

F 415 – Mecânica Geral II

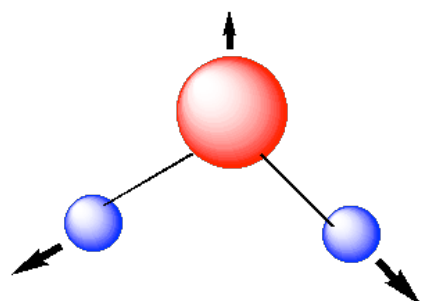
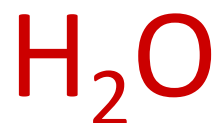
1º semestre de 2024

14/05/2024

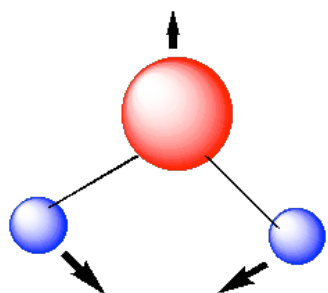
Aula 18

Pequenas oscilações

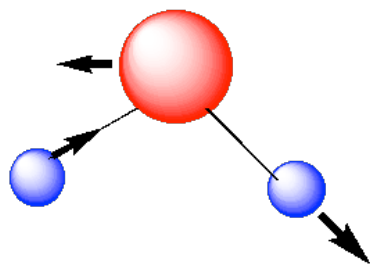
Vibrações moleculares



Symmetric Stretch
 3657 cm^{-1}



Bend 1595 cm^{-1}



Asymmetric Stretch
 3756 cm^{-1}

Infravermelho

Frequência	300 GHz	380 THz
Comp. de onda	1 mm	780 nm
Energia do fóton	1.24 meV	1.6 eV
Energia do fóton (cm^{-1})	10 cm^{-1}	12.900 cm^{-1}



