F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

23/04/2024

Aula 13

Aulas passadas

Dinâmica rotacional de corpos rígidos:

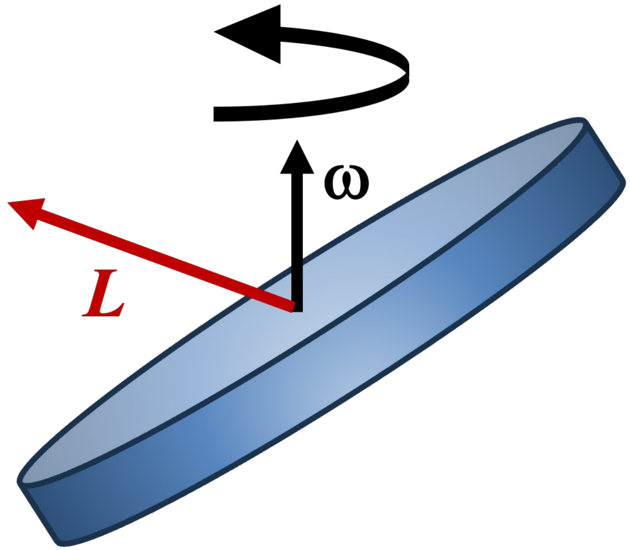
- Q é um ponto fixo.

  ou

- Q é o centro de massa.

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \mathbf{N}_Q}$$

Um corpo rígido com velocidade angular instantânea $\boldsymbol{\omega}$



$$L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j \Rightarrow \mathbf{L} = \mathsf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} I_{ij}\omega_i\omega_j \Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathsf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}$$

I_{ij} são as componentes do tensor de inércia.

<u>Importante</u>: $\mathbf{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$ são, em geral, <u>não co-lineares</u>.

Aulas passadas

Tensor de inércia:

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(r_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{i\alpha} x_{j\alpha} \right) = \sum_\alpha m_\alpha \left(\begin{array}{ccc} y_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha & -y_\alpha z_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \end{array} \right)$$

Propriedades do tensor de inércia:

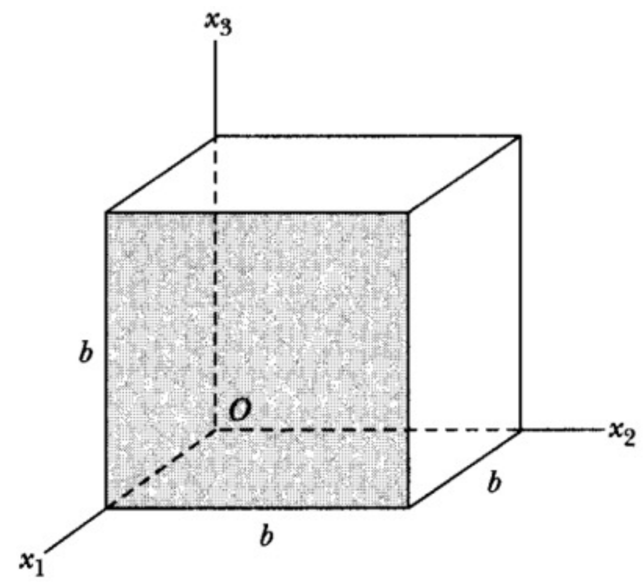
(a) depende da distribuição de massa do corpo.

(b) depende da origem e da orientação do sistema de coordenadas.

(c) é um tensor simétrico: 6 componentes independentes.

