F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

30/04/2024

Aula 14

Aula passada

Teoremas:

1. Todos os auto-valores do tensor de inércia são reais.
2. Auto-vetores com auto-valores diferentes são ortogonais entre si.
3. Auto-vetores com auto-valores degenerados podem ser escolhidos como ortogonais entre si.

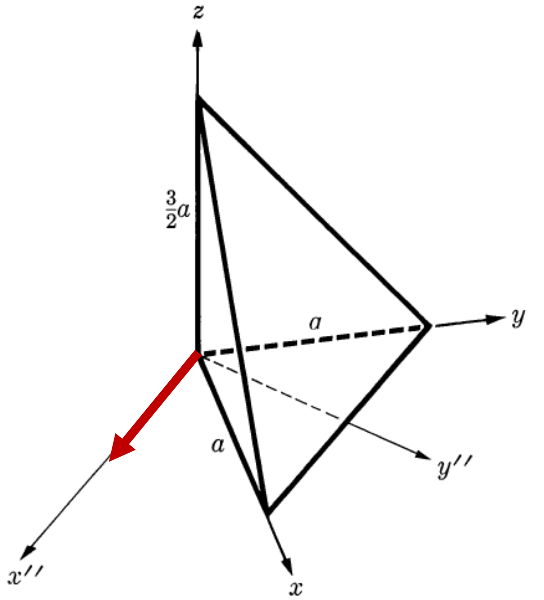
A matriz que transforma o tensor de inércia para o sistema de eixos principais (auto-vetores) é tal que suas linhas são as componentes dos auto-vetores ortonormalizados.

$$\mathsf{I}' = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathsf{I} \cdot \boldsymbol{\lambda}^T \quad \text{onde} \quad I'_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

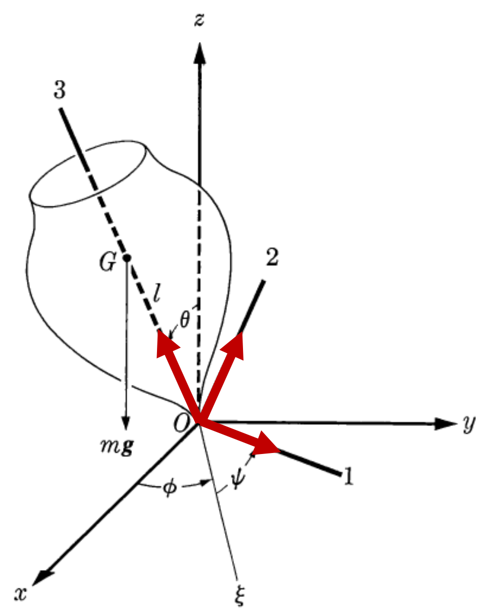
$$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} \omega_x^{(1)} & \omega_y^{(1)} & \omega_z^{(1)} \\ \omega_x^{(2)} & \omega_y^{(2)} & \omega_z^{(2)} \\ \omega_x^{(3)} & \omega_y^{(3)} & \omega_z^{(3)} \end{pmatrix}$$

Aula passada

Propriedades de simetria do tensor de inércia:



1. Se o corpo tem um plano de simetria, ou seja, sua imagem especular através do plano é igual ao próprio corpo, então o eixo perpendicular ao plano é eixo principal.



2. Se o corpo tem um eixo de simetria, ou seja, se o corpo é invariante por rotações arbitrárias em torno de um dado eixo, então o eixo de simetria é um eixo principal e o plano perpendicular a ele é degenerado (quaisquer dois eixos perpendiculares entre si no plano geram os outros dois eixos principais).

Aula passada

Equação da dinâmica rotacional no sistema de eixos preso ao corpo:

$$\boldsymbol{N} = \mathsf{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathsf{I} \cdot \boldsymbol{\omega})$$

No sistema de eixos principais do corpo: equações de Euler

$$\begin{aligned}
N_1 &= I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 \\
N_2 &= I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3 \\
N_3 &= I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2
\end{aligned}$$

Taxa de variação da energia cinética

$$\boldsymbol{N} = \mathsf{I}\cdot\frac{d\omega}{dt} + \omega\times(\mathsf{I}\cdot\omega)$$

$$\vec{\omega}\cdot\vec{N} = \vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \underbrace{\vec{\omega}\cdot\left[\vec{\omega}\times(\bar{\bar{I}}\cdot\vec{\omega})\right]}_{=0}$$

$$\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\frac{d'\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\vec{\omega}$$

JÁ QUE $\bar{\bar{I}}$ É SIMÉTRICO

MAS: $\frac{d'}{dt}\left[\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\vec{\omega}\right] = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\vec{\omega} + \vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\frac{d'\vec{\omega}}{dt}$ $\left(\frac{d'\bar{\bar{I}}}{dt}=0\right)$

$$= 2\,\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\frac{d'\vec{\omega}}{dt}$$