$\nu_1 (1388 \text{ cm}^{-1})$



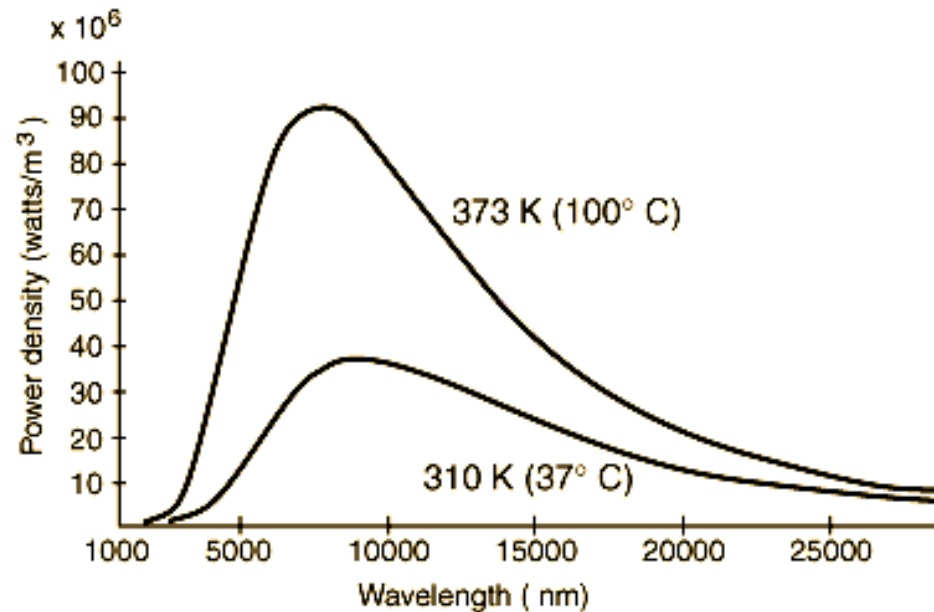
$\nu_2 (2349 \text{ cm}^{-1})$



$\left\{ \begin{array}{l} \nu_3 \\ 667 \text{ cm}^{-1} \end{array} \right\}$

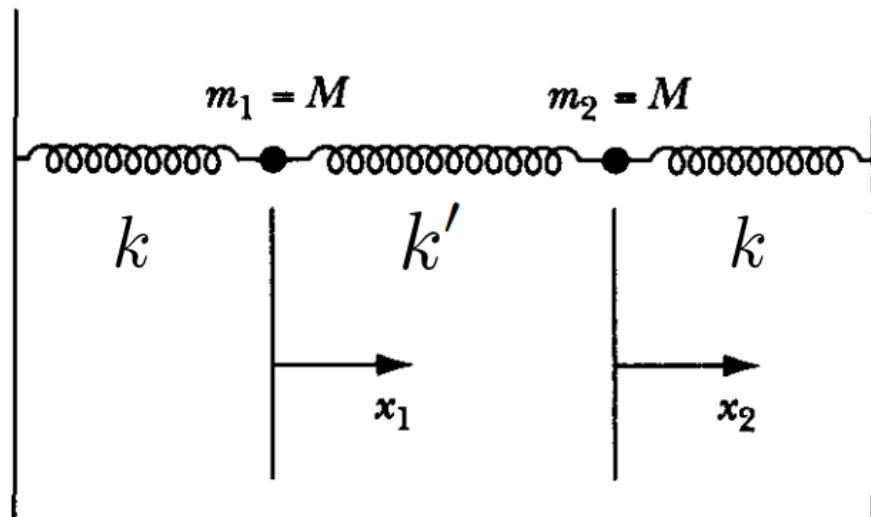
Vibrações de sólidos

As vibrações dos átomos nos sólidos à temperatura ambiente é quase completamente na região do infra-vermelho (**radiação de corpo negro**).



Objetivo: desenvolver os métodos necessários para descrever (classicamente) os movimentos de vibração em torno de posições de equilíbrio.

Dois osciladores acoplados



$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2)$$

$$\begin{cases} M \ddot{x}_1 + (k+k')x_1 - k'x_2 = 0 \\ M \ddot{x}_2 + (k+k')x_2 - k'x_1 = 0 \end{cases}$$

AS EQS. SÃO LINEARES

Quando $x_1 = x_2 = 0$, as molas estão na posição de equilíbrio.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k' (x_2 - x_1)^2$$

$$L = T - V = \frac{M}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{k'}{2} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2)$$

EQS. DIF. ^{LINEARES} ORDINÁRIAS
DE 2ª ORDEM
ACOPLADAS

Equações de movimento

$$\begin{cases} M \ddot{x}_1 + (k+k')x_1 - k'x_2 = 0 \\ M \ddot{x}_2 + (k+k')x_2 - k'x_1 = 0 \end{cases}$$

COMO RESOLVÊ-LAS?

Estratégia de solução

Primeiro, procuramos por **soluções particulares** em que todos os corpos vibram com a **mesma frequência**. Apesar de serem soluções particulares, veremos que serão suficientes.

$$x_1(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad \text{NOTAÇÃO COMPLEXA: } B_1, B_2 \in \mathbb{C}$$

$$x_2(t) = B \cos(\omega t + \delta')$$

$$\begin{cases} x_1(t) = B_1 e^{i\omega t} = |B_1| e^{i\delta_1} e^{i\omega t} \\ x_2(t) = B_2 e^{i\omega t} = |B_2| e^{i\delta_2} e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$x_1^{\text{ph}}(t) = \text{Re}[x_1(t)] = |B_1| \cos(\omega t + \delta_1)$$

$$x_2^{\text{ph}}(t) = \text{Re}[x_2(t)] = |B_2| \cos(\omega t + \delta_2)$$

LEVANDO NAS EQS. DO MOVIMENTO

$$\begin{aligned} -\omega^2 M B_1 e^{i\omega t} + (k+k') B_1 e^{i\omega t} - k' B_2 e^{i\omega t} &= 0 \\ -\omega^2 M B_2 e^{i\omega t} + (k+k') B_2 e^{i\omega t} - k' B_1 e^{i\omega t} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (-M\omega^2 + k + k')B_1 - k'B_2 = 0 \\ (-M\omega^2 + k + k')B_2 - k'B_1 = 0 \end{cases}$$

SISTEMA DE EQS. LINEARES
HOMOGÊNEO EM B_1, B_2

PARA QUE HAJA SOLUÇÃO NÃO TRIVIAL, A MATRIZ
DOS COEFICIENTES DEVE TER DETERMINANTE
NULO:

$$\begin{pmatrix} (-M\omega^2 + k + k') & -k' \\ -k' & (-M\omega^2 + k + k') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -M\omega^2 + k + k' & -k' \\ -k' & -M\omega^2 + k + k' \end{vmatrix} = 0$$

$$(-M\omega^2 + k + k')^2 = (k')^2 \Rightarrow -M\omega^2 + k + k' = \pm k'$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{M} \begin{cases} k + k' - k' = k \\ k + k' + k' = k + 2k' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k + 2k'}{M}} \quad \text{"FREQUÊNCIAS"} \\ \text{NORMAIS"}$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\omega_+ : \begin{pmatrix} -(\cancel{k+2k'}) + \cancel{k+k'} & -k' \\ -k' & -(\cancel{k+2k'}) + \cancel{k+k'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k' & -k' \\ -k' & -k' \end{pmatrix}$$

