F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

02/05/2024

Aula 15

Aula passada

Rotação livre (**N**=0) de um corpo simétrico ($I_1=I_2$). No sistema preso ao corpo:

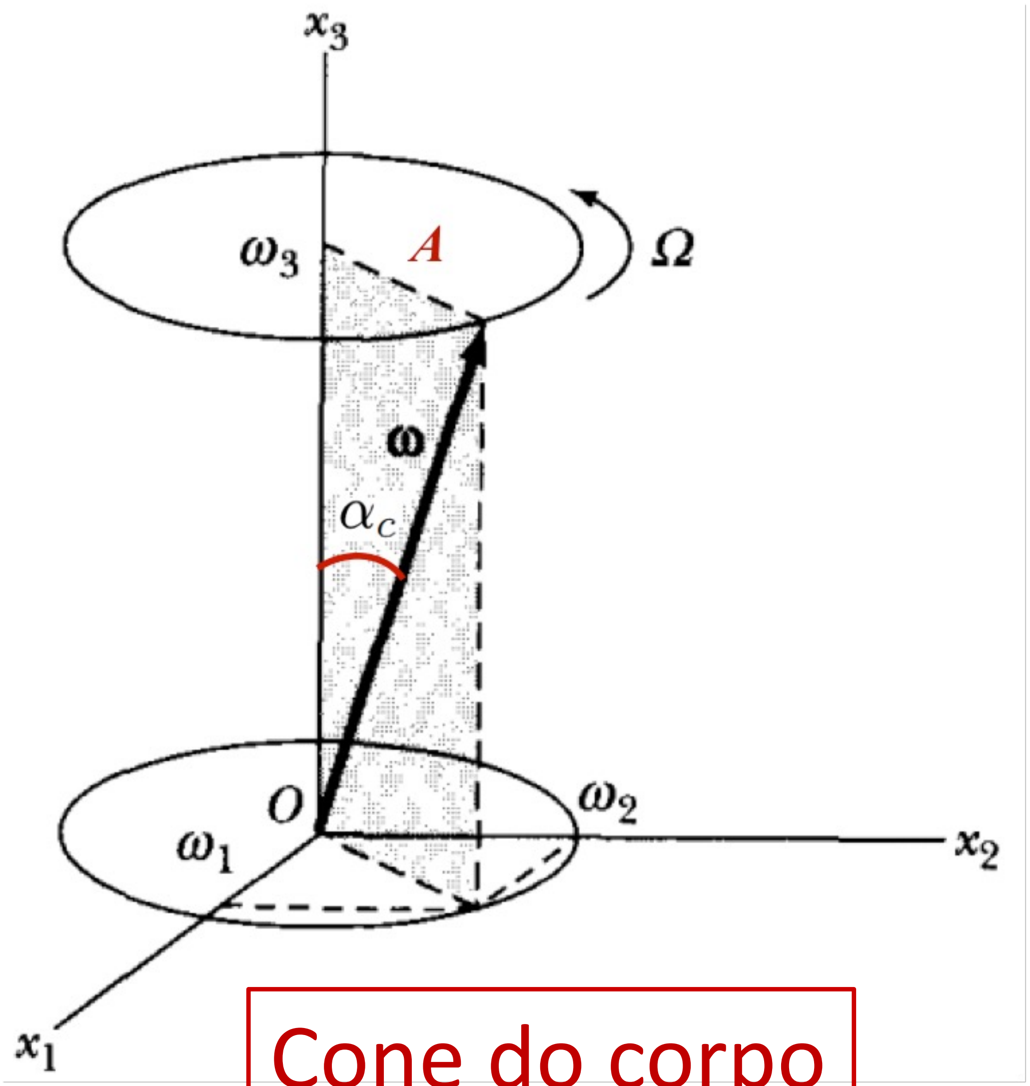
$$\omega_1(t) = A\cos(\Omega t + \delta)$$
$$\omega_2(t) = A\sin(\Omega t + \delta)$$
$$\omega_3(t) = \omega_3 = \text{const.}$$

$$\beta = \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$
$$\Omega = \beta\omega_3$$

$$|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{const.}$$

$$\omega_3 = \omega\cos\alpha_c$$

$$A = \omega\sin\alpha_c$$



Cone do corpo

Aula passada

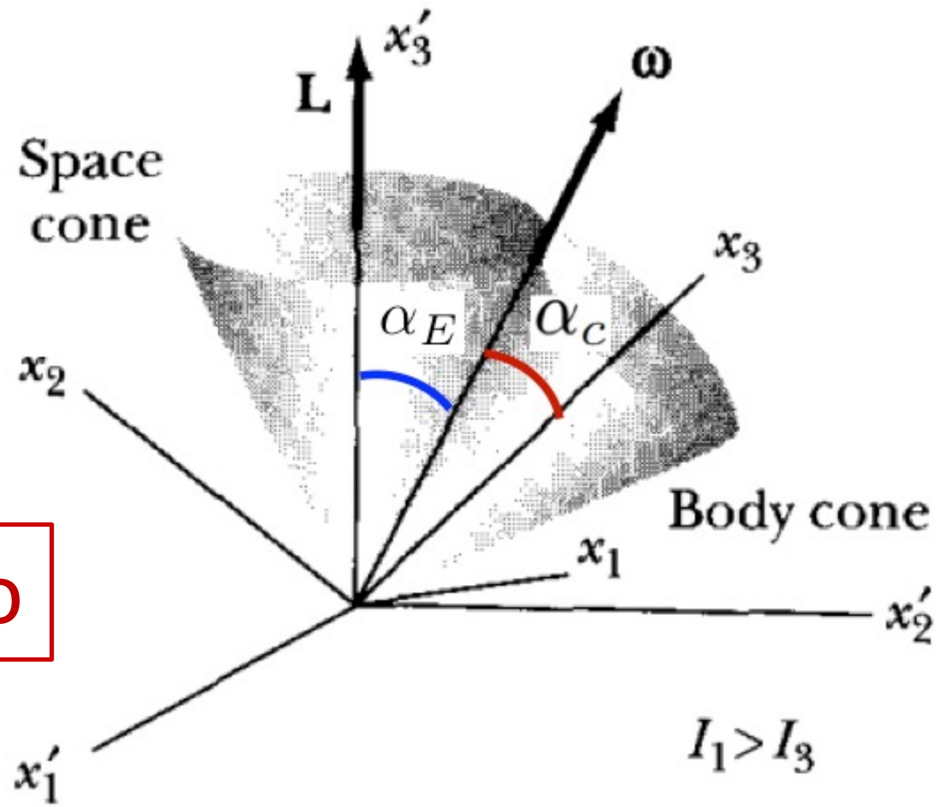
Rotação livre de um corpo simétrico ($I_1 = I_2$). No sistema do CM, **L** é fixo no espaço.

