F 415 – Mecânica Geral II

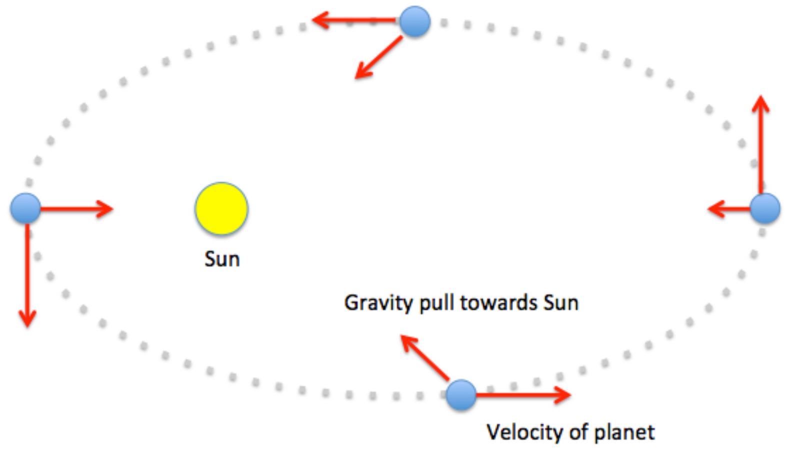
1º semestre de 2024

07/03/2024

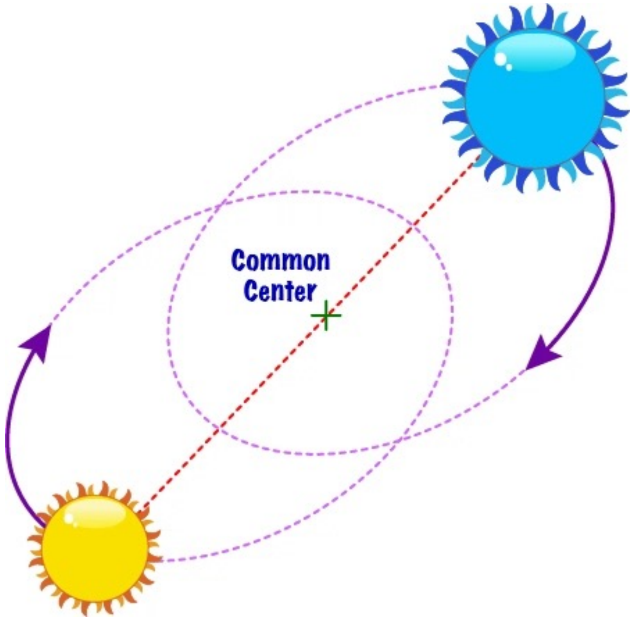
Aula 2

Aula passada

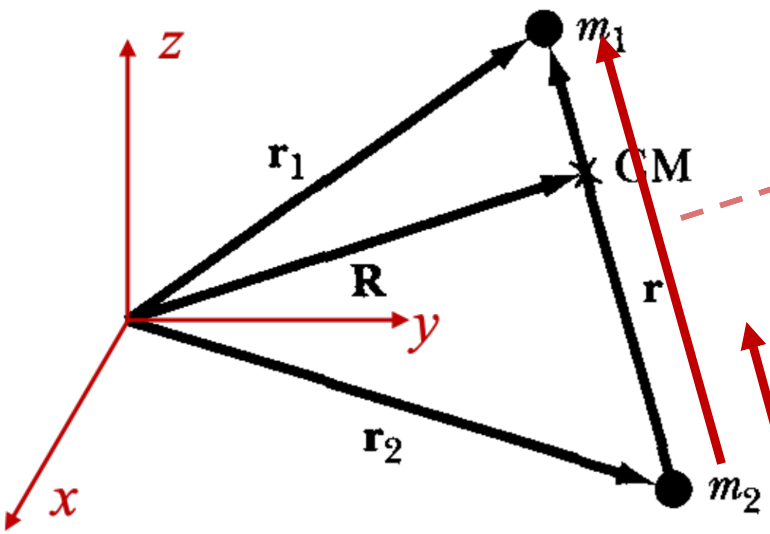
2 corpos interagindo através de uma força central, ou seja, uma força que atua ao longo da linha que vai de um corpo ao outro, cujo módulo só depende da distância entre os corpos.



