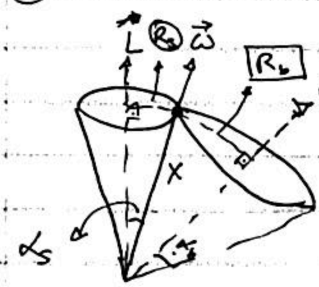
Prova da expressão para a velocidade angular com a qual $\vec{\omega}$ gira em torno de $\vec{L}$

(3) Da construção dos cones:



Como $\vec{\omega}$, $\hat{e}_3$ e $\vec{L}$ estão sempre no mesmo plano, $\vec{\omega}$ e $\hat{e}_3$ precessam com a mesma velocidade angular em torno de $\vec{L}$ (que é fixo no espaço). Portanto, a velocidade angular de $\hat{e}_3$ ao redor de $\vec{L}$ é igual à velocidade angular de $\vec{\omega}$ ao redor de $\vec{L}$. Sejam $\underline{\Theta_s}$ e $\underline{\Theta_b}$ os ângulos gerados pela precessão de $\vec{\omega}$ nos cones espacial e do corpo, respectivamente. Como os arcos gerados são iguais, segue que:

$$R_b \Theta_b = R_s \Theta_s$$

onde $\underline{R_b}$ e $\underline{R_s}$ são definidos na figura:

$$\Rightarrow \dot{\Theta}_s = \frac{R_b}{R_s}\dot{\Theta}_b = \frac{R_b}{R_s}(\beta\omega_3)$$

e $\dot{\Theta}_s$ é a velocidade angular procurada. Da figura:

$$\frac{R_b}{R_s} = \frac{X \sin\alpha_b}{X \sin\alpha_s} = \frac{\sin\alpha_b}{\sin\alpha_s}$$

Da fórmula (11.27):

$$\cos\alpha_s = \gamma = \frac{1+\beta\cos^2\alpha_b}{[1+(2\beta+\beta^2)\cos^2\alpha_b]^{1/2}} = \frac{1+\beta c^2}{[1+(2\beta+\beta^2)c^2]^{1/2}}$$

$$\sin^2\alpha_s = 1-\cos^2\alpha_s = 1 - \frac{(1+\beta c^2)^2}{1+(2\beta+\beta^2)c^2} = \frac{\cancel{1}+(\cancel{2\beta}+\beta^2)c^2-\cancel{1}-\cancel{2\beta c^2}-\beta^2c^4}{1+(2\beta+\beta^2)c^2}$$

$$= \frac{\beta^2c^2(1-c^2)}{1+(2\beta+\beta^2)c^2} = \frac{\beta^2c^2s^2}{1+(2\beta+\beta^2)c^2} \quad \text{onde } s = \sin\alpha_b$$

$$\left[\frac{\sin\alpha_b}{\sin\alpha_s}\right]^2 = \frac{1+(2\beta+\beta^2)c^2}{\beta^2 c^2} = \frac{1}{\beta^2}\left[\sec^2\alpha_b + (2\beta+\beta^2)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha_b}{\sin\alpha_s} = \frac{1}{\beta}\sqrt{2\beta+\beta^2+\sec^2\alpha_b}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_s = \sqrt{2\beta+\beta^2+\sec^2\alpha_b}\;\omega_3}$$

$(I_1 = I_2)$ <u>Outra derivação:</u>

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$$

$$\vec{L} = I_1 (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2) + I_3 \omega_3 \hat{e}_3$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{L}}{I_1} - \vec{\omega} = \underbrace{\left(\frac{I_3}{I_1} - 1\right) \omega_3}_{\Omega = \beta \omega_3} \hat{e}_3$$

$\vec{L} = I_1 (\Omega \hat{e}_3 + \vec{\omega}) \Rightarrow \vec{L}, \hat{e}_3$ e $\vec{\omega}$ são coplanares

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_3 + \underbrace{\frac{d'\hat{e}_3}{dt}}$$

↳ 0 porque $\hat{e}_3$ é fixo no corpo

$$\Rightarrow \frac{d\hat{e}_3}{dt} = \left(\frac{\vec{L}}{I_1} - \Omega \hat{e}_3\right) \times \hat{e}_3 = \frac{\vec{L} \times \hat{e}_3}{I_1}$$

Essa é a equação de rotação de $\hat{e}_3$ em torno do eixo fixo $\frac{\vec{L}}{I_1}$ com vel. angular $\frac{L}{I_1}$

$$\frac{L}{I_1} = \left[\Omega^2 + \omega^2 + 2\Omega\,\omega_3\right]^{1/2}$$

$$\omega_3 = \omega \cos \alpha_b$$

$$\Omega = \beta\,\omega_3$$

$$\frac{L}{I_1} = \left[\beta^2 \omega_3^2 + \sec^2 \alpha_b\, \omega_3^2 + 2\beta\,\omega_3^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\beta^2 + 2\beta + \sec^2 \alpha_b\right]^{1/2} \omega_3$$