F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

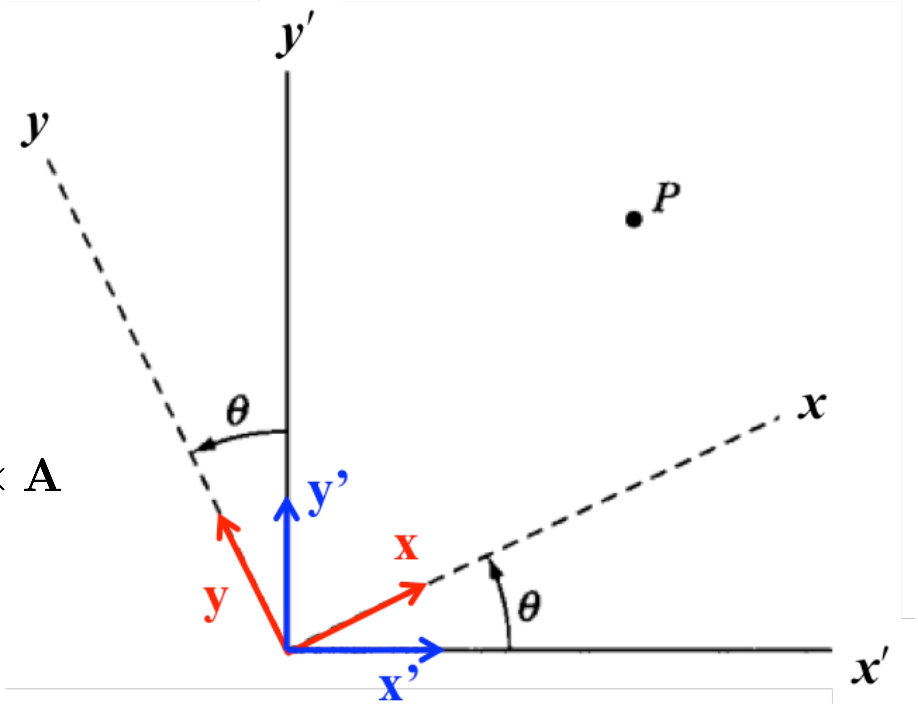
11/04/2024

Aula 10

Aula passada

Derivadas temporais de vetores dependem do referencial em que são medidas: se S gira em torno de S' com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$

Referenciais não inerciais girantes



$$\frac{d'\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

$$\frac{d'^2\mathbf{A}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{A}$$

2a. lei de Newton no referencial girante fica:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$$