Estrelas binárias



Aula passada



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Força central: $\mathbf{F}_{2\to1} = F\left(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|\right)\left(\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right) = F(r)\,\hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}_{1\to2}$

Forças centrais são conservativas: existe uma energia potencial $U(r)$

$$U(r) = U\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\right)$$

tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{2\to1} &= -\boldsymbol{\nabla}_1 U(r) = -\frac{\partial U}{\partial x_1}\hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial U}{\partial y_1}\hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial U}{\partial z_1}\hat{\mathbf{z}} = -\mathbf{F}_{1\to2} \\
\mathbf{F}_{1\to2} &= -\boldsymbol{\nabla}_2 U(r) = -\frac{\partial U}{\partial x_2}\hat{\mathbf{x}} - \frac{\partial U}{\partial y_2}\hat{\mathbf{y}} - \frac{\partial U}{\partial z_2}\hat{\mathbf{z}} = -\mathbf{F}_{2\to1}
\end{aligned}$$

e

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbf{F} &= F(r)\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{dU}{dr}\hat{\mathbf{r}} \\
U(r) &= -\int_{r_0}^{r} F(r)\,dr
\end{aligned}}$$

Formulação lagrangiana

Existe uma função lagrangiana das coordenadas $\{q_1, q_2, \ldots, q_N\}$ e velocidades generalizadas $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N\}$, geralmente igual à energia cinética total menos a energia potencial total (sistemas conservativos)

$$L\left(q_1, q_2, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N\right) = T - U$$

tal que as equações de movimento do sistema são dadas pelas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots N)$$

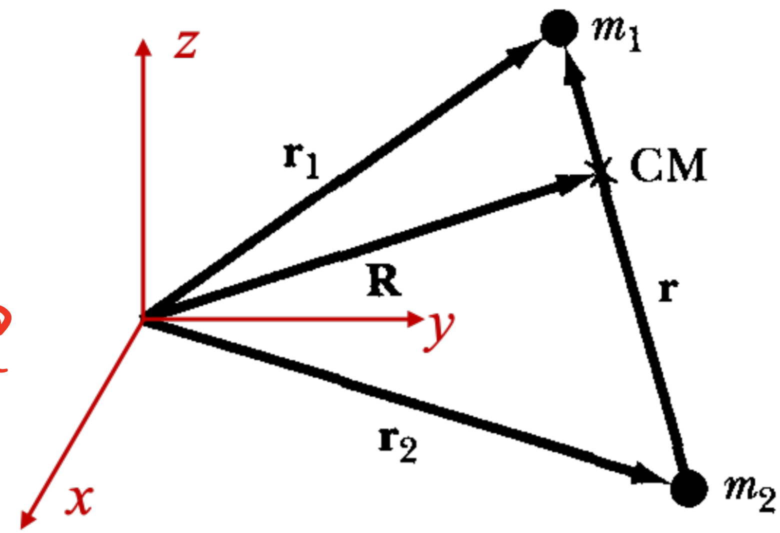
- N é o número de graus de liberdade
- N equações acopladas de 2a. ordem nas derivadas temporais.