Aulas passadas

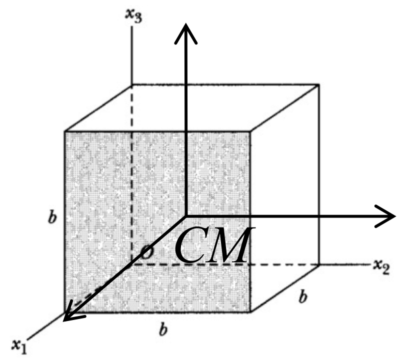
Tensor de inércia de um cubo de lado b em relação a um sistema de coordenadas com origem num vértice e eixos paralelos aos lados



$$I^O = Mb^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Teorema dos eixos paralelos:

$$\boxed{I^O_{ij} = I^{CM}_{ij} + M\left(R^2\delta_{ij} - X_i X_j\right)}$$



$$I^{CM} = \frac{Mb^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aula passada

Leis de transformações sob rotações:

vetores $$v'_i = \sum_j \lambda_{ij} v_j$$

tensores $$T'_{ij} = \sum_{kl} \lambda_{ik}\lambda_{jl} T_{kl}$$

onde λ é uma matriz ortogonal: $\lambda^{-1}_{ij} = \lambda^T_{ij} = \lambda_{ji}$

Em notação matricial: $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{a} \qquad \mathsf{T}' = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathsf{T} \cdot \boldsymbol{\lambda}^T$

Eixos principais: sistema no qual o tensor de inércia é diagonal $\boldsymbol{\hat{e}_1}, \boldsymbol{\hat{e}_2}, \boldsymbol{\hat{e}_3}$

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Se **ω** aponta ao longo de um eixo principal, então **L** e **ω** são colineares.

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\hat{e}_i} \iff \boldsymbol{L} \parallel \boldsymbol{\omega}}$$

Como achar os eixos principais?

CONSIDERE I_{ij} NUM SISTEMA QUALQUER TAL QUE ELE NÃO É DIAGONAL, SEJA $\vec{\omega}$ UMA VEL. ANGULAR NA DIREÇÃO DE UM EIXO PRINCIPAL.

E:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{L} = I\vec{\omega} \\ \vec{L} = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

EM COMPONENTES: $\sum_j I_{ij}\omega_j = I\omega_i$ OU

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_{11}-I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22}-I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33}-I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

SÓ TEM SOLUÇÃO NÃO TRIVIAL SE:

$$\begin{vmatrix} I_{11}-I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22}-I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33}-I \end{vmatrix} = 0$$

- EQUAÇÃO SECULAR
- EQ. DE 3º GRAU EM I
- VEREMOS QUE AS 3 RAÍZES SÃO REAIS E POSITIVAS:

I_1, I_2, I_3

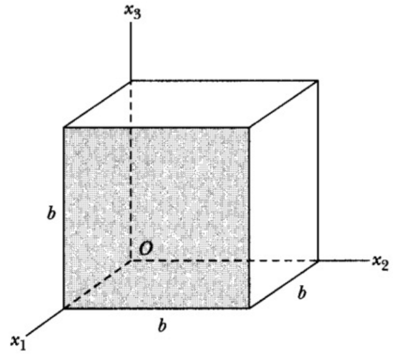
UMA VEZ ENCONTRADOS I_1, I_2, I_3, SUSTITUÍMOS CADA UM NA EQ. (1) E OBTEMOS AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS: $\vec{\omega}^{(1)}$, $\vec{\omega}^{(2)}$, $\vec{\omega}^{(3)}$

CADA $\vec{\omega}^{(k)}$ TEM MÓDULO INDEFINIDO, POIS SE $\vec{\omega}^{(k)}$ É AUTO-VETOR $\lambda\vec{\omega}^{(k)}$ TAMBÉM É.

É CONVENIENTE, PARA USO POSTERIOR, NORMALIZÁ-LOS A 1:

$$|\vec{\omega}^{(k)}| = 1$$

Exemplo: Vamos achar os eixos principais do cubo se a origem é um dos vértices.



$$I^O = Mb^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2/3 - I & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 - I & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & \frac{2}{3} - I \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{3} - I\right)^3 + \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \times 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{2}{3} - I\right) \times 3$$

$$= \left(\frac{2}{3} - I\right)^3 - \frac{3}{16}\left(\frac{2}{3} - I\right) - \frac{1}{32} = 0$$

$I_1 = \frac{1}{6}$, $I_2 = I_3 = \frac{11}{12}$

$I_1 = \frac{1}{6}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1/4 & -1/4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = 0$$