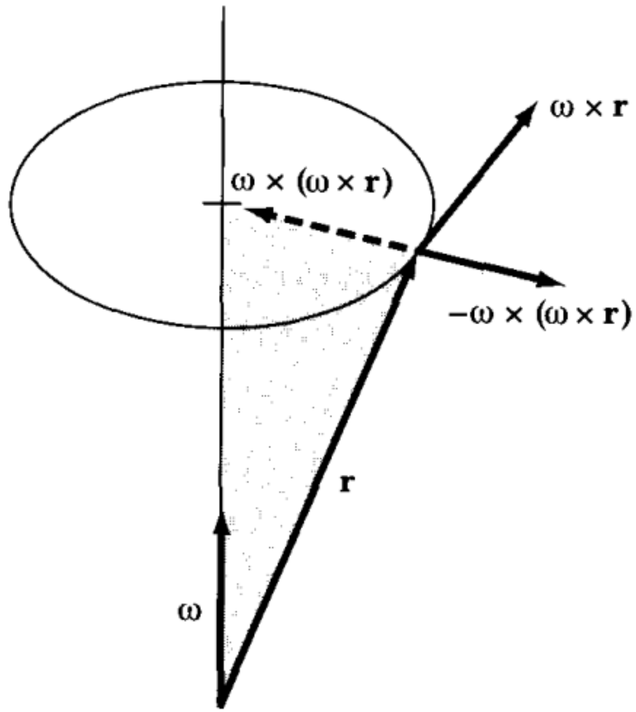
Forças não inerciais

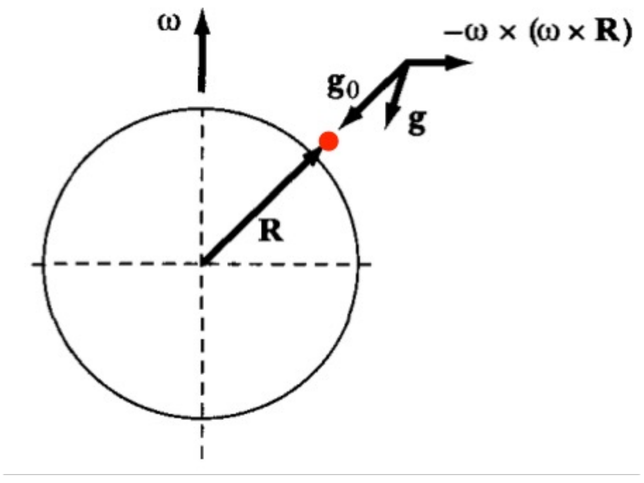
centrífuga

Coriolis

Aula passada

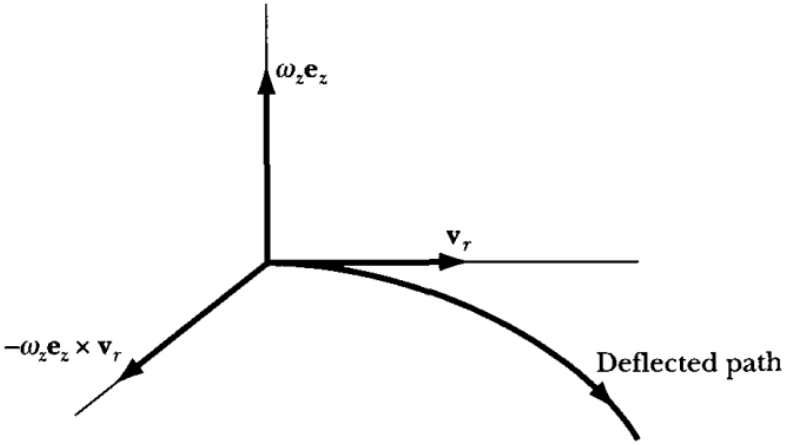
Forças não inerciais devido à rotação da Terra em torno de seu eixo: força centrífuga, peso aparente.



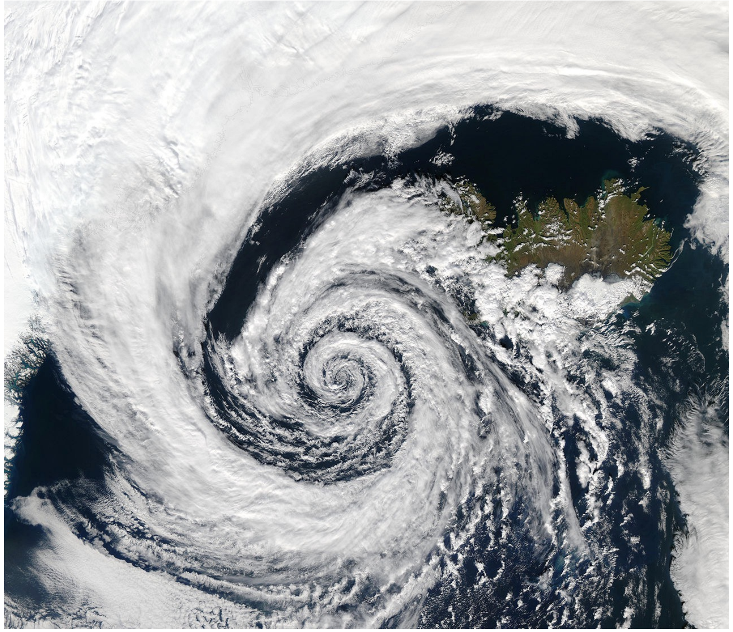


Aula passada

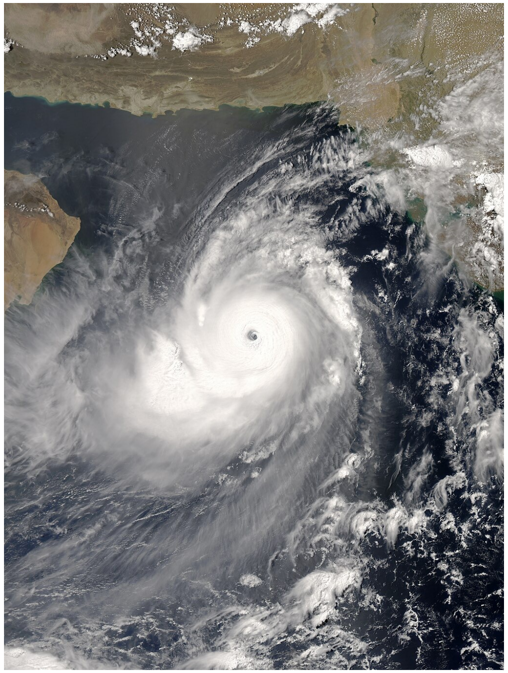
Força de Coriolis: direção de rotação de ciclones



