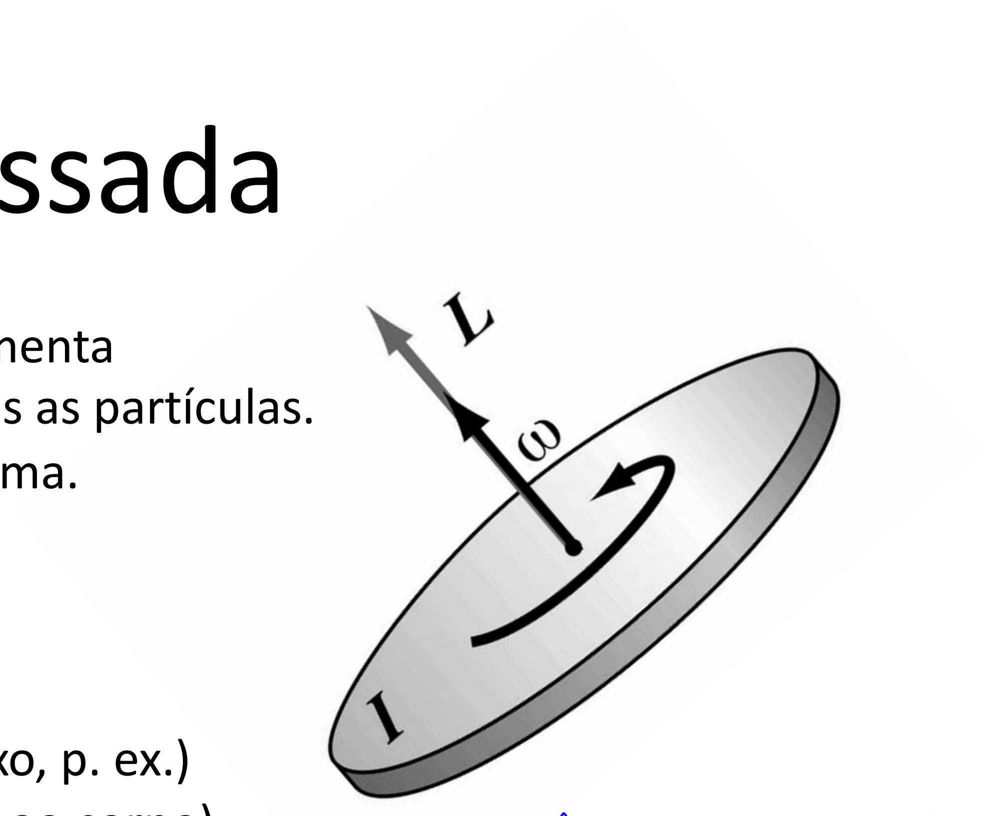
F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

18/04/2024

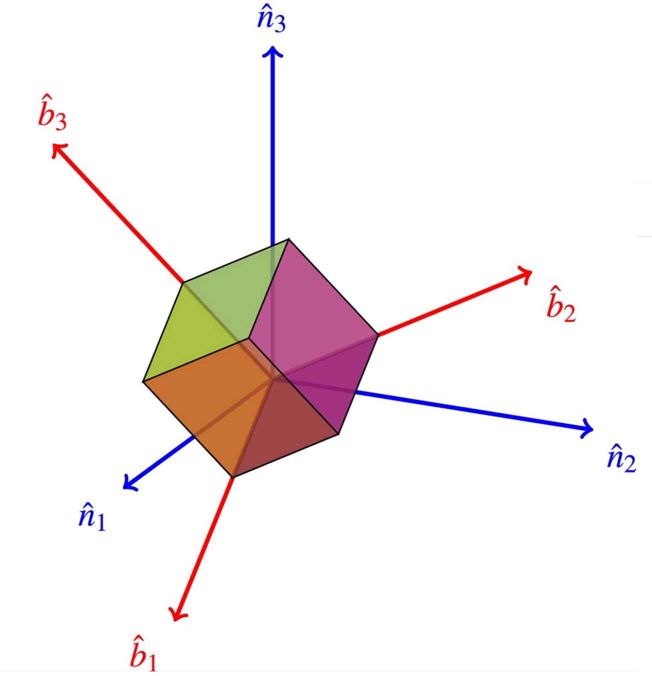
Aula 12

Aula passada



Corpo rígido: sistema de partículas que se movimenta mantendo fixas as distâncias relativas entre todas as partículas. Idealização de um corpo sólido que não se deforma.

