]²⁰ para o torque resultante da ação de ds' sobre [o elemento] da primeira porção na qual $\cos \varepsilon = \sin \gamma$

$$\frac{(2m - 1)a^2 i i' d\gamma}{3} \frac{d r}{d s'} \frac{\sin \gamma d s}{r^3}$$

E para o torque imprimido, pela mesma ação, ao elemento da segunda [porção] na qual $\cos \varepsilon = -\sin \gamma$ [obteremos o seguinte valor]

²⁰[N. T.] Por um erro tipográfico aparece no original r^2 no denominador, em vez de r^3 .

$$-\frac{(2m-1)a^2ii'd\gamma}{3} \frac{dr'}{ds'} \frac{\text{sen } \gamma ds}{r'^3}.$$

[Página 211]

Sejam h e h' as distâncias ao plano do condutor circular das duas porções horizontais do condutor móvel, [com isto] vem que

$$r^2 = h^2 + a^2 + s^2 - 2as \cos \gamma, \quad \text{e} \quad r'^2 = h'^2 + a^2 + s^2 - 2as \cos \gamma.$$

Assim

$$r \frac{dr}{ds'} ds' = r' \frac{dr'}{ds'} ds' = as \text{sen } \gamma d\gamma.$$

E, já que $ds' = ad\gamma$, tem-se

$$\frac{dr}{ds'} = \frac{s \text{sen } \gamma}{r}, \quad \text{e} \quad \frac{dr'}{ds'} = \frac{s \text{sen } \gamma}{r'}.$$

Substituindo estes valores naqueles que acabamos de obter para os dois torques, encontra-se que sua soma é igual a

$$\frac{(2m-1)a^2ii'}{3} \left(\frac{\text{sen}^2 \gamma}{r^3} - \frac{\text{sen}^2 \gamma}{r'^3} \right) ds ds' d\gamma.$$

O torque total resultante da ação do condutor móvel sobre o condutor circular é igual à integral dupla desta expressão considerada de $\gamma = 0$ até $\gamma = 2\pi$, e em seguida de $s = s_1$ até $s = s_2$, sendo arbitrária a ordem na qual são feitas estas integrações. Este torque [total] é então expresso por

$$\frac{(2m-1)a^2ii'}{3} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\text{sen}^2 \gamma}{r^3} - \frac{\text{sen}^2 \gamma}{r'^3} \right) d\gamma.$$

E como a experiência prova que ele é nulo, necessariamente é preciso que a integral dupla

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\text{sen}^2 \gamma}{r^3} - \frac{\text{sen}^2 \gamma}{r'^3} \right) d\gamma = 0,$$

ou que $2m - 1 = 0$. Isto fornece para m o valor $1/2$ que, com efeito, era o valor da constante m que nos havíamos proposto de demonstrar.

[Página 212]

Portanto, se trata apenas de fazer ver que esta integral dupla não pode jamais se anular. É bem fácil de se assegurar disto, pois inicialmente os dois termos $\frac{\text{sen}^2 \gamma}{r^3}$ e $\frac{\text{sen}^2 \gamma}{r'^3}$ não são suscetíveis de mudar de sinais qualquer que seja o valor que se dá a γ , já que as duas distâncias r e r' devem sempre ser consideradas como positivas. Além disso, como estas duas distâncias são as distâncias de um mesmo elemento ds' do condutor circular até dois elementos iguais a ds que se encontram ao longo de uma mesma vertical sobre cada uma das porções horizontais do condutor móvel, é evidente que caso se suponha, para fixar as idéias, que r se refira ao elemento ds daquela destas

duas porções que está a uma distância menor do plano do condutor circular, e r' [se refira] ao outro [elemento], teremos sempre $r < r'$ e, conseqüentemente,

$$\left(\frac{\text{sen } ^2\gamma}{r^3} - \frac{\text{sen } ^2\gamma}{r'^3} \right) d\gamma$$

[será] positivo.

Sendo positivos todos os elementos da primeira integral, esta integral considerada de $\gamma = 0$ até $\gamma = 2\pi$ também o será, seu produto por sds terá o mesmo sinal que ds enquanto s for positivo, isto é, desde que o retângulo formado pelo condutor móvel esteja totalmente do mesmo lado do eixo, como o supomos aqui. Quanto ao sinal de ds , ele é determinado pelo sentido da corrente nas duas porções horizontais deste condutor, e como atribuímos sinais diferentes a $\cos \varepsilon$ em cada porção, ds tem, necessariamente, o mesmo sinal tanto em uma [porção] quanto na outra. Assim, todos os elementos nos quais se compõe a segunda integral de $s = s_1$ até $s = s_2$ possuem também o mesmo sinal e, conseqüentemente, esta integral não pode jamais ser nula. Portanto, é necessário, pelo que acabamos de ver, que se tenha $m = 1/2$, [e] que a ação mútua entre dois elementos de correntes elétricas tenha por valor

$$-\frac{2ii' d^2\sqrt{r}}{\sqrt{r} dsds'} dsds' ,$$

[Página 213]

e que o torque devido à ação de um condutor circular sobre um condutor móvel ao redor do eixo do círculo formado pelo primeiro [condutor circular] seja sempre nulo quando o condutor móvel possui suas duas extremidades sobre este eixo ou forme um circuito fechado, o que é, como se sabe, confirmado pela experiência, qualquer que seja a forma do condutor segundo a qual ele é dobrado.

Agora que o valor de m está determinado, pode-se substituir este valor $1/2$ no lugar de m na transformação encontrada (página 35)²¹ e supor novamente p arbitrário. Assim se obterá para a ação mútua entre dois elementos ds e ds' a expressão²²

$$-\frac{2ii' dd' \sqrt{r}}{\sqrt{r}} = \frac{\frac{3}{2}ii' dd'(r^p)}{p-2} - \frac{\left(\frac{1}{2} - p\right) ii' \cos \varepsilon dsds'}{p-2} \frac{1}{r^2} ,$$

e se pode, nesta expressão, dar a p o valor que se desejar. O que fornece um resultado mais cômodo para o cálculo é $p = -1$. Adotando-o, vem que

$$-\frac{2ii' dd' \sqrt{r}}{\sqrt{r}} = \frac{1}{2} ii' r dd' \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{ii' \cos \varepsilon dsds'}{r^2} = \frac{1}{2} ii' dsds' \left(\frac{\cos \varepsilon}{r^2} + r \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dsds'} \right) .$$

Já encontrei de uma outra maneira, página 81,²³ esta expressão da força que dois elementos de fios condutores exercem um sobre o outro. Somente pode-se empregá-la, para simplificar os cálculos, quando os condutores são retilíneos, pois é apenas neste caso que o ângulo ε é constante e conhecido. Mas neste caso, é esta [expressão] que fornece da maneira mais simples os valores das

²¹[N. T.] Página 35 do *Théorie* de 1826, que corresponde aqui à nossa página 197.

²²[N. T.] Por um erro tipográfico no trabalho original, o termo à esquerda da equação está escrito na forma $-\frac{2iidd'\sqrt{r}}{\sqrt{r}}$.

²³[N. T.] Página 81 do *Théorie* de 1826, que corresponde à nossa página 240.

forças e dos torques que resultam da ação mútua entre dois condutores deste tipo. Se empreguei nesta obra outros métodos para calcular estes valores, é porque na época em que a escrevi ainda não conhecia esta transformação da minha fórmula que acabo de explicar.

[Página 214]

15.4 Sobre a situação da reta que designei sob o nome de *diretriz da ação eletrodinâmica a um ponto dado*, quando esta ação é a de um circuito fechado e plano no qual todas as dimensões são muito pequenas

A reta que denominei *diretriz da ação eletrodinâmica a um ponto dado*²⁴ é a que forma com os três eixos os ângulos cujos co-senos são, respectivamente, proporcionais às três grandezas A, B e C cujos valores, encontrados na página 55,²⁵ são

$$A = \lambda \left(\frac{\cos \xi}{r^3} - \frac{3qx}{r^5} \right),$$

$$B = \lambda \left(\frac{\cos \eta}{r^3} - \frac{3qy}{r^5} \right),$$

$$C = \lambda \left(\frac{\cos \zeta}{r^3} - \frac{3qz}{r^5} \right),$$

quando se substitui n pelo número 2 ao qual n é igual. Portanto, caso se considere o pequeno circuito de uma forma qualquer disposto como está na Figura 14,²⁶ quer dizer, após ter disposto a origem A das coordenadas no ponto dado, se escolha como eixo z a perpendicular AZ traçada do ponto A sobre o plano do pequeno circuito, e o plano xz como o plano que passa por esta perpendicular e pelo centro de inércia O da área LMS com a qual se relacionam os valores de x , y e z que entram nos valores de A, B e C, é evidente que se terá $y = 0$, $q = z$, $\xi = \eta = \pi/2$, $\zeta = 0$, e que, conseqüentemente, estes valores se reduzirão a

$$A = -\frac{3\lambda xz}{r^5}, \quad B = 0 \quad \text{e} \quad C = \lambda \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) = \frac{\lambda(x^2 - 2z^2)}{r^5},$$

pois $r^2 = x^2 + z^2$. Sendo B nulo, a diretriz AE está necessariamente no plano xz determinado como acabamos de dizer. A tangente do ângulo EAX que ela forma com o eixo x

[Página 215]

é igual a C/A , ou seja, é igual a $(2z^2 - x^2)/3xz$. E como a [tangente] do ângulo OAX é [igual] a z/x , se encontrará para o valor da tangente de OAE

²⁴[N. T.] Ver a Nota de Rodapé número 68 na nossa página 205.

²⁵[N. T.] Página 55 do trabalho original de Ampère publicado em 1826, que corresponde à nossa página 216.

²⁶[N. T.] Ver as nossas páginas 212 e 333.

raio terrestre OA e a direção AE da agulha imantada é o complemento da inclinação,²⁸ e que o ângulo COA é o complemento da latitude magnética LOA. A equação precedente torna-se então

$$\cot \text{incl.} = \frac{1}{2} \cot \text{lat.} ,$$

ou

$$\tan \text{incl.} = 2 \tan \text{lat.}$$

[Página 216]

15.5 Sobre o valor da força que um condutor angular indefinido exerce sobre o pólo de um pequeno ímã, e sobre [o valor da força] que imprime a este pólo um condutor que possui a forma de um paralelogramo situado no mesmo plano [em que o pólo está localizado]

Quer se considere o pólo B (Figura 34)²⁹ do pequeno ímã AB como a extremidade de um solenóide eletrodinâmico ou como uma molécula magnética, se está de acordo — nas duas maneiras de ver — no que diz respeito à expressão da força exercida sobre este pólo por cada elemento do condutor angular CMZ. Admite-se geralmente que traçando a perpendicular BO = b do ponto B sobre um de seus ramos CμM prolongado em direção a O, e fazendo Oμ = s, BM = a, Bμ = r, o ângulo BμM = θ, o ângulo CMH = BMO = ε, e designando por ρ um coeficiente constante, a força exercida sobre o pólo B pelo elemento ds situado em μ é igual a

$$\frac{\rho \text{sen } \theta \, ds}{r^2} ,$$

que se deve integrar desde s = OM = a cos ε até s = ∞, ou, o que dá no mesmo, desde θ = ε até θ = 0. Mas no triângulo BOμ, cujo lado OB = b = a sen ε, tem-se

$$r = \frac{a \text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \theta} , \quad s = a \text{sen } \varepsilon \cot \theta , \quad ds = -\frac{a \text{sen } \varepsilon \, d\theta}{\text{sen}^2 \theta} \quad \text{e} \quad \frac{ds}{r^2} = -\frac{d\theta}{a \text{sen } \varepsilon} .$$

Assim

$$\frac{\rho \text{sen } \theta \, ds}{r^2} = -\frac{\rho \text{sen } \theta \, d\theta}{a \text{sen } \varepsilon} ,$$

cuja integral é

$$\frac{\rho}{a \text{sen } \varepsilon} (\cos \theta + C) ,$$

²⁸[N. T.] O complemento de um ângulo φ₁ é um ângulo φ₂ tal que φ₁ + φ₂ = π/2.

²⁹[N. T.] Ver a página 265.

do valor da integral definida obtida entre os limites dados, o que não me parece, até o momento, que qualquer matemático tenha considerado ser algo possível [de ser feito].

Como não se pode, na prática, tornar os ramos MC e MZ do condutor angular realmente infinitos, nem afastar os prolongamentos do fio do qual ele é formado e que colocam estes ramos em comunicação com as duas extremidades da pilha, a uma distância suficientemente grande do pequeno ímã AB para que eles³⁰ não tenham absolutamente nenhuma ação [sobre o ímã], deve-se somente, a rigor, considerar o valor que acabamos de obter como uma aproximação. Com o objetivo de ter um valor exato para ser verificado pela experiência, é preciso calcular o valor que exerce sobre o pólo B do pequeno ímã um fio condutor PSRMTSN, cujas porções SP e SN, que se comunicam com as duas extremidades da pilha, estão revestidas de seda e enroladas juntas, como se vê em SL, até perto da pilha, de modo que as ações que elas produzem se destruam mutuamente, e então o restante [do circuito] forma um losango SRMT disposto de maneira que a direção da diagonal SM deste losango passe pelo ponto B. Mas inicialmente, conservando as denominações

[Página 218]

precedentes e fazendo além disso o ângulo BRM = θ_1 , o ângulo BRO' = θ'_1 , a distância BS = a' e a perpendicular BO' = $b' = -a' \sin \varepsilon$, pois o ângulo BSO' = $-\varepsilon$, se verá facilmente que a ação da porção RS do fio condutor sobre o pólo B é igual a

$$-\frac{\rho (\cos \varepsilon - \cos \theta'_1)}{b'}$$

assim como, por causa que $b = a \sin \varepsilon$, se teria encontrado

$$\frac{\rho (\cos \theta_1 - \cos \varepsilon)}{b}$$

para a [ação] que a porção MR exerce sobre o mesmo pólo B, tomando a integral precedente desde $\theta = \varepsilon$ até $\theta = \theta_1$. E em seguida, basta reunir estas duas expressões e dobrar a soma, para ter a ação de todo o contorno do losango MRST, o que fornece

$$2\rho \left(\frac{\cos \theta_1}{b} - \frac{\cos \varepsilon}{b} + \frac{\cos \theta'_1}{b'} - \frac{\cos \varepsilon}{b'} \right).$$

Este valor pode ser colocado de uma outra forma que se obtém relacionando a posição dos quatro ângulos do losango com dois eixos BX e BY traçados pelo ponto B paralelamente a estes lados e que os encontra nos pontos D, E, F e G. Se fizermos BD = BF = g e BE = BG = h , teremos

$$b = BO = g \sin 2\varepsilon, \quad b' = BO' = h \sin 2\varepsilon,$$

$$\cos \theta_1 = \frac{OR}{BR} = \frac{h + g \cos 2\varepsilon}{\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}},$$

$$\cos \theta'_1 = \frac{O'R}{BR} = \frac{g + h \cos 2\varepsilon}{\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}}.$$

³⁰[N. T.] Na pág. 383 das Notas do *Théorie* publicado em 1827, nossa página 349, Ampère utiliza a palavra “elas” em vez de “eles.”

Com auxílio destas expressões se encontra, para a [expressão] da força exercida sobre o pólo B, [o seguinte valor]³¹

$$2\rho \left(\frac{h + g \cos 2\varepsilon}{g \operatorname{sen} 2\varepsilon \sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}} + \frac{g + h \cos 2\varepsilon}{h \operatorname{sen} 2\varepsilon \sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}} - \frac{\cos \varepsilon}{g \operatorname{sen} 2\varepsilon} - \frac{\cos \varepsilon}{h \operatorname{sen} 2\varepsilon} \right) = \rho \left(\frac{2\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}}{gh \operatorname{sen} 2\varepsilon} - \frac{1}{g \operatorname{sen} \varepsilon} - \frac{1}{h \operatorname{sen} \varepsilon} \right),$$

[Página 219]

reduzindo os dois primeiros termos ao mesmo denominador, e substituindo nos dois últimos [termos] $\operatorname{sen} 2\varepsilon$ por seu valor $2 \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon$.