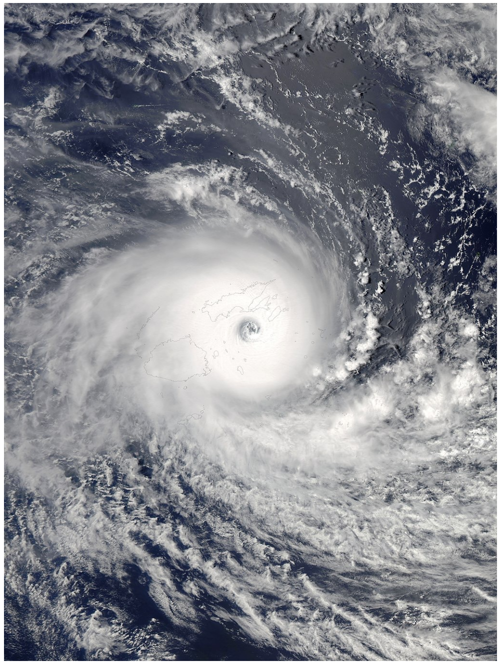
Perto da Islândia



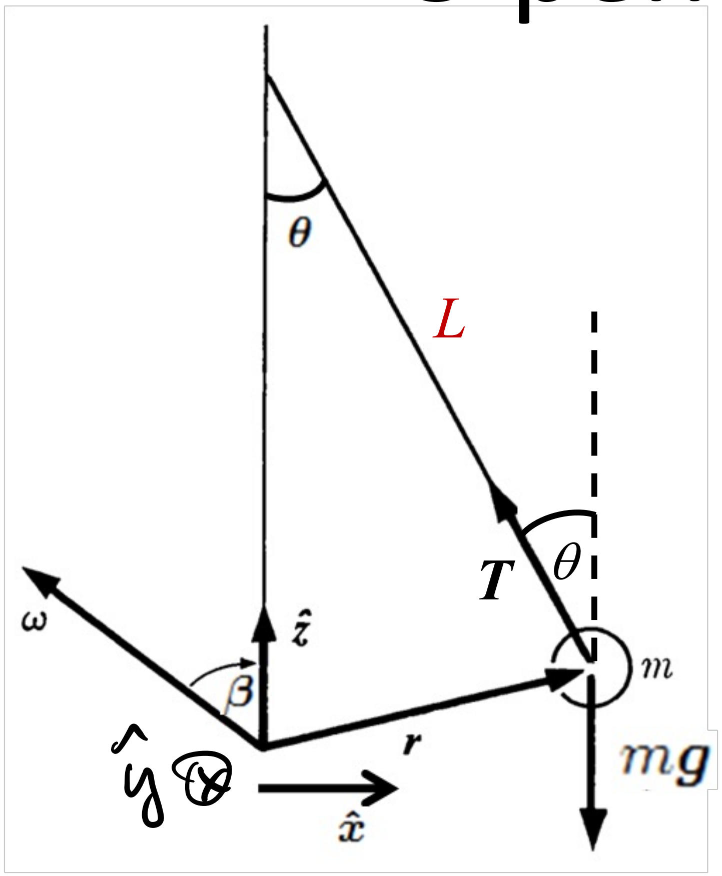
Mar do norte da Índia

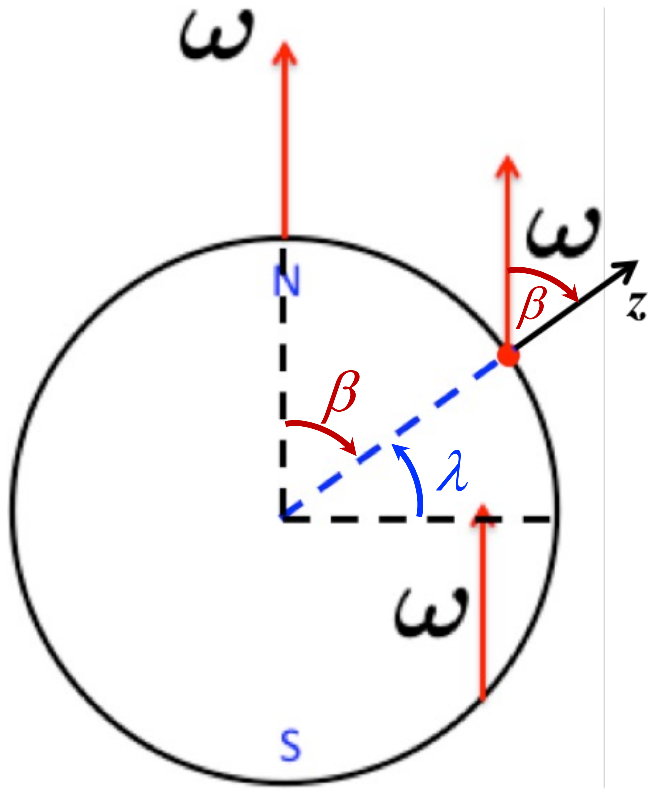


Pacífico Sul



O pêndulo de Foucault





Hemisfério norte:

$$\begin{aligned} \beta &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \lambda &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Hemisfério sul:

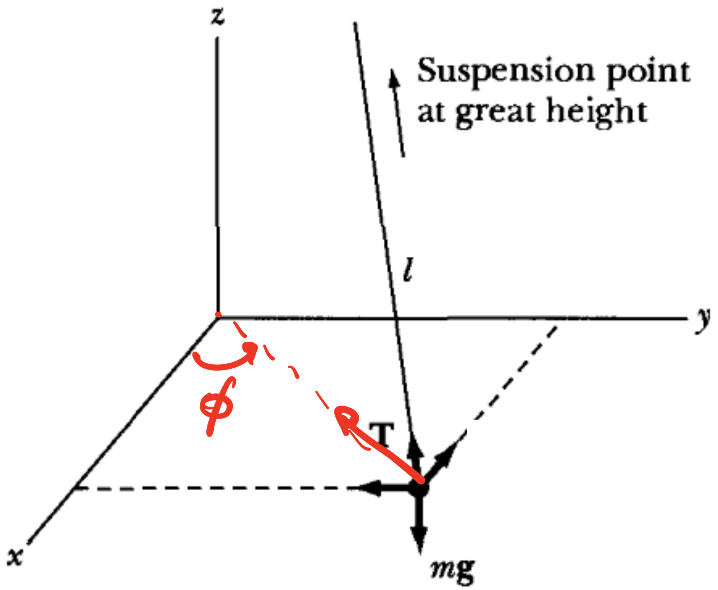
$$\begin{aligned} \beta &\in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ \lambda &\in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \end{aligned}$$

2a. lei de Newton no referencial da Terra: $m\mathbf{a} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$

Coordenadas da massa m:

$$\begin{aligned} x &= L \sin\theta \cos\phi \\ y &= L \sin\theta \sin\phi \\ z &= L\,(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{z}{L} = 1 - \cos\theta$



COMPONENTES DE $\vec{T}$:

$$T_z = T\cos\theta = T\left(1-\frac{z}{L}\right)$$