Completamente descrito por:
- Um ponto qualquer do corpo (CM ou ponto fixo, p. ex.)
- A orientação do corpo (sistema de eixos preso ao corpo) em relação ao ponto acima (origem dos sistemas):
  - 3 números definem a orientação.



Dinâmica rotacional:
- Q é um ponto fixo.

  ou
- Q é o centro de massa.

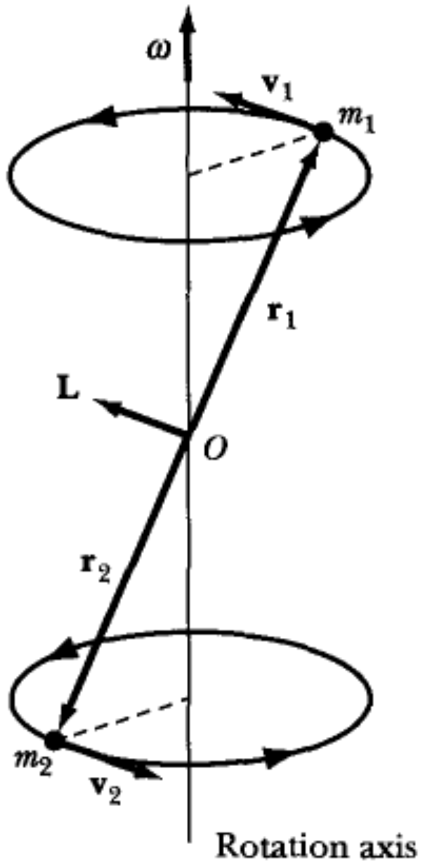
$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \mathbf{N}_Q}$$

Aula passada

Um corpo rígido com velocidade angular instantânea $\boldsymbol{\omega}$

$$L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j \Rightarrow \mathbf{L} = \mathsf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} I_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} \Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathsf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$$



I_{ij} são as componentes do tensor de inércia.

Importante: $\mathbf{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$ são, em geral, não co-lineares.

Aula passada

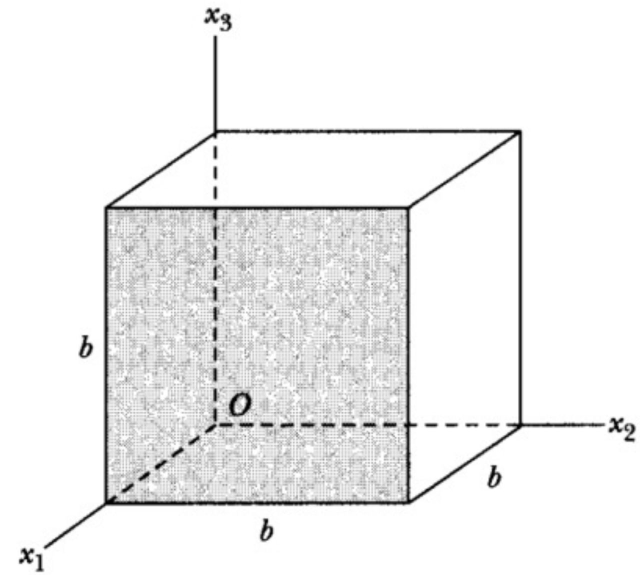
Tensor de inércia:

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(r_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{i\alpha} x_{j\alpha} \right) = \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha & -y_\alpha z_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Propriedades do tensor de inércia:
(a) depende da distribuição de massa do corpo.
(b) depende da origem e da orientação do sistema de coordenadas.
(c) é um tensor simétrico: 6 componentes independentes.
(d) elementos da diagonal são os momentos de inércia em relação aos eixos x, y e z.
(e) elementos fora da diagonal são os produtos de inércia.