Tracemos agora do ponto D as perpendiculares DI e DK sobre as retas BM e BR. A primeira será evidentemente igual a $g \operatorname{sen} \varepsilon$, e a segunda se obterá prestando atenção que, multiplicando-a por $BR = \sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}$, se tem um produto igual ao dobro da superfície do triângulo BDR, ou seja, [igual] a $gh \operatorname{sen} 2\varepsilon$, de modo que denominando por $p_{1,1}$ e $p_{1,2}$ a estas perpendiculares, vem que

$$\frac{1}{p_{1,1}} = \frac{1}{g \operatorname{sen} \varepsilon} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p_{1,2}} = \frac{\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}}{gh \operatorname{sen} 2\varepsilon}.$$

Traçando do ponto E as duas perpendiculares EU e EV sobre as retas BT e BS, e representando-as por $p_{2,1}$ e $p_{2,2}$, a primeira será igual a DK por causa da igualdade dos triângulos BDR e BET, e a segunda terá por valor $h \operatorname{sen} \varepsilon$, de modo que a expressão da força exercida pelo contorno do losango MRST sobre o pólo B poderá ser escrita assim:

$$\rho \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right).$$

Sob esta forma ela se aplica não somente a um losango no qual uma diagonal está direcionada para passar pelo ponto B, mas [também] a um paralelogramo qualquer NRST (Figura 44) cujo perímetro é percorrido por uma corrente elétrica que age sobre o pólo de um ímã situado no plano deste paralelogramo. Resulta,³² com efeito, do que foi dito na página 57,³³ que ao calcular as grandezas designadas por A, B, C e $D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, em relação a um circuito voltaico fechado e plano, tal como aquele que forma o perímetro do paralelogramo NRST, e [em relação] a um ponto B situado no mesmo plano, tem-se

$$A = 0, \quad B = 0 \quad \text{e} \quad C = D = \iint \frac{d^2\lambda}{r^3},$$

[Página 220]

³¹[N. T.] No lado direito desta igualdade faltou multiplicar na edição impressa em 1826 toda expressão por ρ .

³²[N. T.] O que vai deste parágrafo até a nossa pág. 340 nesta Nota 5 publicada em 1826, está diferente do trecho que vai da nossa pág. 351 até a pág. 353 referente à Nota 4 publicada em 1827.

³³[N. T.] Página 57 do trabalho original de Ampère impresso em 1826, que correspondem à nossa página 218.

$$\rho \int \int \frac{d^2\lambda}{r^3},$$

sendo ρ um coeficiente constante.

Para encontrar o valor de $\int \int \frac{d^2\lambda}{r^3}$, em relação ao circuito voltaico representado pelo perímetro do paralelogramo NRST,

[Página 221]

relacionam-se todos os pontos, tais como M, de sua área a dois eixos BX e BY traçados pelo ponto B paralelamente a estes lados, e ao denominar por x e y às coordenadas BP e PM, se terá

$$d^2\lambda = dx dy \sin 2\varepsilon \quad \text{e} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\varepsilon}.$$

A força total, impressa no pólo B do pequeno ímã AB, será então

$$\rho \sin 2\varepsilon \int \int \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mas vimos, na página 94,³⁶ que a integral indefinida de

$$\frac{ds ds'}{(a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon)^{\frac{3}{2}}},$$

é

$$\frac{1}{a \sin \varepsilon} \arctan \frac{ss' \sin^2 \varepsilon + a^2 \cos \varepsilon}{a \sin \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}},$$

ou

$$-\frac{1}{a \sin \varepsilon} \arctan \frac{a \sin \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}}{ss' \sin^2 \varepsilon + a^2 \cos \varepsilon},$$

suprimindo a constante $\pi/2$. Quando $a = 0$, esta grandeza se apresenta na forma $0/0$. Mas como o arco deve ser então substituído pela sua tangente, o fator nulo $a \sin \varepsilon$ desaparece, e tem-se

$$\int \int \frac{ds ds'}{(s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}}{ss' \sin^2 \varepsilon},$$

como é fácil de verificar pela diferenciação. Se conclui imediatamente que a expressão da força que calculamos, considerada como uma integral indefinida, é

$$-\frac{\rho \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\varepsilon}}{xy \sin 2\varepsilon} = -\frac{\rho}{p},$$

[Página 222]

³⁶[N. T.] Página 94 do trabalho original de Ampère publicado em 1826, que corresponde à nossa página 250.

denominando por p à perpendicular PQ traçada do ponto P sobre BM, pois o dobro da área do triângulo BPM é por sua vez igual a $p\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\varepsilon}$ e a $xy \sin 2\varepsilon$, o que fornece

$$\frac{1}{p} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\varepsilon}}{xy \sin 2\varepsilon}.$$

Agora resta somente calcular os valores desta integral indefinida nos quatro vértices N, R, T e S do paralelogramo, e somá-los com os sinais convenientes. Continuando a designar respectivamente por $p_{1,1}$, $p_{1,2}$, $p_{2,1}$ e $p_{2,2}$ às perpendiculares DI, DK, EU e EV, é evidente que se obtém assim para o valor da força procurada

$$\rho \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right).$$

Caso se substitua, nesta expressão, a constante ρ por $\frac{1}{2}ii'ds' \cos \omega$, se obterá o valor da força que resulta da ação que a corrente elétrica NRST exerce sobre o elemento ds' , e cuja direção compreendida no plano BRST é perpendicular à [direção] do elemento. Este valor é

$$\frac{1}{2}ii'ds' \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right) \cos \omega.$$

Quando o elemento situado em B está no plano do paralelogramo, tem-se $\omega = 0$ e $\cos \omega = 1$, e o valor da força que acabamos de calcular reduz-se a

$$\frac{1}{2}ii'ds' \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right).$$

[Fim da obra

Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência]

Capítulo 16

Notas [do *Théorie* Publicado em 1827] Contendo Alguns Novos Desenvolvimentos sobre os Assuntos Tratados na Memória Precedente

[Página 374]

16.1 Sobre a maneira de demonstrar pelos quatro casos de equilíbrio expostos no começo desta Memória, que o valor da ação mútua entre dois elementos de fios condutores é $-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'} dsds'$

Seguindo¹ a ordem das transformações que fiz passar sucessivamente a este valor [da ação mútua entre dois elementos de corrente], encontra-se de início, em virtude dos dois primeiros casos de equilíbrio, que ela é

$$\frac{ii' (\sin \theta \sin \theta' \cos \omega + k \cos \theta \cos \theta') dsds'}{r^n}.$$

Deduz-se do terceiro [caso de equilíbrio] a relação $n + 2k = 1$ entre n e k , e do quarto [caso de equilíbrio deduz-se que] $n = 2$, de onde $k = -1/2$. Portanto, este quarto caso de equilíbrio é o que se emprega em último lugar para a determinação do valor da força que ocorre entre dois elementos de fios condutores. Mas pode-se seguir um outro caminho partindo de uma consideração com a qual o Sr. de Laplace se serviu, quando concluiu a partir das primeiras experiências do Sr. Biot sobre a ação mútua entre um ímã e um fio condutor retilíneo indefinido, que a [força] que um elemento deste fio exerce sobre um dos pólos do ímã é em razão inversa do quadrado da distância entre eles, quando somente esta distância muda de valor e quando o ângulo compreendido entre a reta que mede [a distância] e a direção do elemento permanece o mesmo.

¹[N. T.] Por um erro tipográfico vem que a fórmula no título desta Seção aparece como $-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \frac{dsds'}{d^2r} dsds'$. O correto é o que colocamos, a saber, $-\frac{2ii'}{\sqrt{r}} \frac{d^2\sqrt{r}}{dsds'} dsds'$.

Ao aplicar esta consideração na ação mútua entre dois elementos de fios condutores, é fácil de ver, independentemente de toda pesquisa preliminar sobre o valor da força que resulta disto, que esta força também é inversamente proporcional ao quadrado da distância quando somente ela varia e quando os ângulos que determinam a posição respectiva dos dois elementos não sofrem qualquer mudança. Com efeito, de acordo com as considerações desenvolvidas no começo desta Memória, a força que está sendo discutida aqui é necessariamente dirigida ao longo da reta r , e vale

$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega) ds ds' .$$

De onde segue que denominando por α , β e γ aos ângulos que esta reta forma com os três eixos, suas três componentes serão expressas por

$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \alpha ds ds' ,$$

$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \beta ds ds' ,$$

$$ii' f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \gamma ds ds' ,$$

e as três forças paralelas aos três eixos que resultam [destas componentes] entre dois circuitos [serão obtidas] pelas integrais duplas destas expressões, sendo i e i' constantes.

Ora, segue do quarto caso de equilíbrio — substituindo os três círculos por curvas semelhantes quaisquer cujas dimensões homólogas estejam em progressão geométrica contínua — que estas três forças possuem valores iguais em dois sistemas semelhantes. Portanto, é necessário que as integrais que as exprimam sejam de dimensão nula com relação a todos os comprimentos que ali entram, de acordo com a observação do Sr. de Laplace que acabo de lembrar e que, conseqüentemente, ocorra o mesmo para as diferenciais nas quais elas se compõem, compreendendo ds e ds' entre os comprimentos que entram [nestas expressões], já que o número destas diferenciais, mesmo que [seja um número]

infinito de segunda ordem,² deve ser considerado como o mesmo nos dois sistemas.

Ora, o produto $ds ds'$ é de duas dimensões [espaciais]. Portanto, é necessário que³ [a expressão] $f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \alpha$, $f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \beta$ e $f(r, \theta, \theta', \omega) \cos \gamma$,⁴ sejam de dimensão -2 . E como os ângulos θ , θ' , ω , α , β e γ são expressos por números que não contribuem em nada nas dimensões dos valores das diferenciais, e como $f(r, \theta, \theta', \omega)$ contém apenas o comprimento isolado r ,

²[N. T.] A integral ao longo do circuito fechado s é como se fosse uma somatória de infinitos termos proporcionais aos comprimentos infinitesimais ds . O mesmo vale para a integral ao longo do circuito s' em relação aos elementos ds' . Ao calcular a força de um circuito fechado sobre outro circuito fechado teremos então um número infinito de termos infinitesimais multiplicado por um outro número infinito de termos também infinitesimais. É a isto que Ampère se refere como sendo um número “infinito de segunda ordem.”

³[N. T.] No trabalho original, por um erro tipográfico, o último co-seno vem escrito como $\cos \alpha$. Este erro aparece em todas as edições do *Théorie*.

⁴[N. T.] No trabalho original, por um erro tipográfico, o último co-seno vem escrito como $\cos \alpha$. Este erro aparece em todas as edições do *Théorie*.

necessariamente é preciso que esta função seja proporcional a $1/r^2$, de modo que a força exercida entre dois elementos de fios condutores é expressa por

$$\frac{ii'\varphi(\theta, \theta', \omega)}{r^2} ds ds' .$$

Os dois primeiros casos de equilíbrio determinam em seguida a função φ , onde somente k permanece desconhecida, e tem-se para o valor da força procurada

$$\frac{ii'(\sin\theta \sin\theta' \cos\omega + k \cos\theta \cos\theta')}{r^2} ds ds' .$$

Como se sabe, foi com esta forma que a forneci na Memória que li na Academia em 4 de dezembro de 1820.⁵ Substituindo então $\sin\theta \sin\theta' \cos\omega$ e $\cos\theta \cos\theta'$ por seus valores

$$-\frac{rd^2r}{ds ds'} ds ds' \quad \text{e} \quad -\frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ,$$

vem que

$$\begin{aligned} -\frac{ii'}{r^2} \left(\frac{d^2r}{ds ds'} + k \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) ds ds' &= \\ -\frac{ii'(r dd'r + k dr d'r)}{r^2} &= -\frac{ii'r^k dd'r + kr^{k-1} dr d'r}{r^{k+1}} = \\ -\frac{ii'd(r^k d'r)}{r^{k+1}} &= -\frac{ii'dd'(r^{k+1})}{(k+1)r^{k+1}} . \end{aligned}$$

[Página 377]

E fazendo, para abreviar, $k+1 = m$, tem-se para o valor da força procurada esta expressão muito simples:

$$-\frac{ii'dd'(r^m)}{mr^m} .$$

Portanto,⁶ só falta determinar m de acordo com o caso de equilíbrio que demonstra que a soma das componentes das forças que exerce um fio condutor sobre um elemento, consideradas na direção deste elemento, é sempre nula quando o fio condutor forma um circuito fechado. Este caso de equilíbrio, que considerei nesta Memória como sendo o terceiro, deve ser então [considerado] como o quarto, já que é o último que se emprega na determinação completa da força procurada. Substituindo $d'r$ por $-\cos\theta' ds'$ no valor

$$-\frac{ii'd(r^{m-1} d'r)}{r^m}$$

da força que os dois elementos exercem um sobre o outro, tem-se, para sua componente na direção do elemento ds' ,

⁵[N. T.] Esta Memória, lida em 4 de dezembro de 1820, foi publicada em [Amp20e]. O manuscrito contendo o que Ampère apresentou nesta data foi publicado por Joubert, [Amp85f]. Ampère apresentou outra versão deste trabalho em [Amp20d].

⁶[N. T.] Este final da Nota 1 publicada em 1827 é diferente do parágrafo final da Nota 1 publicada em 1826, ver as nossas págs. 324 até 325.

$$\frac{ii' ds' \cos \theta' d(r^{m-1} \cos \theta')}{r^m} = \frac{1}{2} \frac{ii' ds' d(r^{2m-2} \cos^2 \theta')}{r^{2m-1}},$$

da qual é preciso que a integral relativa às diferenciais que dependem de ds sejam nulas todas as vezes que a curva s é fechada. Mas é fácil de ver, integrando por partes, que ela é igual a

$$\frac{1}{2} ii' ds' \left[\frac{\cos^2 \theta'_2}{r_2} - \frac{\cos^2 \theta'_1}{r_1} + (2m-1) \int \frac{\cos^2 \theta' dr}{r^2} \right].$$

A primeira parte deste valor vai a zero quando a curva s é fechada, pois neste caso $r_2 = r_1$ e $\cos \theta'_2 = \cos \theta'_1$. Com respeito à segunda parte, se demonstra facilmente, como fizemos na página 209,⁷ que $\int \frac{\cos^2 \theta' dr}{r^2}$ não se anula qualquer que seja a forma da

[Página 378]

curva fechada s . Portanto, é necessário que se tenha $2m-1=0$, [isto é,] $m=1/2$, e que o valor da força devido à ação mútua entre os dois elementos ds e ds' seja dada por⁸

$$-\frac{ii' dd'(r^m)}{mr^m} = -\frac{2ii' dd' \sqrt{r}}{\sqrt{r}}.$$

16.2 Sobre uma transformação apropriada para simplificar o cálculo da ação mútua entre dois condutores retilíneos

Quando os dois condutores são retilíneos, o ângulo formado pelas direções dos dois elementos é constante e igual ao ângulo das próprias direções dos dois condutores. Portanto, este ângulo é considerado como conhecido. Designando-o por ε , tem-se, página 207,⁹

$$r \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} = -\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} = -\cos \varepsilon.$$

De onde segue que¹⁰

$$\frac{dd'(r^m)}{mr^m} = \frac{(m-1)drd'r + rdd'r}{r^2} = \frac{(m-2)drd'r - \cos \varepsilon ds ds'}{r^2}.$$

Designando por p um outro expoente qualquer, tem-se igualmente

$$\frac{dd'(r^p)}{p r^p} = \frac{(p-2)drd'r - \cos \varepsilon ds ds'}{r^2},$$

e, eliminando¹¹ $\frac{drd'r}{r^2}$ entre estas duas equações, se obtém

⁷[N. T.] Página 209 do trabalho original de Ampère, que corresponde à nossa página 198.

⁸[N. T.] Por um erro tipográfico no trabalho original está escrito no lado esquerdo da equação $-\frac{ii' dd'(r^m)}{m\varepsilon^m}$.

⁹[N. T.] Página 207 do *Théorie* de 1827, que corresponde à nossa página 197.