$$T_x = -T\sin\theta\cos\phi = -T\,\frac{x}{L}$$

$$T_y = -T\sin\theta\sin\phi = -T\,\frac{y}{L}$$

COMPONENTE DE $\vec{g}$:

$$\vec{g} = -g\,\hat{z}$$

VELOCIDADE ANGULAR $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = -\omega\sin\beta\,\hat{x} + \omega\cos\beta\,\hat{z} = -\omega\cos\lambda\,\hat{x} + \omega\sin\lambda\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}\times\vec{v} = \omega\left[-\cos\lambda\,\hat{x} + \sin\lambda\,\hat{z}\right]\times\left[\dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z}\right]$$

$$= -\omega\sin\lambda\,\dot{y}\,\hat{x} + (\dot{x}\,\omega\sin\lambda + \dot{z}\,\omega\cos\lambda)\,\hat{y} - \omega\cos\lambda\,\dot{y}\,\hat{z}$$

$$\ddot{x} = -\frac{T}{mL}x + 2\omega \sin\lambda\, \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{T}{mL}y - 2\omega \sin\lambda\, \dot{x} - 2\omega \cos\lambda\, \dot{z}$$

$$\ddot{z} = \frac{T}{m}\left(1 - \frac{z}{L}\right) - g + 2\omega \cos\lambda\, \dot{y}$$

OS TERMOS EM $\underline{\omega}$ SÃO MUITO PEQUENOS.