COMPARE c/ $\frac{dT}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\frac{d'\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'}{dt}\left[\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\vec{\omega}\right] = \frac{d'T_{rot}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{dT_{rot}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}\cdot\vec{N} = \vec{N}\cdot\vec{\omega} = \frac{d[T_{rot}]}{dt}}$$

Equilíbrio dinâmico

$$\boldsymbol{N} = \mathsf{I}\cdot\frac{d\omega}{dt} + \omega\times(\mathsf{I}\cdot\omega)$$

NA AUSÊNCIA DE TORQUES:

$$\vec{\vec{I}}\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega}\times(\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega}) = 0$$

PARA QUE $\vec{\omega}$ = CONST. NA AUSÊNCIA DE TORQUES

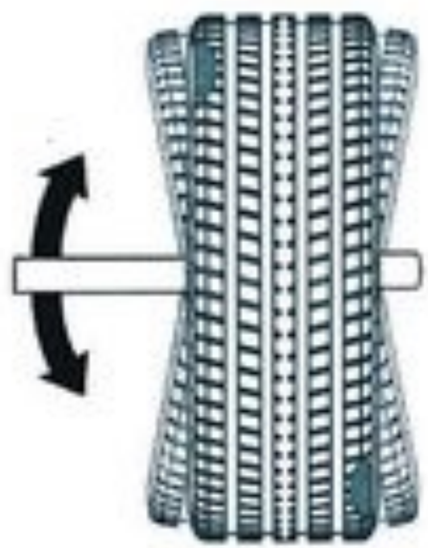
$$\Rightarrow \vec{\omega}\times(\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega}) = 0 \iff \vec{\omega} \parallel \underbrace{\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega}}_{L} \quad (\text{SE } \vec{\omega}\neq 0)$$

ISSO SÓ ACONTECE SE $\vec{\omega}$ APONTA NA DIREÇÃO DE UM EIXO PRINCIPAL.

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \iff \begin{cases} \vec{N} = 0 \\ \text{E} \\ \vec{\omega} \parallel \text{EIXO PRINCIPAL} \end{cases}$$

Uma roda desbalanceada

Se o eixo principal da roda não está exatamente alinhado com a velocidade angular de rotação, a roda "vibra".



Rotações livres de um corpo simétrico ($I_1=I_2$): movimento no sistema de eixos ligado ao corpo

$$0 = N_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3$$

$$0 = N_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3$$

$$0 = N_3 = I_3\dot{\omega}_3 + \underbrace{(I_2 - I_1)}_{=0}\,\omega_1\omega_2$$

$$\Rightarrow I_3\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_3 = \text{CONST.}}$$

$$\dot{\omega}_1 = \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1}\right)\omega_3\,\omega_2$$

$$\dot{\omega}_2 = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)\omega_3\,\omega_1$$

$$\beta = \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

$$\beta\omega_3 = \Omega$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_1 = -\Omega\,\omega_2 \Rightarrow \ddot{\omega}_1 + \Omega\,\dot{\omega}_2 = 0 \Rightarrow \ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0$$

$$\dot{\omega}_2 = \Omega\,\omega_1 \Rightarrow \ddot{\omega}_2 + \Omega^2\omega_2 = 0$$

$$\omega_1(t) = A_1\cos(\Omega t + \delta_1)$$

$$\omega_2(t) = A_2\cos(\Omega t + \delta_2)$$

LEVANDO NAS EQS. DE 1ª ORDEM:

