F 415 – Mecânica Geral II

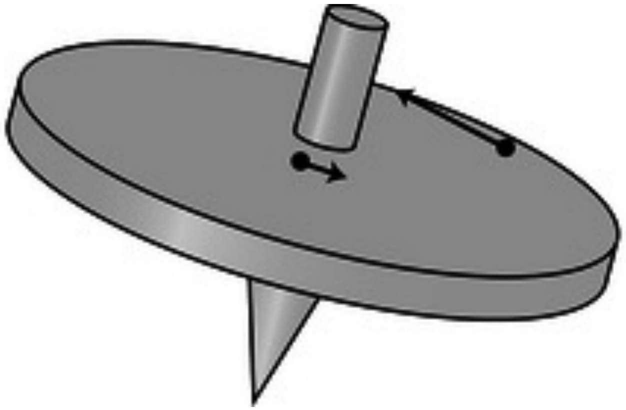
1º semestre de 2024

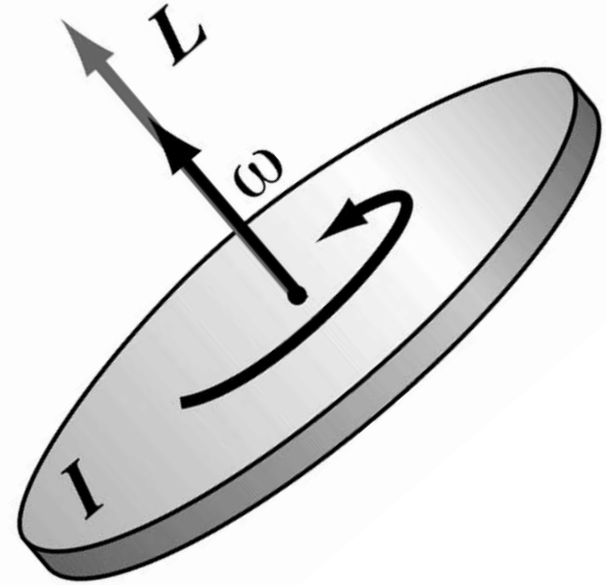
16/04/2024

Aula 11

Dinâmica de corpos rígidos

Corpos rígidos: definição

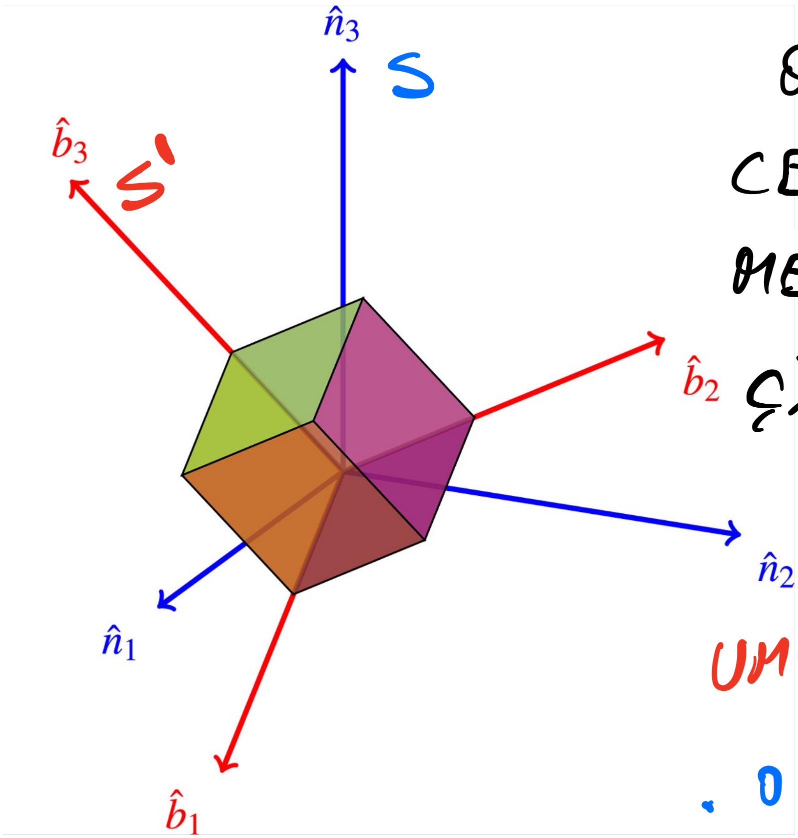




• UM CORPO RÍGIDO É UM SISTEMA DE PARTÍCULAS TAL QUE DURANTE SEU MOVIMENTO, AS PARTÍCULAS MANTÉM SUAS POSIÇÕES RELATIVAS CONSTANTES.