$2\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$

$-\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 = 0$

$\hookrightarrow \omega_1 = 2\omega_2 - \omega_3$

$$2(2\omega_2-\omega_3)=\omega_2+\omega_3 \Rightarrow 3\omega_2=3\omega_3 \Rightarrow \boxed{\omega_2=\omega_3=\omega_1}$$

NORMALIZANDO A UM:

$$\hat{\omega}^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$$

$I_2=I_3$:

$=\frac{11}{12}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\omega_1+\omega_2+\omega_3=0}$$

DEFINE UM PLANO

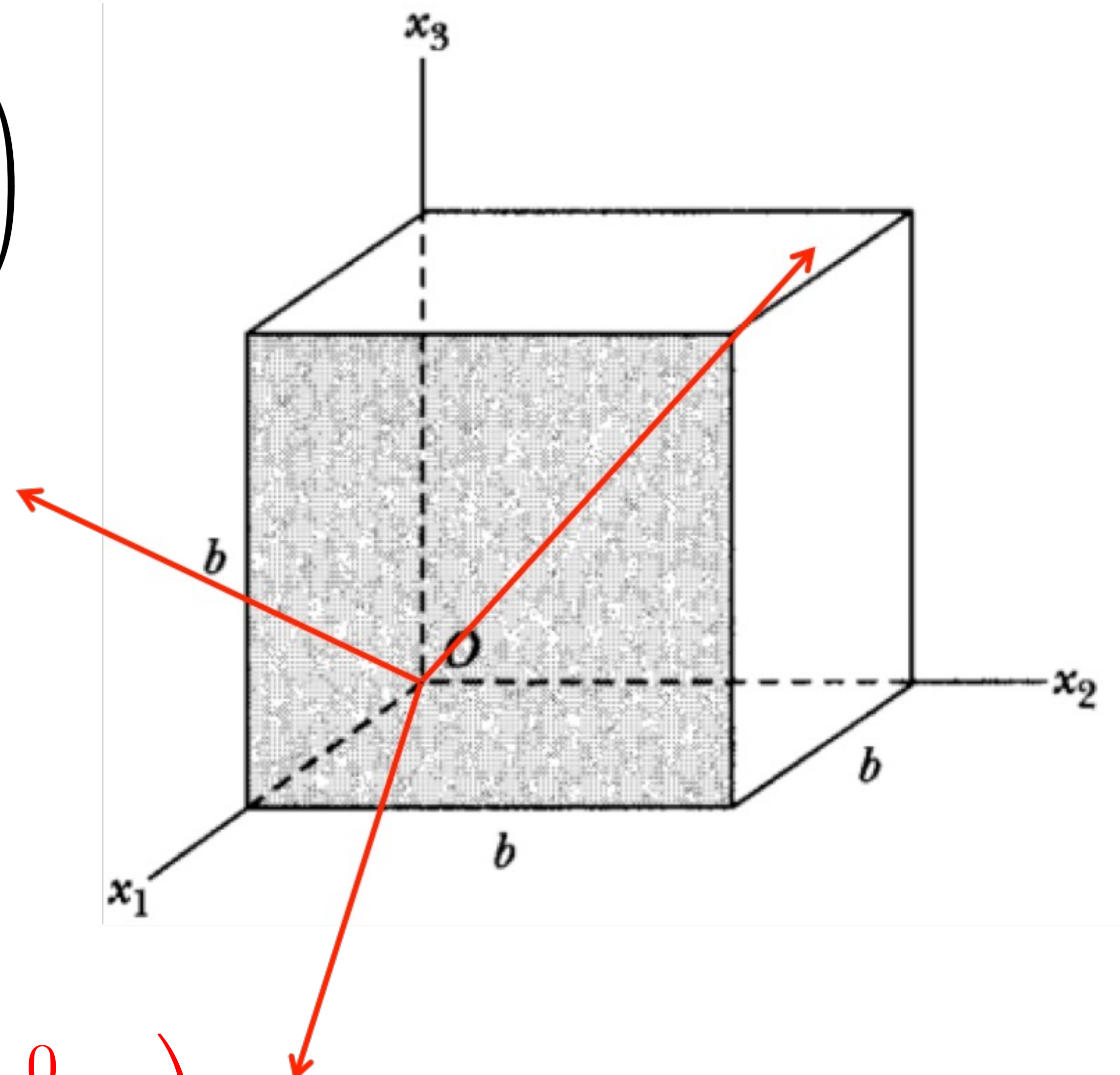
ESCOLHENDO DUAS DIREÇÕES ORTOGONAIS ENTRE SI