¹⁰[N. T.] Por um erro tipográfico no trabalho original o segundo e terceiro termos desta equação vêm escritos na forma $\frac{(m-1)drd'r + rdd'r}{r^2} = \frac{(m-2)drd'r - \cos \varepsilon ds ds'}{r^2}$.

¹¹[N. T.] Por um erro tipográfico este termo aparece no original como $\frac{drd'r}{r^2}$.

$$\frac{(p-2)dd'(r^m)}{mr^m} - \frac{(m-2)dd'(r^p)}{p r^p} = \frac{(m-p) \cos \varepsilon ds ds'}{r^2},$$

de onde

$$\frac{dd'(r^m)}{mr^m} = \frac{m-2}{p-2} \frac{dd'(r^p)}{p r^p} + \frac{m-p}{p-2} \frac{\cos \varepsilon ds ds'}{r^2}.$$

[Página 379]

Substituindo¹² m por $1/2$ nesta equação, e multiplicando os dois membros do que resulta desta substituição por $-ii'$, tem-se o valor da ação entre dois elementos de fios condutores transformada da seguinte maneira¹³

$$-\frac{2ii' dd' \sqrt{r}}{\sqrt{r}} = \frac{\frac{3}{2}ii'}{p-2} \frac{dd'(r^p)}{p r^p} - \frac{(\frac{1}{2}-p) ii' \cos \varepsilon ds ds'}{p-2} \frac{1}{r^2},$$

e se pode, nesta expressão, dar a p o valor que se desejar. O que fornece um resultado mais cômodo para o cálculo é $p = -1$. Adotando-o, vem que

$$-\frac{2ii' dd' \sqrt{r}}{\sqrt{r}} = \frac{1}{2}ii' r dd' \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{ii' \cos \varepsilon ds ds'}{r^2} = \frac{1}{2}ii' ds ds' \left(\frac{\cos \varepsilon}{r^2} + r \frac{d^2 \frac{1}{r}}{ds ds'} \right).$$

Já encontrei de uma outra maneira, página 253,¹⁴ esta expressão da força que dois elementos de fios condutores exercem um sobre o outro. Somente pode-se empregá-la, para simplificar os cálculos, quando os condutores são retilíneos, pois é apenas neste caso que o ângulo ε é constante e conhecido. Mas neste caso, é esta [expressão] que fornece da maneira mais simples os valores das forças e dos torques que resultam da ação mútua entre dois condutores deste tipo. Se empreguei nesta Memória outros métodos para calcular estes valores, é porque na época em que a escrevi ainda não conhecia esta transformação da minha fórmula.

16.3 Sobre a direção da reta designada nesta Memória sob o nome de *diretriz da ação eletrodinâmica a um ponto dado*, quando esta ação é a de um circuito fechado e plano no qual todas as dimensões são muito pequenas

A reta que denominei *diretriz da ação eletrodinâmica a um ponto dado*¹⁵

¹²[N. T.] A parte final desta segunda Nota publicada em 1827 é diferente da parte final da segunda Nota publicada em 1826, ver nossa pág. 326.

¹³[N. T.] Por um erro tipográfico no trabalho original, o termo à esquerda da equação está escrito na forma $-\frac{2iidd' \sqrt{r}}{\sqrt{r}}$.

¹⁴[N. T.] Página 253 do *Théorie* de 1827, que corresponde à nossa página 240.

¹⁵[N. T.] Ver a Nota de Rodapé número 68 na nossa página 205.

[Página 380]

é a que forma com os três eixos os ângulos cujos co-senos são, respectivamente, proporcionais às três grandezas A, B e C cujos valores, encontrados na página 227,¹⁶ são

$$\begin{aligned} A &= \lambda \left(\frac{\cos \xi}{r^3} - \frac{3qx}{r^5} \right) , \\ B &= \lambda \left(\frac{\cos \eta}{r^3} - \frac{3qy}{r^5} \right) , \\ C &= \lambda \left(\frac{\cos \zeta}{r^3} - \frac{3qz}{r^5} \right) , \end{aligned}$$

quando se substitui n pelo número 2 ao qual n é igual. Portanto, caso se considere o pequeno circuito de uma forma qualquer disposto como está na Figura 14,¹⁷ quer dizer, após ter disposto a origem A das coordenadas no ponto dado, se escolha como eixo z a perpendicular AZ traçada do ponto A sobre o plano do pequeno circuito, e o plano xz como o plano que passa por esta perpendicular e pelo centro de inércia O da área LMS com a qual se relacionam os valores de x , y e z que entram nos valores de A, B e C, é evidente que se terá $y = 0$, $q = z$, $\xi = \eta = \pi/2$, $\zeta = 0$, e que, conseqüentemente, estes valores se reduzirão a

$$A = -\frac{3\lambda xz}{r^5} , B = 0 \text{ e } C = \lambda \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) = \frac{\lambda(x^2 - 2z^2)}{r^5} ,$$

pois $r^2 = x^2 + z^2$. Sendo B nulo, a diretriz AE está necessariamente no plano xz determinado como acabamos de dizer. A tangente do ângulo EAX que ela forma com o eixo x é evidentemente igual a C/A , ou seja, é igual a $(2z^2 - x^2)/3xz$. E como a [tangente] do ângulo OAX é [igual] a z/x , se encontrará para o valor da tangente de OAE

$$\tan \text{OAE} = \frac{\frac{z}{x} - \frac{2z^2 - x^2}{3xz}}{1 + \frac{2z^2 - x^2}{3x^2}} = \frac{(z^2 + x^2)x}{(2x^2 + 2z^2)z} = \frac{1}{2} \frac{x}{z} = \frac{1}{2} \tan \text{COA} .$$

[Página 381]

De onde segue que, ao tomarmos $OB = OA/3$, e traçarmos sobre OA no ponto B um plano perpendicular a AO que encontra em D a normal OC ao plano do pequeno circuito, a reta ADE traçada pelos pontos A e D, será a diretriz da ação exercida no ponto A pela corrente elétrica que o percorre, [isto é, que percorre o circuito,] posto que se terá

$$AB = 2OB \text{ e } \tan \text{BDA} = 2 \tan \text{BDO} ,$$

e

$$\tan \text{OAE} = \cot \text{BDA} = \frac{1}{2} \cot \text{BDO} = \frac{1}{2} \tan \text{COA} .$$

Esta construção fornece da maneira mais simples a direção da reta AE ao longo da qual vimos¹⁸ que o pólo de um ímã colocado em A seria levado pela ação desta corrente. Deve-se destacar que

¹⁶[N. T.] Página 227 do trabalho original de Ampère publicado em 1827, que corresponde à nossa página 216.

¹⁷[N. T.] Ver as nossas páginas 212 e 347.

¹⁸[N. T.] Ver nossa página 258.

igual a

$$\frac{\rho \operatorname{sen} \theta \, ds}{r^2},$$

que se deve integrar desde $s = OM = a \cos \varepsilon$ até $s = \infty$, ou, o que dá no mesmo, desde $\theta = \varepsilon$ até $\theta = 0$. Mas no triângulo $BO\mu$, cujo lado $OB = b = a \operatorname{sen} \varepsilon$, tem-se

$$r = \frac{a \operatorname{sen} \varepsilon}{\operatorname{sen} \theta}, \quad s = a \operatorname{sen} \varepsilon \cot \theta, \quad ds = -\frac{a \operatorname{sen} \varepsilon \, d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \quad \text{e} \quad \frac{ds}{r^2} = -\frac{d\theta}{a \operatorname{sen} \varepsilon}.$$

Assim

$$\frac{\rho \operatorname{sen} \theta \, ds}{r^2} = -\frac{\rho \operatorname{sen} \theta \, d\theta}{a \operatorname{sen} \varepsilon},$$

cujas integral é

$$\frac{\rho}{a \operatorname{sen} \varepsilon} (\cos \theta + C),$$

ou, tomando-a entre os limites determinados acima,

$$\frac{\rho (1 - \cos \varepsilon)}{a \operatorname{sen} \varepsilon} = \frac{\rho}{a} \tan \frac{1}{2} \varepsilon,$$

valor que basta dobrar para ter a força exercida sobre o pólo B pelo condutor angular indefinido CMZ. Esta força, em razão inversa de $BM = a$, é então, para um mesmo valor de a , proporcional à tangente da metade do ângulo CMH, e não a este próprio ângulo, ainda que se pretenda que o valor

$$\frac{\rho \operatorname{sen} \theta \, ds}{r^2},$$

da força exercida pelo elemento ds sobre o pólo B, tenha sido encontrado *analisando pelo cálculo* a suposição de que a força produzida

[Página 383]

pelo fio condutor CMZ era proporcional ao ângulo CMH. Não se pode duvidar que não tenha havido algum erro neste cálculo. Mas seria igualmente curioso conhecê-lo, [este cálculo] teria por objetivo determinar o valor de uma diferencial a partir do valor da integral definida obtida entre os limites dados, o que não me parece, até o momento, que qualquer matemático tenha considerado ser algo possível [de ser feito].

Como não se pode, na prática, tornar os ramos MC e MZ do condutor angular realmente infinitos, nem afastar as porções do fio do qual ele é formado e que colocam estes ramos em comunicação com as duas extremidades da pilha, a uma distância suficientemente grande do pequeno ímã AB para que elas²¹ não tenham absolutamente nenhuma ação [sobre o ímã], deve-se somente, a rigor, considerar o valor que acabamos de obter como uma aproximação. Com o objetivo de ter um valor exato para ser verificado pela experiência, é preciso calcular o valor que exerce sobre o pólo B do pequeno ímã um fio condutor PSRMTSN, cujas porções SP e SN, que se comunicam com as duas extremidades da pilha, estão revestidas de seda e enroladas juntas,

²¹[N. T.] Na pág. 217 das Notas do *Théorie* publicado em 1826, nossa página 336, Ampère utiliza a palavra “eles” em vez de “elas.”

como se vê em SL, até perto da pilha, de modo que as ações que elas produzem se destruam mutuamente, e então o restante [do circuito] forma um losango SRMT disposto de maneira que a direção da diagonal SM deste losango passe pelo ponto B. Para isso, conservando as denominações precedentes e fazendo além disso o ângulo BRM = θ_1 , o ângulo BRO' = θ'_1 , a distância BS = a' e a perpendicular BO' = $b' = -a' \operatorname{sen} \varepsilon$ pois o ângulo BSO' = $-\varepsilon$, se verá facilmente que a ação da porção RS do fio condutor sobre o pólo B é igual a

$$-\frac{\rho (\cos \varepsilon - \cos \theta'_1)}{b'}$$

assim como, por causa que $b = a \operatorname{sen} \varepsilon$, se teria encontrado

$$\frac{\rho (\cos \theta_1 - \cos \varepsilon)}{b}$$

[Página 384]

para a [ação] que a porção MR exerce sobre o mesmo pólo B, tomando a integral precedente desde $\theta = \varepsilon$ até $\theta = \theta_1$.

Reunindo estas duas expressões e dobrando a soma, se tem, para a ação de todo o contorno do losango MRST,

$$2\rho \left(\frac{\cos \theta_1}{b} - \frac{\cos \varepsilon}{b} + \frac{\cos \theta'_1}{b'} - \frac{\cos \varepsilon}{b'} \right).$$

Esta expressão pode ser colocada de uma outra forma que se obtém relacionando a posição dos quatro ângulos do losango com dois eixos BX e BY traçados pelo ponto B paralelamente a estes lados e que os encontra nos pontos D, E, F e G. Se fizermos BD = BF = g e BE = BG = h , teremos

$$\begin{aligned} b &= BO = g \operatorname{sen} 2\varepsilon, & b' &= BO' = h \operatorname{sen} 2\varepsilon, \\ \cos \theta_1 &= \frac{OR}{BR} = \frac{h + g \cos 2\varepsilon}{\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}}, \\ \cos \theta'_1 &= \frac{O'R}{BR} = \frac{g + h \cos 2\varepsilon}{\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}}. \end{aligned}$$

E por meio destes valores, a ação da força exercida sobre o pólo B ficará na forma

$$\begin{aligned} &2\rho \left(\frac{h + g \cos 2\varepsilon}{g \operatorname{sen} 2\varepsilon \sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}} + \frac{g + h \cos 2\varepsilon}{h \operatorname{sen} 2\varepsilon \sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos \varepsilon}{g \operatorname{sen} 2\varepsilon} - \frac{\cos \varepsilon}{h \operatorname{sen} 2\varepsilon} \right) \\ &= \rho \left(\frac{2\sqrt{g^2 + h^2 + 2gh \cos 2\varepsilon}}{gh \operatorname{sen} 2\varepsilon} - \frac{1}{g \operatorname{sen} \varepsilon} - \frac{1}{h \operatorname{sen} \varepsilon} \right), \end{aligned}$$

substituindo nos dois últimos termos $\operatorname{sen} 2\varepsilon$ por seu valor $2 \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon$.

Tracemos agora do ponto D as perpendiculares DI e DK sobre as retas BM e BR. A primeira será evidentemente igual a $g \operatorname{sen} \varepsilon$, e a segunda se obterá prestando atenção que a multiplicando

e y às coordenadas relacionadas aos eixos BX e BY, e à origem B de um ponto qualquer M da área do paralelogramo o que fornece

$$d^2\lambda = dxdy \operatorname{sen} 2\varepsilon \quad \text{e} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\varepsilon},$$

se terá, para a força total impressa no pólo B,

$$\rho \operatorname{sen} 2\varepsilon \int \int \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mas vimos, na página 266,²⁴ que a integral indefinida de

[Página 386]

$$\frac{dsds'}{(a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon)^{\frac{3}{2}}},$$

é

$$\frac{1}{a \operatorname{sen} \varepsilon} \arctan \frac{ss' \operatorname{sen}^2 \varepsilon + a^2 \cos \varepsilon}{a \operatorname{sen} \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}},$$

ou²⁵

$$-\frac{1}{a \operatorname{sen} \varepsilon} \arctan \frac{a \operatorname{sen} \varepsilon \sqrt{a^2 + s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}}{ss' \operatorname{sen}^2 \varepsilon + a^2 \cos \varepsilon},$$

suprimindo a constante $\pi/2$. Quando a é nulo, esta grandeza se apresenta na forma $0/0$. Mas como o arco deve ser então substituído pela sua tangente, o fator nulo $a \operatorname{sen} \varepsilon$ desaparece, e tem-se²⁶

$$\int \int \frac{dsds'}{(s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{s^2 + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon}}{ss' \operatorname{sen}^2 \varepsilon},$$

como é fácil de verificar pela diferenciação. Se conclui imediatamente que a expressão da força que calculamos considerada como uma integral indefinida, é

$$-\frac{\rho \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\varepsilon}}{xy \operatorname{sen} 2\varepsilon} = -\frac{\rho}{p},$$

denominando por p à perpendicular PQ traçada do ponto P sobre BM, pois o dobro da área do triângulo BPM é por sua vez igual a $p\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\varepsilon}$ e a $xy \operatorname{sen} 2\varepsilon$, o que fornece

$$\frac{1}{p} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\varepsilon}}{xy \operatorname{sen} 2\varepsilon}.$$

²⁴[N. T.] Página 266 do trabalho original de Ampère publicado em 1827, que corresponde à nossa página 250.

²⁵[N. T.] No trabalho original vem escrito $2ss \cos \varepsilon$ dentro da raiz quadrada, o que é um erro tipográfico.

²⁶[N. T.] No trabalho original, no denominador da integral, vem escrito $(s + s'^2 - 2ss' \cos \varepsilon)^{\frac{3}{2}}$. Isto é um erro tipográfico.