Aula passada

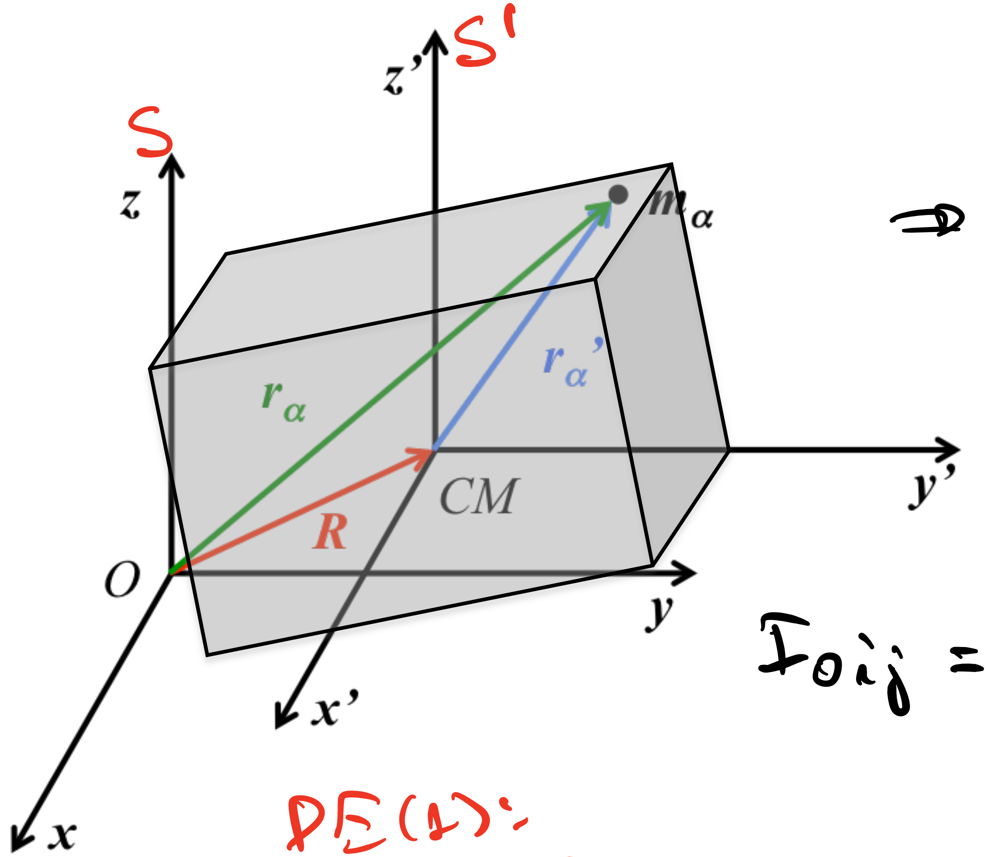
Tensor de inércia de um cubo de lado b em relação a um sistema de coordenadas com origem num vértice e eixos paralelos aos lados



$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(r_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{i\alpha} x_{j\alpha} \right) = \sum_\alpha m_\alpha \begin{pmatrix} y_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha & -y_\alpha z_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$I^O = Mb^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Teorema dos eixos paralelos



$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_\alpha \quad (1)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}_{M\vec{R}} = \underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha\right)}_{M} \vec{R} + \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}\,'_\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}\,'_\alpha = 0} \quad (2)$$

$$I_{Oij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[r_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right]$$