- **ω** gira em torno de **L** com velocidade angular

$$\omega\sqrt{1+(\beta^2+2\beta)\cos^2\alpha_c}$$

gerando um cone de semi-ângulo α_E tal que

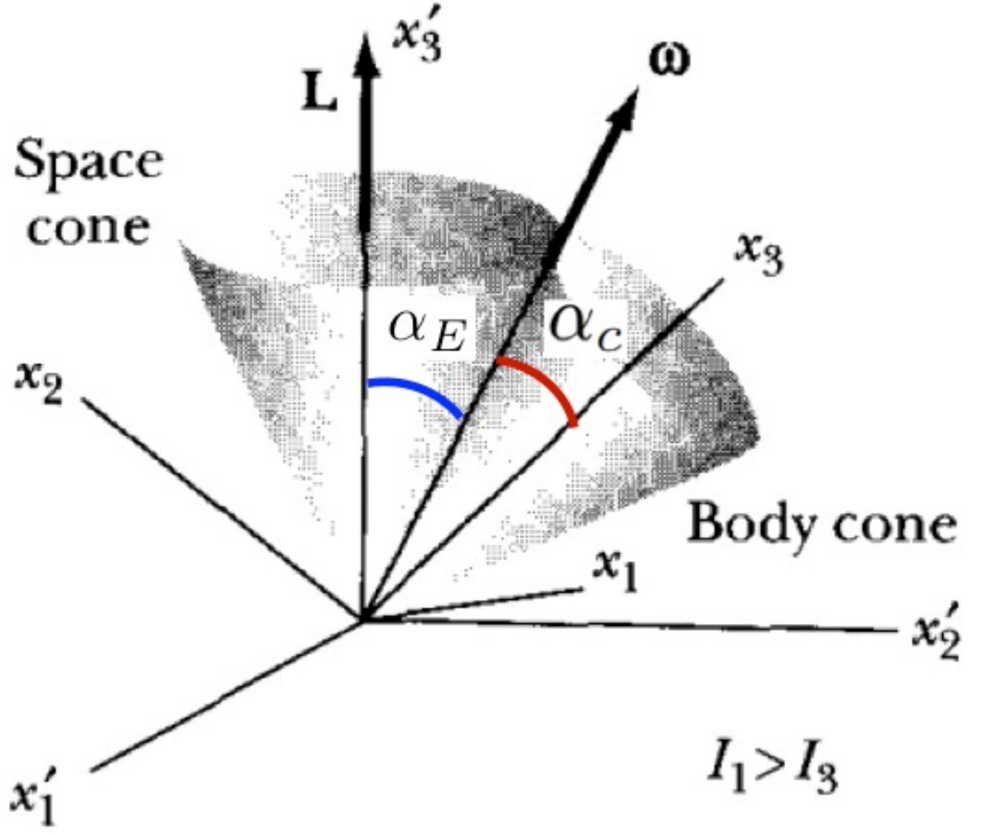
$$\cos\alpha_E = \frac{1+\beta\cos^2\alpha_c}{\sqrt{1+(\beta^2+2\beta)\cos^2\alpha_c}}$$



Cone do espaço

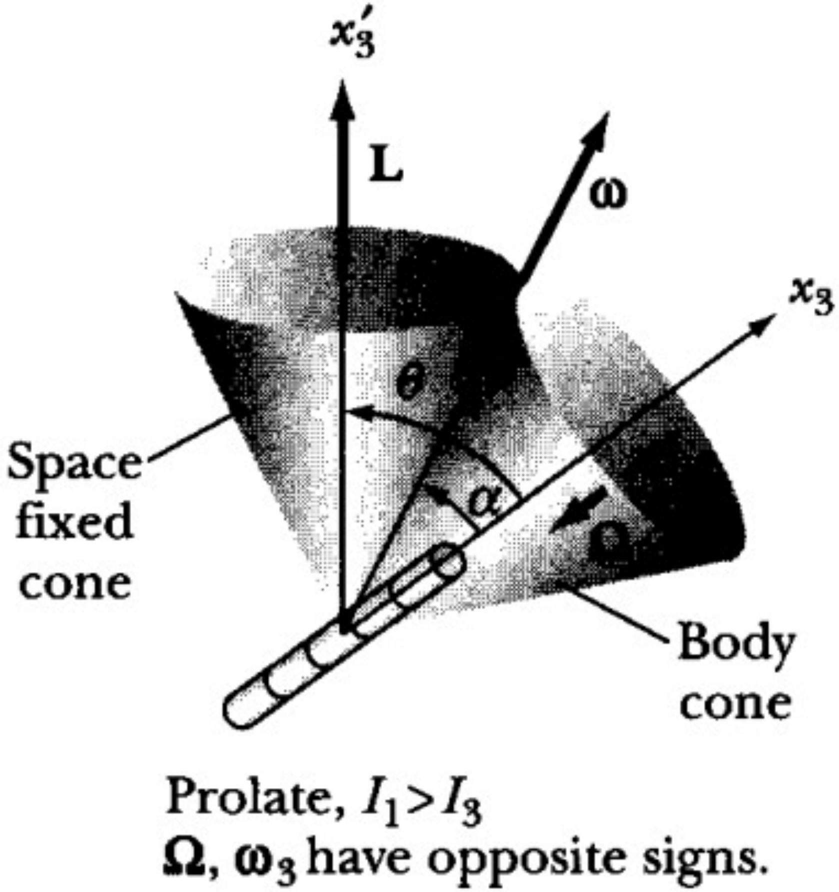
Aula passada

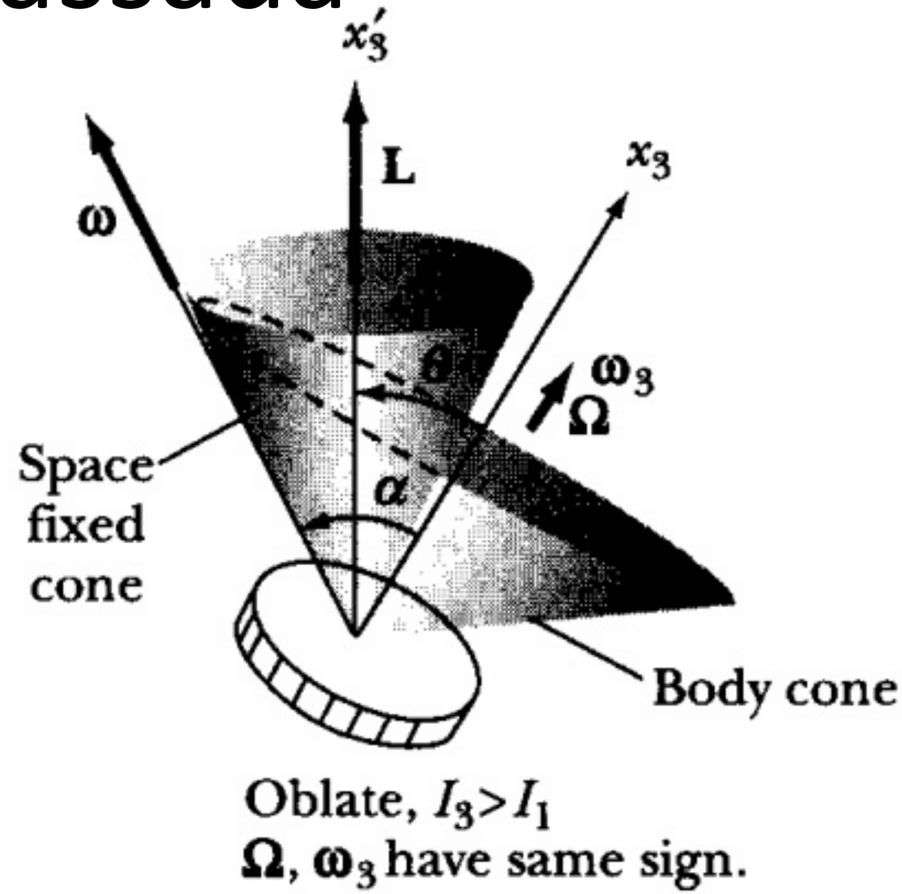
L, **ω** e $\mathbf{e}_3$ são coplanares