NO PLANO:

$$\vec{\omega}^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{y})$$

$$\vec{\omega}^{(3)}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{x}+\hat{y}-2\hat{z})$$

$$I^O = Mb^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



$$I^{O\prime} = Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 11/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/12 \end{pmatrix}$$

Teoremas

Decorre do fato do tensor de inércia ser um tensor real simétrico que:

Teorema 1: Todos os auto-valores são reais.

Teorema 2: Auto-vetores de auto-valores diferentes são ortogonais entre si.

Teorema 3: Se houver um auto-valor duplamente/triplamente degenerado, sempre se podem achar dois/três auto-vetores correspondentes a eles que sejam ortogonais entre si.

A matriz de rotação para os eixos principais

SEJA O AUTO-VALOR I_k $(k=1,2,3)$ E O AUTO-VETOR CORRESPONDENTE $\vec{\omega}^{(k)}$

$$\overline{\overline{I}} \cdot \vec{\omega}^{(k)} = I_k \vec{\omega}^{(k)} \quad (3)$$

SEJA $\underset{\approx}{\lambda}$ A MATRIZ DE ROTAÇÃO PROCURADA:

$$(2) \quad \underset{\approx}{\lambda}\, \underset{\approx}{I}\, \underset{\approx}{\lambda}^T = \underset{\approx}{I}' \Rightarrow \underset{\approx}{I}' = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = I_i \delta_{ij}$$

MULTIPLICO (2) PELA ESQUERDA POR $\underset{\approx}{\lambda}^T = \underset{\approx}{\lambda}^{-1}$:

$$\underset{\approx}{I}\, \underset{\approx}{\lambda}^T = \underset{\approx}{\lambda}^T \underset{\approx}{I}' \Rightarrow \sum_j I_{ij} \lambda^T_{jk} = \sum_j \lambda^T_{ij} I'_{jk} = \sum_j \lambda^T_{ij} I_j \delta_{jk}$$

$$= \lambda^T_{ik} I_k$$

$$\sum_j I_{ij}\lambda^T_{jk} = I_k \lambda^T_{ik} \quad (4)$$

ESCREVENDO (3) EM COMPONENTES:

$$\sum_j I_{ij}\,\omega_j^{(k)} = I_k\,\omega_i^{(k)} \quad (5)$$

COMPARANDO A (4) E A (5):

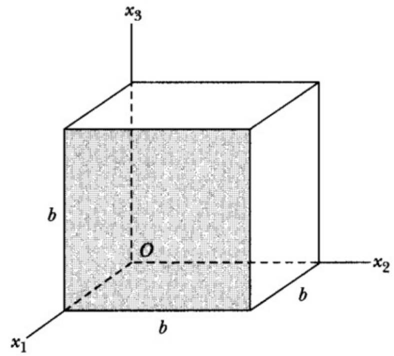
$$\lambda^T_{jk} = \boxed{\omega_j^{(k)} = \lambda_{kj}}$$

$$\underset{\approx}{\lambda} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \omega_3^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & \omega_3^{(2)} \\ \omega_1^{(3)} & \omega_2^{(3)} & \omega_3^{(3)} \end{pmatrix}$$

AS LINHAS DE $\underset{\approx}{\lambda}$ SÃO AS COMPONENTES DE CADA AUTO-VETOR

PARA QUE $\underset{\approx}{\lambda}$ SEJA ORTOGONAL É PRECISO QUE OS $\vec{\omega}^{(k)}$ SEJAM ORTONORMALIZADOS