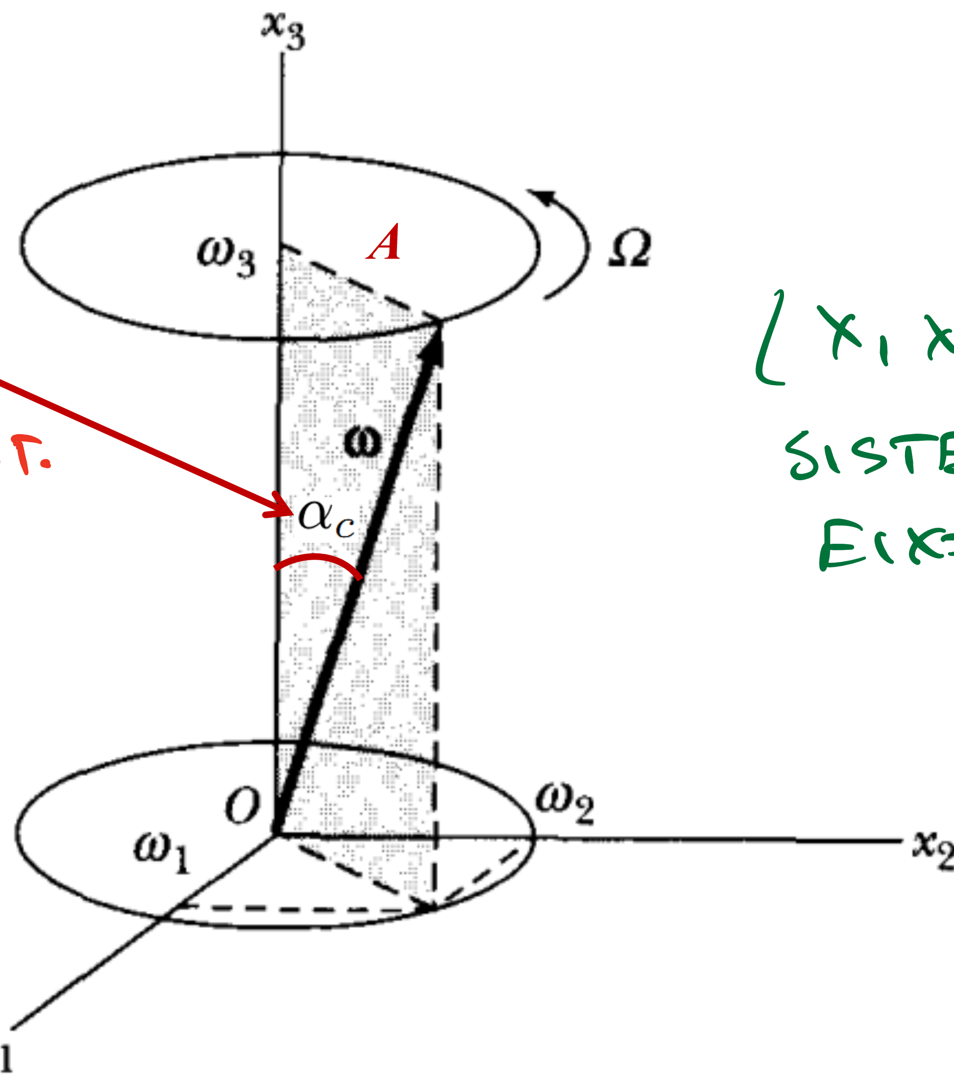
$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1(t) &= A\cos(\Omega t + \delta) \\ \omega_2(t) &= A\sin(\Omega t + \delta) \end{aligned}}$$

AS 3 COMPONENTES DE $\vec{\omega}$ DESCREVEM UM CONE, CHAMADO "CONE DO CORPO"

O cone do corpo ("body cone")

$$\tan \alpha_c = \frac{A}{\omega_3}$$

= CONST.



$(x_1\ x_2\ x_3)$

SISTEMA DE EIXOS PRINCIPAIS

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{CONST.}$$

Rotações livres de um corpo simétrico $(I_1=I_2)$: movimento no sistema inercial ou do CM

DUAS LEIS DE CONSERVAÇÃO: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{CONST.}$

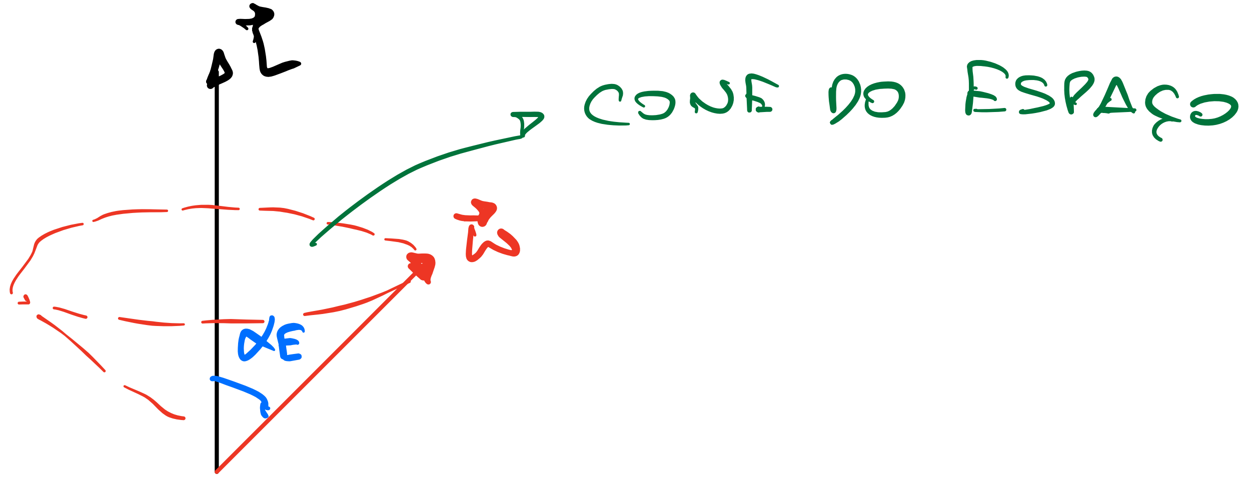
$$\frac{dT_{rot}}{dt} = \vec{N}\cdot\vec{\omega} = 0 \Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\underbrace{\bar{\bar{I}}\cdot\vec{\omega}}_{\vec{L}} = \text{CONST.}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{L}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}L\,\omega\cos\alpha_E \qquad \alpha_E = \text{ÂNGULO ENTRE } \vec{L} \text{ E } \vec{\omega}$$