Coordenadas relativa e do Centro de Massa

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad \text{(COORD. RELATIVA)}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \quad ; \quad M = m_1 + m_2$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\vec{r}}_1 &= \dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}}_2 &= \dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}} \end{aligned}$$



$$T = \frac{m_1}{2}\left|\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right|^2 + \frac{m_2}{2}\left|\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right|^2$$

$$= \frac{m_1}{2}\left[|\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{m_2^2}{M^2}|\dot{\vec{r}}|^2 + \cancel{2\frac{m_2}{M}\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}}\right]$$

$$+ \frac{m_2}{2}\left[|\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{m_1^2}{M^2}|\dot{\vec{r}}|^2 - \cancel{2\frac{m_1}{M}\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}}\right] = \frac{M}{2}|\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{m_1 m_2}{2M^2} \times$$

$$\times \left[m_2|\dot{\vec{r}}|^2 + m_1|\dot{\vec{r}}|^2\right] \rightarrow \overbrace{(m_1 + m_2)}^{M}|\dot{\vec{r}}|^2 =$$

A lagrangiana do sistema de dois corpos

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2}|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{\vec{r}}_2|^2$$

$U = U(r)$ (FORÇA CENTRAL) $\Rightarrow U(r) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

(DO SLIDE ANTERIOR):

$$T_1 + T_2 = \frac{M}{2}|\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{m_1 m_2}{2\cancel{M^2}}\cancel{M}|\dot{\vec{r}}|^2$$

$$= \frac{M}{2}|\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)}_{\mu}|\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{M}{2}|\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{\mu}{2}|\dot{\vec{r}}|^2$$

$$L = T - U = \frac{M}{2}|\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{\mu}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 - U(r)$$

$\vec{R} = (X, Y, Z)$ e $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\frac{M}{2}|\dot{\vec{R}}|^2 = \frac{M}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2)$$

Movimento do Centro de Massa: conservação do momento linear total

EQS. DE EULER-LAGRANGE PARA (x, y, z):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d(M\dot{x})}{dt} = 0$$

$M\dot{x} = \text{CONST.}$

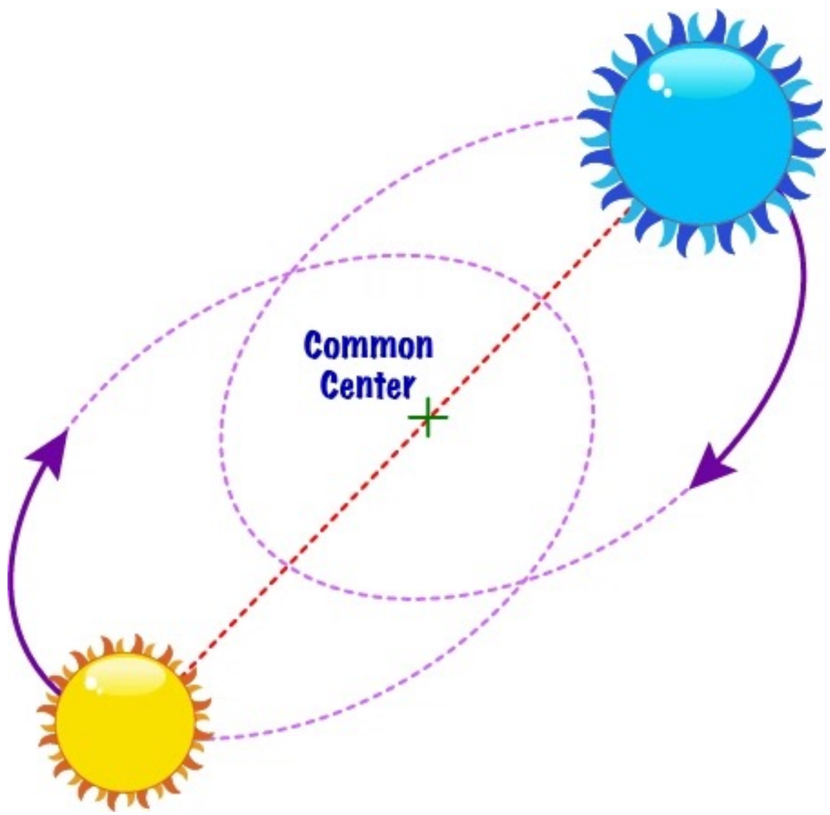
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M\dot{y} \;;\; \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow M\dot{y} = \text{CONST.}$$

$$\Rightarrow M\dot{z} = \text{CONST.}$$

$$M\dot{\vec{R}} = \text{CONST.} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \text{CONST.}$$