O cone do corpo rola sem deslizar no cone do espaço

Aula passada

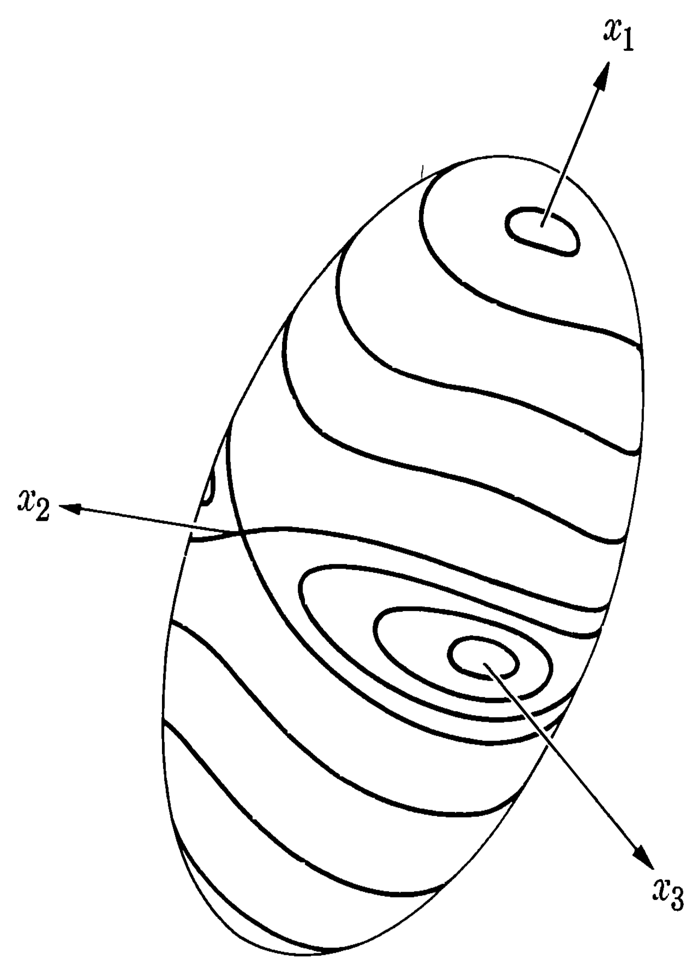




O cone do corpo rola sem deslizar no cone do espaço

Aula passada

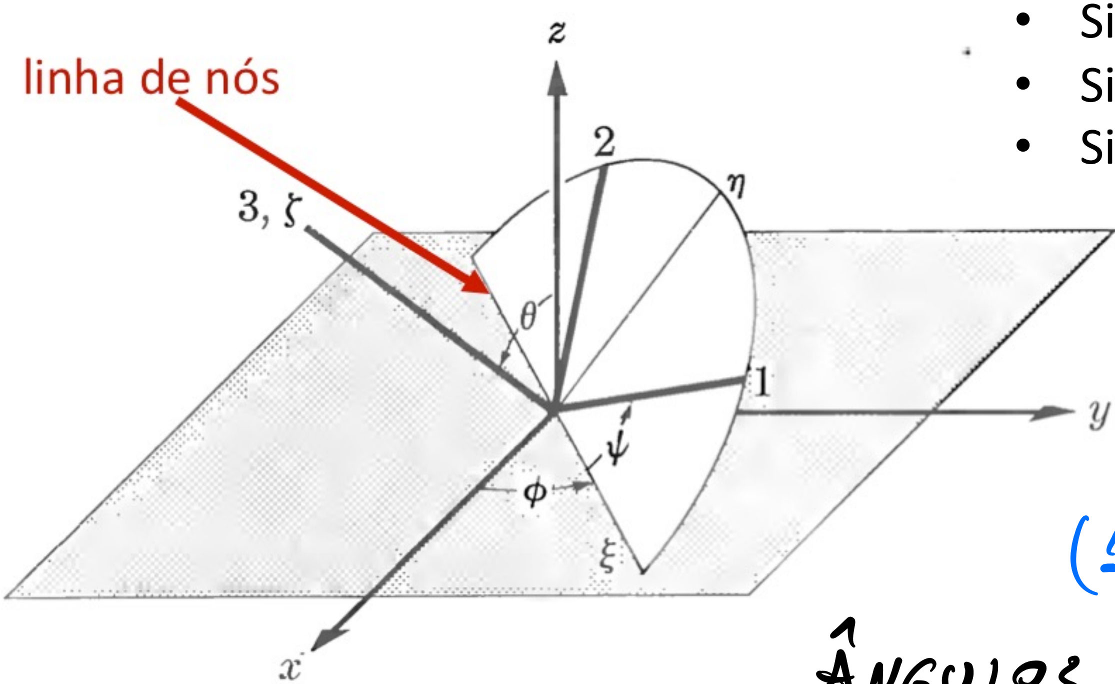
Rotação livre de um corpo assimétrico ($I_1 < I_2 < I_3$).



“Teorema do controle remoto”

•Equilíbrio estável em torno dos eixos principais de maior e menor momento de inércia (I_1 e I_3)
•Equilíbrio instável em torno do eixo principal de momento de inércia intermediário (I_2)

Ângulos de Euler



- Sistema xyz é não girante (CM ou ponto fixo).
- Sistema 123 é preso ao corpo, gira com ele.
- Sistema auxiliar $\xi\eta\zeta$.

LINHA DE NÓS: INTERSEÇÃO DO PLANO 12 COM O PLANO xy

$(1,2,3) \to (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

ÂNGULOS DE EULER: θ, ϕ, ψ

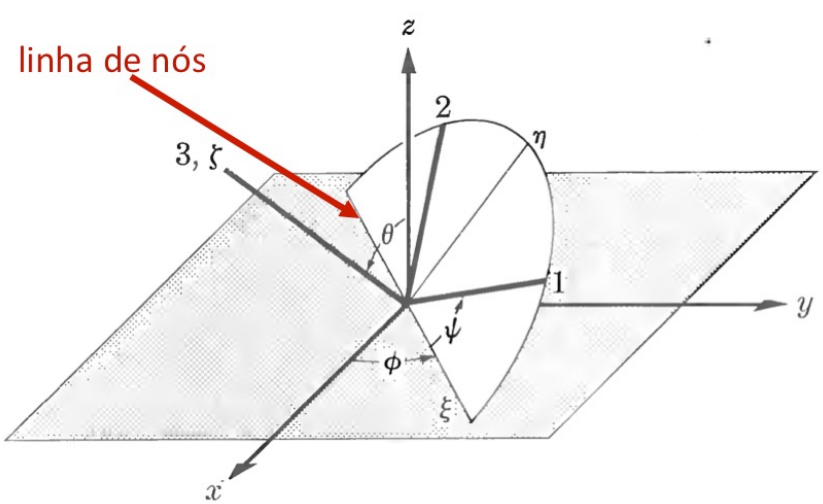
- θ É O ÂNGULO ENTRE ($\hat{e}_3$ OU $\hat{\zeta}$) E $\hat{z}$
- ϕ É O ÂNGULO ENTRE A LINHA DE NÓS ($\hat{\xi}$) E $\hat{x}$
- ψ É O ÂNGULO ENTRE $\hat{e}_1$ E $\hat{\xi}$