$$\frac{d'\omega}{dt} = 0 = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{JÁ QUE} \quad \omega = |\vec{\omega}| = \text{ESCALAR}$$

COMO T_{rot}, L E ω SÃO CONSERVADOS α_E TAMBÉM É

$\Rightarrow$ $\vec{\omega}$ PERTENCE SEMPRE A UM CONE (CONE DO ESPAÇO) DE SEMI-ÂNGULO α_E CUJO EIXO É $\vec{L}$



$\boldsymbol{\omega}$ gira no cone do corpo em torno de $\mathbf{e}_3$

$\boldsymbol{\omega}$ gira no cone do espaço em torno de $\mathbf{L}$

$\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{e}_3$ são coplanares

$(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ SÃO OS EIXOS PRINCIPAIS

$\vec{\omega} - \omega_3\hat{e}_3$

$$\vec{L} = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega} = I_1\omega_1\hat{e}_1 + I_1\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3 = I_1\overbrace{(\omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2)}^{\vec{\omega} - \omega_3\hat{e}_3} + I_3\omega_3\hat{e}_3$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

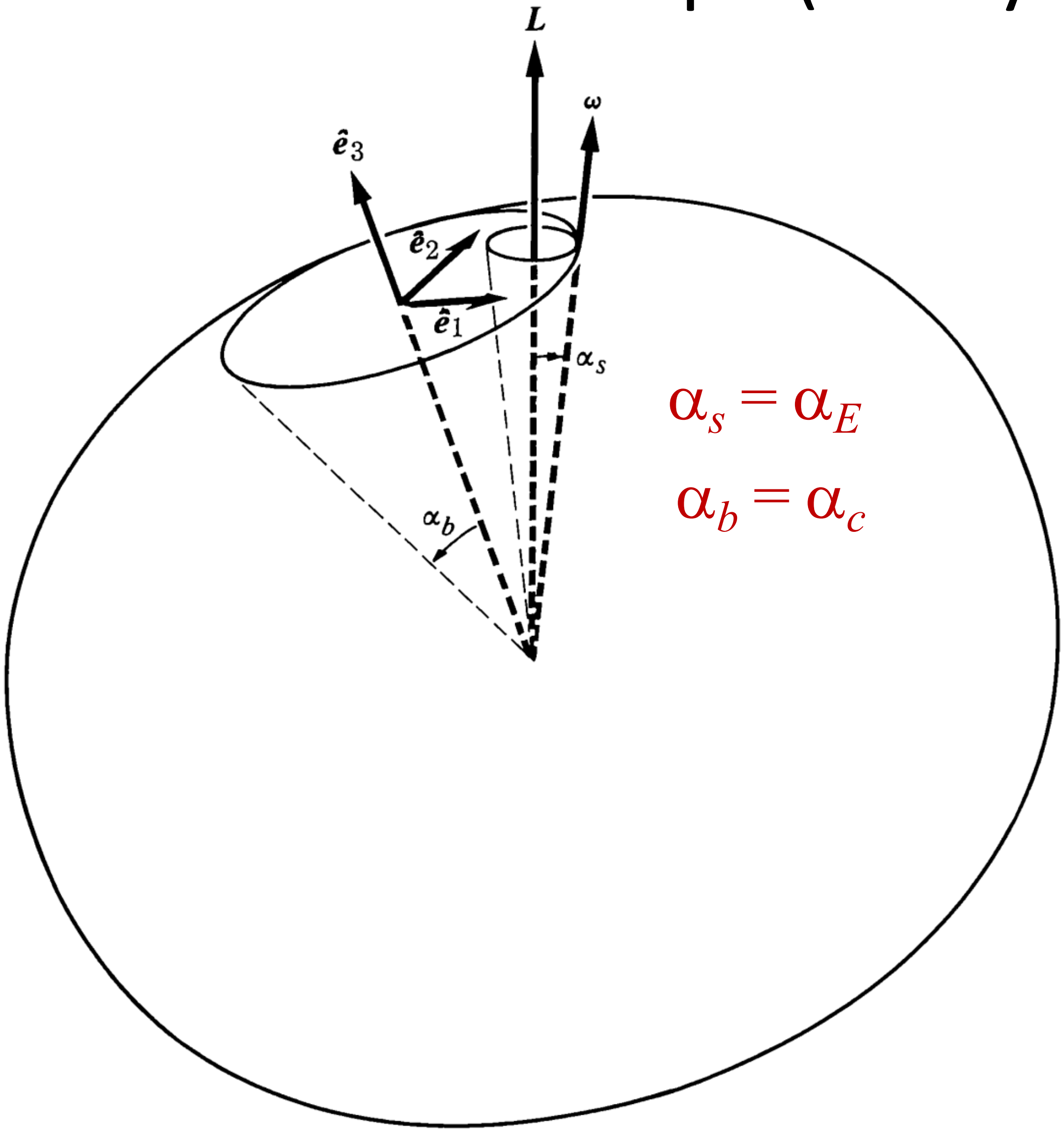
$$\vec{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{L} = I_1\vec{\omega} - I_1\omega_3\hat{e}_3 + I_3\omega_3\hat{e}_3 = I_1\vec{\omega} + \overbrace{(I_3 - I_1)}^{\beta I_1}\omega_3\hat{e}_3$$