. ISSO É UMA IDEALIZAÇÃO, POIS CORPOS SÓLIDOS SE DEFORMAM.

Corpos rígidos: descrição



QUANTAS QUANTIDADES SÃO NECESSÁRIAS PARA DEFINIR UNIVOCAMENTE A POSIÇÃO E A ORIENTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO? $\boxed{6}$

. 3 COORDENADAS PARA LOCALIZAR UM PONTO DO CORPO:

. O CENTRO DE MASSA

. UM PONTO FIXO NO ESPAÇO.

A ORIENTAÇÃO ENVOLVE 3 NÚMEROS:

. 2 NÚMEROS PARA DEFINIR $\hat{b}_3$ (QUE TEM MÓDULO 1)

. 1 ÂNGULO PARA DEFINIR A ORIENTAÇÃO DE $\hat{b}_1$ E $\hat{b}_2$

Equação geral da dinâmica rotacional de um corpo rígido

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \mathbf{N}_Q}$$

TORQUE EXTERNO TOTAL DÁ A TAXA DE VARIAÇÃO TEMPORAL DO MOM. ANGULAR TOTAL

i) Q PODE SER UM PONTO FIXO NO ESPAÇO

ii) Q PODE SER O CENTRO DE MASSA.

O momento angular total de um corpo rígido

$$\mathbf{L} = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha$$

SE $\underline{S}$ FOR UM SISTEMA INERCIAL E $\underline{S'}$ FOR UM SISTEMA RIGIDAMENTE PRESO AO CORPO:

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \frac{d'\vec{r}_\alpha}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$$

MAS: $\frac{d'\vec{r}_\alpha}{dt} = 0$ POIS S' ESTÁ PRESO AO CORPO:

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha = \vec{v}_\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \sum_\alpha m_\alpha \left[r_\alpha^2 \, \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha)\vec{r}_\alpha \right]$$

$$\vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \left[r_\alpha^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_\alpha)\vec{r}_\alpha \right] \quad (1)$$

$$\vec{\omega}\cdot\vec{r}_\alpha = \sum_j \omega_j x_{\alpha j} \qquad (j = 1, 2, 3 \text{ ou } x, y, z)$$

TOMANDO A i-ÉSIMA COMPONENTE DE (1)

$$L_i = \sum_\alpha m_\alpha \left[r_\alpha^2 \omega_i - \left(\sum_j x_{\alpha j}\omega_j \right) x_{\alpha i} \right]$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left[r_\alpha^2 \left(\sum_j \delta_{ij}\omega_j \right) - \sum_j x_{\alpha i} x_{\alpha j}\omega_j \right]$$

$$= \sum_j \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \left[r_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right]}_{I_{ij}} \omega_j$$

$I_{ij} \rightarrow$ TENSOR DE INÉRCIA

$$\boxed{L_i = \sum_j I_{ij}\,\omega_j}$$

O tensor de inércia

$$I_{11} = \sum_\alpha m_\alpha \left[r_\alpha^2 - x_\alpha^2 \right] = \sum_\alpha m_\alpha \left[\cancel{x_\alpha^2} + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 - \cancel{x_\alpha^2} \right]$$

$$I_{11} = \sum_\alpha m_\alpha \underbrace{\left(y_\alpha^2 + z_\alpha^2 \right)}_{(\text{distância})^2 \text{ ao eixo } x}$$

= MOM. DE INÉRCIA EM RELAÇÃO AO x

$$I_{22} = \sum_\alpha m_\alpha \left(x_\alpha^2 + z_\alpha^2 \right)$$

= MOM. DE INÉRCIA EM R. A y

$$I_{33} = \sum_\alpha m_\alpha \left(x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \right) =$$