A VEL. DO CM É CONSTANTE

O sistema como um todo (centro de massa) move-se em linha reta!



$$\dot{\boldsymbol{R}} = \text{const.}$$

$$\vec{P} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = M\left[\frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{M}\right] = M\dot{\vec{R}} = \text{CONST.}$$

Dinâmica da coordenada relativa

$$L = \frac{M}{2}|\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{\mu}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 - U(r)$$

NO REF. DO CM : $\dot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow L_{CM} = \frac{\mu}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 - U(r)$

$\vec{r} = (x, y, z)$ $\quad L_{CM} = \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{r})$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \mu \dot{x} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r}\left[\frac{x}{r}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] - \frac{\partial L}{\partial x} = \mu \ddot{x} + \frac{x}{r}\frac{dU}{dr} = 0 \Rightarrow \mu \ddot{x} = -\frac{dU}{dr}\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$\mu \ddot{y} = -\frac{dU}{dr}\left(\frac{y}{r}\right) \quad ; \quad \mu \ddot{z} = -\frac{dU}{dr}\left(\frac{z}{r}\right)$$

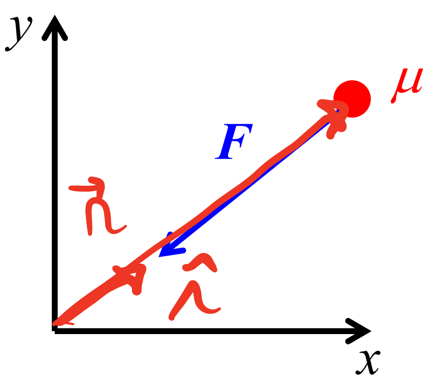
$$\mu\underbrace{(\ddot{x}\hat{x}+\ddot{y}\hat{y}+\ddot{z}\hat{z})}_{\ddot{\vec{r}}} = -\frac{dU}{dr}\underbrace{\frac{1}{r}\underbrace{(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})}_{\vec{r}}}_{\hat{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{dU}{dr}\hat{r} = F(r)\hat{r}}$$

$$\boxed{\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{\boldsymbol{r}}}$$

- FATO MAIS IMPORTANTE DO PROBLEMA DE DOIS CORPOS:

a dinâmica da coordenada relativa $\boldsymbol{r}$ é a mesma de um corpo de massa μ sujeito a uma força que aponta para a origem.



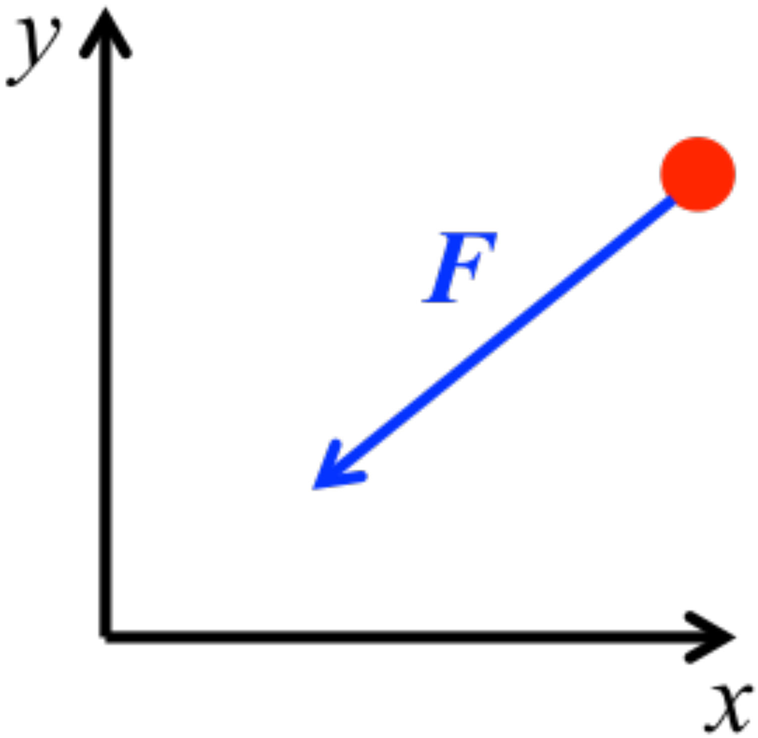
Caso particular importante:

$$m_2 \gg m_1 \Rightarrow \mu \approx m_1; \;\; \boldsymbol{R} \approx \boldsymbol{r_2}$$