DE (1):

$$I_{Oij} = \sum_\alpha m_\alpha \left[|\vec{R} + \vec{r}\,'_\alpha|^2 \delta_{ij} - (R_i + x'_{\alpha i})(R_j + x'_{\alpha j}) \right]$$

$$= \sum_\alpha m_\alpha \left\{ \left[R^2 + (r'_\alpha)^2 + \underbrace{2\vec{R}\cdot\vec{r}\,'_\alpha}_{} \right] \delta_{ij} - R_i R_j - \underbrace{R_i x'_{\alpha j}}_{} - \cancel{R_j x'_{\alpha i}}^{\,0} - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j} \right\}$$

$$\hookrightarrow 2\vec{R}\cdot\left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}\,'_\alpha\right)\delta_{ij} = 0 \quad \text{DE (2)}$$

$$-R_i \sum_\alpha m_\alpha x'_{\alpha j} = 0 \quad \text{DE (2)}$$

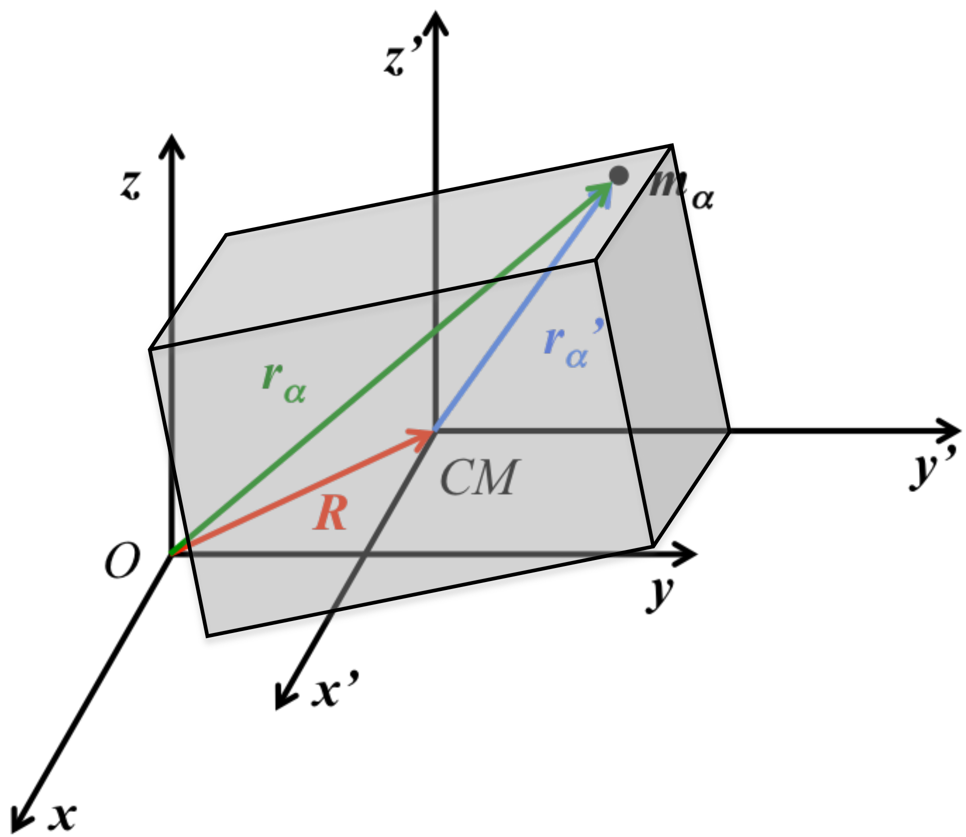
$$I_{0ij} = \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha \left(r'^2_\alpha \delta_{ij} - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j}\right)}_{I_{cm\,ij}} + \underbrace{\underbrace{\left(\sum_\alpha m_\alpha\right)}_{M} \left(R^2 \delta_{ij} - R_i R_j\right)}_{M\left(R^2\delta_{ij} - R_i R_j\right)}$$

