

FI-144 TEORIA DE GRUPOS

Lista # 5

Guillermo Cabrera

Entrega: 17 de junho de 2016
Só entregar os itens destacados com *

1. * Grupos Dobrados

Determine as estruturas de classes e as tabelas de caracteres dos grupos dobrados:

$$\overline{\mathbf{C}}_3, \overline{\mathbf{D}}_3, \overline{\mathbf{D}}_4, \overline{\mathbf{T}}_h.$$

Use as tabelas das representações de momentum angular inteiro e construa explicitamente as representações de ‘spin’.

(<http://www.ifi.unicamp.br/~cabrera/teaching/tabela.pdf>) ■

2. Momentum Angular arbitrário

Todas as representações irredutíveis de $SU(2)$ foram construídas usando os spinors generalizados

$$f_m^{(j)} = \frac{u^{j+m}v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}, \quad (1)$$

onde $-j \leq m \leq j$ e (u, v) é o spinor fundamental de $SU(2)$. Estes $f_m^{(j)}$ operam como os kets $|jm\rangle$ para momentum angular arbitrário ($j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$), onde (u, v) fazem o papel de ‘coordenadas generalizadas’. O objetivo deste exercício é construir os operadores de momentum angular para a representação (1) dada acima. Considere unidades tais que $\hbar \equiv 1$.

- (a) Mostre que as componentes do momentum angular podem ser representadas como os operadores diferenciais abaixo:

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v} \right), \\ J_+ &= u \frac{\partial}{\partial v}, \\ J_- &= v \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned} \quad (2)$$

onde os $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ são os operadores ‘escada’. Encontre a ação dos operadores de (2) sobre os spinores $f_m^{(j)}$ e calcule todas as relações de comutação entre eles, mostrando que de fato são operadores de momentum angular.

- (b) Encontre o operador $\vec{J}^2$ (chamado de Casimir na teoria dos grupos de Lie) e verifique que seus autovalores são $j(j+1)$. ■

3. * Spin-Órbita vs Campo Cristalino

Determine os níveis de energia e as transições permitidas para radiação dipolar elétrica para os níveis

$$^2D, \ ^2F$$

de um elétron em um átomo, nos seguintes casos:

- (a) sem acoplamento spin-órbita e sem campo cristalino;
- (b) sem acoplamento spin-órbita e com campo cristalino de simetria T_h (considere as representações complexas conjugadas como sendo degeneradas);
- (c) com acoplamento spin-órbita e sem campo cristalino;
- (d) com campo cristalino de simetria T_h fraco e acoplamento spin-órbita forte;
- (e) com campo cristalino de simetria T_h forte e acoplamento spin-órbita fraco.

Dica. Use resultados do problema #1. ■

4. Grupo dobrado $\overline{C_{2v}}$

Construa explicitamente o grupo dobrado $\overline{C_{2v}}$ obtendo a tabela completa de multiplicação. Note que, embora C_{2v} seja abeliano, o grupo dobrado não. A partir da tabela de multiplicação, encontre as classes conjugadas e construa as representações de *spin* do grupo. ■