EM ORDEM DOMINANTE:

$$\ddot{x} = -\frac{T}{mL}x \;;\; \ddot{y} = -\frac{T}{mL}y \;;\; \ddot{z} = \frac{T}{m}\left(1 - \frac{z}{L}\right) - g$$

PARA PEQUENAS DEFLEXÕES ANGULARES, O MOVIMENTO VERTICAL É DESPREZÍVEL: $\dot{z} \cong \ddot{z} \cong 0,\; z \ll L$

$$0 = \frac{T}{m}\left(1 - \frac{z}{L}\right) - g \cong \frac{T}{m} - g \Rightarrow \boxed{T = mg}$$

LEVANDO EM $\ddot{x}$ E $\ddot{y}$

$$\ddot{x} = -\frac{T}{mL} x = -\frac{g}{L} x \quad \text{E} \quad \ddot{y} = -\frac{g}{L} y \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t) = A_x^0 \cos(\omega_0 t + \delta_x^0) \\ y(t) = A_y^0 \cos(\omega_0 t + \delta_y^0) \end{array}$$

NA PRÓXIMA ORDEM (SUB-DOMINANTE):

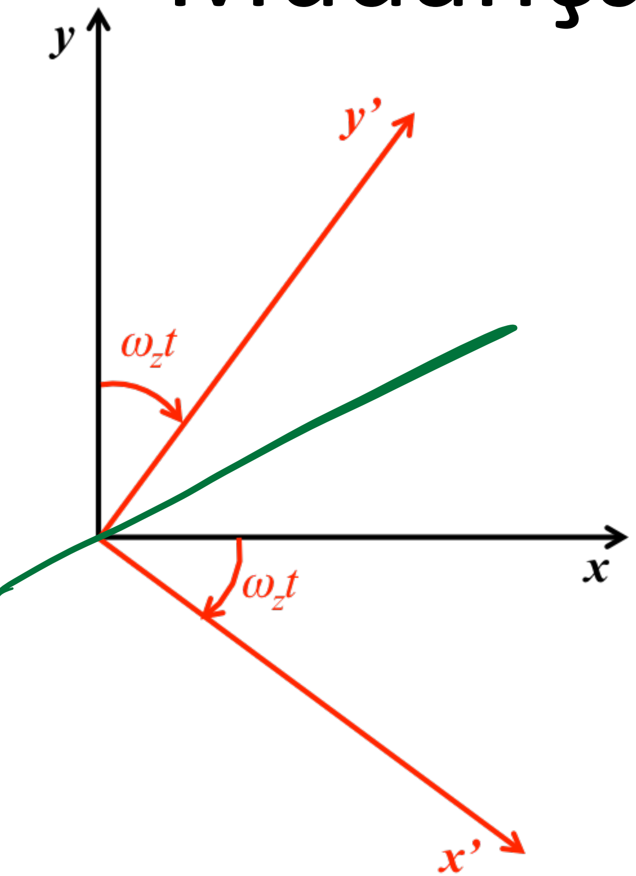
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \cong 2\omega_z \dot{y}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y \cong -2\omega_z \dot{x}$$

$$\boxed{\omega_z \equiv \omega \sin\lambda}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Mudança para um sistema girante



$$\begin{aligned} x &= \cos\omega_z t \; x' + \sin\omega_z t \; y' \\ y &= -\sin\omega_z t \; x' + \cos\omega_z t \; y' \end{aligned} \qquad (1)$$

$C = \cos\omega_z t$

$S = \sin\omega_z t$

$$\begin{aligned} x' &= \cos\omega_z t \; x - \sin\omega_z t \; y \\ y' &= \sin\omega_z t \; x + \cos\omega_z t \; y \end{aligned}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \simeq 2\omega_z \dot{y}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y \simeq -2\omega_z \dot{x}$$

$\frac{d}{dt}(1)$: $\dot{x} = C\dot{x}' + S\dot{y}' + \omega_z(-S x' + C y')$ (2)

$\dot{y} = -S\dot{x}' + C\dot{y}' + \omega_z(-C x' - S y')$

$\frac{d}{dt}(2)$: $\ddot{x} = C\ddot{x}' + S\ddot{y}' + \omega_z(-S\dot{x}' + C\dot{y}') + O(\omega_z^2)$