$$\boxed{I_{0ij} = I_{cm\,ij} + M\left(R^2 \delta_{ij} - R_i R_j\right)}$$

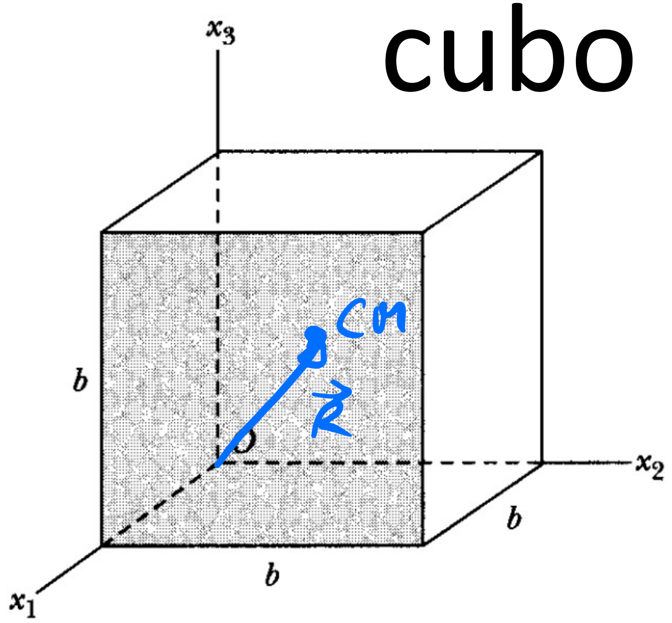
TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

Teorema dos eixos paralelos:

$$\boxed{I_{ij}^{O} = I_{ij}^{CM} + M\left(R^2\delta_{ij} - X_i X_j\right)}$$



Qual é o momento de inércia do cubo em relação ao CM?



$$I^O = Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}$$

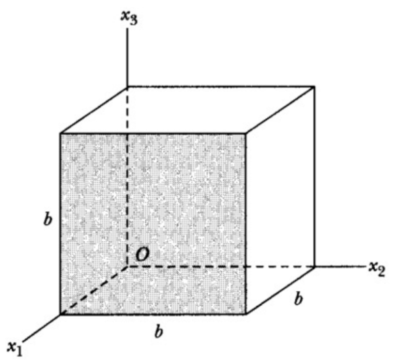
$$I_{ij}^O = I_{ij}^{CM} + M\left(R^2\delta_{ij} - X_iX_j\right)$$

$$\vec{R} = \frac{b}{2}\left(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}\right) \Rightarrow R^2 = b^2\left(\frac{3}{4}\right)$$

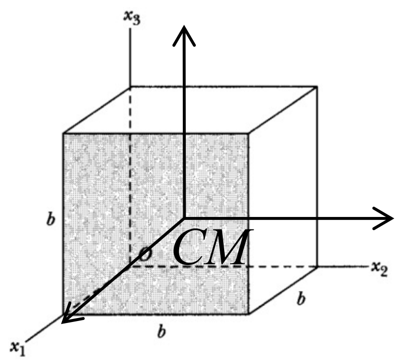
$$Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} = \underset{\approx}{I}^{CM} + M\left[\begin{pmatrix} 3b^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3b^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3b^2/4 \end{pmatrix} - \frac{b^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \underset{\approx}{I}^{CM} + Mb^2\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Tensor de inércia do cubo

Teorema dos eixos paralelos: $I_{ij}^{O} = I_{ij}^{CM} + M\left(R^2\delta_{ij} - X_iX_j\right)$