Por exemplo, partícula 2 é o Sol e 1 é um dos planetas:

- massa reduzida é a massa do planeta
- CM é o centro do Sol.

A partir de agora!



$$L_{CM} = \frac{\mu}{2}\left|\dot{\boldsymbol{r}}\right|^2 - U\left(r\right)$$

$$\boxed{\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{\boldsymbol{r}}}$$

Embora vamos falar de uma partícula de massa μ, sob a ação de uma força que aponta pra origem, não se esqueçam de que se trata do movimento da massa m_1 em relação à massa m_2 (dinâmica da coordenada relativa $\mathbf{r}$).

O que temos até agora?

1. O centro de massa do sistema de dois corpos move-se com velocidade constante. ✓

2. A dinâmica da coordenada relativa é a mesma de um corpo de massa μ, sujeito a uma força que aponta para a origem. ✓

Conservação do momento angular

$$\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

$$= m_1 \left[\vec{R} + \frac{m_2}{M}\vec{r}\right] \times \left[\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right] +$$

$$+ m_2 \left[\vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{r}\right] \times \left[\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right]$$

$$= m_1 \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + m_2 \vec{R} \times \dot{\vec{R}} +$$

$$+ \frac{m_1 m_2^2}{M^2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} + \frac{m_2 m_1^2}{M^2}\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

$$+ \cancel{\frac{m_1 m_2}{M}\vec{r} \times \dot{\vec{R}}} + \cancel{m_1 \frac{m_2}{M}\vec{R} \times \dot{\vec{r}}} - \cancel{\frac{m_1 m_2}{M}\vec{r} \times \dot{\vec{R}}} - \cancel{\frac{m_1 m_2}{M}\vec{R} \times \dot{\vec{r}}}$$

$$= M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\left[\frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_2 m_1^2}{M^2}\right]}_{\frac{m_1 m_2}{M^2}\left[m_2 + m_1\right] = \mu}\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \underbrace{M\vec{R} \times \dot{\vec{R}}}_{\vec{L}_{CM}} + \underbrace{\mu\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}}_{\vec{\ell}}$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \dot{\boldsymbol{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}}$$

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[M\vec{R}\times\dot{\vec{R}}\right] = M\left[\cancelto{0}{\underbrace{\frac{d\vec{R}}{dt}}_{\dot{\vec{R}}}\times\dot{\vec{R}}} + \vec{R}\times\underbrace{\ddot{\vec{R}}}_{=0}\right] = 0$$

