

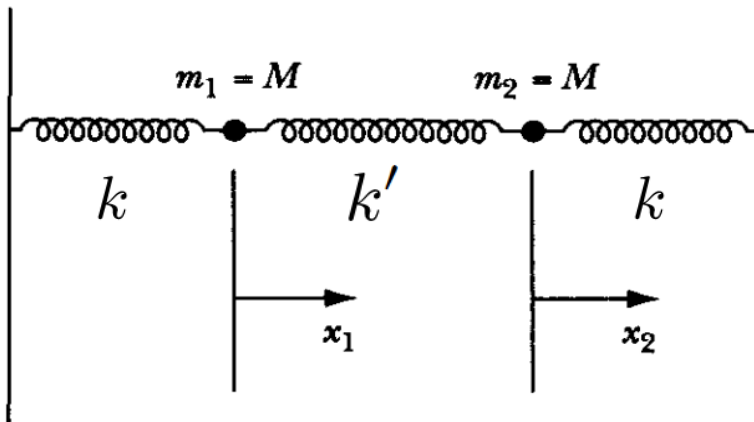
F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

16/05/2024

Aula 19

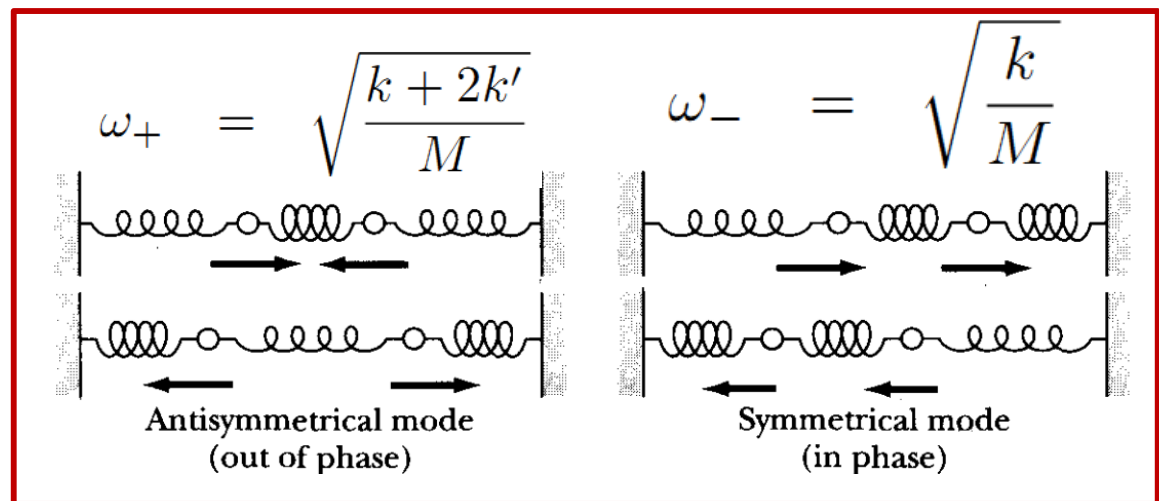
Aula passada



Dois osciladores acoplados: Procuramos soluções em que ambas as partículas oscilam com a mesma frequência.

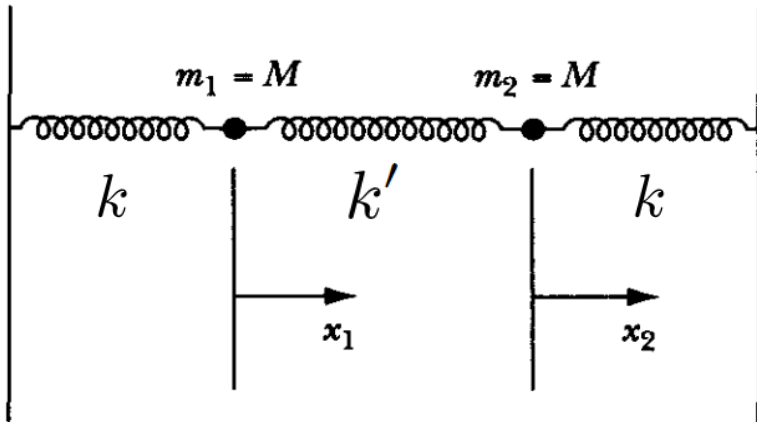
Soluções assim só são possíveis para duas frequências, chamadas de normais ou características.