" " " " " " z

$$I_{12} = \sum_\alpha m_\alpha \left(-x_\alpha y_\alpha \right) = -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha = I_{21}$$

$$I_{13} = -\sum_\alpha m_\alpha \left(x_\alpha z_\alpha \right) = I_{31}$$

$$I_{23} = -\sum_\alpha m_\alpha \left(y_\alpha z_\alpha \right) = I_{32}$$

$\rightarrow$ PRODUTOS DE INÉRCIA

O tensor de inércia

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(r_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{i\alpha} x_{j\alpha}\right)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \sum_\alpha m_\alpha \left(y_\alpha^2 + z_\alpha^2\right) & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha \left(x_\alpha^2 + z_\alpha^2\right) & -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha \\ -\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha z_\alpha & -\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha & \sum_\alpha m_\alpha \left(x_\alpha^2 + y_\alpha^2\right) \end{pmatrix}$$

PROPRIEDADES DO TENSOR DE INÉRCIA

i) TENSOR / MATRIZ SIMÉTRICO(A)

ii) 6 COMPONENTES INDEPENDENTES

iii) DIMENSÃO: $[I_{ij}] = ML^2$

iv) DEPENDE DA ESCOLHA DO SISTEMA DE REFERÊNCIA

O momento angular **não** é necessariamente **colinear** com a velocidade angular!

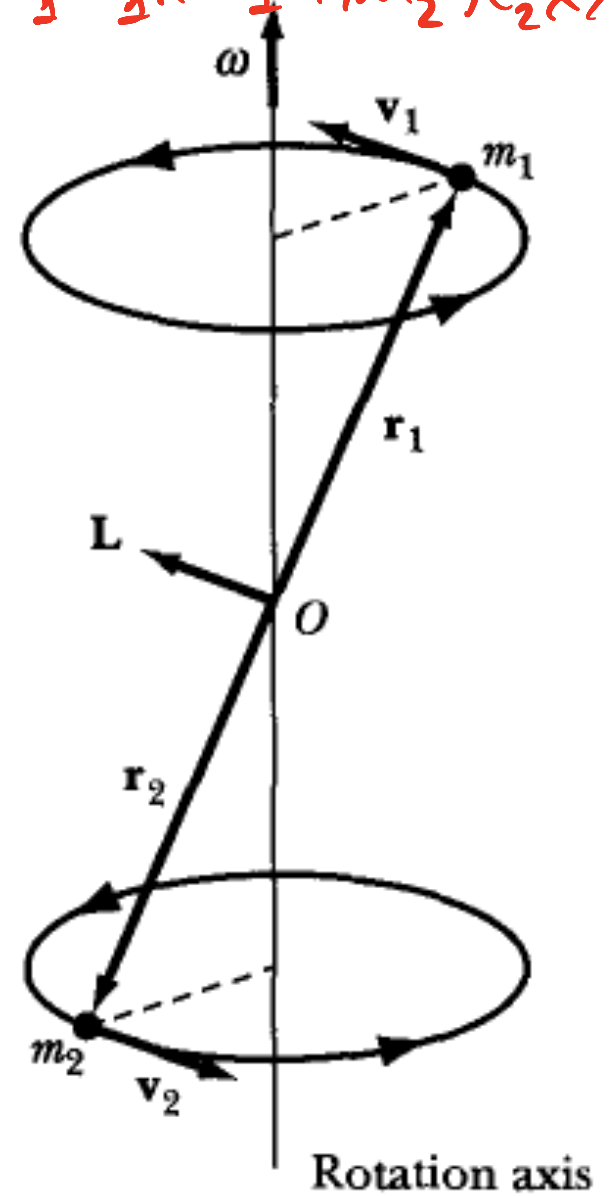
$\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha}$$