$\ddot{y} = \dots$

ATÉ ORDEM ω_z:

$$(\ddot{x}' + \omega_0^2 x')\cos\omega_z t + (\ddot{y}' + \omega_0^2 y')\sin\omega_z t = 0 \quad \forall\, t$$

SÓ É SATISFEITA $\forall\, t$ SE:

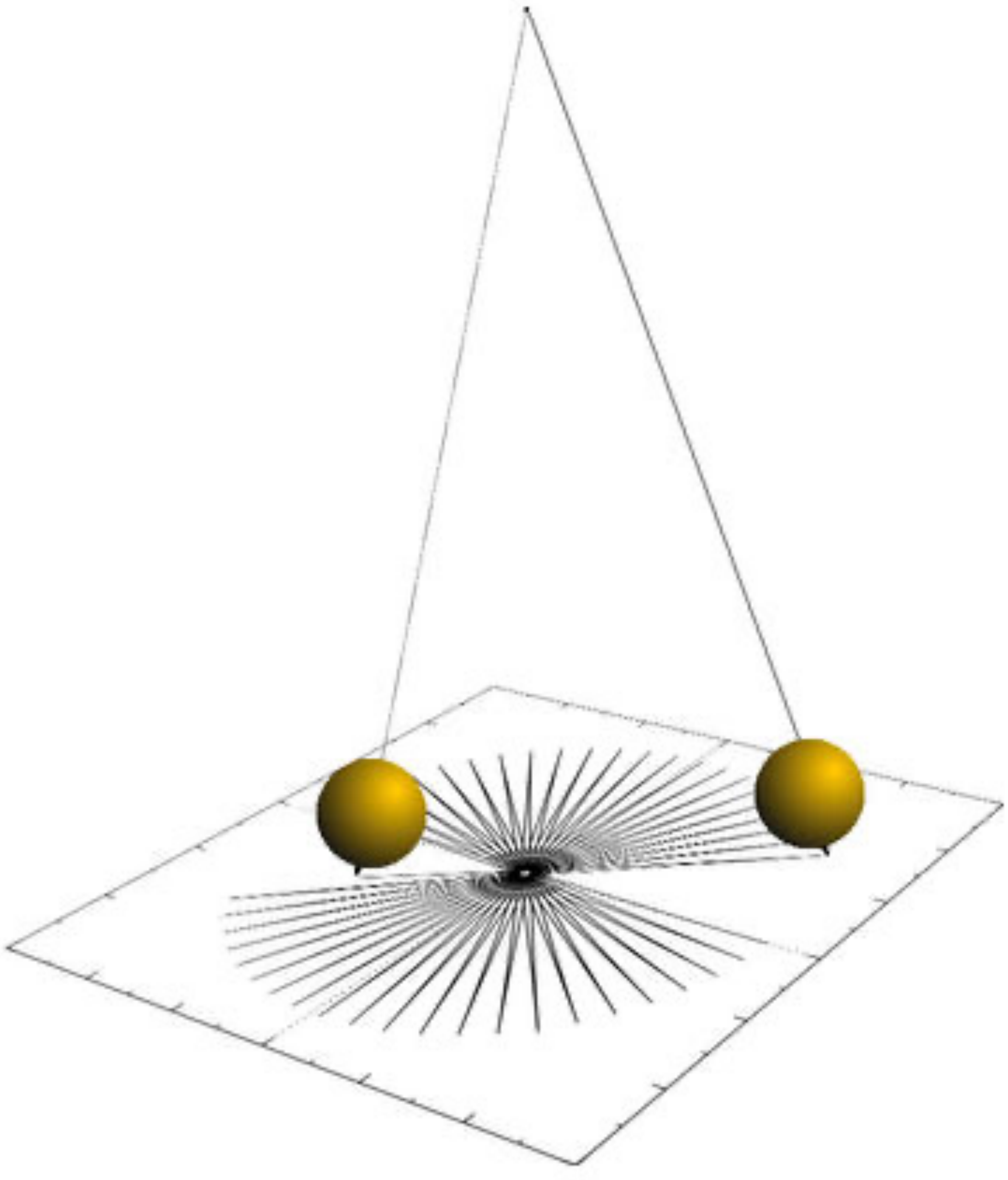
$$\ddot{x}' + \omega_0^2 x' = 0 \quad \text{E} \quad \ddot{y}' + \omega_0^2 y' = 0$$