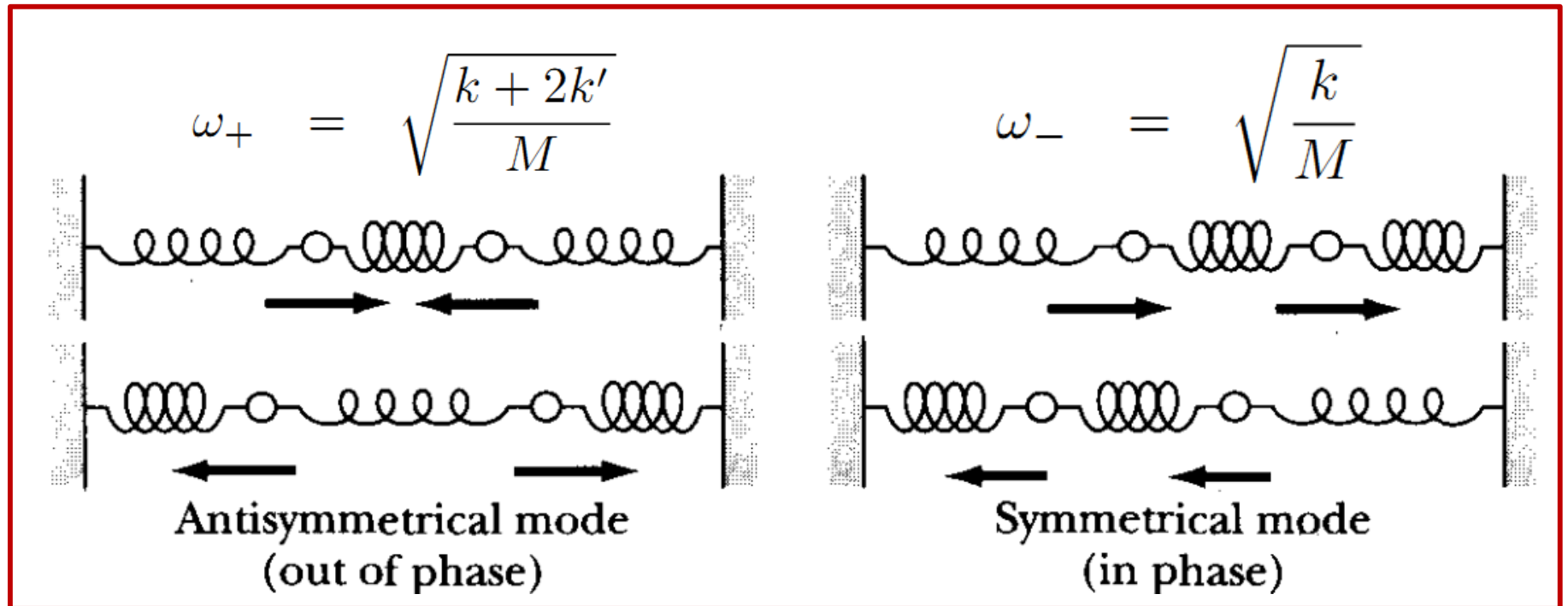
$$\begin{pmatrix} -k' & -k' \\ -k' & -k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -k'B_1 - k'B_2 = 0 \Rightarrow \boxed{B_1 = -B_2}$$

$$\omega_- : \begin{pmatrix} k' & -k' \\ -k' & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B_1 = B_2}$$

$$\omega_+: \quad \begin{aligned} X_1(t) &= B_1 e^{i\omega_+ t} \\ X_2(t) &= -B_1 e^{i\omega_+ t} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} X_1^{\text{ph}}(t) &= |B_1| \cos(\omega_+ t + \delta_1) \\ X_2^{\text{ph}}(t) &= -|B_1| \cos(\omega_+ t + \delta_1) \end{aligned}$$

$$\omega_-: \quad \begin{aligned} X_1(t) &= B_1 e^{i\omega_- t} \\ X_2(t) &= B_1 e^{i\omega_- t} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} X_1^{\text{ph}}(t) &= |B_1| \cos(\omega_- t + \delta_1) \\ X_2^{\text{ph}}(t) &= |B_1| \cos(\omega_- t + \delta_1) \end{aligned}$$