Agora resta somente calcular os valores desta integral indefinida nos quatros vértices N, R, T e S do paralelogramo, e somá-los com os sinais convenientes. Continuando a designar respectivamente por $p_{1,1}$, $p_{1,2}$, $p_{2,1}$ e $p_{2,2}$ às

[Página 387]

perpendiculares DI, DK, EU e EV, é evidente que se obtém assim para o valor da força procurada

$$\rho \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right) .$$

A direção perpendicular ao plano do paralelogramo NRST ao longo da qual o pólo de um ímã disposto em B é levado pela ação da corrente elétrica que percorre o contorno deste paralelogramo, é a diretriz da ação eletrodinâmica que ele exerce sobre o ponto B. De onde segue que se houvesse neste ponto um elemento de corrente elétrica disposto no plano do paralelogramo, ele formaria um ângulo reto com a diretriz, e que assim a força desta corrente sobre o elemento seria uma força situada neste plano, perpendicular à direção deste elemento, e igual à ação que a mesma corrente exerceria sobre o pólo de um ímã disposto no ponto B multiplicada por uma razão constante, que aqui é a de ρ para $ii'ds/2$, denominando este elemento [por] ds . De modo que a força assim dirigida que agiria sobre o elemento teria por valor²⁷

$$\frac{1}{2}ii'ds \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right) .$$

Quando o elemento situado em B não está no plano do paralelogramo, mas forma com este plano um ângulo igual a ω , pode-se substituí-lo por dois elementos de mesma intensidade, um neste plano e outro que lhe é perpendicular. Sendo nula a ação da corrente do paralelogramo sobre este último elemento, somente se deve levar em consideração a ação que ela exerce sobre o primeiro elemento. Ela está evidentemente no plano do paralelogramo, perpendicular ao elemento e é igual a

$$\frac{1}{2}ii'ds \cos \omega \left(\frac{1}{p_{1,2}} + \frac{1}{p_{2,1}} - \frac{1}{p_{1,1}} - \frac{1}{p_{2,2}} \right) .$$

[Fim da obra

Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência]

²⁷[N. T.] Por um erro tipográfico no trabalho original está escrito na primeira parte da equação $\frac{1}{2}iids$.

Apêndice A

Figuras do *Théorie* Refeitas e Vetorizadas com um Software Gráfico

São apresentadas neste Apêndice todas as Figuras do *Théorie* refeitas e vetorizadas com um software gráfico. O objetivo foi o de ter imagens com linhas mais bem definidas e com letras mais legíveis. Espera-se com isto auxiliar na compreensão do trabalho de Ampère.

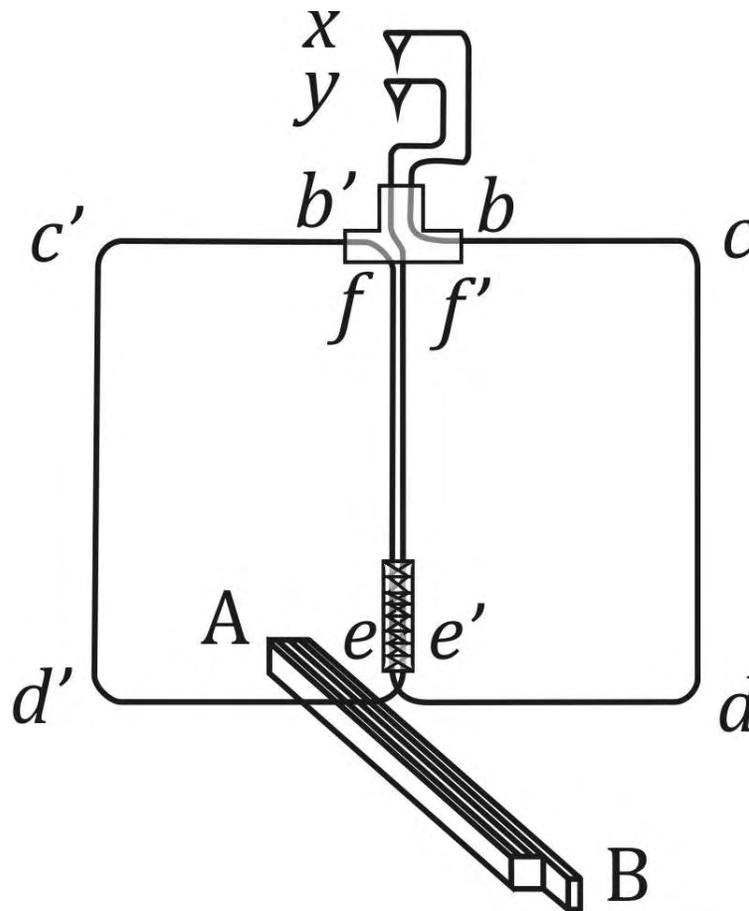


Figura A.1: Figura 1.

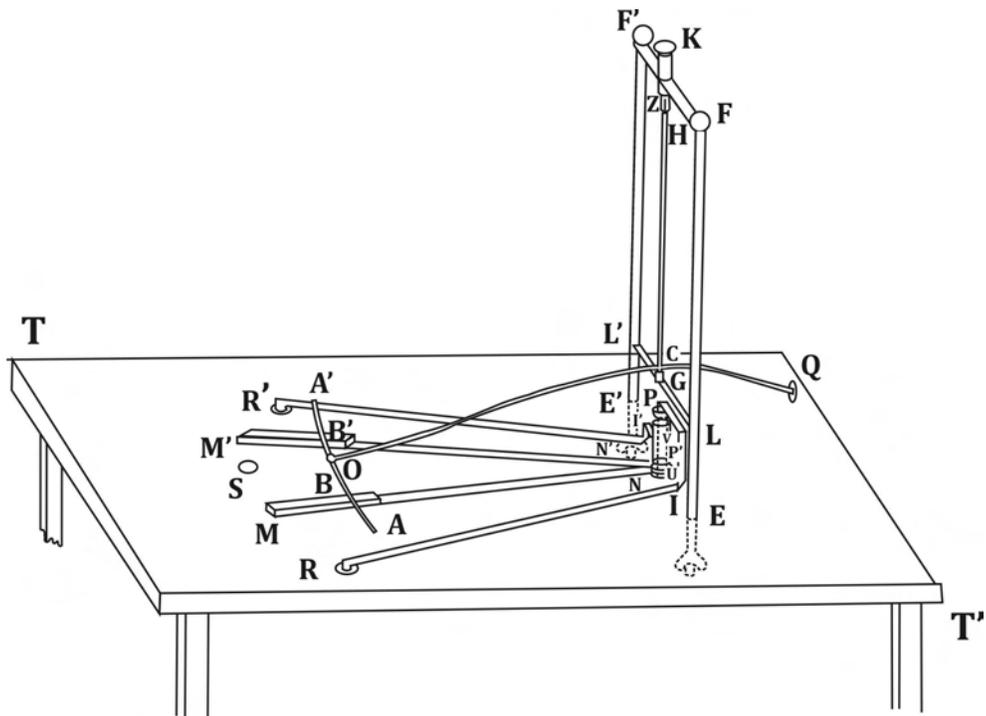


Figura A.3: Figura 3. A letra E' na parte debaixo da coluna da esquerda aparece como E na Fig. 3 do *Théorie* publicado em 1826 e em 1827.

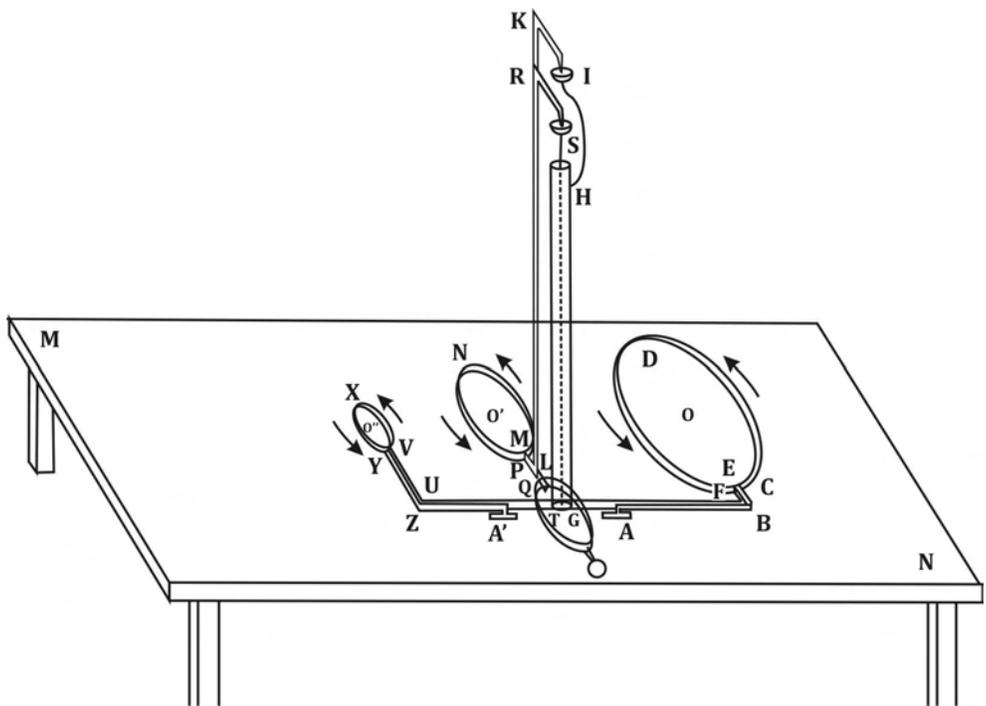


Figura A.4: Figura 4. Na Fig. 4 do *Théorie* publicado em 1826 não aparecem os centros O'' , O' e O dos círculos da esquerda, do centro e da direita, respectivamente. Estes centros aparecem na Fig. 4 do *Théorie* publicado em 1827 e são mencionados no texto. Por isto os incluímos aqui.

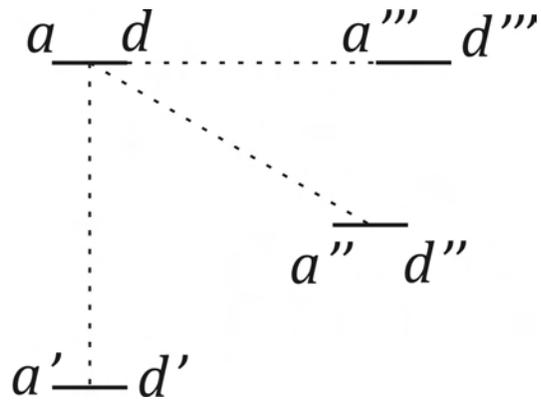


Figura A.5: Figura 5.

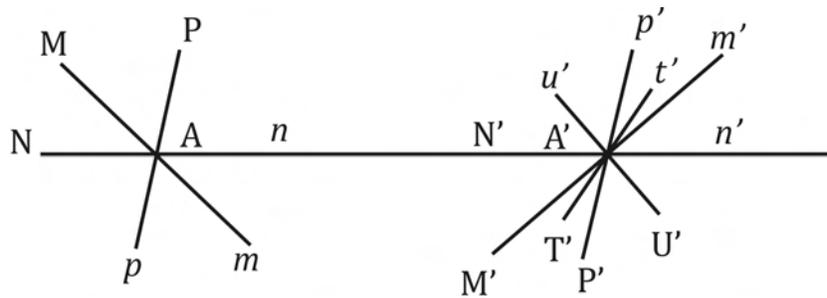


Figura A.6: Figura 6. O A' no centro de $M'm'$ aparece no *Théorie* de 1827, mas não no de 1826.

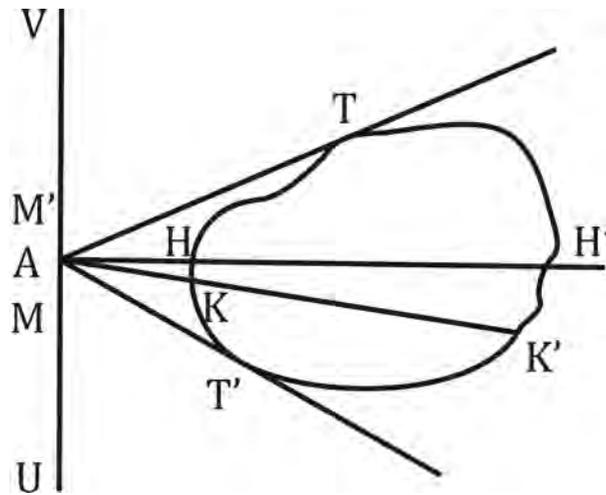


Figura A.7: Figura 7.

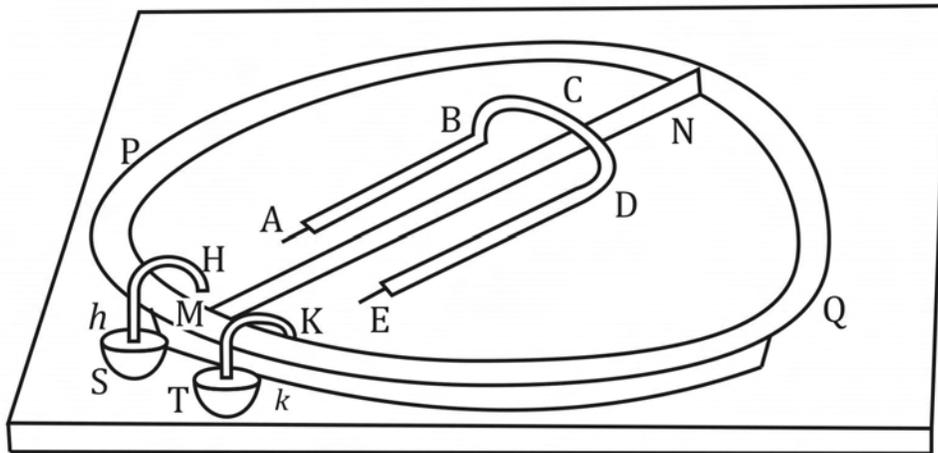


Figura A.8: Figura 8.

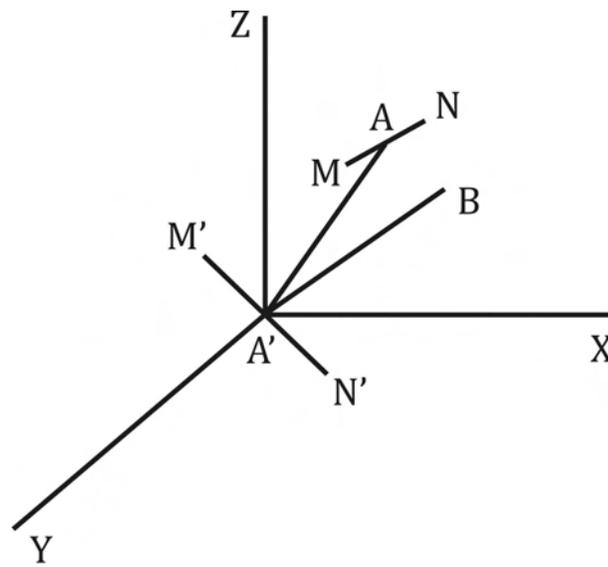


Figura A.9: Figura 9.

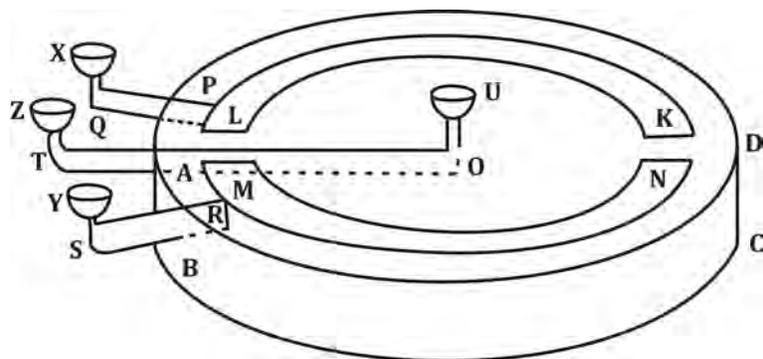


Figura A.10: Figura 10.