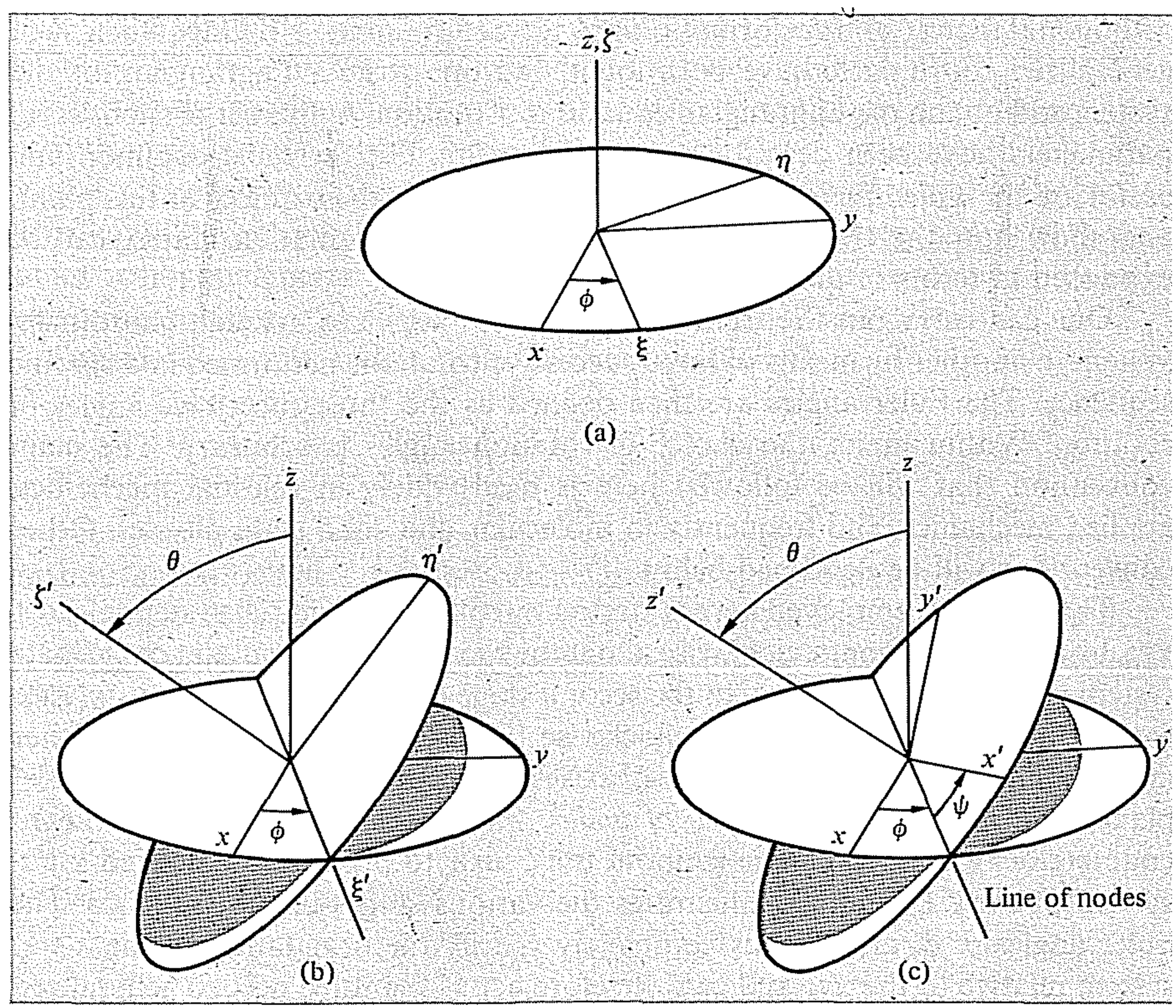
COMO PARTIR DE $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ E CHEGAR ATÉ $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$?

3 rotações levam xyz a 123 ($x'y'z'$)

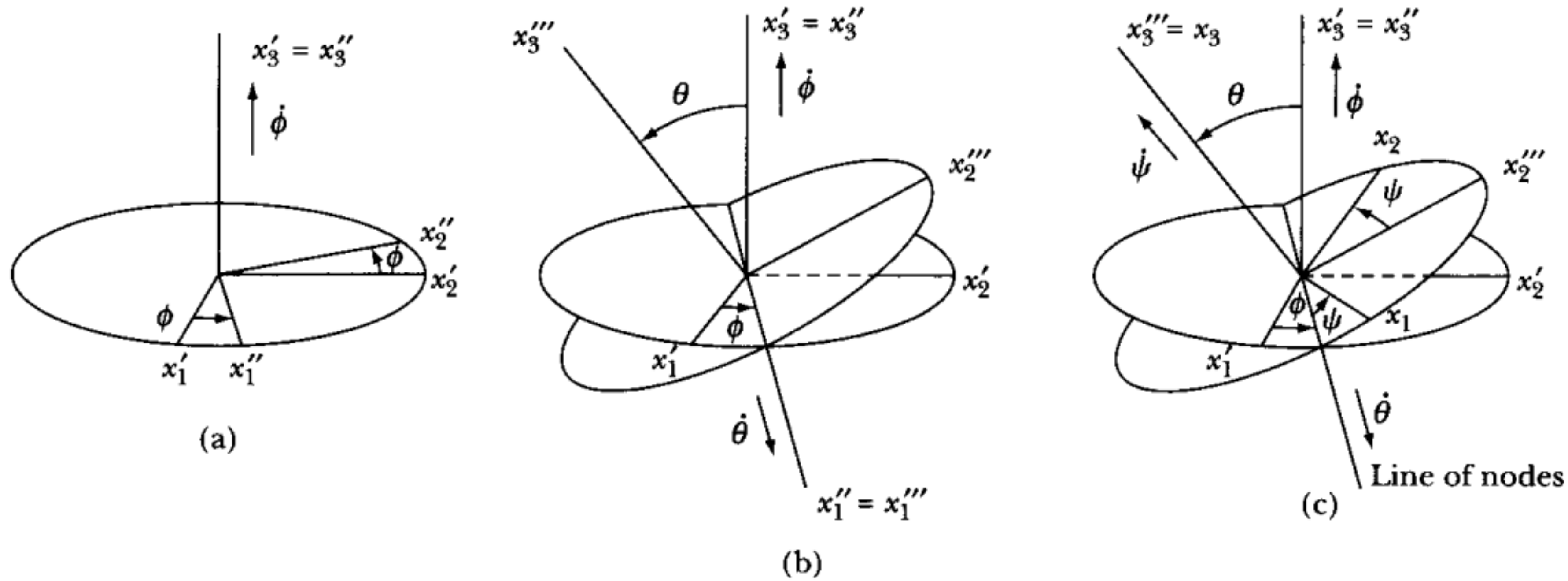
1. Uma rotação de ϕ em torno de z.
2. Uma rotação de θ em torno da linha de nós (ξ).
3. Uma rotação de ψ em torno de $3 = \zeta$

   As rotações têm que ser feitas nessa ordem!