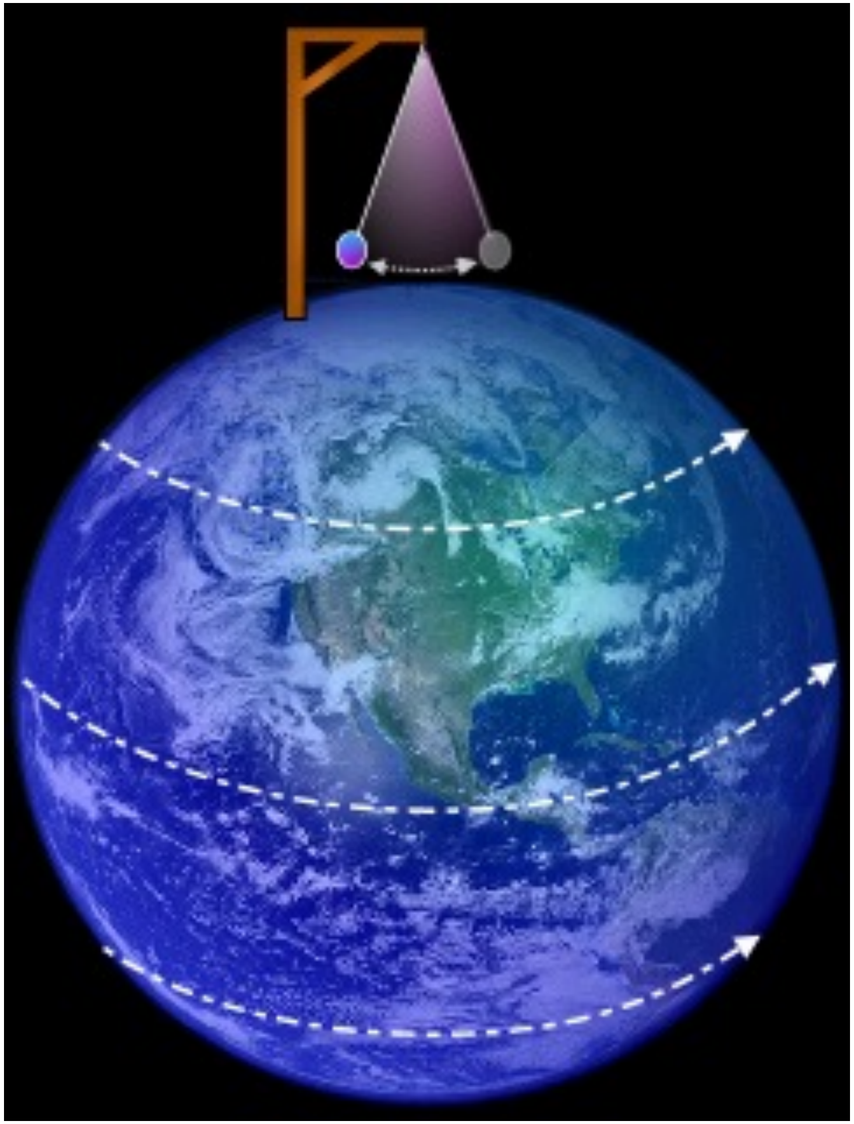
$$\begin{cases} x'(t) = A_x \cos(\omega_0 t + \delta_x) \\ y'(t) = A_y \cos(\omega_0 t + \delta_y) \end{cases}$$