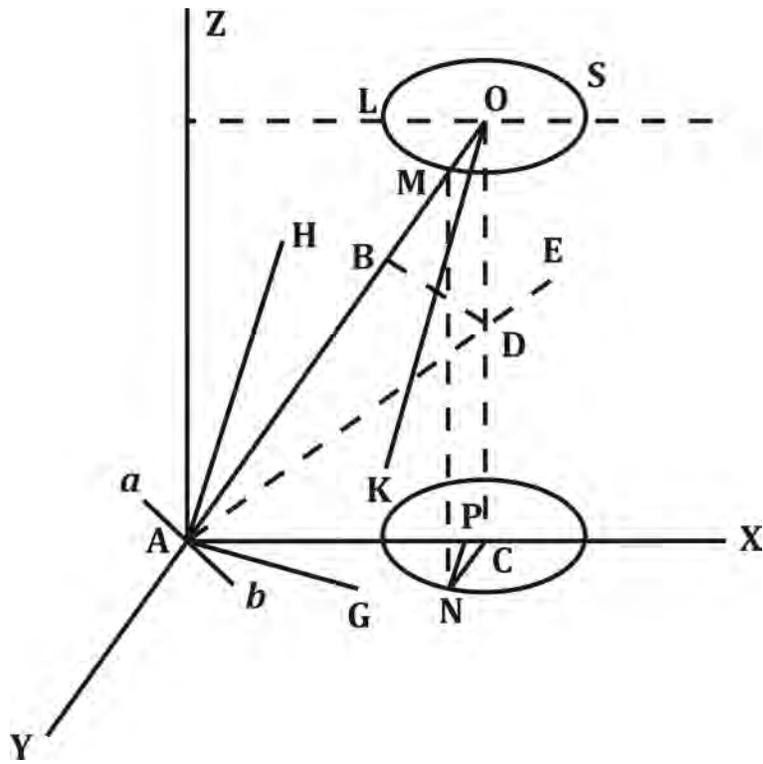


Figura A.14: Figura 14.

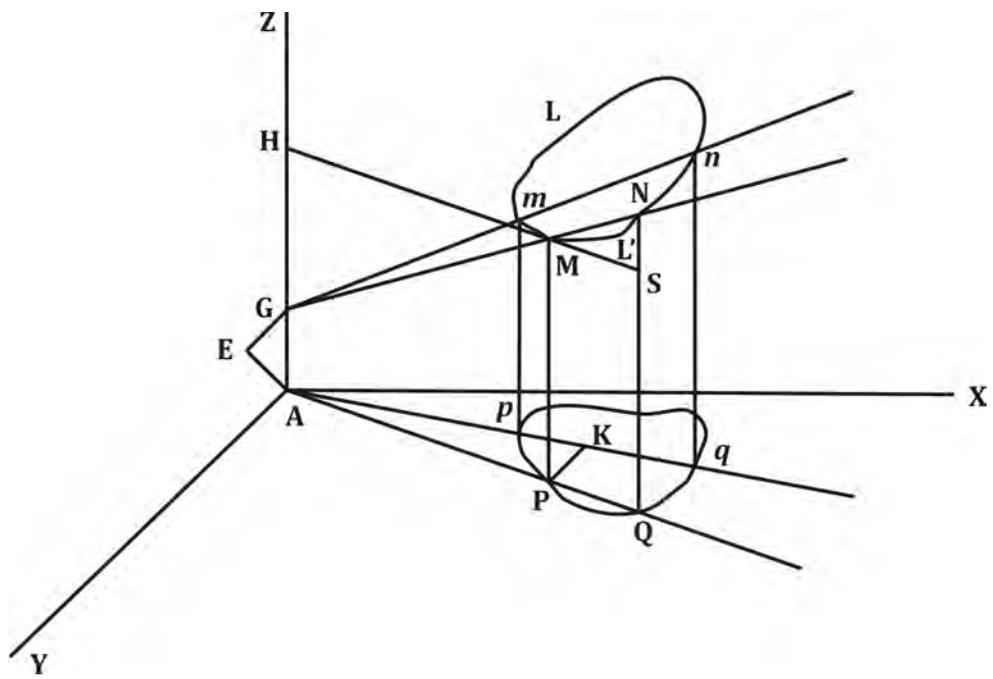


Figura A.15: Figura 15.

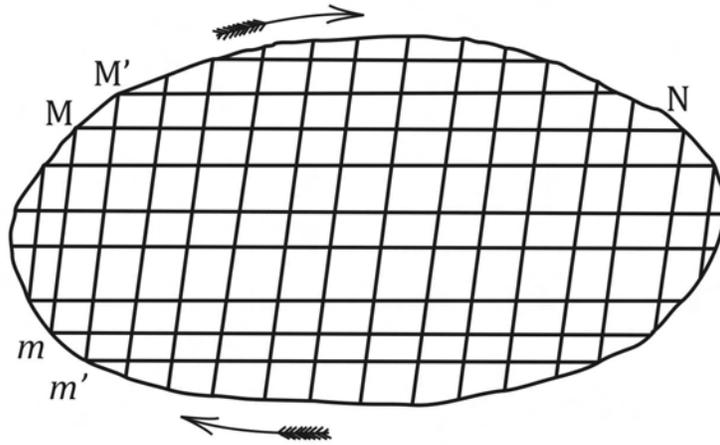


Figura A.16: Figura 16.

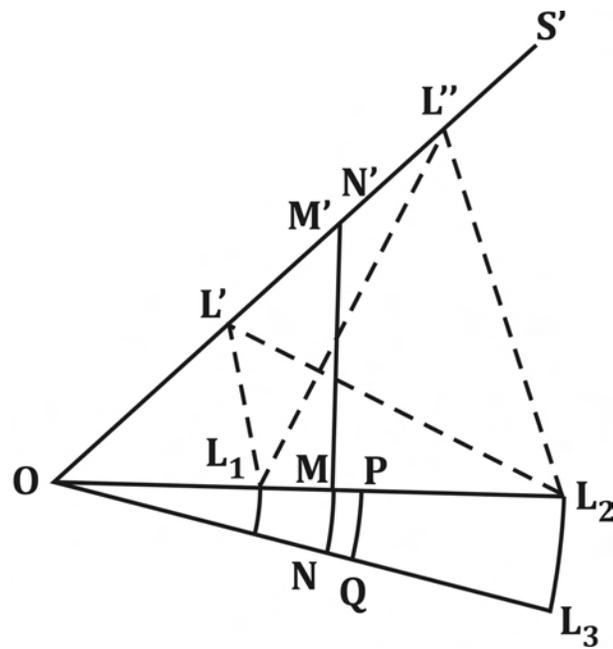


Figura A.17: Figura 17.

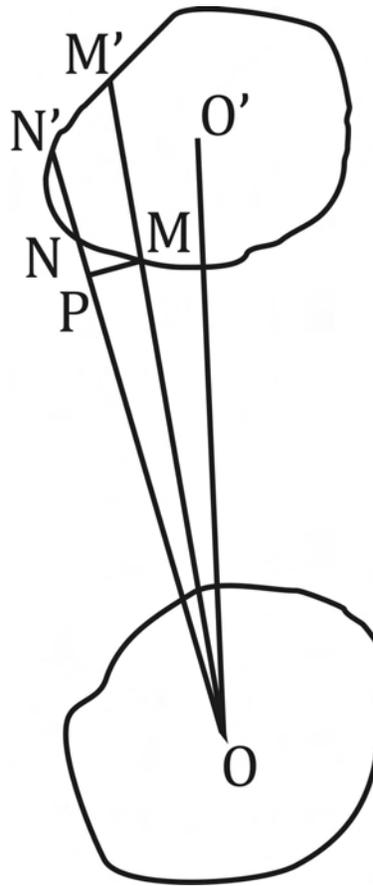


Figura A.18: Figura 18.

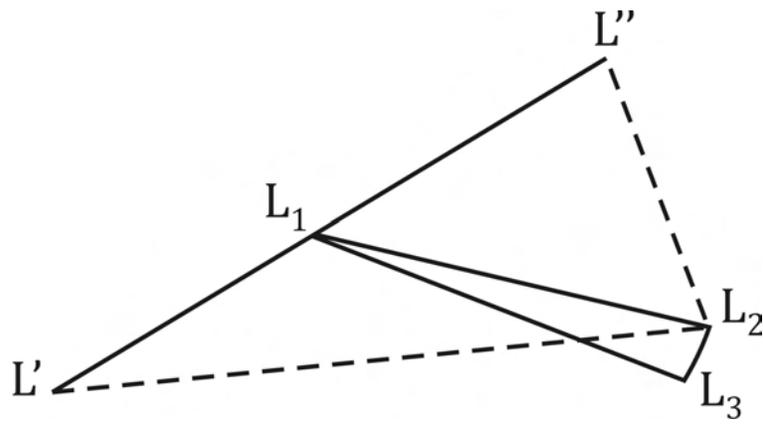


Figura A.19: Figura 19.

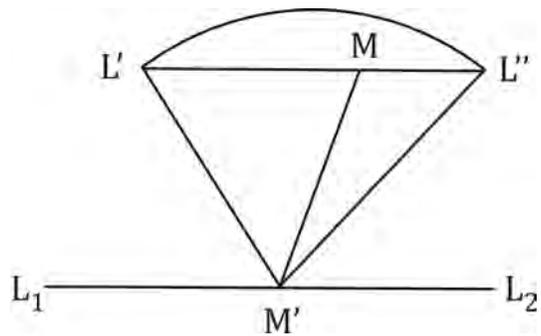


Figura A.21: Figura 21.

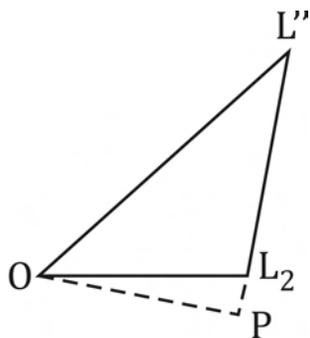


Figura A.22: Figura 22.

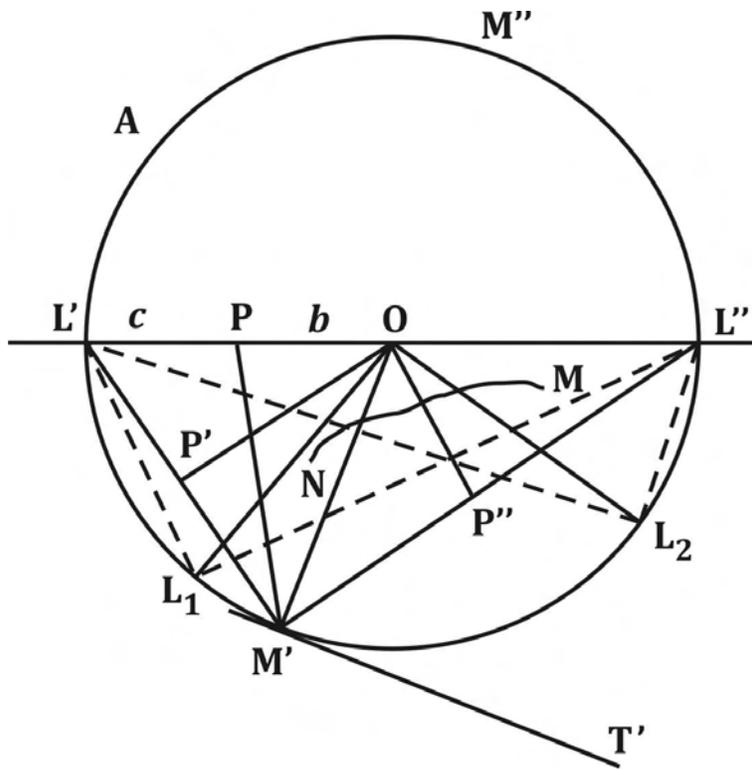


Figura A.23: Figura 23.

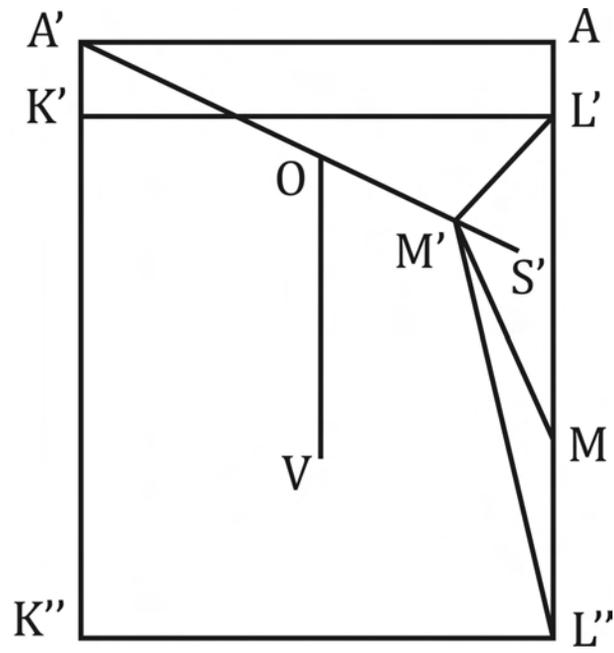


Figura A.27: Figura 27.

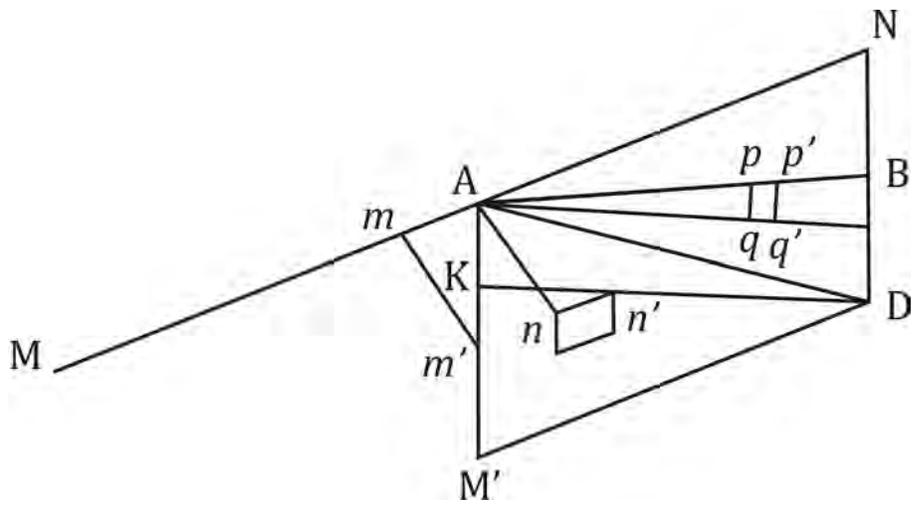


Figura A.28: Figura 28.

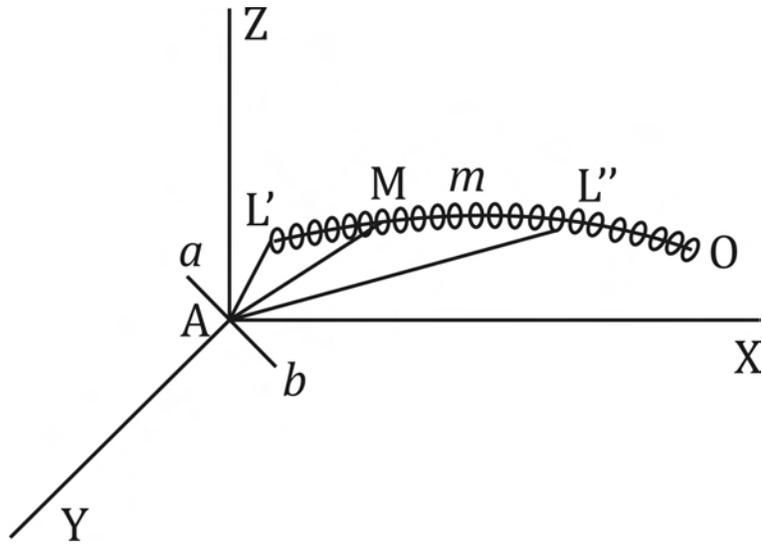


Figura A.29: Figura 29.

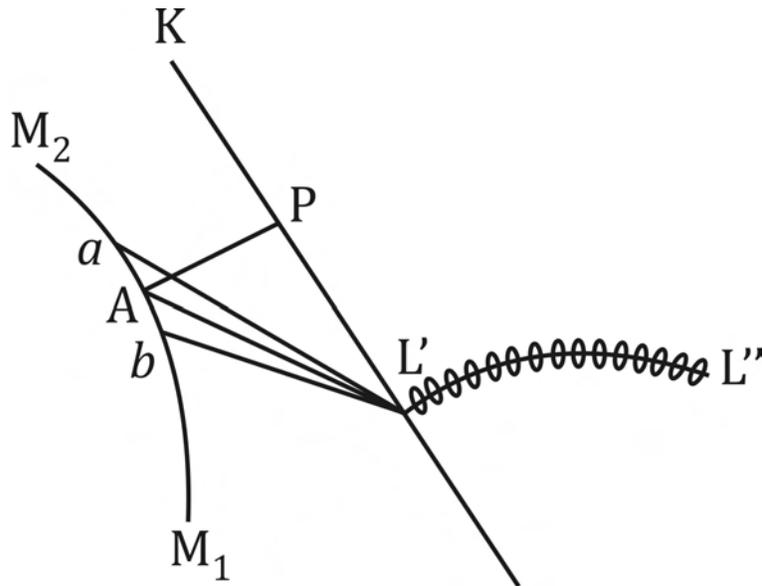


Figura A.30: Figura 30.