Modos normais de vibração



$$\begin{aligned} x_1^{(+)}(t) &= |B_+| \cos(\omega_+ t + \delta_+) & x_1^{(-)}(t) &= |B_-| \cos(\omega_- t + \delta_-) \\ x_2^{(+)}(t) &= -|B_+| \cos(\omega_+ t + \delta_+) & x_2^{(-)}(t) &= |B_-| \cos(\omega_- t + \delta_-) \end{aligned}$$

Aula passada



Dois osciladores acoplados: Procuramos soluções em que ambas as partículas oscilam com a mesma frequência.

Soluções assim só são possíveis para duas frequências, chamadas de normais ou características.

A solução geral do problema é uma superposição linear dos dois modos normais.

$$x_1(t) = |B_+| \cos(\omega_+ t + \delta_+) + |B_-| \cos(\omega_- t + \delta_-)$$

$$x_2(t) = -|B_+| \cos(\omega_+ t + \delta_+) + |B_-| \cos(\omega_- t + \delta_-)$$

Aula passada

Caso geral:
$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} (q_1, \dots, q_n) \dot{q}_j \dot{q}_k - U (q_1, \dots, q_n)$$

Pontos de equilíbrio $\{q_j^0\}$:
$$\left. \frac{\partial U (q_1, \dots, q_n)}{\partial q_j} \right|_{\{q_k\}=\{q_k^0\}} = 0$$

Equilíbrio estável: $\{q_j^0\}$ é ponto de mínimo local

Expandindo em torno de $\{q_j^0\}$

$$\begin{aligned} \rightarrow L &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} (q_1^0, \dots, q_n^0) \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &- \text{constante} \leftarrow U(q_1^0, \dots, q_n^0) - \sum_j \frac{\partial U(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_j} \Big|_0 (q_j - q_j^0) \rightarrow 0 \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 U(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_j \partial q_k} \Big|_0 (q_j - q_j^0) (q_k - q_k^0) \end{aligned}$$

Aula passada

Definindo:

$$\begin{aligned} q'_j &\equiv q_j - q_j^0 \\ \dot{q}'_j &\equiv \dot{q}_j \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}'_j \dot{q}'_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q'_j q'_k \quad \text{onde} \quad \begin{aligned} m_{jk} &\equiv m_{jk}(q_1^0, \dots, q_n^0) \\ A_{jk} &\equiv \left. \frac{\partial^2 U(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0 \end{aligned}$$

m_{jk} e A_{jk} são matrizes constantes simétricas

Retirando as linhas para simplificar:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k$$

Notação matricial:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T \cdot \bar{m} \cdot \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2} \bar{q}^T \cdot \bar{A} \cdot \bar{q}$$

Aula passada

Definindo:

$$q'_j \equiv q_j - q_j^0$$

$$\dot{q}'_j \equiv \dot{q}_j$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}'_j \dot{q}'_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q'_j q'_k \quad \text{onde}$$

$$m_{jk} \equiv m_{jk}(q_1^0, \dots, q_n^0)$$

$$A_{jk} \equiv \left. \frac{\partial^2 U(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_j \partial q_k} \right|_0$$

m_{jk} e A_{jk} são matrizes constantes
simétricas

$$\bar{\bar{m}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}; \bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Retirando as linhas para simplificar:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k$$

Aula passada

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk} q_j q_k$$

Notação matricial: $\bar{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}; \dot{\bar{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}$

$$L = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2} \bar{q}^T \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{q}$$

Eqs. de movimento: $\sum_k m_{jk} \ddot{q}_k + \sum_k A_{jk} q_k = 0$

$$\bar{\bar{m}} \cdot \ddot{\bar{q}} + \bar{\bar{A}} \cdot \bar{q} = 0$$

Modos normais: generalização

$$\sum_k m_{jk} \ddot{q}_k + \sum_k A_{jk} q_k = 0$$

$$\bar{\bar{m}} \cdot \ddot{\bar{q}} + \bar{\bar{A}} \cdot \bar{q} = 0$$

Caso anterior: $\bar{\bar{m}} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}; \bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix} k+k' & -k' \\ -k' & k+k' \end{pmatrix}$

SUPONDO: $q_j(t) = a_j e^{i\omega t}$ $a_j \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{q}(t) = \bar{a} e^{i\omega t}$
 $\ddot{q}_j(t) = -\omega^2 a_j e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{\bar{q}}(t) = -\omega^2 \bar{a} e^{i\omega t}$

$$-\omega^2 \sum_k m_{jk} a_k + \sum_k A_{jk} a_k = 0 \Rightarrow -\omega^2 \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a} + \bar{\bar{A}} \cdot \bar{a} = 0$$

$$\sum_k [-\omega^2 m_{jk} + A_{jk}] a_k = 0 \Rightarrow [-\omega^2 \bar{\bar{m}} + \bar{\bar{A}}] \cdot \bar{a} = 0$$

$$\Rightarrow \det [-\omega^2 \bar{\bar{m}} + \bar{\bar{A}}] = 0 \Rightarrow \det [-\omega^2 \bar{\bar{m}} + \bar{\bar{A}}] = 0$$

EQ. DE ORDEM NA VARIÁVEL ω^2 DE
COEFICIENTES REAIS.