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha}$$

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j$$

$\to$ $\vec{L}$ E $\vec{\omega}$ NÃO SÃO NECESSARIAMENTE PARALELOS



A energia cinética total de um corpo rígido

$$T_{rot} = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}|\vec{v}_\alpha|^2 = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\underbrace{|\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha|^2}_{\underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha)}_{\vec{A}}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha)}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha) = \vec{\omega}\cdot(\vec{r}_\alpha\times\vec{A})$$

$$T_r = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\,\vec{\omega}\cdot(\vec{r}_\alpha\times\vec{A}) = \vec{\omega}\cdot\left[\sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}(\vec{r}_\alpha\times\underbrace{(\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha)}_{\vec{v}_\alpha})\right]$$

$$= \frac{\vec{\omega}}{2}\cdot\underbrace{\left[\sum_\alpha m_\alpha\,\vec{r}_\alpha\times\vec{v}_\alpha\right]}_{\vec{L}} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\sum_i \omega_i L_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_i I_{ij}\,\omega_j$$

Notação

$$\vec{\omega} \rightarrow \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad L_i = \sum_j I_{ij}\,\omega_j$$

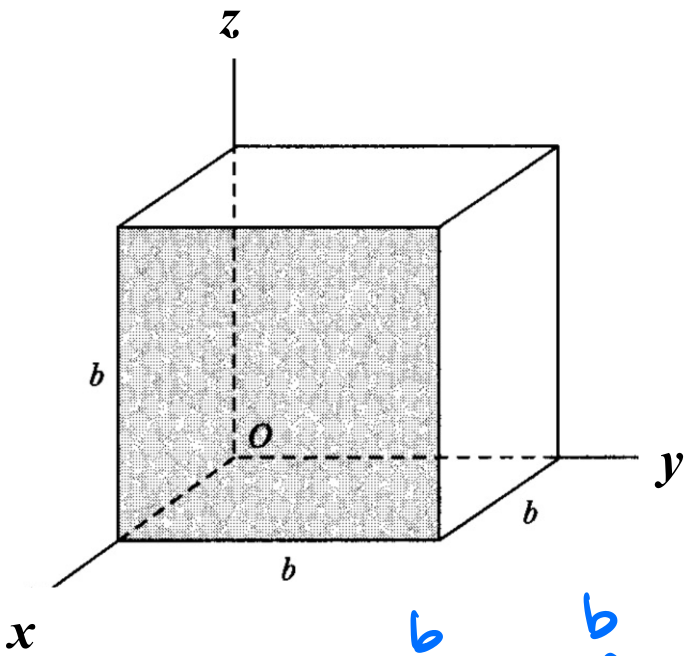
$$\underbrace{\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}}_{\vec{L}} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}}_{\vec{\vec{I}} \text{ ou } \bar{\bar{I}} \text{ ou } \underset{\approx}{I}} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}}_{\vec{\omega}}$$

$$\boxed{\vec{L} = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega}}$$

$$T = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\omega}^T \underset{\approx}{I} \underset{\sim}{\omega}$$

$$T_r = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & \underset{\approx}{I} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T_r = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega}}$$



Exemplo

CUBO UNIFORME DE MASSA $\underline{m}$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{b^3} \qquad dm = \rho\, dV = \rho\, dx\,dy\,dz$$

$$I_{11} = \rho \int_0^b\int_0^b\int_0^b (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{m}{\cancel{b^3}\,b^2}\cancel{b}\int_0^b dy\int_0^b dz\,(y^2+z^2) \qquad = \frac{2m}{b^2}\int_0^b dy\int_0^b dz\, y^2$$

$$= 2\frac{m}{\cancel{b^2}\,b}\cancel{b}\int_0^b dy\, y^2 = 2\frac{m}{b}\frac{b^3}{3} = \frac{2}{3}mb^2 = I_{22} = I_{33}$$

$$I_{12} = -\rho\int_0^b\int_0^b\int_0^b x\,y\,dx\,dy\,dz = -\frac{m}{b^3}\, b\int_0^b dx\int_0^b dy\; x\,y$$

$$= -\frac{m}{b^2}\left[\int_0^b x\,dx\right]^2 = -\frac{m}{b^2}\left[\frac{b^2}{2}\right]^2 = -\frac{mb^2}{4} = I_{13} = I_{23}$$

$$\underset{\sim}{I} = mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}$$