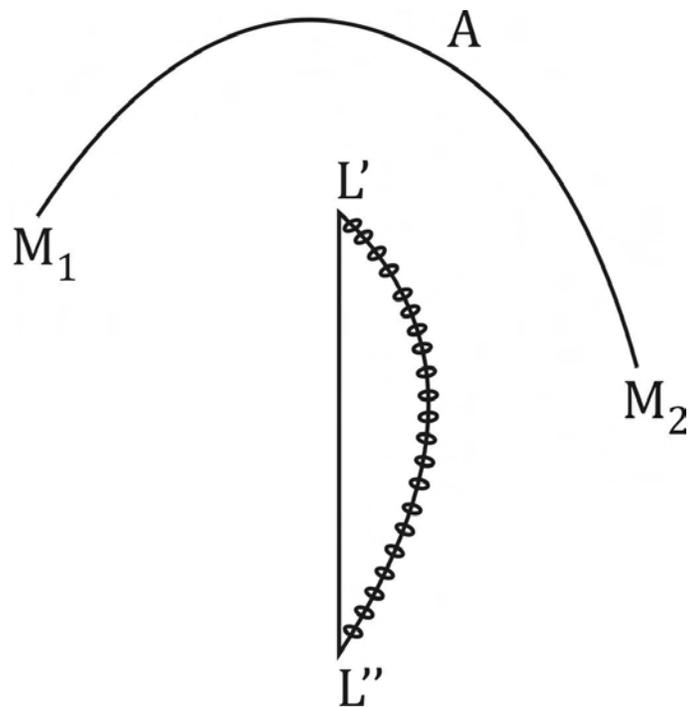


Figura A.31: Figura 31.

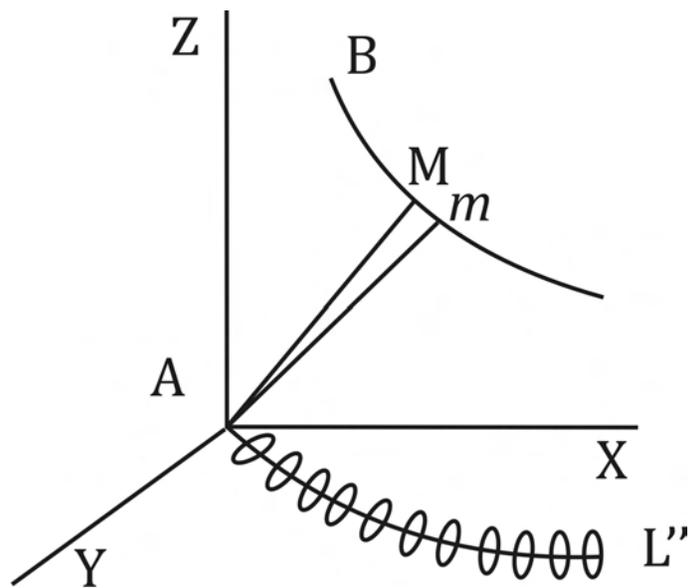


Figura A.32: Figura 32.

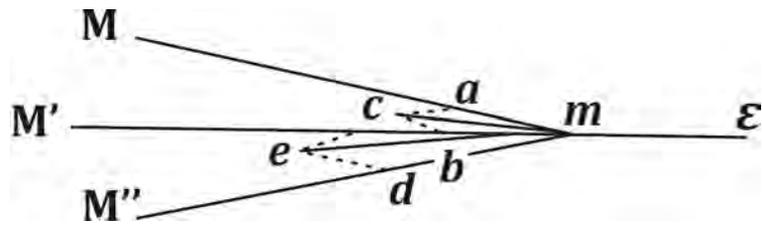


Figura A.35: Figura 35.

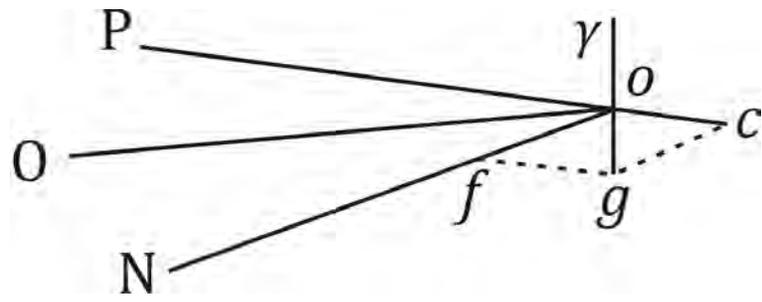


Figura A.36: Figura 36.

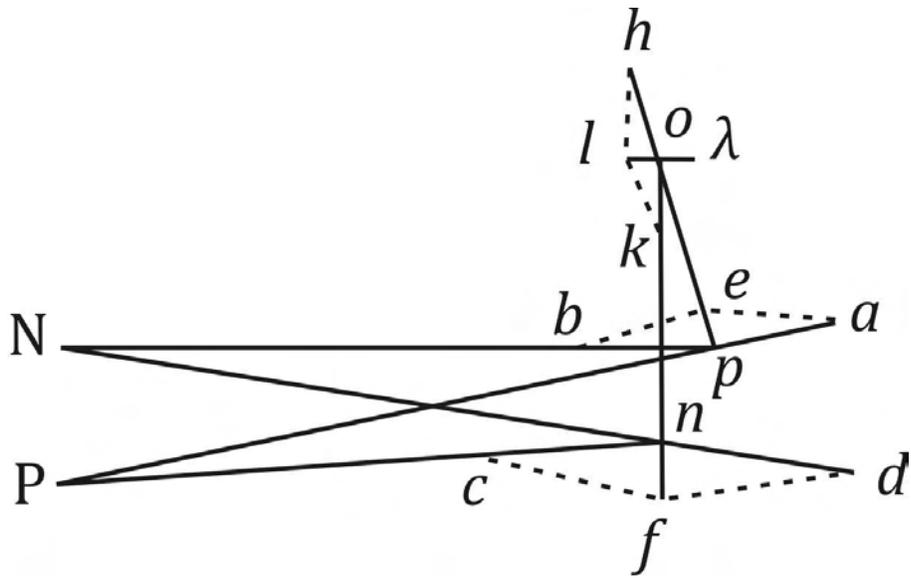


Figura A.37: Figura 37.

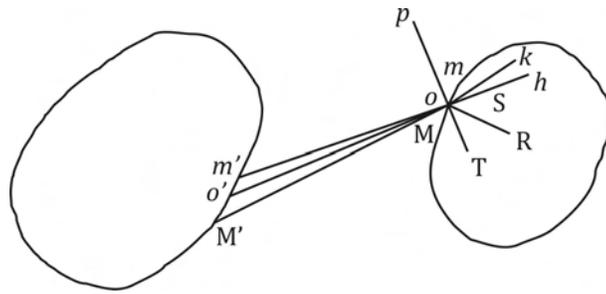


Figura A.38: Figura 38.

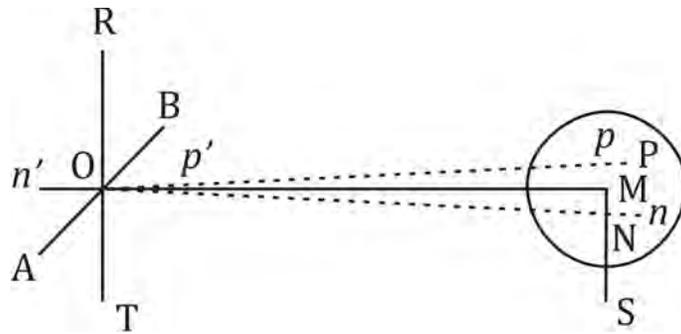


Figura A.39: Figura 39.

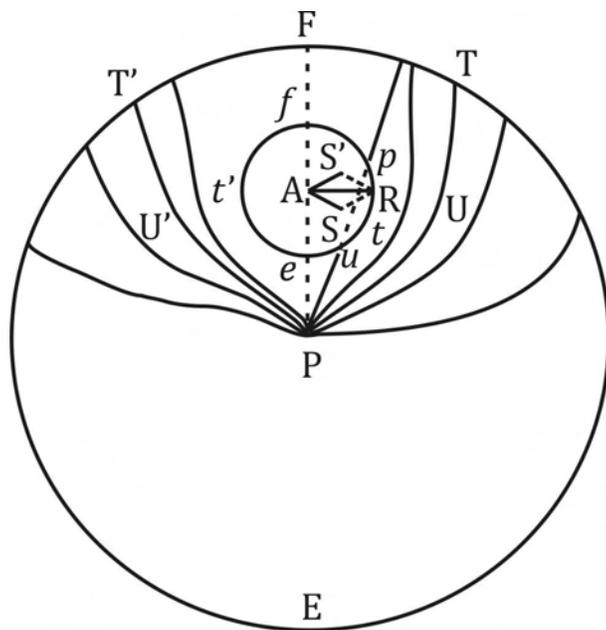


Figura A.40: Figura 40.

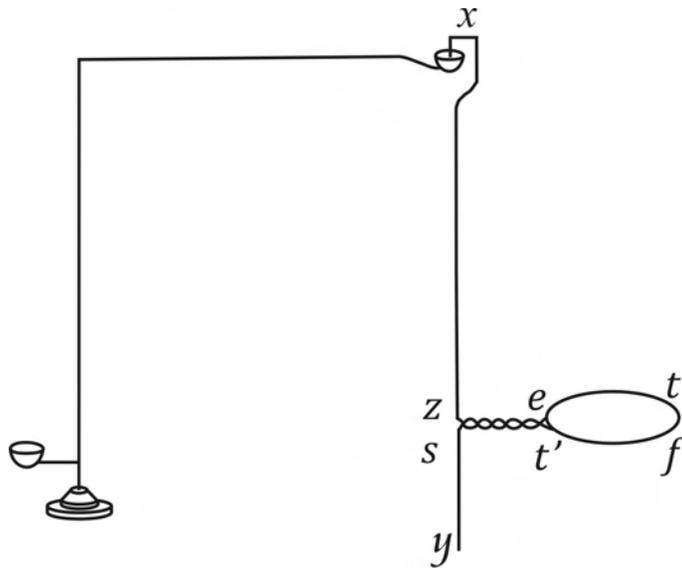


Figura A.41: Figura 41.

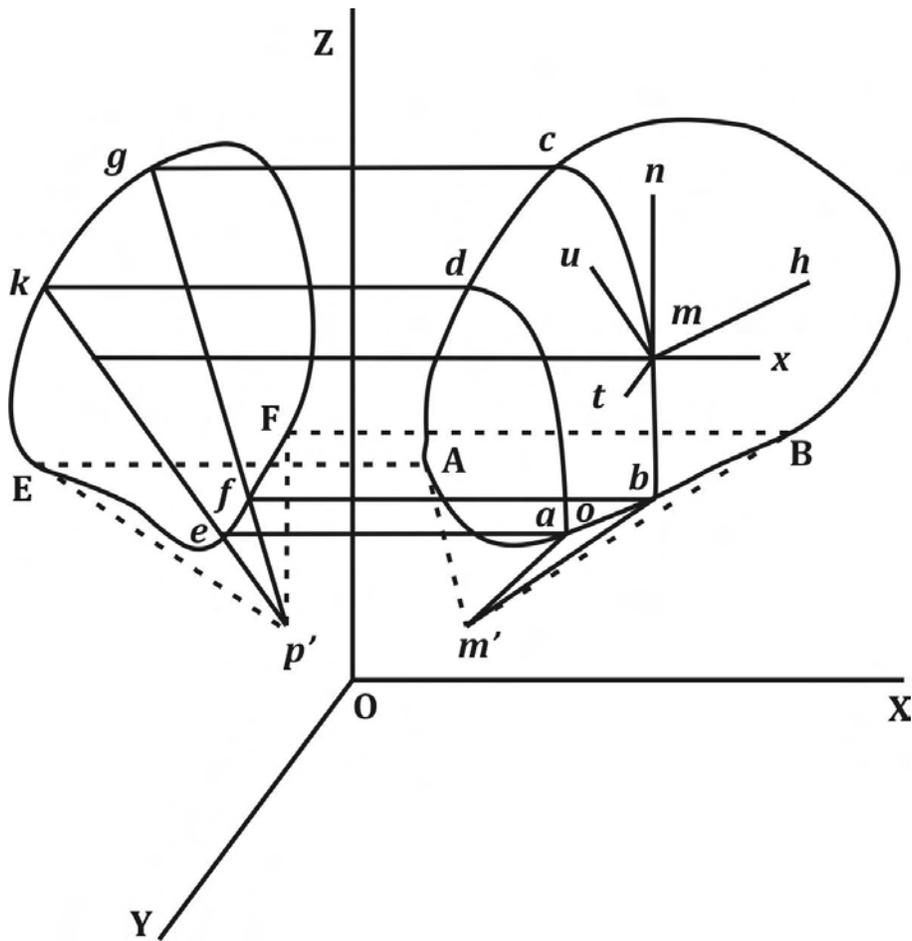


Figura A.42: Figura 42.

Referências Bibliográficas

- [AB22] A.-M. Ampère and J. Babinet. *Exposé des nouvelles découvertes sur l'électricité et le magnétisme de MM. Oersted, Arago, Ampère, H. Davy, Biot, Erman, Schweiger, de La Rive, etc.* Méquignon-Marvis, Paris, 1822.
- [AC06] A. K. T. Assis and J. P. M. C. Chaib. Nota sobre o magnetismo da pilha de Volta — tradução comentada do primeiro artigo de Biot e Savart sobre eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 16:303–306, 2006. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Ampa] A.-M. Ampère. Nota sem título que aparece como um apêndice do seguinte trabalho de Auguste de La Rive (1822): “Sur l’Action qu’exerce le globe terrestre sur une portion mobile du circuit voltaïque,” *Annales de Chimie et de Physique*, 21: 24-48. A nota de Ampère foi publicada em *Annales de Chimie et de Physique*, 21: 48-53 (1822).
- [Ampb] A.-M. Ampère. Archives de l’Académie des Sciences de Paris, carton 10, chemise 189.
- [Ampc] A.-M. Ampère. Archives de l’Académie des Sciences de Paris, carton 11, chemise 206 bis.
- [Ampd] A.-M. Ampère. Archives de l’Académie des Sciences de Paris, carton 22, chemise 314.
- [Ampe] A.-M. Ampère. Archives de l’Académie des Sciences de Paris, carton 8, chemise 156.
- [Ampf] A.-M. Ampère. Archives de l’Académie des Sciences de Paris, carton 8, chemise 158.
- [Ampg] A.-M. Ampère. Archives de l’Académie des Sciences de Paris, carton 8, chemise 162.
- [Amph] A.-M. Ampère. Archives de l’Académie des Sciences de Paris, carton 8, chemise 164.
- [Ampi] A.-M. Ampère. Archives de l’Académie des Sciences de Paris, carton 8, chemise 166.
- [Ampj] A.-M. Ampère. Archives de l’Académie des Sciences de Paris, carton 9, chemise 172.
- [Ampk] A.-M. Ampère. Archives de l’Académie des Sciences de Paris, carton 9, chemise 173.
- [Ampm] A.-M. Ampère. Lettre de André-Marie Ampère à Jean-Jacques Ampère. Carta L590 de 19 e 25 de setembro de 1820. Disponível em: www.ampere.cnrs.fr/amp-corr590.html.
- [Ampn] A.-M. Ampère. Lettre de André-Marie Ampère à Michael Faraday. Carta L622 de 10 de julho de 1822. Disponível em: www.ampere.cnrs.fr/amp-corr622.html.