Modos normais



$$x_1^{(+)}(t) = |B_+| \cos(\omega_+ t + \delta_+)$$

$$x_2^{(+)}(t) = -|B_+| \cos(\omega_+ t + \delta_+)$$

$$x_1^{(-)}(t) = |B_-| \cos(\omega_- t + \delta_-)$$

$$x_2^{(-)}(t) = |B_-| \cos(\omega_- t + \delta_-)$$

A superposição de soluções também é solução!

$$x_1(t) = |B_+| \cos(\omega_+ t + \delta_+) + |B_-| \cos(\omega_- t + \delta_-)$$

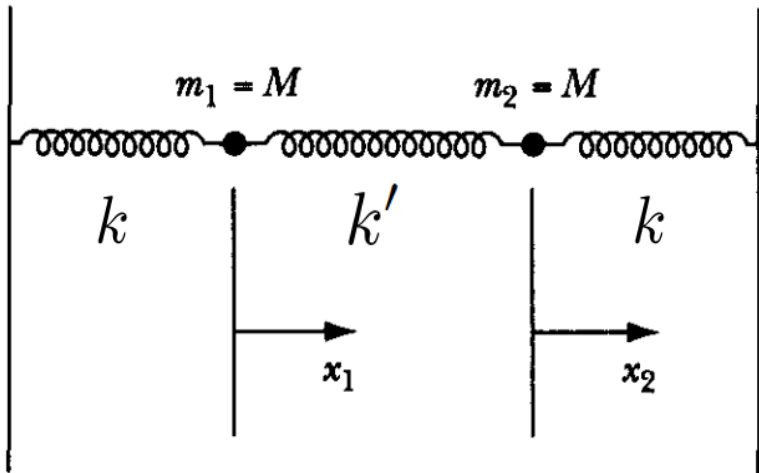
$$x_2(t) = -|B_+| \cos(\omega_+ t + \delta_+) + |B_-| \cos(\omega_- t + \delta_-)$$

PORQUE AS EQS. DIF. ORIGINALS SÃO LINEARES

A SOLUÇÃO ACIMA TEM 4 CONSTANTES ARBITRÁRIAS E É FORMADA POR COMB. LINEAR DE 2 SOLUÇÕES ($\pm$) QUE SÃO L.I. ENTÃO SEGUIR QUE A SOLUÇÃO ACIMA É

GERAL.

Exemplo



Condições iniciais:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= L, \\ x_2(0) &= 0, \\ \dot{x}_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

$$x_1(t) = |B_+| \cos(\omega_+ t + \delta_+) + |B_-| \cos(\omega_- t + \delta_-)$$

$$x_2(t) = -|B_+| \cos(\omega_+ t + \delta_+) + |B_-| \cos(\omega_- t + \delta_-)$$

$$\dot{x}_1(t) = -\omega_+ |B_+| \sin(\omega_+ t + \delta_+) - \omega_- |B_-| \sin(\omega_- t + \delta_-)$$

$$\dot{x}_2(t) = \omega_+ |B_+| \sin(\omega_+ t + \delta_+) - \omega_- |B_-| \sin(\omega_- t + \delta_-)$$

$$x_1(0) = |B_+| \cos \delta_+ + |B_-| \cos \delta_- = L \quad \left. \begin{aligned} &|B_+| + |B_-| = L \\ &-|B_+| + |B_-| = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$x_2(0) = -|B_+| \cos \delta_+ + |B_-| \cos \delta_- = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = -\omega_+ |B_+| \sin \delta_+ - \omega_- |B_-| \sin \delta_- = 0 \quad \left. \begin{aligned} &(-): 2\omega_+ |B_+| \sin \delta_+ = 0 \\ &(+): -2\omega_- |B_-| \sin \delta_- = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\dot{x}_2(0) = \omega_+ |B_+| \sin \delta_+ - \omega_- |B_-| \sin \delta_- = 0$$

$$|B_+| = |B_-| = \frac{L}{2}$$

$$\delta_+ = \delta_- = 0$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \frac{L}{2} [\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)]$$

$$x_2(t) = \frac{L}{2} [-\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)]$$