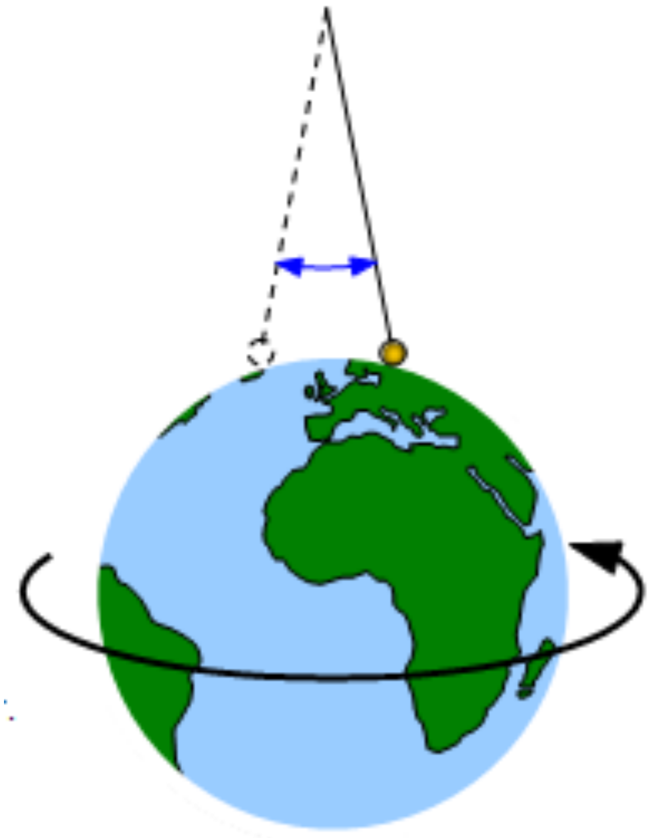
$\rightarrow$ A PARTÍCULA OSCILA NUM PLANO **FIXO** NO SISTEMA (x', y'). MAS, COMO S' GIRA COM VEL. ANGULAR $\omega_z = \omega \sin\lambda$ EM RELAÇÃO A S, EM S O OBSERVADOR VÊ O PLANO DE OSCILAÇÃO GIRAR COM VEL. ANGULAR $\omega_z = \omega \sin\lambda$

$$\omega \sin\lambda = \begin{cases} \text{POLO NORTE } \left(\lambda = \frac{\pi}{2}\right), \text{ SUL } \left(\lambda = -\frac{\pi}{2}\right) \\ \omega_z^N = \omega = \frac{2\pi}{1 \text{ DIA}} \qquad \omega_z^S = -\frac{2\pi}{1 \text{ DIA}} \\ \\ \text{CAMPINAS : } \lambda \simeq -23^\circ \end{cases}$$

$$T \simeq 61 \text{ h (ANTI-HORÁRIO)}$$

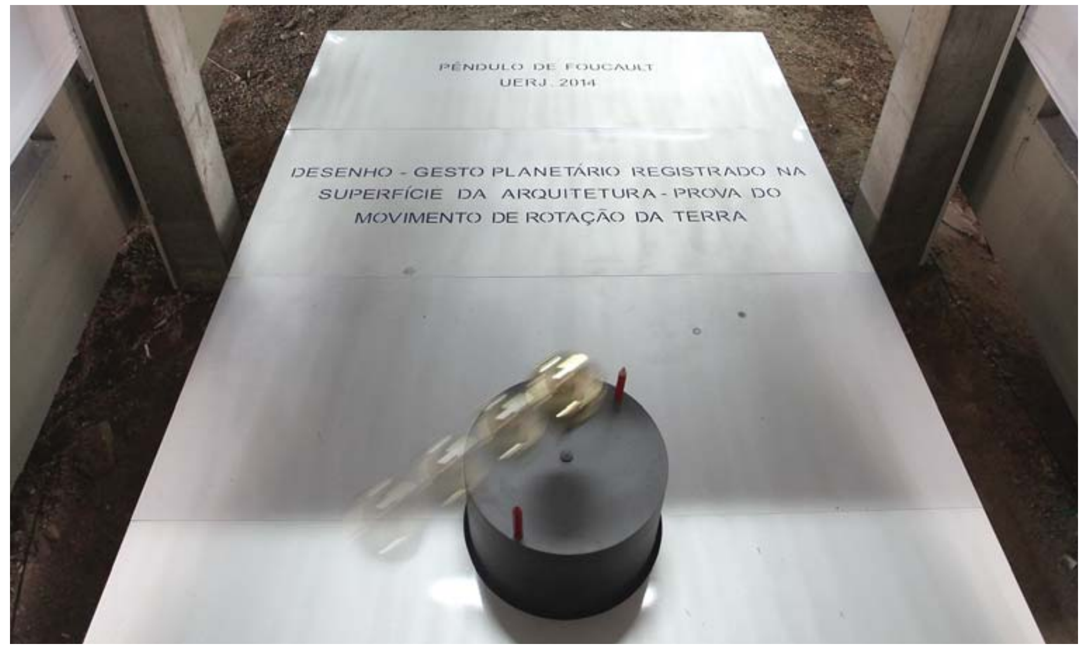






Fotografias de pêndulos de Foucault espalhados pelo mundo

No Panthéon, em Paris.



Na UERJ, no Rio de Janeiro