- [Amp20a] A.-M. Ampère. Analyse des mémoires lus par M. Ampère a l'Académie des Sciences, dans les séances des 18 et 25 septembre, des 9 et 30 octobre 1820. *Annales Générales des Sciences Physiques*, 6:238–257, 1820. Este trabalho também foi reeditado separadamente como um artigo de 20 páginas, sem data.
- [Amp20b] A.-M. Ampère. Exposition du moyen par lequel il est facile de s'assurer directement, et par des expériences précises, de l'exactitude de la loi des attractions et répulsions des courans électriques, suivie de quelques observations sur cette loi. Mémoire lu le 26 décembre 1820. *Annales de Mines*, 5:553–558, 1820.
- [Amp20c] A.-M. Ampère. Mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences, le 2 octobre 1820, où se trouve compris le résumé de ce qui avait été lu à la même Académie les 18 et 25 septembre 1820, sur les effets des courans électriques. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:59–76, 1820. Disponível em: www.ampere.cnrs.fr.
- [Amp20d] A.-M. Ampère. Mémoire sur l'expression analytique des attractions et répulsions des courans électriques. Lu le 4 décembre 1820. *Annales de Mines*, 5:546–553, 1820.
- [Amp20e] A.-M. Ampère. Note sur un Mémoire lu à l'Académie royale des Sciences, dans la séance du 4 décembre 1820. *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, 91:226–230, 1820.
- [Amp20f] A.-M. Ampère. Suite du Mémoire sur l'Action mutuelle entre deux courans électriques, entre un courant électrique et un aimant ou le globe terrestre, et entre deux aimants. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:170–208, 1820. Disponível em: www.ampere.cnrs.fr.
- [Amp21a] A.-M. Ampère. Note sur deux Mémoires lus par M. Ampère à l'Académie royale des Sciences, le premier dans la séance du 26 décembre 1820; le second dans les séances des 8 et 15 janvier 1821. *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, 92:160–165, 1821.
- [Amp21b] A.-M. Ampère. Note sur un appareil à l'aide duquel on peut vérifier toutes les propriétés des conducteurs de l'électricité voltaïque, découvertes par M. Ampère. *Annales de Chimie et de Physique*, 18:88–106, 1821.
- [Amp21c] A.-M. Ampère. Suite de la Note sur un Appareil à l'aide duquel on peut vérifier toutes les propriétés des conducteurs de l'électricité voltaïque, découvertes par M. Ampère. *Annales de Chimie et de Physique*, 18:313–333, 1821.
- [Amp22a] A.-M. Ampère. Nouvelles Expériences électro-magnétiques. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, 5:44–47, 1821-1822. Histoire de l'Académie. Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1821, partie mathématique; par M. le chevalier Delambre, secrétaire perpétuel. Apesar desta data, este volume foi publicado apenas em 1826.
- [Amp22b] A.-M. Ampère. Addition au Mémoire précédent. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électro-dynamiques*, pages 286–292. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.

- [Amp22c] A.-M. Ampère. De l'Action qu'exerce la Terre sur les conducteurs voltaïques. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électro-dynamiques*, pages 259–261. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.
- [Amp22d] A.-M. Ampère. Expériences relatives à de nouveaux phénomènes électro-dynamiques. *Annales de Chimie et de Physique*, 20:60–74, 1822.
- [Amp22e] A.-M. Ampère. Exposé méthodique des phénomènes électrodynamiques et des lois de ces phénomènes. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électro-dynamiques*, pages 325–344. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.
- [Amp22f] A.-M. Ampère. Exposé sommaire des nouvelles Expériences électro-magnétiques faites par différens Physiciens, depuis le mois de mars 1821, lu dans la séance publique de l'Académie royale des Sciences, le 8 avril 1822. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électro-dynamiques*, pages 199–206. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.
- [Amp22g] A.-M. Ampère. Extrait d'un Mémoire lu à l'Académie royale des Sciences, dans la séance du 16 septembre 1822. *Bulletin des Sciences de la Société Philomatique de Paris*, (October):145–147, 1822.
- [Amp22h] A.-M. Ampère. Extrait d'une Lettre de M. Ampère à M. Faraday (Paris, 18 avril 1823). In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électro-dynamiques*, pages 365–378. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823. Esta carta não aparece na Tabela de Conteúdos no final do volume.
- [Amp22i] A.-M. Ampère. Mémoire sur la Détermination de la formule qui représente l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de conducteurs voltaïques. Lu à l'Académie royale des Sciences, dans la séance du 10 juin 1822. *Annales de Chimie et de Physique*, 20:398–421, 1822.
- [Amp22j] A.-M. Ampère. Notes sur cet exposé des nouvelles Expériences relatives aux Phénomènes produits par l'action électrodynamique, faites depuis le mois de mars 1821. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électro-dynamiques*, pages 207–236. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.
- [Amp22k] A.-M. Ampère. Notice sur les nouvelles expériences electro-magnétiques faites par différens physiciens, depuis le mois de mars 1821, lue dans la séance publique de l'académie royale des sciences, le 8 avril 1822. *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, 94:61–66, 1822.
- [Amp22l] A.-M. Ampère. Observation additionnelle par M. Ampère. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électro-dynamiques*, pages 354–364. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.
- [Amp22m] A.-M. Ampère. Premier Mémoire De l'Action exercée sur un courant électrique, par un autre courant, le globe terrestre ou un aimant. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électro-dynamiques*, pages 3–68. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.

- [Amp22n] A.-M. Ampère. *Recueil d'observations électro-dynamiques, contenant divers mémoires, notices, extraits de lettres ou d'ouvrages périodiques sur les sciences, relatifs à l'action mutuelle de deux courans électriques, à celle qui existe entre un courant électrique et un aimant ou le globe terrestre, et à celle de deux aimans l'un sur l'autre*. Crochard, Paris, 1822. Apesar desta data, este volume foi publicado apenas em 1823, pois na página 345 existe um resumo feito por Savary de um trabalho apresentado por ele à Academia de Ciências em 1823.
- [Amp22o] A.-M. Ampère. Réponse de M. Ampère à la Lettre de M. Van Beck, sur une nouvelle Expérience électro-magnétique. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électro-dynamiques*, pages 169–198. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.
- [Amp22p] A.-M. Ampère. Second mémoire sur la Détermination de la formule que représente l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de conducteurs voltaïques. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électro-dynamiques*, pages 293–318. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.
- [Amp23a] A.-M. Ampère. *Exposé Méthodique des Phénomènes Électro-dynamiques, et des Lois de Ces Phénomènes*. Bachelier, Paris, 1823.
- [Amp23b] A.-M. Ampère. Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience, dans lequel se trouvent réunis les Mémoires que M. Ampère a communiqués à l'Académie royale des Sciences, dans les séances des 4 et 26 décembre 1820, 10 juin 1822, 22 décembre 1823, 12 septembre et 21 novembre 1825. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6:175–387, 1823. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1827.
- [Amp24a] A.-M. Ampère. Description d'un Appareil électro-dynamique. *Annales de Chimie et de Physique*, 26:390–411, 1824.
- [Amp24b] A.-M. Ampère. *Description d'un Appareil Électro-dynamique, construit par M. Ampère*. Crochard et Bachelier, Paris, 1824.
- [Amp24c] A.-M. Ampère. Extrait d'un Mémoire sur les Phénomènes électro-dynamiques. Communiqué à l'Académie royale des Sciences le 22 décembre 1823. *Annales de Chimie et de Physique*, 26:134–162, 1824.
- [Amp24d] A.-M. Ampère. Suite de l'Extrait, fait par M. Ampère, de son Mémoire sur les Phénomènes électro-dynamiques. *Annales de Chimie et de Physique*, 26:246–258, 1824.
- [Amp25a] A.-M. Ampère. Lettre de M. Ampère à M. Gerhardi sur divers phénomènes électro-dynamiques. *Annales de Chimie et de Physique*, 29:373–381, 1825.
- [Amp25b] A.-M. Ampère. Mémoire sur une nouvelle Expérience électro-dynamique, sur son application à la formule qui représente l'action mutuelle de deux élémens de conducteurs voltaïques, et sur de nouvelles conséquences déduites de cette formule. *Annales de Chimie et de Physique*, 29:381–404, 1825. Lu à l'Académie royale des Sciences, dans la séance du 12 septembre 1825.

- [Amp25c] A.-M. Ampère. Suite du Mémoire de M. Ampère sur une nouvelle Expérience électrodynamique, sur son application à la formule qui représente l'action mutuelle de deux élémens de conducteurs voltaïques, et sur de nouvelles conséquences déduites de cette formule. *Annales de Chimie et de Physique*, 30:29–41, 1825.
- [Amp26a] A.-M. Ampère. *Description d'un Appareil Électro-dynamique, construit par M. Ampère*. Crochard et Bachelier, Paris, 1826. 2nd édition.
- [Amp26b] A.-M. Ampère. Note sur quelques Phénomènes électro-magnétiques. *Annales de Chimie et de Physique*, 32:432–443, 1826.
- [Amp26c] A.-M. Ampère. *Théorie des Phénomènes Électro-dynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience*. Méquignon-Marvis, Paris, 1826.
- [Amp28] A.-M. Ampère. Note sur l'Action mutuelle d'un Aimant et d'un Conducteur voltaïque. *Annales de Chimie et de Physique*, 37:113–139, 1828.
- [Amp29] A.-M. Ampère. Démonstration élémentaire du principe de la gravitation universelle. *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, 20:89–96, 1829.
- [Amp34] A.-M. Ampère. *Essai sur la Philosophie des sciences*. Bachelier, Paris, 1834.
- [Amp43] A.-M. Ampère. *Essai sur la Philosophie des sciences, second partie*. Bachelier, Paris, 1843.
- [Amp85a] A.-M. Ampère. De l'action exercée sur un courant électrique par un autre courant, le globe terrestre ou un aimant. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 7–53. Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [Amp85b] A.-M. Ampère. De l'Action qu'exerce la Terre sur les conducteurs voltaïques. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 305–307. Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [Amp85c] A.-M. Ampère. Expériences relatives à de nouveaux phénomènes électrodynamiques obtenus au mois de décembre 1821. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 192–204. Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [Amp85d] A.-M. Ampère. Exposé sommaire des nouvelles expériences électromagnétiques faites par différens physiciens, depuis le mois de mars 1821, lu dans la séance publique de l'académie royale des sciences, le 8 avril 1822. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 238–244. Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [Amp85e] A.-M. Ampère. Extrait d'un Mémoire sur les Phénomènes Électrodynamiques; présenté à l'Académie royale des Sciences (Institut de France), dans la séance du 22 décembre 1823. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 395–410. Gauthier-Villars, Paris, 1885.

- [Amp85f] A.-M. Ampère. Mémoire sur l'expression mathématique des attractions et des répulsions des courants électriques. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 128–135. Gauthier-Villars, Paris, 1885. Mémoire lu à l'Académie des Sciences, le 4 décembre 1820.
- [Amp85g] A.-M. Ampère. Note lue a la séance du 24 juin 1822. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 290–292. Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [Amp85h] A.-M. Ampère. Note relative au mémoire de M. Savary. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 376–383. Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [Amp85i] A.-M. Ampère. Notes sur cet exposé des nouvelles expériences relatives aux phénomènes produits par l'action électrodynamiques, faites depuis le mois de mars 1821. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 244–269. Gauthier-Villars, Paris, 1885. Mémoire lu à l'Académie des Sciences, le 4 décembre 1820.
- [Amp85j] A.-M. Ampère. Notice sur quelques expériences nouvelles relatives à l'action mutuelle de deux portions de circuit voltaïque et a la production des courants électriques par influence, et sur les circonstances dans lesquelles l'action électrodynamique doit, d'après la théorie, produire dans un conducteur mobile autour d'un axe fixe un mouvement de rotation continu, ou donner a ce conducteur une direction fixe. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 329–337. Gauthier-Villars, Paris, 1885. Présenté à l'Académie royale des Sciences, le 16 septembre 1822.
- [Amp85k] A.-M. Ampère. Réponse a la lettre de M. van Beck, sur une nouvelle expérience électromagnétique. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 212–237. Gauthier-Villars, Paris, 1885. Carta de 1821.
- [Amp85l] A.-M. Ampère. Second mémoire sur la détermination de la formule qui représente l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de conducteurs voltaïques, lu à l'Académie royale des sciences, le 10 juin 1822. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 270–289. Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [Amp87a] A.-M. Ampère. Lettre a M. le d'Gherardi. Supplément au mémoire sur l'action mutuelle d'un conducteur voltaïque et d'un aimant. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. III: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 275–288. Gauthier-Villars, Paris, 1887.
- [Amp87b] A.-M. Ampère. Mémoire communiqué a l'Académie royale des Sciences dans sa Séance du 12 novembre 1825, faisant suite au Mémoire lu dans la Séance du 12 septembre. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. III: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 194–202. Gauthier-Villars, Paris, 1887.

- [Amp87c] A.-M. Ampère. Mémoire sur la Théorie Mathématique des Phénomènes Électrodynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. III: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 1–193. Gauthier-Villars, Paris, 1887.
- [Amp87d] A.-M. Ampère. Mémoire sur l'action mutuelle d'un conducteur voltaïque et d'un aimant. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. III: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 224–274. Gauthier-Villars, Paris, 1887.
- [Amp87e] A.-M. Ampère. Précis d'un Mémoire lu a l'Académie royale des Sciences dans sa Séance du 21 novembre 1825. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. III: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 203–216. Gauthier-Villars, Paris, 1887.
- [Amp21] A.-M. Ampère. *Memoires sur Électromagnétisme et l'Électrodynamique*. Gauthier-Villars, Paris, 1921.
- [Amp58] A.-M. Ampère. *Théorie Mathématique des Phénomènes Électro-dynamiques Uniquement Déduite de l'Expérience*. Blanchard, Paris, 1958. Edited by E. Bauer.
- [Amp64] A.-M. Ampère. *Extraits du mémoire de l'action exercée sur un courant électrique par un autre courant, le globe terrestre ou un aimant*. In L. Poudensan, *Ampère, un Savant dans le Texte*, pages 26–50. Gauthiers-Villars, Paris, 1964.
- [Amp65] A.-M. Ampère. On the Mathematical Theory of Electrodynamical Phenomena, Experimentally Deduced. In R. A. R. Tricker, *Early Electrodynamics - The First Law of Circulation*, pages 155–200, New York, 1965. Pergamon. Partial translation by O. M. Blunn of Ampère's work *Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience*.
- [Amp82] A.-M. Ampère. *Notice sur la Vie et les Travaux d'A.M. Ampère*. In C. Blondel, *A.-M. Ampère et la Création de l'Électrodynamique*, Annexe I, pages 171–173. Bibliothèque Nationale, Paris, 1982.
- [Amp90] A.-M. Ampère. *Théorie Mathématique des Phénomènes Électro-dynamiques Uniquement Déduite de l'Expérience*. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1990. Réimpression du Mémoire fondamental d'André-Marie Ampère paru en 1827 dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, année 1823, Tome VI, pp. 175-388.
- [Ano23] Anonymous. Nouveaux Résultats obtenus par M. Savary sur les phénomènes électrodynamiques. *Annales de Chimie et de Physique*, 23:413–415, 1823.
- [Ara54] F. Arago. Notices Biographiques, Ampère. In J.-A. Barral, editor, *Oeuvres complètes*, pages 1–116. Gide et J. Baudry, Paris, 1854. Vol. 2. Notice lue par extraits à l'Académie des Sciences le 21 août 1839.
- [ASCC07] A. K. T. Assis, M. P. Souza Filho, J. J. Caluzi, and J. P. M. C. Chaib. From electromagnetism to electrodynamics: Ampère's demonstration of the interaction between current carrying wires. In B. V. Dorrio M. F. Costa and R. Reis, editors, *Proceedings of the 4th International Conference on Hands-on Science*, pages 9–16.

University of Azores, Ponta Delgada, 2007. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.