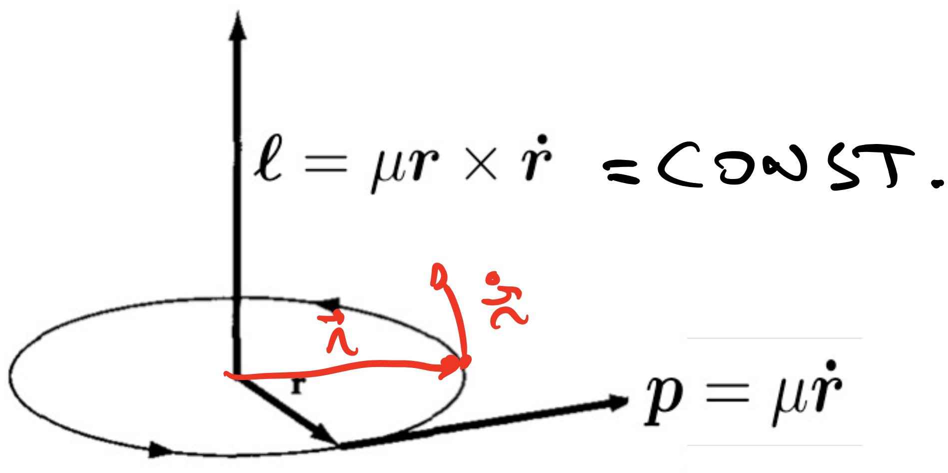
$$\vec{L}_{cm} = \text{CONST.}$$

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\mu\,\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right] = \mu\left[\cancelto{0}{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}} + \cancelto{0}{\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}}\right] = 0$$

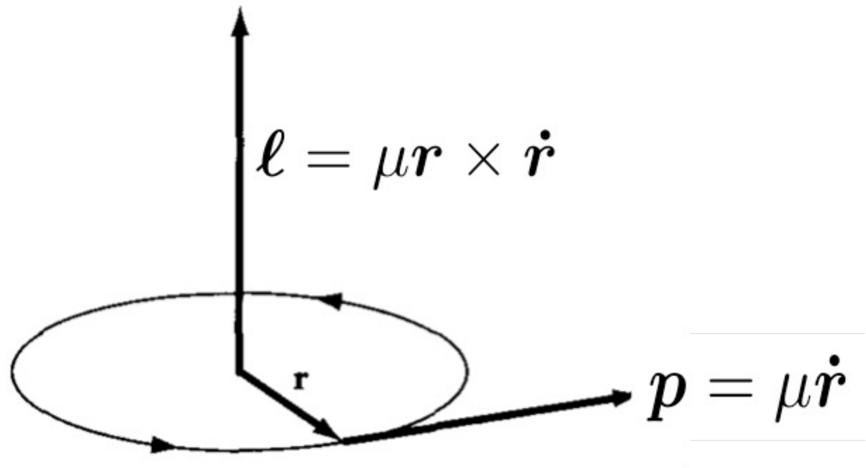
$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{dU}{dr}\right)\hat{r} \Rightarrow \vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{dU}{dr}\right)\cancelto{0}{\vec{r}\times\hat{r}}$$