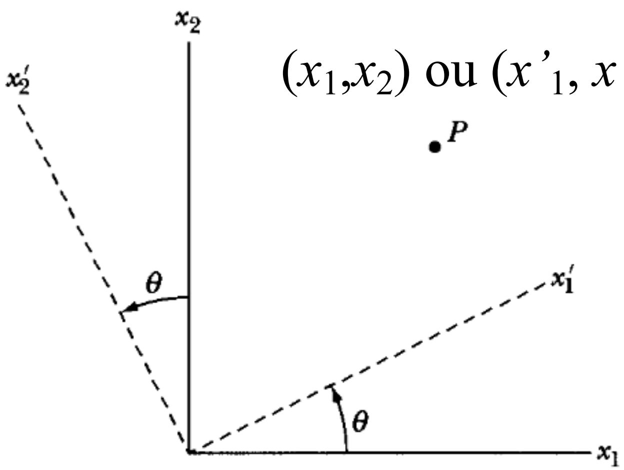


$$I^{O} = Mb^2\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



$$I^{CM} = \frac{Mb^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriedades de transformação de vetores sob rotações: duas dimensões



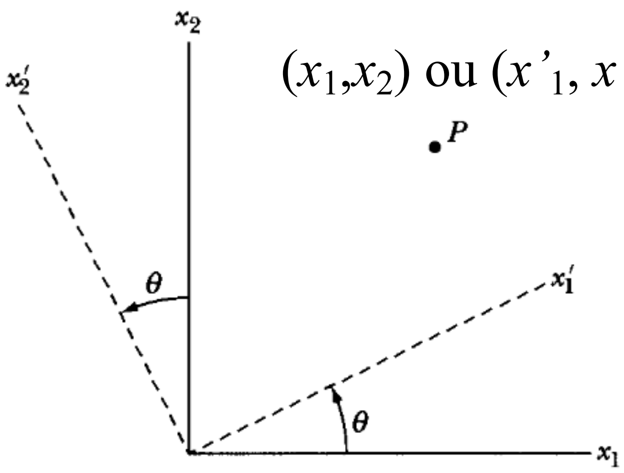
$$x_1' = \cos\theta \; x_1 + \sin\theta \; x_2$$
$$x_2' = -\sin\theta \; x_1 + \cos\theta \; x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A transformação inversa é obtida trocando θ por $-\theta$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Propriedades de transformação de vetores sob rotações: duas dimensões



$$x_1' = \cos\theta\ x_1 + \sin\theta\ x_2$$
$$x_2' = -\sin\theta\ x_1 + \cos\theta\ x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A transformação inversa é obtida com a matriz inversa.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que a matriz inversa é igual à transposta.

Propriedades de transformação de vetores sob rotações: três dimensões

EM 3D, EXISTE, PARA UMA DADA ROTAÇÃO, UMA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO ANÁLOGA: λ_{ij}

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x}' = \underset{\approx}{\lambda}\, \underset{\sim}{x} \qquad \underset{\sim}{y}' = \underset{\approx}{\lambda}\, \underset{\sim}{y}$$

PARA QUE $\underset{\approx}{\lambda}$ SEJA UMA ROTAÇÃO: $\underset{\sim}{x}^T \underset{\sim}{y} = (\underset{\sim}{x}')^T (\underset{\sim}{y}') =$

$$= (\underset{\approx}{\lambda}\, \underset{\sim}{x})^T \underset{\approx}{\lambda}\, \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x}^T \underbrace{\underset{\approx}{\lambda}^T \underset{\approx}{\lambda}}_{\underset{\approx}{1}} \underset{\sim}{y} \qquad \forall\, \vec{x} \text{ E } \vec{y}$$

$\underset{\approx}{\lambda}$ É UMA MATRIZ ORTOGONAL

$$\Rightarrow \underset{\approx}{\lambda}^T \underset{\approx}{\lambda} = \underset{\approx}{1} \Rightarrow \boxed{\underset{\approx}{\lambda}^{-1} = \underset{\approx}{\lambda}^T}$$

$\vec{L} = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega} \Longrightarrow L_i = \sum_j I_{ij}\,\omega_j \Longrightarrow \underset{\sim}{L} = \underset{\approx}{I}\,\underset{\sim}{\omega}$ (1)