- [BA98] Marcelo Bueno and A. K. T. Assis. *Cálculo de Indutância e de Força em Circuitos Elétricos*. Editora da UFSC/Editora da UEM, Florianópolis/Maringá, 1998. ISBN: 85-328-0119-6.
- [BA01] M. d. A. Bueno and A. K. T. Assis. *Inductance and Force Calculations in Electrical Circuits*. Nova Science Publishers, Huntington, New York, 2001. ISBN: 1-56072-917-1.
- [Ber74] J. Bertrand. Démonstration des théorèmes relatifs aux actions électrodynamiques. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 3:297–306 and 335–343, 1874.
- [Bio21] J. B. Biot. Sur l’Aimantation imprimée aux métaux par l’électricité en mouvement: lu à la séance publique de l’Académie des sciences, le 2 avril 1821. *Journal des Savants*, Avril:221–235, 1821.
- [Bio24] J. B. Biot. *Précis élémentaire de Physique expérimentale*. Deterville, Paris, third edition, 1824.
- [Bio85a] J. B. Biot. Précis élémentaire de Physique expérimentale, second edition (Paris: Deterville, 1821), Vol. ii, p. 123. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique — Tome II: Mémoires sur l’Électrodynamique*, pages 116–117, Paris, 1885. Gauthier-Villars.
- [Bio85b] J. B. Biot. Précis élémentaire de Physique expérimentale, third edition (Paris: Deterville, 1824), Vol. ii, pp. 704–723. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique — Tome II: Mémoires sur l’Électrodynamique*, pages 80–127, Paris, 1885. Gauthier-Villars.
- [Blo78] C. Blondel. Sur les premières recherches de formule électrodynamique par Ampère (octobre 1820). *Revue d’Histoire des Sciences*, 31:53–65, 1978.
- [Blo82] C. Blondel. *A.-M. Ampère et la Création de l’Électrodynamique (1820-1827)*. Bibliothèque Nationale, Paris, 1982.
- [Bou83] E. Bouty. R. Felici — Note sur une expérience d’Ampère, p. 243–249. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 2:527–529, 1883.
- [BS20] J. B. Biot and F. Savart. Note sur le magnétisme de la pile de Volta. *Annales de Chimie et de Physique*, 15:222–223, 1820.
- [BS85] Biot and Savart. Sur l’aimantation imprimée aux métaux par l’électricité en mouvement, in: *Précis élémentaire de Physique expérimentale*, third edition (Paris: Deterville, 1823), Vol. ii, pp. 704–723. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique — Tome II: Mémoires sur l’Électrodynamique*, pages 80–127, Paris, 1885. Gauthier-Villars.

- [CA07a] J. P. M. C. Chaib and A. K. T. Assis. Ampère e a origem do magnetismo terrestre. In P. W. Gonçalves *et al.*, editor, *Anais do I Simpósio de Pesquisa em Ensino e História de Ciências da Terra e do III Simpósio Nacional sobre Ensino de Geologia no Brasil*, pages 315–320. Instituto de Geociências da Unicamp, Campinas, 2007. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [CA07b] J. P. M. C. Chaib and A. K. T. Assis. Distorção da obra eletromagnética de Ampère nos livros didáticos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:65–70, 2007. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [CA07c] J. P. M. C. Chaib and A. K. T. Assis. Experiência de Oersted em sala de aula. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:41–51, 2007. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [CA07d] J. P. M. d. C. Chaib and A. K. T. Assis. Sobre os efeitos das correntes elétricas — Tradução comentada da primeira obra de Ampère sobre eletrodinâmica. *Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência*, 5:85–102, 2007. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Can80] K. L. Caneva. Ampère, the etherians, and the Oersted connexion. *The British Journal for the History of Science*, 13:121–138, 1980.
- [Cro85] M. J. Crowe. *A History of Vector Analysis – The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Dover, New York, 1985.
- [Dar00] O. Darrigol. *Electrodynamics from Ampère to Einstein*. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [dlR22a] A. de la Rive. Mémoire sur l’Action qu’exerce le globe terrestre sur une portion mobile de circuit voltaïque. *Annales de Chimie et de Physique*, 21:24–48, 1822.
- [dlR22b] A. de la Rive. Mémoire sur l’Action qu’exerce le globe terrestre sur une portion mobile du circuit voltaïque; par M. de La Rive fils. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d’Observations Électro-dynamiques*, pages 262–286. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.
- [dlR85] A. de la Rive. Mémoire sur l’Action qu’exerce le globe terrestre sur une portion mobile du circuit voltaïque; Par M. de La Rive Fils. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l’Électrodynamique*, pages 308–328. Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [Ett78] A. v. Eittingshausen. Ueber Ampère’s elektrodynamische Fundamentalversuche. *Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien*, 15:12–13, 1878.
- [Far21] M. Faraday. Sur les Mouvemens électro-magnétiques et la théorie du magnétisme. *Annales de Chimie et de Physique*, 18:337–370, 1821.
- [Far22] M. Faraday. Mémoire sur les Mouvemens électro-magnétiques et la théorie du magnétisme. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d’Observations Électro-dynamiques*, pages 125–158. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.

- [Far52a] M. Faraday. Description of an electro-magnetical apparatus for the exhibition of rotary motion. In R. M. Hutchins, editor, *Great Books of the Western World*, Vol. 45: *Lavoisier, Fourier, Faraday*, pages 807–809. Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952. Reprint of the Quarterly Journal of Science, Vol. 12, pp. 283-285 (1821).
- [Far52b] M. Faraday. On some new electro-magnetial motions and on the theory of magnetism. In R. M. Hutchins, editor, *Great Books of the Western World*, Vol. 45: *Lavoisier, Fourier, Faraday*, pages 795–807. Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952. Reprint of the Quarterly Journal of Science, Vol. 12, pp. 74-96 (1821).
- [Fel82] R. Felici. Nota ad una esperienza dell’Ampère. *Nuovo Cimento*, 11:243–249, 1882. Este artigo está assinado apenas como “R.” Mas sabe-se que o autor foi R. Felici, um dos Editores do periódico *Nuovo Cimento*.
- [Fou52] J. B. J. Fourier. Analytical Theory of Heat. In *Great Books of the Western World*, Vol. 45, pages 161–251, Chicago, 1952. Encyclopaedia Britannica.
- [Fra81] O. I. Franksen. *H. C. Ørsted — A Man of the Two Cultures*. Strandbergs Forlag, Birkerød, 1981.
- [GG90] I. Grattan-Guinness. *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*, volume 2. Birkhäuser, Basel, 1990.
- [GG91] I. Grattan-Guinness. Lines of mathematical thought in the electrodynamics of Ampère. *Physis*, 28:115–129, 1991.
- [GG96] P. Graneau and N. Graneau. *Newtonian Electrodynamics*. World Scientific, Singapore, 1996.
- [Gri79] G. Gripon. Ettingshausen. — Ueber Ampère’s Electrodynamiche Fundamentalversuche (Sur les expériences fondamentales de l’électrodynamique); p. 12. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 8:70–71, 1879.
- [Hof82] J. R. Hofmann. *The Great Turning Point in André-Marie Ampère’s Research in Electrodynamics: A Truly “Crucial” Experiment*. PhD thesis, Graduate Faculty of Arts and Sciences, University of Pittsburgh, Pittsburgh, 1982.
- [Hof87] J. R. Hofmann. Ampère’s invention of equilibrium apparatus: a response to experimental anomaly. *The British Journal for the History of Science*, 20:309–341, 1987.
- [Hof96] J. R. Hofmann. *André-Marie Ampère, Enlightenment and Electrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [Jef73] O. D. Jefimenko. *Electrostatic Motors: Their History, Types, and Principles of Operation*. Electret Scientific, Star City, 1973.
- [Jou85] J. Joubert. *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, volume 2: *Mémoires sur l’Électrodynamique*. Gauthiers-Villars, Paris, 1885.
- [Kas77] A. Kastler. Ampère et les lois de l’électrodynamique. *Revue d’Histoire des Sciences*, 30:143–157, 1977.

- [LA98] E. K. Lauridsen and N. Abrahamsen. The history of astatic magnet systems and suspensions. *Centaurus*, 40:135–169, 1998.
- [Lau20] G. d. Laumont. Note sur les expériences électro-magnétiques de MM. Oersted, Ampère et Arago, relatives à l'identité de l'aimant avec l'électricité. *Annales de Mines*, 5:535–546, 1820.
- [Lau25] L. d. Launay. *Le Grand Ampère d'après des Documents Inédits*. Librairie Académique Perrin, Paris, 1925.
- [Lau36] L. d. Launay (ed.). *Correspondence du Grand Ampère*, volume 2. Gauthier Villars, Paris, 1936.
- [Lau43] L. d. Launay (ed.). *Correspondence du Grand Ampère*, volume 3. Gauthier Villars, Paris, 1943.
- [MA08] C. P. Magnaghi and A. K. T. Assis. Sobre a eletricidade excitada pelo simples contato entre substâncias condutoras de tipos diferentes — Uma tradução comentada do artigo de Volta de 1800 descrevendo sua invenção da pilha elétrica. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, 25:118–140, 2008. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Mar86] R. de A. Martins. Ørsted e a descoberta do eletromagnetismo. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 10:89–114, 1986.
- [Max54] J. C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Dover, New York, 1954.
- [Mey72] H. W. Meyer. *A History of Electricity and Magnetism*. Burndy Library, Norwalk, Connecticut, 1972.
- [Nei96] G. H. Neild. William Cruickshank (FRS-1802): Clinical chemist. *Nephrology Dialysis Transplantation*, 11:1885–1889, 1996.
- [New90] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Nova Stella/Edusp, São Paulo, 1990. Livro I: O Movimento dos Corpos. Tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia.
- [New96] I. Newton. *Óptica*. Edusp, São Paulo, 1996. Tradução, introdução e notas de A. K. T. Assis. ISBN: 85-314-0340-5.
- [New08] I. Newton. *Principia — Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*. Edusp, São Paulo, 2008. Livro II: O movimento dos Corpos (em Meios com Resistência). Livro III: O Sistema do Mundo (Tratado Matematicamente). Tradução de A. K. T. Assis. ISBN: 978-85-314-1089-5.
- [Ørs86] H. C. Ørsted. Experiências sobre o efeito do conflito elétrico sobre a agulha magnética. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, 10:115–122, 1986. Tradução de Roberto de A. Martins.
- [Ørs98] H. C. Ørsted. New electro-magnetic experiments. In K. Jelved, A. D. Jackson, and O. Knudsen, editors, *Selected Scientific Works of Hans Christian Ørsted*, pages 421–424. Princeton University Press, Princeton, 1998. Artigo publicado originalmente em alemão em 1820.

- [Poi22a] S. D. Poisson. Mémoire sur la théorie du magnétisme. Lu à l'Académie royale des Sciences le 2 Février 1824. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, 5:247–338, 1821-1822. Histoire de l'Académie. Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1821, partie mathématique; par M. le chevalier Delambre, secrétaire perpétuel. Apesar desta data, este volume foi publicado apenas em 1826.
- [Poi22b] S. D. Poisson. Second Mémoire sur la théorie du magnétisme. Lu à l'Académie royale des Sciences le 27 Décembre 1824. *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, 5:488–533, 1821-1822. Histoire de l'Académie. Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1821, partie mathématique; par M. le chevalier Delambre, secrétaire perpétuel. Apesar desta data, este volume foi publicado apenas em 1826.
- [Poi33] S. D. Poisson. *Traité de Mécanique*, volume 2. Bachelier, Paris, 2nd edition, 1833.
- [Pou64] L. Poudensan. *Ampère, un Savant dans le Texte*. Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [Rey70] F. Reynard. Nouvelle théorie des actions électrodynamiques. *Annales de Chimie et de Physique*, 19:272–328, 1870.
- [Rob62] M. Robinson. A history of the electric wind. *American Journal of Physics*, 30:366–372, 1962.
- [Sav22] F. Savary. Extrait fait par M. Savary du Mémoire qu'il a lu à l'Académie royale des Sciences, le 3 février 1823. In A.-M. Ampère, editor, *Recueil d'Observations Électrodynamiques*, pages 345–354. Crochard, Paris, 1822. Apesar da data, este volume foi publicado apenas em 1823.
- [Sav23] F. Savary. Extrait d'un Mémoire lu à l'Académie des Sciences, le 3 février 1823. *Annales de Chimie et de Physique*, 22:91–100, 1823.
- [Sav85a] F. Savary. Addition au Mémoire précédent. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 370–375. Gauthier-Villars, Paris, 1885. Ce complément du Mémoire de Savary a été présenté à l'Académie le 28 juillet 1823 (*Journal de Physique*, t. XCVI; 1823).
- [Sav85b] F. Savary. Mémoire sur l'Application du Calcul aux Phénomènes électro-dynamiques. In J. Joubert, editor, *Collection de Mémoires relatifs a la Physique*, Vol. II: *Mémoires sur l'Électrodynamique*, pages 338–370. Gauthier-Villars, Paris, 1885. Mémoire lu à l'Académie des Sciences, le 3 février 1823. Reprinted from *Journal de Physique, de Chimie, d'Histoire Naturelle et des Arts*, Vol. 96, pp. 1-25 (1823).
- [SCCA07] M. P. Souza Filho, J. P. M. C. Chaib, J. J. Caluzi, and A. K. T. Assis. Demonstração didática da interação entre correntes elétricas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29:605–612, 2007. Disponível em: www.ifi.unicamp.br/~assis.
- [Sne75] H. A. M. Snelders. The reception in the Netherlands of the discoveries of electromagnetism and electrodynamics (1820-1822). *Annals of Science*, 32:39–54, 1975.
- [Sym82] K. R. Symon. *Mecânica*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 5ª edição, 1982. Tradução de G. B. Batista.

- [Tat81] R. Taton. Pouillet, Claude-Servais-Mathias. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 11, pages 110–111. Charles Scribner’s Sons, New York, 1981.
- [Tri62] R. A. R. Tricker. Ampère as a contemporary physicist. *Contemporary Physics*, 3:453–468, 1962.
- [Tri65] R. A. R. Tricker. *Early Electrodynamics — The First Law of Circulation*. Pergamon, Oxford, 1965.
- [Ver68] É. Verdet. Cours de Physique, Tome Premier. In É. Fernet, editor, *Oeuvres d’É. Verdet*, Tome II. Victor Masson et Fils, Paris, 1868.
- [Ver72] É. Verdet. Conférences de Physique faites a l’École Normale, Première Partie. In D. Gernez, editor, *Oeuvres d’É. Verdet*, Tome IV. G. Masson, Paris, 1872.
- [VF80] R. N. Varney and L. H. Fisher. Electromotive force: Volta’s forgotten concept. *American Journal of Physics*, 48:405–408, 1980.
- [Vol00] A. Volta. On the electricity excited by the mere contact of conducting substances of different kinds. *Philosophical Transactions*, 90:403–431, 1800. Carta em francês, contendo apenas o título em inglês, de A. Volta para J. Banks, datada de 20 de março de 1800. Ela foi lida perante a *Royal Society* em 26 de junho de 1800.
- [Wes91] J. P. Wesley. *Selected Topics in Advanced Fundamental Physics*. Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, 1991.
- [Wes02] J. P. Wesley. *Selected Topics in Scientific Physics*. Benjamin Wesley Publisher, Blumberg, 2002.
- [Whi34] R. S. Whipple. The evolution of the galvanometer. *Journal of Scientific Instruments*, 11:37–43, 1934.
- [Whi73] E. T. Whittaker. *A History of the Theories of Aether and Electricity*, volume 1: *The Classical Theories*. Humanities Press, New York, 1973.
- [Wil81] L. P. Williams. Ampère, André-Marie. In C. C. Gillispie, editor, *Dictionary of Scientific Biography*, Vol. 1, pages 139–147, New York, 1981. Charles Scribner’s Sons.
- [Wil83] L. P. Williams. What were Ampère’s earliest discoveries in electrodynamics? *Isis*, 74:492–508, 1983.
- [Wil85] L. P. Williams. Faraday and Ampère: a critical dialogue. In D. Gooding and F. A. J. L. James, editors, *Faraday Rediscovered*, pages 83–104. Stockton Press, New York, 1985.
- [Wil60] B. Wilson. Farther experiments in electricity. *Philosophical Transactions*, 51:896–906, 1759-60.