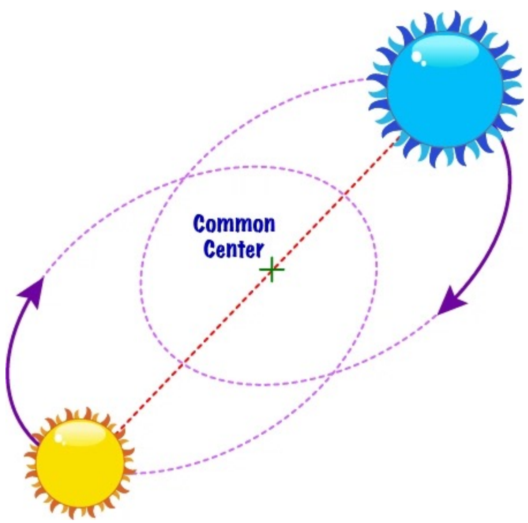
$$\boxed{\vec{\ell} = \text{CONST.}}$$

O movimento é num plano

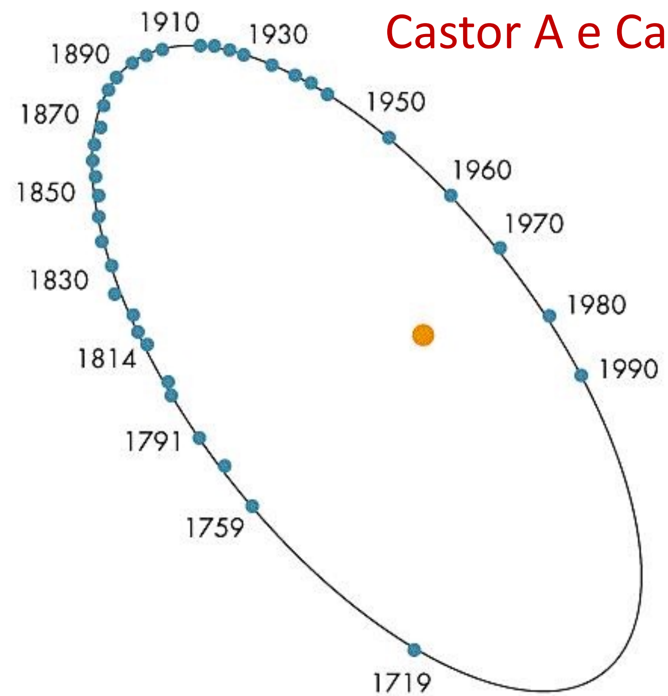


PARA QUE $\vec{r}$ e $\dot{\vec{r}}$ PERMANEÇAM $\perp$ A $\vec{\ell}$, O MOVIMENTO TEM QUE ESTAR CONTIDO EM UM PLANO.