Coordenadas normais

$$M\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0$$

$$M\ddot{x}_2 + (k + k')x_2 - k'x_1 = 0$$

SOMANDO AS DUAS EQS.:

$$M(\underbrace{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}_{\ddot{\eta}_1}) + (k + k')(\underbrace{x_1 + x_2}_{\eta_1}) - k'(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Rightarrow M\ddot{\eta}_1 + k\eta_1 = 0 \Rightarrow \eta_1(t) = |C_1| \cos(\omega t + \theta_1)$$

SUBTRAINDO AS DUAS EQS.:

$$M(\underbrace{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2}_{\ddot{\eta}_2}) + (k + k')(\underbrace{x_1 - x_2}_{\eta_2}) + k'(\underbrace{x_1 - x_2}_{\eta_2}) = 0$$

$$\Rightarrow M\ddot{\eta}_2 + (k + 2k')\eta_2 = 0 \Rightarrow \eta_2(t) = |C_2| \cos(\omega_+ t + \theta_2)$$

$$\eta_1 = x_1 + x_2$$

$$\eta_2 = x_1 - x_2$$

SÃO AS COORD.

NORMAIS DO
PROBLEMA

Caso geral: n graus de liberdade

n COORDS. GENERALIZADAS: $q_1, q_2, \dots, q_n$

$$L[\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}] = \sum_{j,k} \frac{m_{jk}}{2} \dot{q}_j \dot{q}_k - U(q_1, \dots, q_n)$$

ONDE: $m_{jk} = m_{jk}[\{q_i\}]$ e $m_{jk} = m_{kj}$

EXEMPLO: FORÇA CENTRAL (r, θ)

$$L = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)$$

$$m_{11} = \mu$$

$$m_{12} = m_{21} = 0$$

$$m_{22} = \mu r^2$$

PROCURAMOS POR MÍNIMOS LOCAIS DE U ; EXPAN-
DIMOS EM TORNO DO MÍNIMO ATÉ 2ª ORDEM

$$U(q_1, \dots, q_n) \approx U(q_{10}, \dots, q_{n0}) + \sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k} \bigg|_{\{q_{i0}\}} (q_k - q_{k0})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{jk} \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} \bigg|_{\{q_{i0}\}} (q_j - q_{j0}) (q_k - q_{k0})$$

ANALOGAMENTE, EXPANDIMOS m_{jk} EM TORNO DO MÍNIMO:

$$m_{jk}[\{q_i\}] \approx m_{jk}[\{q_{i0}\}]$$

TERMOS SUPERIORES SAEM DO REGIME LINEAR.

$\Rightarrow L = \sum_{jk} \frac{m_{jk}^{(0)}}{2} \dot{q}_j \dot{q}_k - U[\{q_{i0}\}] - \frac{1}{2} \sum_{jk} A_{jk} (q_j - q_{j0}) (q_k - q_{k0})$

AN AFETA Eqs. DE MOVIMENTO

$\dot{q}_j \dot{q}_k$

$q_j' q_k'$

$$L = \sum_{jk} \frac{m_{jk}^{(0)}}{2} \dot{q}_j' \dot{q}_k' - \frac{1}{2} \sum_{jk} A_{jk} q_j' q_k'$$

$$m_{jk}^{(0)} = m_{kj}^{(0)}$$

$$A_{jk} = A_{kj}$$

$$L = \sum_{jk} \frac{m_{jk}^{(0)}}{2} \dot{q}_j^1 \dot{q}_k^1 - \frac{1}{2} \sum_{jk} A_{jk} q_j^1 q_k^1$$

EQ.S DE MOVIMENTO:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{m_{ji}^{(0)}}{2} \dot{q}_j^1 + \sum_k \frac{m_{ik}^{(0)}}{2} \dot{q}_k^1 \right] + \frac{1}{2} \left[\sum_j A_{ji} q_j^1 + \sum_k A_{ik} q_k^1 \right] = 0$$

$$\sum_j m_{ij}^{(0)} \ddot{q}_j^1 + \sum_j A_{ij} q_j^1 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k$$

onde

$$m_{jk} \equiv m_{jk}(q_1^0, \dots, q_n^0)$$

$$A_{jk} \equiv \left. \frac{\partial^2 U(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0$$

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}; \dot{\bar{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$$

Matrizes simétricas!

$$\bar{\bar{m}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}; \bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2} \bar{q}^T \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{q}$$

$$\bar{\bar{m}} \cdot \ddot{\bar{q}} + \bar{\bar{A}} \cdot \bar{q} = 0$$