$$\boxed{\vec{L} = I_1\vec{\omega} + I_1\Omega\hat{e}_3} \Rightarrow \vec{L}, \vec{\omega} \text{ e } \hat{e}_3 \text{ SÃO COPLANARES}$$

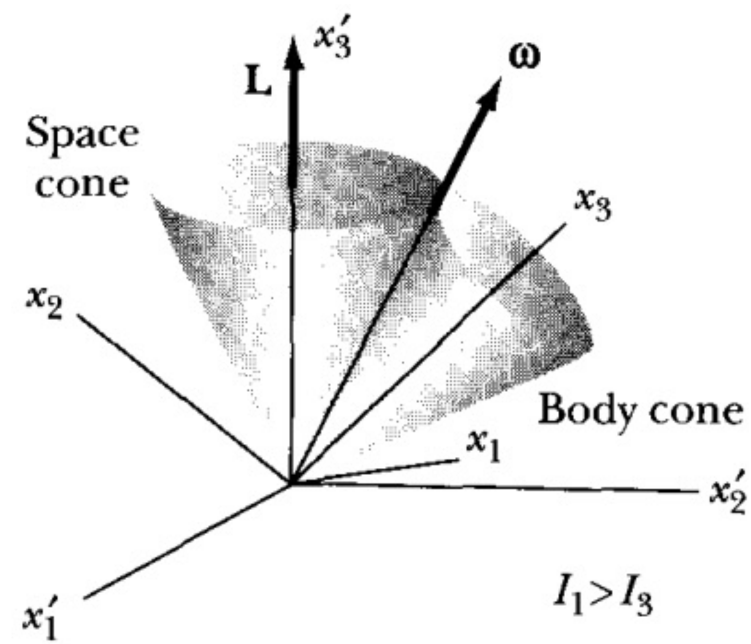
$$\vec{L} = I_1(\vec{\omega} + \Omega\hat{e}_3)$$

O cone espacial ("space cone") e o cone do corpo ("body cone")



$$\alpha_s = \alpha_E$$

$$\alpha_b = \alpha_c$$



Relação entre os semi-ângulos dos cones

Pode-se mostrar (ver notas) que os semi-ângulos dos cones do espaço e do corpo são relacionados entre si e essa relação só depende de β (não depende de ω):

$$\cos\alpha_E = \frac{1+\beta\cos^2\alpha_c}{\sqrt{1+(\beta^2+2\beta)\cos^2\alpha_c}}$$