ESSAS m RAÍZES SERÃO SEMPRE REAIS E
POSITIVAS, DEVIDO AO FATO DE $\{q_{j0}\}$ SEREM UM
PONTO DE MÍNIMO LOCAL: ω_n^2 ($n=1, \dots, m$)

BASTAM $\omega_n > 0 \Rightarrow$ FREQUÊNCIAS NORMAIS

PARA CADA ω_n :

$$\sum_k [-\omega_n^2 m_{jk} + A_{jk}] a_k^{(n)} = 0 \Rightarrow a_k^{(n)} \quad (n=1, \dots, m)$$

$$[-\omega_n^2 \bar{m} + \bar{A}] \bar{a}^{(n)} = 0$$

ALGUMAS PROPRIEDADES:

$$[-\omega_n^2 \bar{m} + \bar{A}] \cdot \bar{a}^{(n)} = 0 \quad (1)$$

$$[-\omega_s^2 \bar{m} + \bar{A}] \cdot \bar{a}^{(s)} = 0 \quad (2) \quad \omega_n \neq \omega_s$$

MULTIPLICO $\bar{a}^{(s)T} \cdot (1)$ E $\bar{a}^{(n)T} \cdot (2)$:

$$-\omega_n^2 \bar{a}^{(s)T} \cdot \bar{m} \cdot \bar{a}^{(n)} + \bar{a}^{(s)T} \cdot \bar{A} \cdot \bar{a}^{(n)} = 0 \quad (3)$$

$$-\omega_s^2 \bar{a}^{(n)T} \cdot \bar{m} \cdot \bar{a}^{(s)} + \bar{a}^{(n)T} \cdot \bar{A} \cdot \bar{a}^{(s)} = 0 \quad (4)$$

COMO $\bar{m}$ E $\bar{A}$ SÃO SIMÉTRICAS: $\bar{a}^{(s)T} \cdot \bar{m} \cdot \bar{a}^{(n)} =$
 $= \bar{a}^{(n)T} \cdot \bar{m} \cdot \bar{a}^{(s)}$, ETC. FAZENDO ISSO EM (4) E

SUBTRAINDO (3) - (4):

$$(-\omega_n^2 + \omega_s^2) \bar{a}^{(s)T} \cdot \bar{m} \cdot \bar{a}^{(n)} = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{a}^{(s)T} \cdot \bar{m} \cdot \bar{a}^{(n)} = 0}$$

EM COMPONENTES:

$$\sum_{j,k} a_j^{(s)} m_{jk} a_k^{(n)} = 0$$

ORTOGONALIDADE
GENERALIZADA

Ortogonalidade generalizada

ASSIM COMO NO CASO HABITUAL, SE UMA RAIZ ω_n É DEGENERADA (DE ORDEM $\underline{m}$), É SEMPRE POSSÍVEL DEFINIR $\underline{m}$ VETORES $\bar{a}^{(n1)}, \bar{a}^{(n2)}, \dots, \bar{a}^{(nm)}$ ORTOGONAIS ENTRE SI NO SENTIDO GENERALIZADO:

$$\bar{a}^{(ni)T} \cdot \bar{M} \cdot \bar{a}^{(nj)} = 0 \quad \text{SE } i \neq j$$

TAMBÉM É INTERESSANTE ORTONORMALIZAR OS $\bar{a}^{(n)}$ A 1 (NO SENTIDO GENERALIZADO):

$$\bar{a}^{(n)T} \cdot \bar{M} \cdot \bar{a}^{(s)} = \delta_{n,s} \quad (5)$$

A matriz Λ e suas propriedades

DEFINO A MATRIZ $\bar{\Lambda}$ CUJAS COMPONENTES SÃO:

$$\Lambda_{jk} = a_k^{(j)}$$

A j -ÉSIMA LINHA DE $\bar{\Lambda}$ CONTÉM AS COMPONENTES DE $\vec{a}^{(j)}$

$$(5) \Rightarrow \sum_{jk} a_j^{(n)} m_{jk} a_k^{(s)} = \delta_{n,s}$$

$$\Rightarrow \sum_{jn} \Lambda_{nj} m_{jk} \Lambda_{sk} = \delta_{s,n}$$

$$\sum_{jk} \Lambda_{nj} m_{jk} \Lambda_{ks}^T = \delta_{n,s}$$

$$\boxed{\bar{\Lambda} \cdot \bar{m} \cdot \bar{\Lambda}^T = \mathbb{1}} \quad (6)$$

$$\sum_k [-\omega_n^2 m_{jk} + A_{jk}] a_k^{(n)} = 0 \Rightarrow -\omega_n^2 \sum_k m_{jk} a_k^{(n)} + \sum_k A_{jk} a_k^{(n)} = 0$$

$\Lambda_{nk} = \Lambda_{kn}^T$ $\Lambda_{nk} = \Lambda_{kn}^T$

$$\Rightarrow -\omega_n^2 \sum_k m_{jk} \Lambda_{kn}^T + \sum_k A_{jk} \Lambda_{kn}^T = 0$$

DEFINE A MATRIX $\overline{\Omega}$ DIAGONAL:

$$\overline{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Omega_{ns} = \delta_{ns} \omega_n^2$$

$$-\sum_k m_{jk} \Lambda_{kn}^T \omega_n^2 = -\sum_{ks} m_{jk} \Lambda_{ks}^T \underbrace{\delta_{ns}}_{\Omega_{sn}} \omega_n^2 = -\sum_{ks} m_{jk} \Lambda_{ks}^T \Omega_{sn}$$

$$\Rightarrow -\sum_{ks} m_{jk} \Lambda_{ks}^T \Omega_{sn} + \sum_k A_{jk} \Lambda_{kn}^T = 0$$

$$\Rightarrow -\overline{M} \cdot \overline{\Lambda}^T \cdot \overline{\Omega} + \overline{A} \cdot \overline{\Lambda}^T = 0$$

$$-\bar{M} \cdot \bar{A}^T \cdot \bar{J} + \bar{A} \cdot \bar{A}^T = 0$$

MULTIPLICADO PELA ESQUERDA POR $\bar{A}$:

$$-\underbrace{\bar{A} \cdot \bar{M} \cdot \bar{A}^T}_{\Downarrow} \cdot \bar{J} + \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \bar{A}^T = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \bar{A}^T = \bar{J}} \quad (7)$$

$$\boxed{\bar{A} \cdot \bar{M} \cdot \bar{A}^T = \mathbb{I}} \quad (6)$$

NOTE QUE (6) DEFINE

$\bar{A}$ COMO ORTOGONAL

NO SENTIDO GENERALIZADO

SE $\bar{M} = \mathbb{I} \Rightarrow \bar{A}$ É ORTOGONAL NO

SENTIDO USUAL

Modos normais

CADA VALOR DE $\underline{n}$ DEFINE UM MOVIMENTO ONDE
TODAS AS COORDENADAS VIBRAM COM A MESMA
FREQUÊNCIA ω_n :

$$q_j^{(n)}(t) = z_n a_j^{(n)} e^{i\omega_n t} \quad z_n = \alpha_n e^{i\delta_n} \in \mathbb{C}$$
$$= \alpha_n a_j^{(n)} e^{i(\omega_n t + \delta_n)}$$

$$q_j^{(n)ph}(t) = \text{Re}[q_j^{(n)}(t)] = \alpha_n a_j^{(n)} \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

A solução geral como superposição dos modos normais

SUPERPONDO TODOS OS M MODOS NORMAIS, QUE SÃO L.I., TEMOS A SOLUÇÃO GERAL COM $2M$ CONSTANTES ARBITRÁRIAS: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n); (\delta_1, \dots, \delta_n)$:

$$q_j(t) = \sum_{n=1}^M \alpha_n q_j^{(n)} \cos(\omega_n t + \delta_n)$$
$$= \sum_{n=1}^M \alpha_n \Lambda_{nj} \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

DEFINO: $\eta_n(t) = \alpha_n \cos(\omega_n t + \delta_n)$ ("COORDENADA NORMAL")

$$q_j(t) = \sum_{n=1}^M \Lambda_{nj} \eta_n(t) = \sum_{n=1}^M \Lambda_{jn}^T \eta_n(t)$$

$$\Rightarrow \bar{q}(t) = \bar{\Lambda}^T \cdot \bar{\eta}(t)$$

$$\vec{q}(t) = \bar{A}^T \cdot \vec{u}(t)$$

MULTIPLICO PELA ESQUERDA POR $\bar{A} \cdot \bar{m}$.