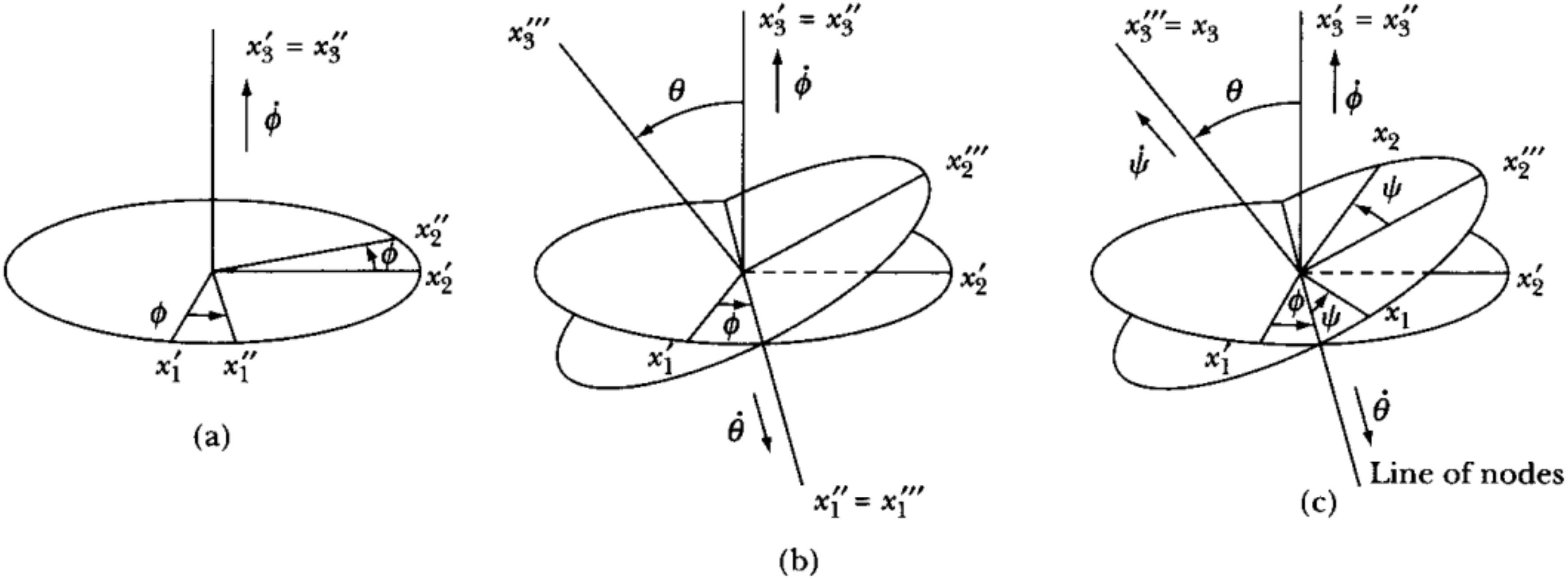
3 rotações



$$\boldsymbol{\lambda}_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\lambda}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\lambda}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_\psi \boldsymbol{\lambda}_\theta \boldsymbol{\lambda}_\phi$$

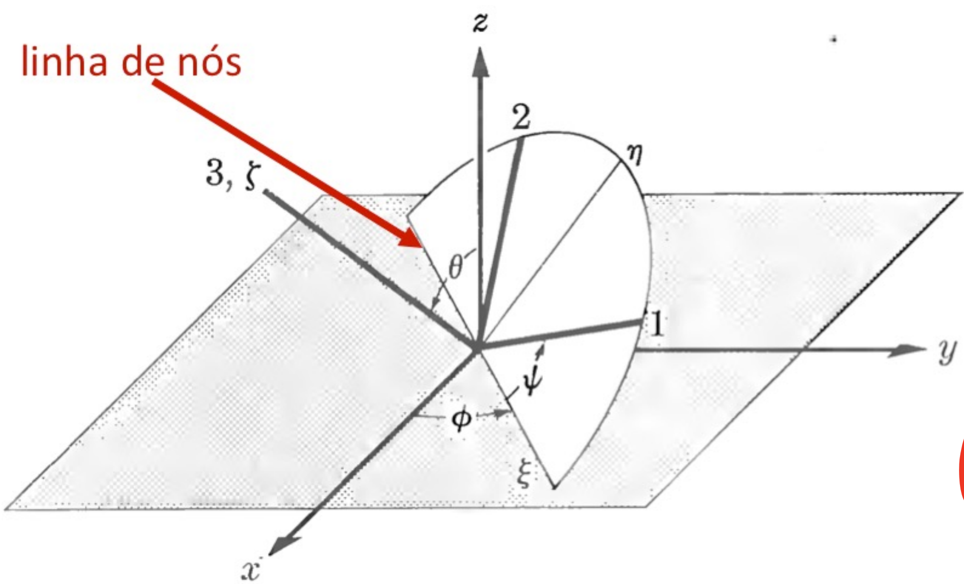
3 rotações



$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_\psi \boldsymbol{\lambda}_\theta \boldsymbol{\lambda}_\phi$$

Velocidade angular em termos dos ângulos de Euler



ESCREVER $\vec{\omega}$ EM TERMOS DE (θ, ϕ, ψ) E $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$

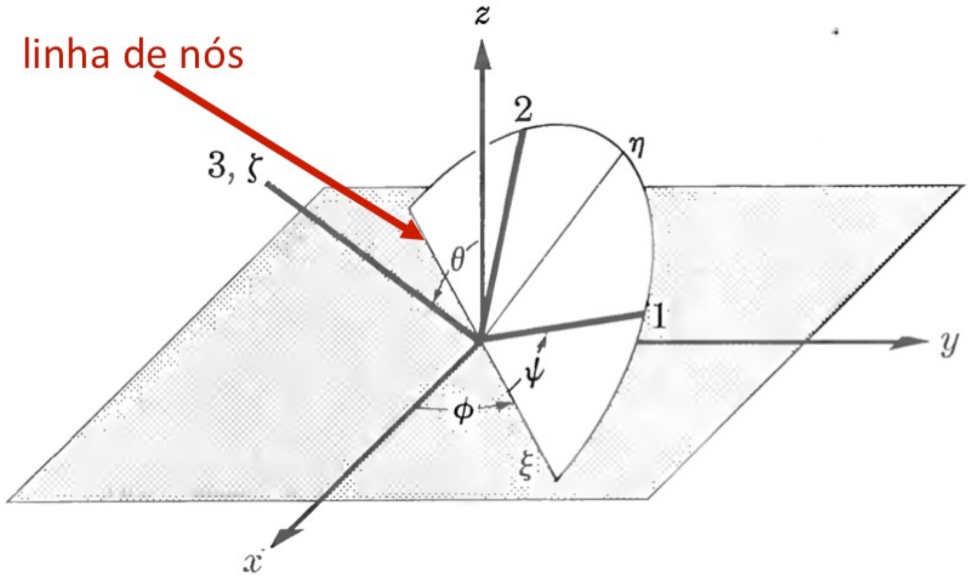
SE O CORPO TIVER INSTANTANEAMENTE $\vec{\omega}$ TAL QUE (θ, ψ) SÃO CONSTANTES E APENAS ϕ VARIA: $\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{z}$

(ϕ, ψ) CONSTANTES E θ VARIANDO: $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{\xi}$

(θ, ϕ) " E ψ VARIANDO: $\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\hat{e}_3$

PARA UM CASO GENÉRICO: $\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{\xi} + \dot{\psi}\,\hat{e}_3$ (1)

QUERO $\vec{\omega}$ EXPANDIDO NA BASE $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$



$$\hat{\xi} = \cos\psi\, \hat{e}_1 - \sin\psi\, \hat{e}_2$$

$$\hat{\eta} = \sin\psi\, \hat{e}_1 + \cos\psi\, \hat{e}_2$$

E :

$$\hat{z} = \cos\theta\, \hat{e}_3 + \sin\theta\, \hat{\eta}$$

LEVANDO EM (1)

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)\,\hat{e}_1 + (-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)\,\hat{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\,\hat{e}_3$$

Energia cinética em termos dos ângulos de Euler

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot\theta\cos\psi + \dot\phi\sin\theta\sin\psi\\
\omega_2 &= -\dot\theta\sin\psi + \dot\phi\sin\theta\cos\psi\\
\omega_3 &= \dot\psi + \dot\phi\cos\theta
\end{aligned}
$$