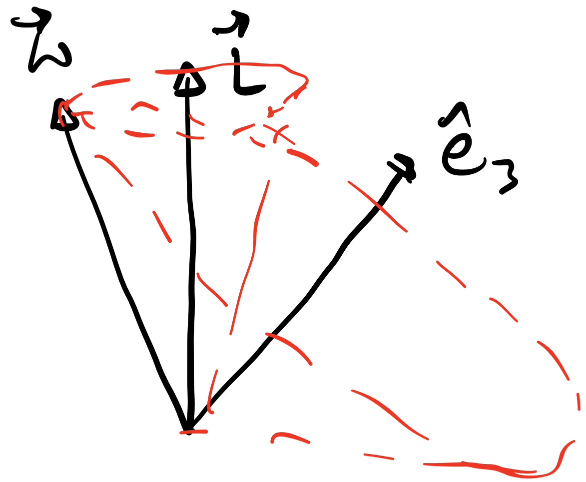
Posição relativa entre os cones

$$\vec{L} = I_1(\vec{\omega} + \beta\,\omega_3\,\hat{e}_3)$$

$$\beta = \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

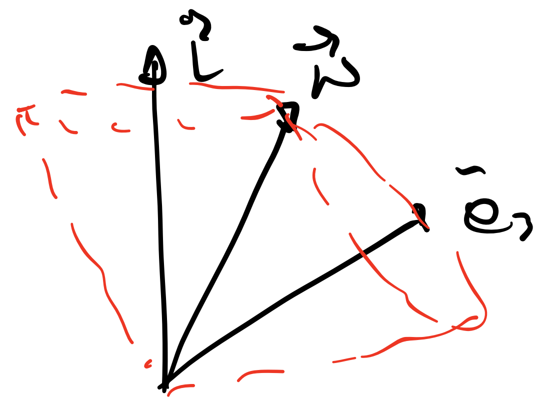
SE $\omega_3 > 0$:

$\beta > 0\ (I_3 > I_1)$:



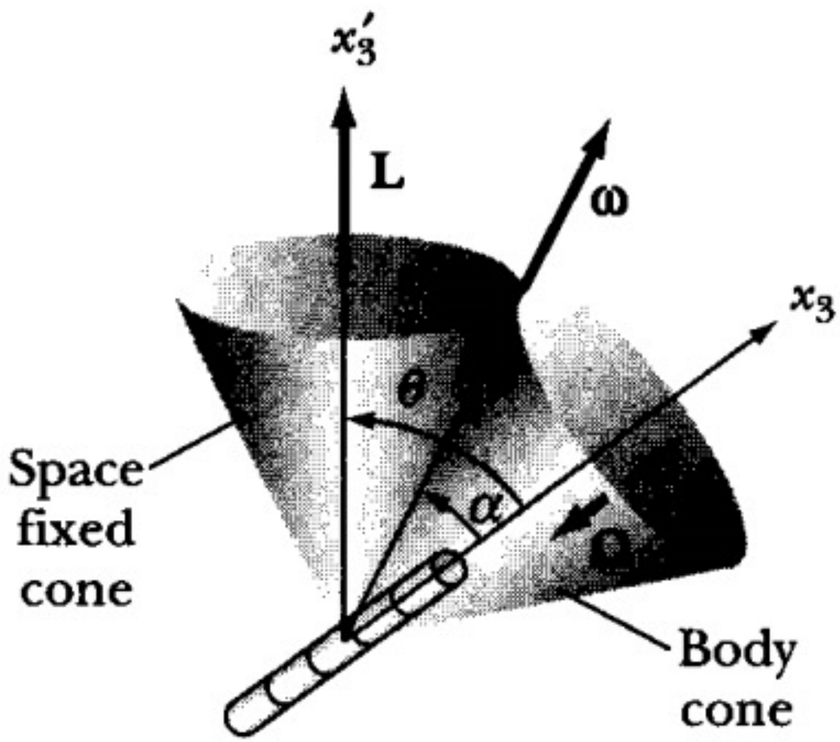
CONE DO ESPAÇO ESTÁ DENTRO DO CONE DO CORPO

$\beta < 0\ (I_3 < I_1)$:



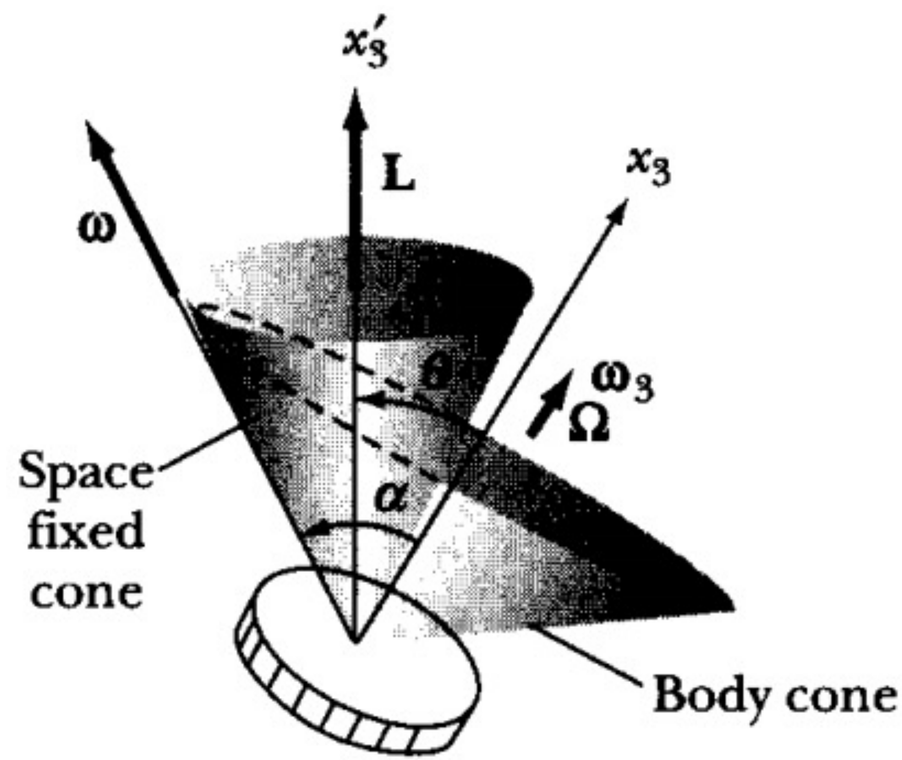
CONE DO ESPAÇO ESTÁ FORA DO CONE DO CORPO