$$\bar{A} \cdot \bar{m} \cdot \vec{q}(t) = \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{m} \cdot \bar{A}^T}_{\mathbb{I}} \cdot \vec{u}(t) = \vec{u}(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}(t) = \bar{A} \cdot \bar{m} \cdot \vec{q}(t)}$$

A Lagrangiana em coordenadas normais

$$L = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^T \cdot \bar{M} \cdot \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2} \bar{q} \cdot \bar{A} \cdot \bar{q}$$

USANDO $\bar{q}(t) = \bar{A}^T \cdot \bar{u}(t) \Rightarrow \dot{\bar{q}}^T(t) = \dot{\bar{u}}^T(t) \cdot \bar{A}$

$$\dot{\bar{q}}^T \cdot \bar{M} \cdot \dot{\bar{q}} = \dot{\bar{u}}^T \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{M} \cdot \bar{A}^T}_{\bar{M}}$$

$$\bar{q}^T \cdot \bar{A} \cdot \bar{q} = \bar{u}^T \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \bar{A}^T}_{\bar{\omega}} \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot \bar{\omega} \cdot \bar{u}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \dot{\bar{u}}^T \cdot \dot{\bar{u}} - \frac{1}{2} \bar{u} \cdot \bar{\omega} \cdot \bar{u} = \frac{1}{2} \sum_n \left[\dot{u}_n^2(t) - \omega_n^2 u_n^2(t) \right]$$

EQS. DE MOVIMENTO:

$$\ddot{u}_n(t) + \omega_n^2 u_n(t) = 0$$

$$\Rightarrow u_n(t) = \alpha_n \cos(\omega_n t + \delta_n)$$

Resumo

$$\left(-\omega_r^2 \bar{\bar{m}} + \bar{\bar{A}}\right) \cdot \bar{a}_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

$$\boxed{\Lambda_{rk} \equiv (\bar{a}_r)_k}$$

$$\bar{a}_s \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}_r = \delta_{r,s} \Rightarrow \boxed{\bar{\bar{\Lambda}} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{\bar{\Lambda}}^T = \bar{\bar{1}}}$$

$$\omega_r^2 \delta_{r,s} = \bar{a}_s \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{a}_r \Rightarrow \boxed{\bar{\bar{\Lambda}} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{\Lambda}}^T = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \omega_n^2 \end{pmatrix}}$$

Resumo

A solução geral, com 2n parâmetros arbitrários determinados pelas condições iniciais é:

$$\bar{q}(t) = \sum_r \alpha_r \bar{a}_r \cos(\omega_r t + \delta_r)$$

$$q_j(t) = \sum_r \alpha_r \Lambda_{rj} \cos(\omega_r t + \delta_r) \equiv \sum_r \Lambda_{rj} \eta_r(t)$$

$$\eta_r(t) \equiv \alpha_r \cos(\omega_r t + \delta_r) \longrightarrow \text{coordenada normal}$$

Matricialmente: $\boxed{\bar{q} = \bar{\bar{\Lambda}}^T \cdot \bar{\eta}}$

Multiplicando pela esquerda por $\bar{\bar{\Lambda}} \cdot \bar{\bar{m}}$

$$\bar{q} = \bar{\bar{\Lambda}}^T \cdot \bar{\eta} \Rightarrow \bar{\bar{\Lambda}} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{q} = \bar{\bar{\Lambda}} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{\bar{\Lambda}}^T \cdot \bar{\eta} = \bar{\eta}$$

Fórmula inversa: $\boxed{\bar{\eta} = \bar{\bar{\Lambda}} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{q}}$

Resumo

$$\text{De } \bar{q} = \bar{\bar{\Lambda}}^T \cdot \bar{\eta}$$

$$L = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2} \bar{q} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{q}$$

$$L = \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}} \cdot \bar{\bar{\Lambda}} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{\bar{\Lambda}}^T \cdot \dot{\bar{\eta}} - \frac{1}{2} \bar{\eta} \cdot \bar{\bar{\Lambda}} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{\Lambda}}^T \cdot \bar{\eta}$$

$$L = \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}} \cdot \dot{\bar{\eta}} - \frac{1}{2} \bar{\eta} \cdot \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) \cdot \bar{\eta} = \frac{1}{2} \sum_r (\dot{\eta}^2 - \omega_r^2 \eta_r^2)$$

Coordenadas normais:

$$\ddot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0 \Rightarrow \eta_r(t) = \alpha_r \cos(\omega_r t + \delta_r)$$