Exemplo:



$$I^O = Mb^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \frac{Mb^2}{6} \rightarrow \boldsymbol{\omega}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3\right)$$

$$I_2 = I_3 = \frac{11}{12}Mb^2 \rightarrow \begin{array}{c} \boldsymbol{\omega}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2\right) \\ \boldsymbol{\omega}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 - 2\hat{\mathbf{e}}_3\right) \end{array}$$

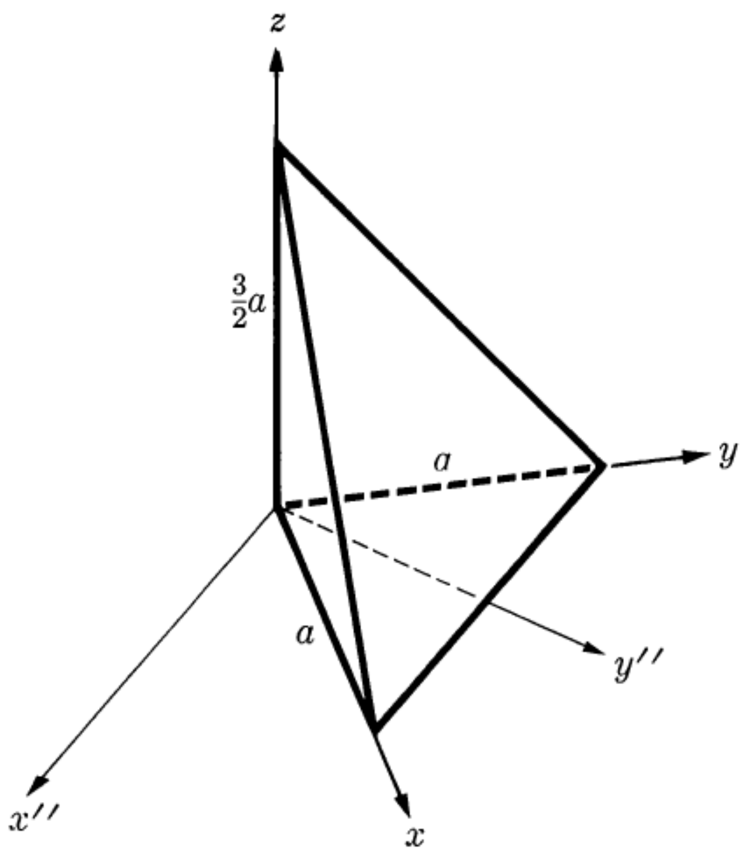
$$\underset{\approx}{\lambda} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

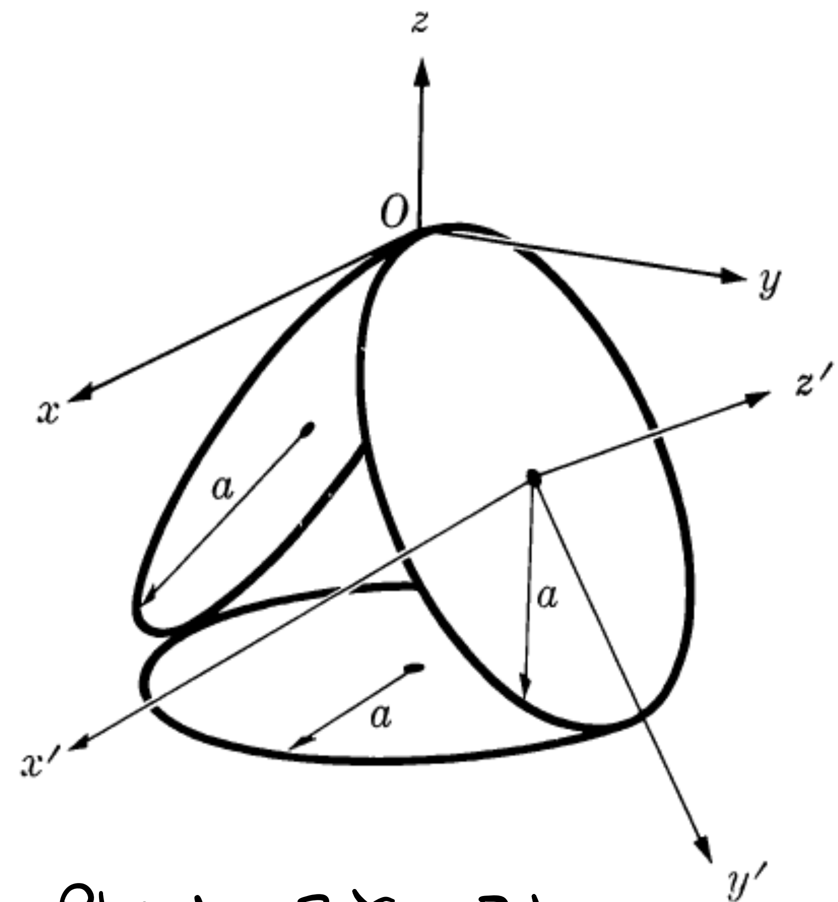
$$\underset{\approx}{\lambda}\, \underset{\approx}{I}^{o}\, \underset{\approx}{\lambda}^{T} = Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 11/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/12 \end{pmatrix}$$