$\beta < 0$



Prolate, $I_1 > I_3$
$\mathbf{\Omega}$, ω_3 have opposite signs.

$\beta > 0$



Oblate, $I_3 > I_1$
$\mathbf{\Omega}$, ω_3 have same sign.

COMO A TERRA

Velocidade angular de rotação de $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{e}_3$ em torno de $\mathbf{L}$

Pode-se mostrar (ver dedução em link na página do curso) que tanto $\boldsymbol{\omega}$ quanto $\mathbf{e}_3$ giram em torno de $\mathbf{L}$ com velocidade angular dada por:

$$\boxed{\omega\sqrt{1+(\beta^2+2\beta)\cos^2\alpha_c} \equiv \frac{L}{I_1}}$$

Estabilidade de rotações livres:

“teorema do controle remoto”

$$0 = N_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3$$
$$0 = N_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3$$
$$0 = N_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2$$

$$I_1 < I_2 < I_3$$

$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1$ OU $\vec{\omega} = \omega_2 \hat{e}_2$ OU $\vec{\omega} = \omega_3 \hat{e}_3$

SÃO SITUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

$\Rightarrow$ $\vec{\omega}$ PERMANECE CONSTANTE.

SUPONHA $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \delta_2 \hat{e}_2 + \delta_3 \hat{e}_3$ $\quad \delta_2, \delta_3 \ll \omega_1$

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\,\delta_2\delta_3 = O(\delta^2) \cong 0 \quad \Rightarrow \omega_1 \simeq \omega_{10} = \text{CONST.}$$

$$\left.\begin{aligned} I_2 \dot{\delta}_2 &= (I_3 - I_1)\,\delta_3\,\omega_{10} \\ I_3 \dot{\delta}_3 &= (I_1 - I_2)\,\delta_2\,\omega_{10} \end{aligned}\right\} \quad I_2 \ddot{\delta}_2 = (I_3 - I_1)\,\omega_{10}\,\frac{(I_1 - I_2)}{I_3}\,\omega_{10}\,\delta_2$$

$$\ddot{\delta}_2 + \underbrace{\left[\frac{(I_3 - I_1)(I_2 - I_1)}{I_2 I_3}\,\omega_{10}^2\right]}_{\Omega_1^2 > 0} \delta_2 = 0$$

$$\delta_2(t) = \delta_{20} \cos(\Omega_1 t + \theta_2)$$
$$\delta_3(t) = \delta_{30} \cos(\Omega_1 t + \theta_3)$$

ANALOGAMENTE, SE: $\vec{\omega} = \delta_1 \hat{e}_1 + \delta_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$

$\omega_3 \sim \omega_{30} =$ CONSTANTE $\qquad \delta_1, \delta_2 \ll \omega_3$

$$\ddot{\delta}_1 + \Omega_3^2 \delta_1 = 0$$
$$\ddot{\delta}_2 + \Omega_3^2 \delta_2 = 0$$

ONDE:

$$\Omega_3^2 = \left[\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \omega_{30}^2\right] > 0$$

PORÉM: SE $\vec{\omega} = \delta_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \delta_3 \hat{e}_3$

$$\ddot{\delta}_1 + \underbrace{\left[\frac{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)}{I_1 I_3} \omega_{20}^2\right]}_{-\Omega_2^2 < 0} \delta_1 = 0$$

$$\ddot{\delta}_3 - \Omega_2^2 \delta_3 = 0$$

$$\delta_1(t) = A e^{\Omega_2 t} + B e^{-\Omega_2 t}$$
$$\delta_3(t) = C e^{\Omega_2 t} + D e^{-\Omega_2 t}$$