$\vec{L}$ E $\vec{\omega}$ SÃO VETORES. PORTANTO:

$$\underset{\sim}{L}' = \underset{\approx}{\lambda}\,\underset{\sim}{L} \quad (2)$$

$$\underset{\sim}{\omega}' = \underset{\approx}{\lambda}\,\underset{\sim}{\omega} \quad (3)$$

LEVANDO (1) EM (2):

$$\underset{\sim}{L}' = \underset{\approx}{\lambda}\,\underset{\approx}{I}\,\underset{\sim}{\omega} \quad (4)$$

MAS, EM S': $\underset{\sim}{L}' = \underset{\approx}{I}'\,\underset{\sim}{\omega}'$ (5)

LEVO (5) EM (4): $\underset{\approx}{I}'\,\underset{\sim}{\omega}' = \underset{\approx}{\lambda}\,\underset{\approx}{I}\,\underset{\sim}{\omega}$ (6)

USANDO (3) EM (6): $\underset{\approx}{I}'\,\underset{\approx}{\lambda}\,\underset{\sim}{\omega} = \underset{\approx}{\lambda}\,\underset{\approx}{I}\,\underset{\sim}{\omega} \quad \forall\, \underset{\sim}{\omega}$

$$\Rightarrow \underset{\approx}{I}'\,\underset{\approx}{\lambda} = \underset{\approx}{\lambda}\,\underset{\approx}{I} \Rightarrow \boxed{\underset{\approx}{I}' = \underset{\approx}{\lambda}\,\underset{\approx}{I}\,\underset{\approx}{\lambda}^{-1} = \underset{\approx}{\lambda}\,\underset{\approx}{I}\,\underset{\approx}{\lambda}^{T}}$$

Como tensores se transformam sob rotações do sist. de coord.?

EM COMPONENTES: $\underset{\approx}{I}' = \underset{\approx}{\lambda}\, \underset{\approx}{I}\, \underset{\approx}{\lambda}^T$

$$I'_{ij} = (\underset{\approx}{\lambda}\, \underset{\approx}{I}\, \underset{\approx}{\lambda}^T)_{ij} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda^T_{lj}$$

$$= \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda^T_{lj} I_{kl} = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \lambda_{jl} I_{kl}$$

TENSORES DE ORDEM $\underline{n}$: $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{j_1, \ldots, j_n} \lambda_{i_1 j_1} \lambda_{i_2 j_2} \cdots \lambda_{i_n j_n} T_{j_1 j_2 \ldots j_n}$$

Eixos principais

SUPONHA QUE, NUM DETERMINADO SISTEMA DE REF.,

I_{ij} SEJA DIAGONAL:

$$\underset{\sim}{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \Rightarrow I_{ij} = I_i \delta_{ij}$$

NESSE CASO, SE: $\underset{\sim}{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, OU SEJA, $\vec{\omega}$ É

PARALELA AO EIXO $\underline{x}$,

$$\underset{\sim}{L} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = I_1 \begin{pmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = I_1 \vec{\omega} \Rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

É CLARO QUE, SE $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{y}$ OU $\omega_0 \hat{z}$

$\Rightarrow \vec{L} = I_2 \vec{\omega}$ E $\vec{L} = I_3 \vec{\omega}$, RESPECTIVAMENTE.

OS EIXOS DESSE SISTEMA SÃO TAIS QUE,

SE $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{e}_i$ $(i = 1, 2, 3) \Longrightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$

ESSES EIXOS DO SISTEMA EM QUE $\overline{\overline{I}}$ É DIAGONAL SÃO CHAMADOS DE EIXOS PRINCIPAIS.

DA ÁLGEBRA LINEAR E DO FATO DE I_{ij} SER SIMÉTRICO, EXISTE $\underset{\approx}{\lambda}$ TAL QUE:

$$\underset{\approx}{I'} = \underset{\approx}{\lambda} \, \underset{\approx}{I} \, \underset{\approx}{\lambda}^T \text{ É DIAGONAL}$$

$$I'_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$