CASO SIMÉTRICO:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = (\dot\theta\cos\psi + \dot\phi\sin\theta\sin\psi)^2 + (-\dot\theta\sin\psi + \dot\phi\sin\theta\cos\psi)^2$$

$$= \dot\theta^2\cos^2\psi + \dot\phi^2\sin^2\theta\sin^2\psi + \dot\theta^2\sin^2\psi + \dot\phi^2\sin^2\theta\cos^2\psi$$

$$= \dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta$$

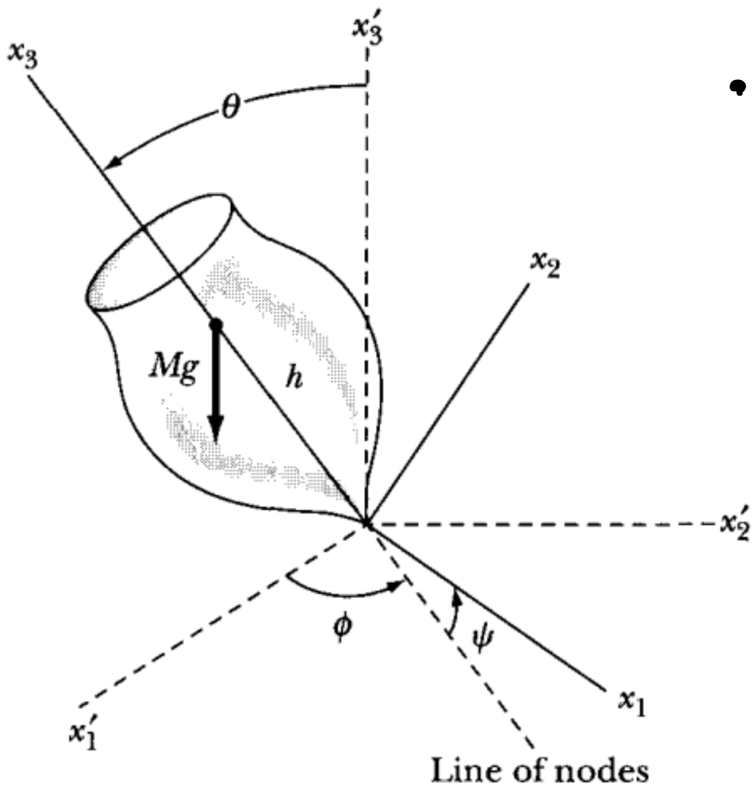
$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_1 (\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\ \omega_2 &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \end{aligned}$$

Energia cinética de um corpo simétrico ($I_1=I_2$):

$$T = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2$$

O pião simétrico ($I_1=I_2$)



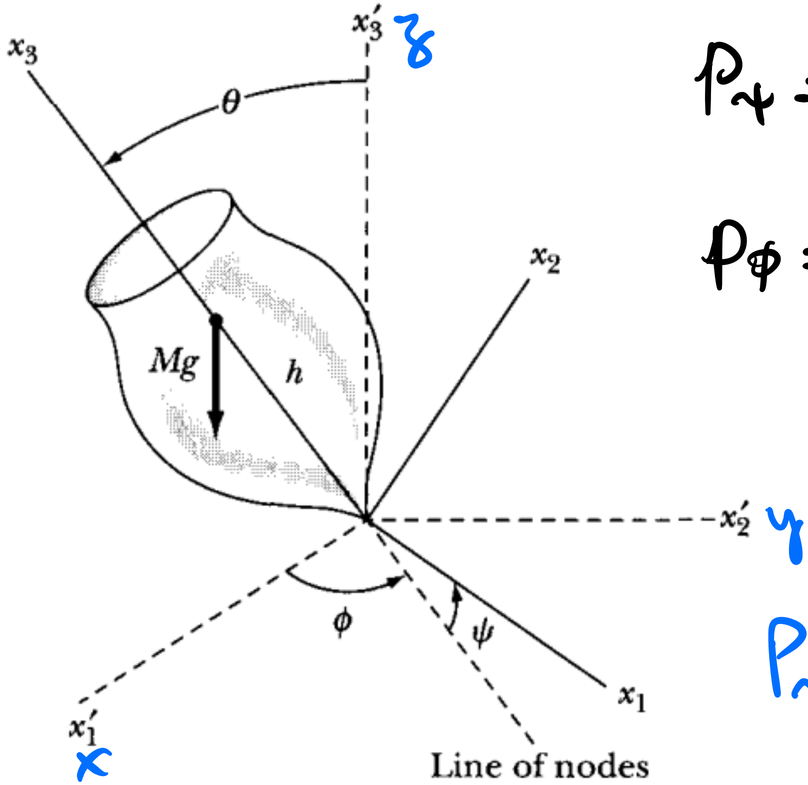
- O PIÃO É SIMÉTRICO ($I_1=I_2$) PORQUE TEM UM EIXO SIMETRIA
- A BASE DO PIÃO É SEMPRE FIXA.
- A ÚNICA FORÇA QUE EXERCE TORQUE EM RELAÇÃO À BASE É O PESO $M\vec{g}$ QUE ATUA NO CM

$$V = Mgh\cos\theta$$

$$L = T - V = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 - Mgh\cos\theta$$

- ϕ E ψ SÃO COORD. IGNORÁVEIS $\Rightarrow$ p_ϕ, p_ψ SÃO CONSERVADOS
- L Ñ DEPENDE EXPLICITAMENTE DE t $\Rightarrow$ H É CONSERVADO

Momentos canônicos conservados



$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\underbrace{\dot\psi + \dot\phi\cos\theta}_{\omega_3}) = \text{const.}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I_1\dot\phi\sin^2\theta + \underbrace{I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)}_{p_\psi}\cos\theta$$

$$= I_1\dot\phi\sin^2\theta + p_\psi\cos\theta \quad (2)$$

$$p_\psi = I_3\omega_3 = L_3 \qquad (\vec{L} = \overline{\overline{I}}\cdot\vec{\omega})$$

$$p_\phi = L_z$$

O TORQUE DO PESO NÃO TEM COMPONENTE NO PLANO $(\hat{e}_3, \hat{z}) \Rightarrow \frac{dL_3}{dt} = \frac{dL_z}{dt} = 0$

A Hamiltoniana

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \dot{\psi} p_\psi + \dot{\phi} p_\phi + \dot{\theta} p_\theta - L$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}$$

$$H = \underbrace{\frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\overbrace{\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta}^{\omega_3})^2}_{T_{rot}} + \underbrace{Mgh\cos\theta}_{V} = \text{CONST.}$$

$$\Rightarrow H = T_{rot} + V = E = \text{ENERGIA TOTAL}$$

$$E = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 + Mgh\cos\theta$$

$$\omega_3^2 = \left(\frac{p_\psi}{I_3}\right)^2$$

$$DE(2): \quad p_\phi - p_\psi \cos\theta = I_1 \dot{\phi} \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}$$