Construção de Binet

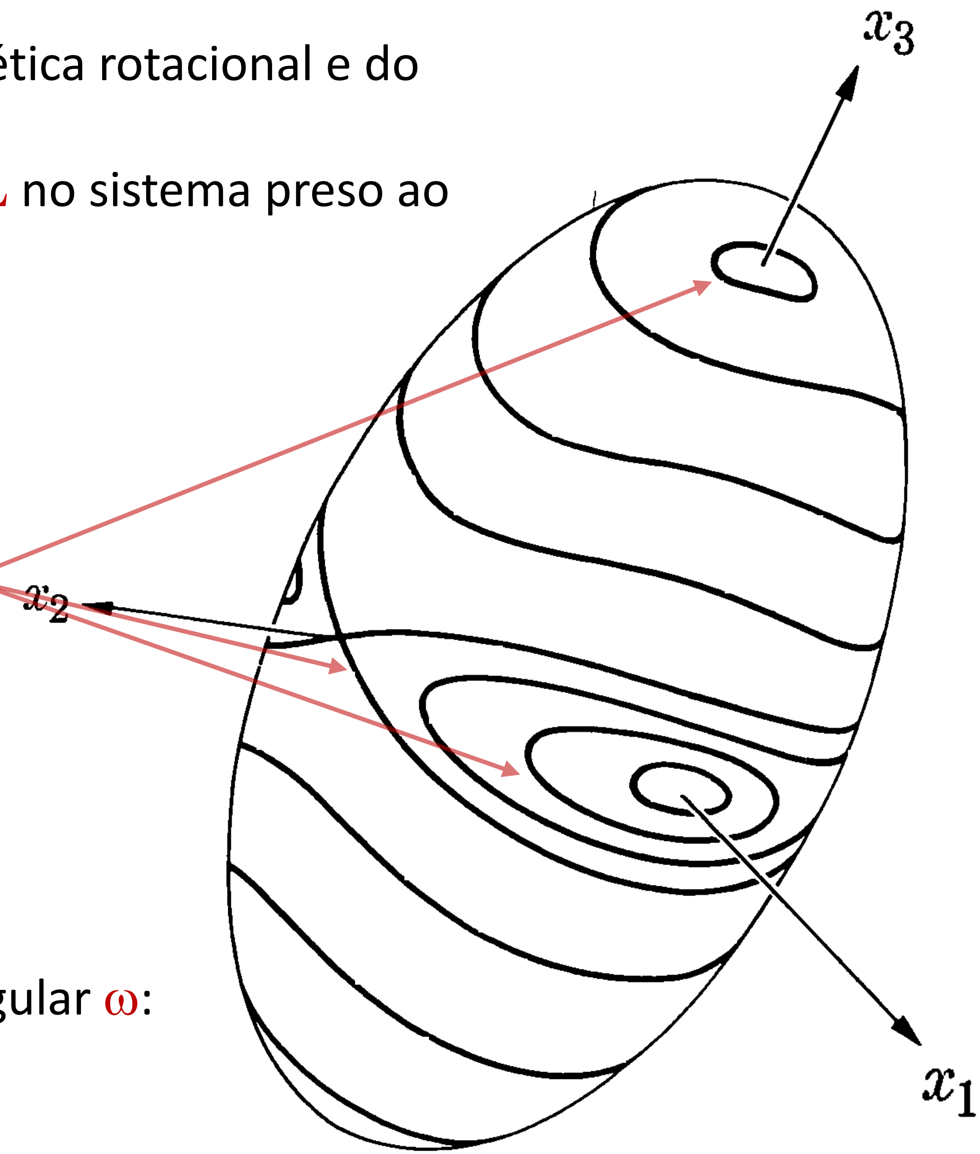
Rotação livre: leis de conservação da energia cinética rotacional e do módulo do momento angular.

Escrevendo-as em termos das componentes de $\mathbf{L}$ no sistema preso ao corpo:

$$\begin{aligned}\frac{L_1^2}{2I_1}+\frac{L_2^2}{2I_2}+\frac{L_3^2}{2I_3} &= T_{\rm rot}=\text{const.}\\ L_1^2+L_2^2+L_3^2 &= L^2=\text{const.}\end{aligned}$$

As componentes de $\mathbf{L}$ estão na interseção de uma esfera de raio L e um elipsoide de semi-eixos:

$$\sqrt{2T_{\rm rot}I_1},\ \sqrt{2T_{\rm rot}I_2},\ \sqrt{2T_{\rm rot}I_3}$$



Curvas semelhantes descrevem a velocidade angular ω:

$$\omega_1=\frac{L_1}{I_1},\omega_2=\frac{L_2}{I_2},\omega_3=\frac{L_3}{I_3}$$