PROVEM

Propriedades de simetria do tensor de inércia

Plano de simetria: é um plano tal que o corpo permanece o mesmo se espelhado por ele.





PLANO zy''

EIXO x'' É EIXO PRINCIPAL

PLANO zx, zy

y, x SÃO EIXOS PRINCIPAIS

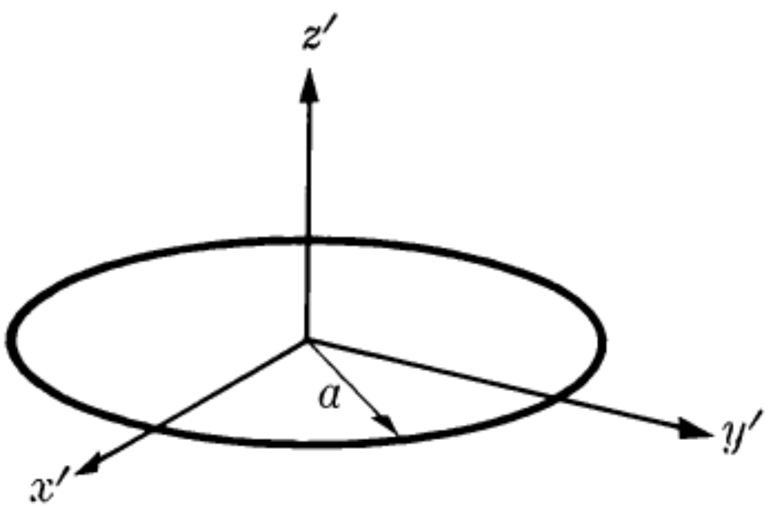
SE O CORPO TEM UM PLANO σ DE SIMETRIA

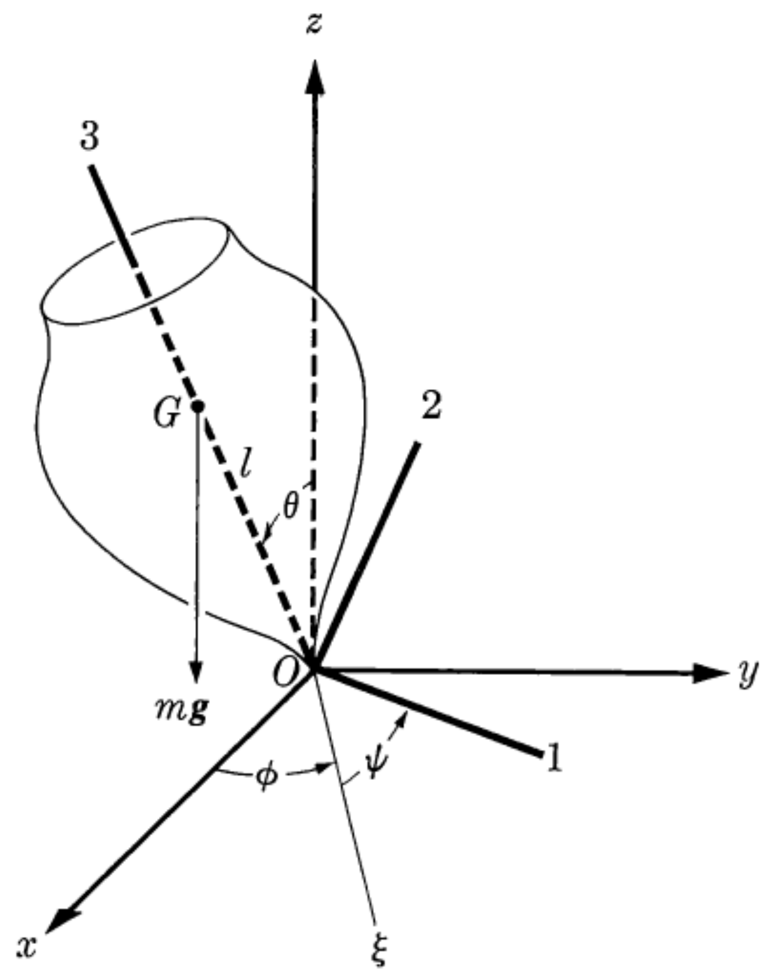
O EIXO PERPENDICULAR AO PLANO É

EIXO PRINCIPAL

Propriedades de simetria do tensor de inércia

Eixo de simetria: é um eixo tal que o corpo permanece o mesmo se girado por qualquer ângulo em torno dele.





Z' É EIXO DE SIMETRIA

3 É EIXO DE SIMETRIA

SE UM CORPO TEM UM EIXO DE SIMETRIA:

1) O EIXO DE SIMETRIA É EIXO PRINCIPAL

2) QUALQUER EIXO NO PLANO PERPENDICULAR AO EIXO É EIXO PRINCIPAL
(O PLANO CORRESPONDE A UM AUTO-VALOR DUPLAMENTE DEGENERADO).

As equações de Euler

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \qquad \vec{L} = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega}$$

EM RELAÇÃO AO SISTEMA INERCIAL, $\bar{\bar{I}}$ VARIA NO TEMPO À MEDIDA QUE O CORPO GIRA.

TOMEMOS, NO ENTANTO, UM SISTEMA $\underline{S'}$ DE MESMA ORIGEM MAS RIGIDAMENTE LIGADO AO CORPO:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad \text{(DO CAP. 10)}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \frac{d'[\bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega}]}{dt} + \vec{\omega} \times (\bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega})$$

NO SISTEMA S', $\bar{\bar{I}}$ É CONSTANTE.

$$\frac{d'(\bar{\bar{I}}\cdot\vec{\omega})}{dt} = \bar{\bar{I}}\cdot\frac{d'\vec{\omega}}{dt} = \bar{\bar{I}}\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

MAS:
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{\omega} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{N} = \bar{\bar{I}}\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega}\times(\bar{\bar{I}}\cdot\vec{\omega}) \qquad (6)$$

ESCOLHENDO EM S', O SISTEMA DE EIXOS PRINCIPAIS:

$$(\bar{\bar{I}}\cdot\dot{\vec{\omega}})_1 = I_1\dot{\omega}_1 \;;\; (\bar{\bar{I}}\cdot\dot{\vec{\omega}})_2 = I_2\dot{\omega}_2 \;;\; (\bar{\bar{I}}\cdot\dot{\vec{\omega}})_3 = I_3\dot{\omega}_3$$

$$(\vec{\omega}\times(I_1\omega_1\hat{e}_1 + I_2\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3))_1 = (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3$$

Equações de Euler

$$N_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3$$

$$N_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3$$

$$N_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2$$