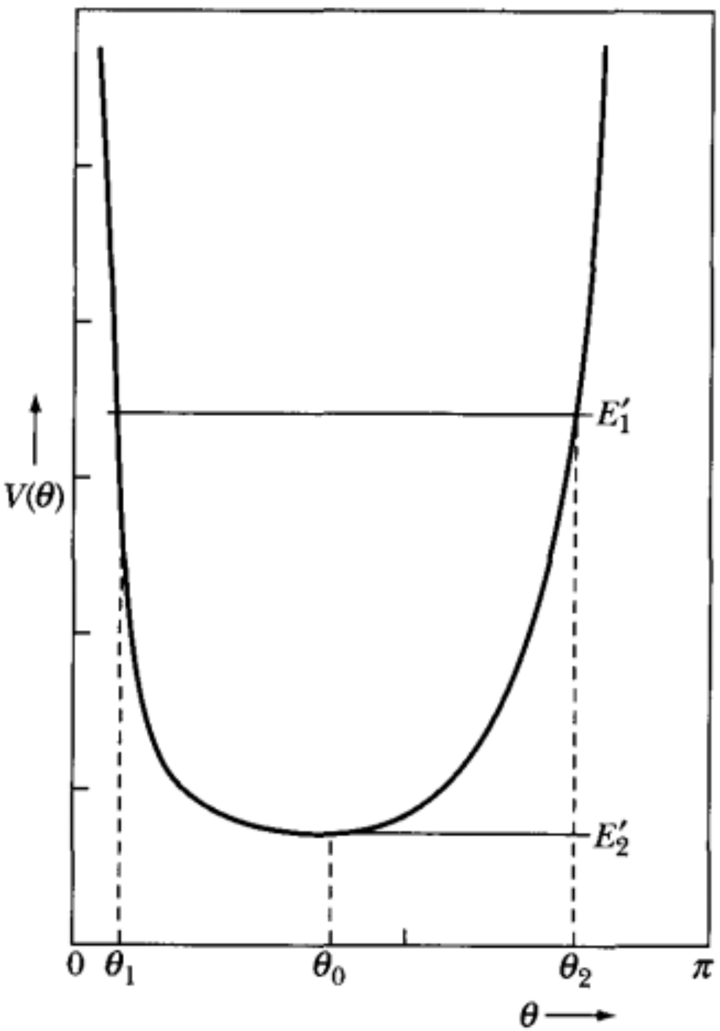
$$\Rightarrow E = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\sin^2\theta \left(\frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}\right)^2 + Mgh\cos\theta$$

$$E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3} = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + Mgh\cos\theta}_{V'(\theta)} = \text{CONST.}$$

$$V'(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + Mgh\cos\theta$$

DINÂMICA DE θ É REGIDA PELO POTENCIAL EFETIVO $V'(\theta)$

O potencial efetivo: análise qualitativa



$$\dot{\phi}(t) = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta(t)}{I_1 \sin^2\theta(t)}$$

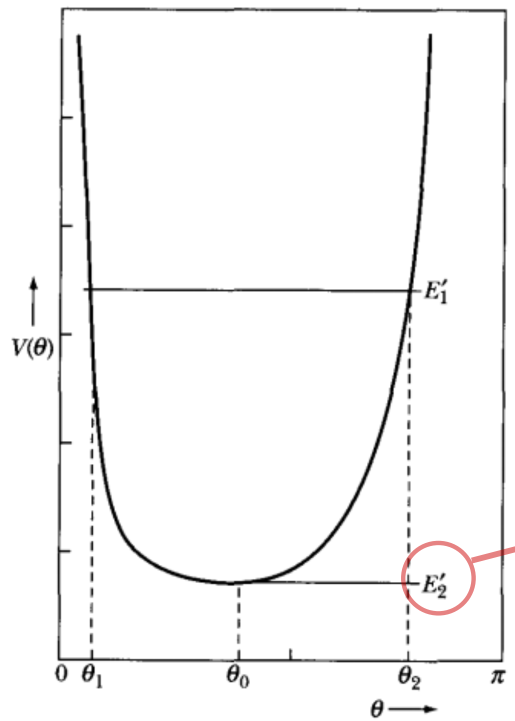
SE $E' = E'_2$ (MÍNIMO):

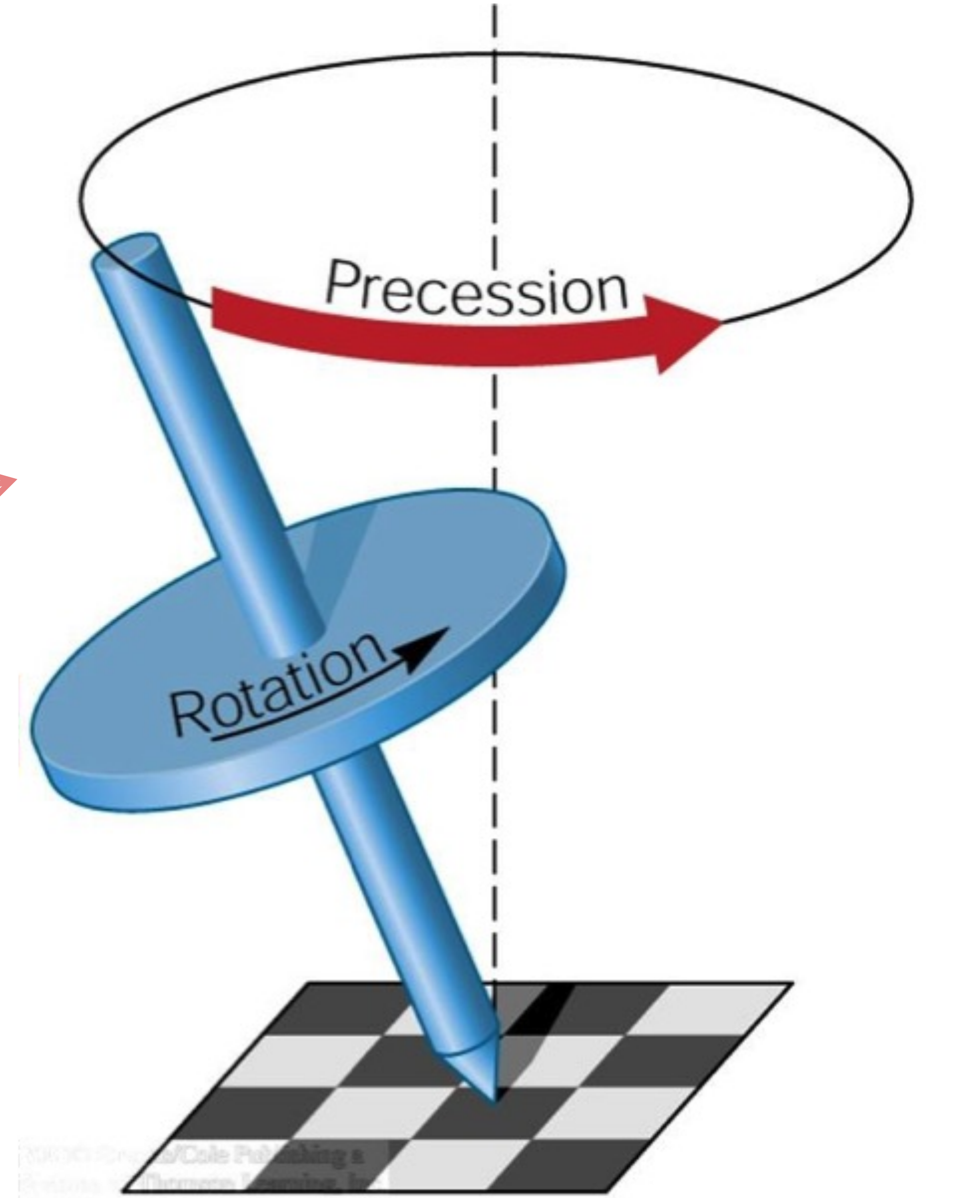
$\theta(t) = \theta_0 = $ CONST.

SE $E' = E'_1$:

$\theta(t)$ OSCILA ENTRE θ_1 E θ_2

Precessão regular

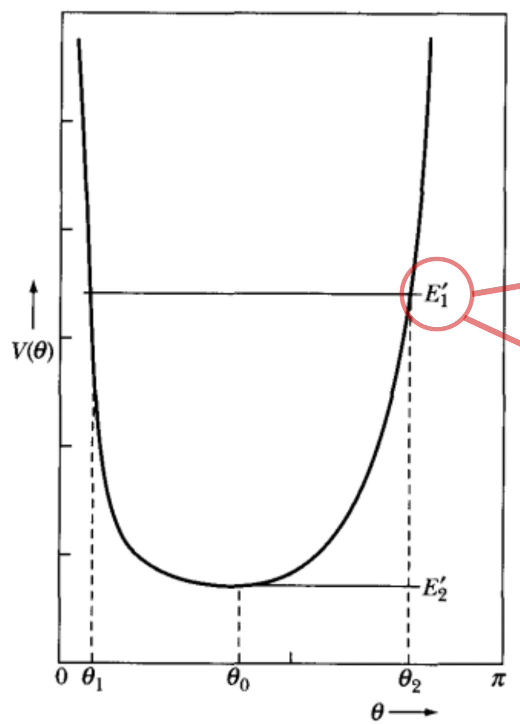


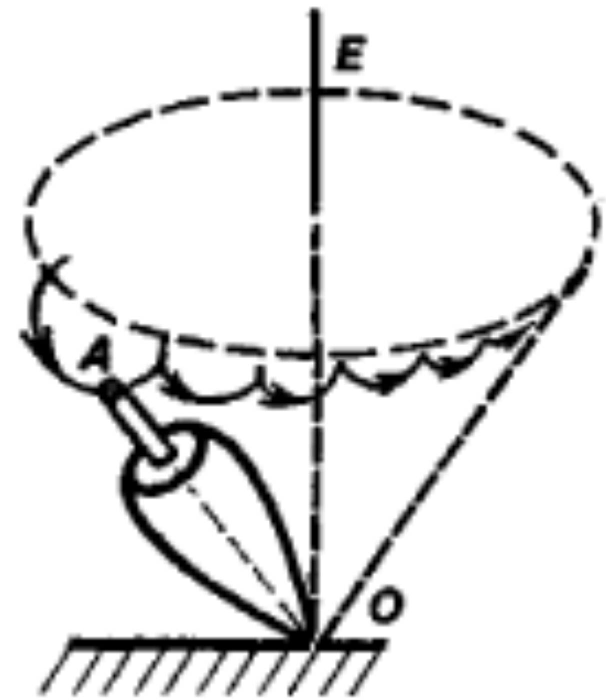


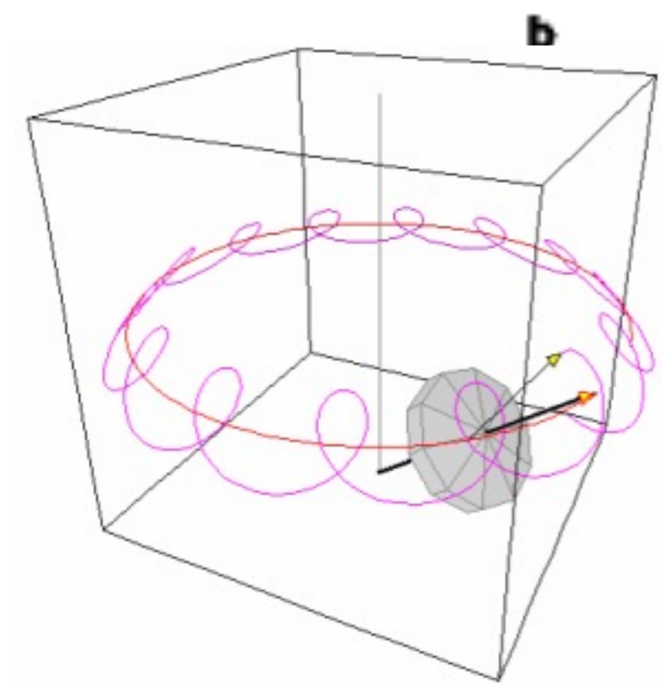
$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta_0}{I_1 \sin^2\theta_0}$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \dot{\phi}\cos\theta_0$$

Nutação

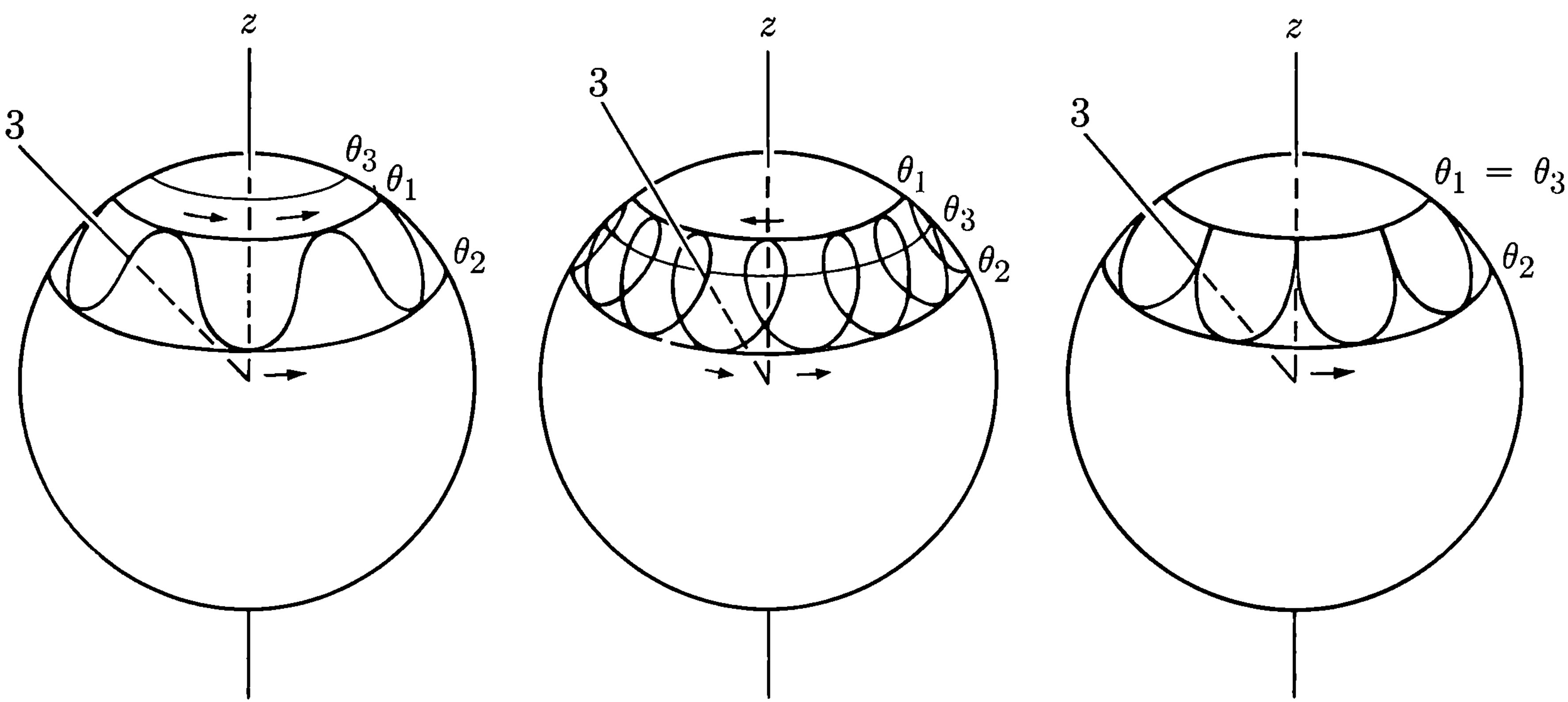






$$\dot{\phi}\,(t) = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta\,(t)}{I_1 \sin^2\theta\,(t)}$$

$$\dot{\psi}\,(t) = \frac{p_\psi}{I_3} - \dot{\phi}\,(t)\cos\theta\,(t)$$



(a) (b) (c)

$$\dot{\phi}(t) = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta(t)}{I_1 \sin^2\theta(t)}$$

$$\dot{\psi}(t) = \frac{p_\psi}{I_3} - \dot{\phi}(t)\cos\theta(t)$$