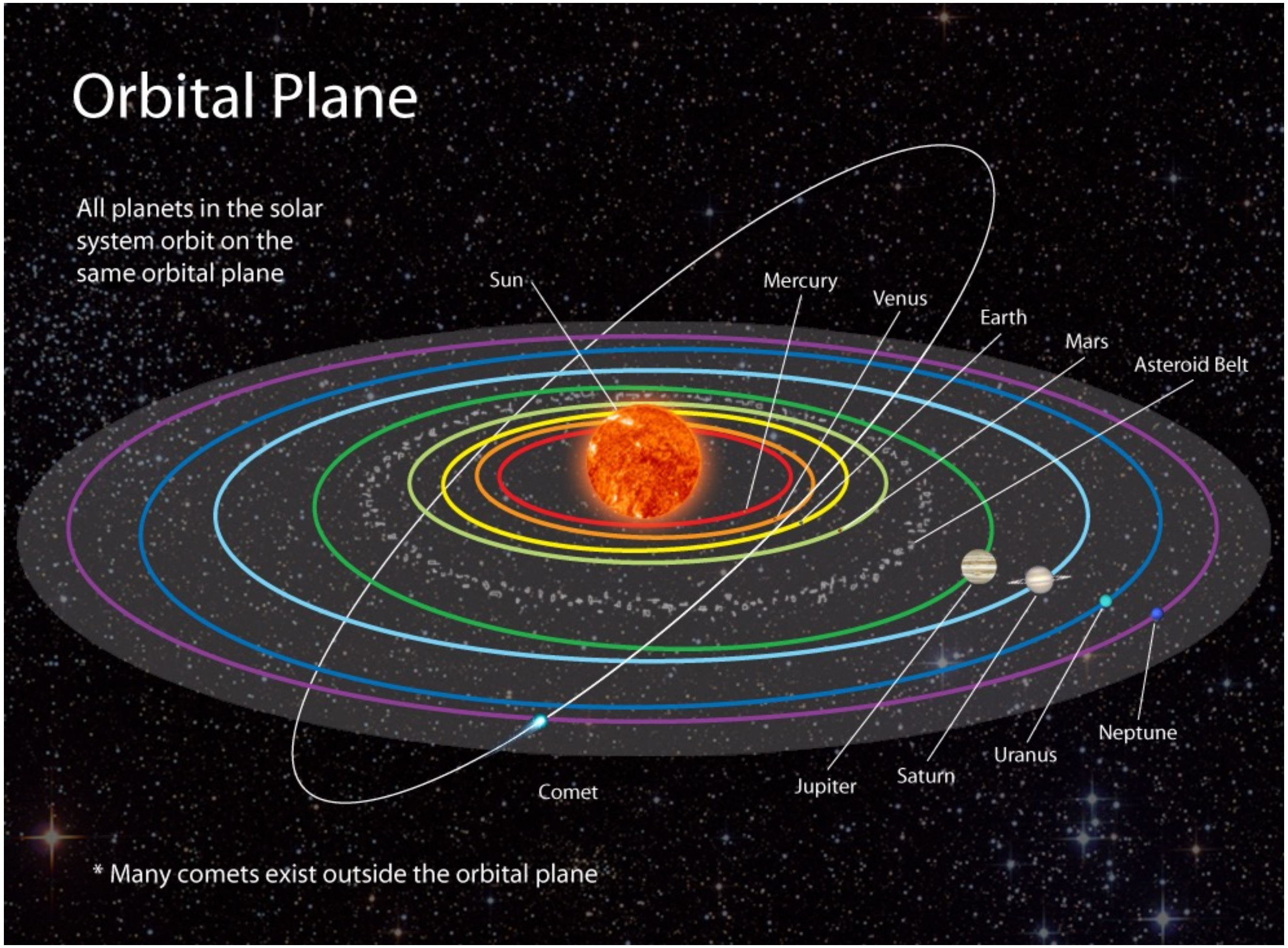
Castor A e Castor B



Castor A e B têm uma órbita fechada com uma separação de aproximadamente 19 unidades astronômicas (AU). Elas perfazem uma órbita completa em torno do CM em 445 anos.

O sistema solar e o plano da eclíptica

(Fora de escala)



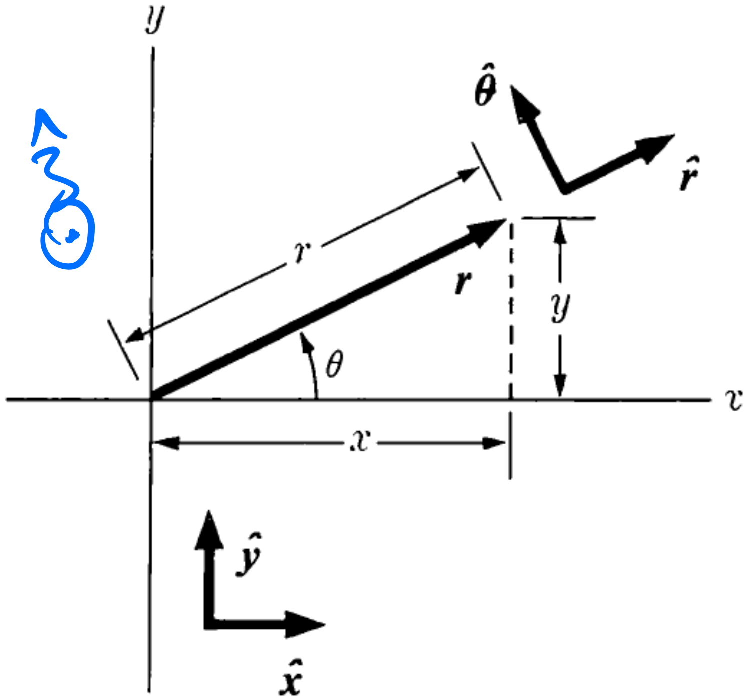
(distâncias em escala)

1. O centro de massa do sistema de dois corpos move-se com velocidade constante. ✓

2. A dinâmica da coordenada relativa é a mesma de um corpo de massa μ, sujeito a uma força que aponta para a origem. ✓

3. O momento angular total é conservado:
   a. O momento angular “do centro de massa” é conservado. ✓
   b. O momento angular “interno” é conservado. ✓

Coordenadas polares



$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2} \\
\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$L_{cm} = \frac{\mu}{2}|\dot{\vec{r}}|^2 - U(r)$$

$$= \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U\big(\overbrace{\sqrt{x^2+y^2}}^{r}\big)$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta} \Rightarrow \dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta} \Rightarrow \dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{L_{cm} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)}$$

Equações do movimento em coordenadas polares

$r:\quad \frac{\partial L}{\partial \dot r} = \mu \dot r \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = \mu r \dot\theta^2 - \frac{dU}{dr}$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right] - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \boxed{\mu \ddot r - \mu r \dot\theta^2 + \frac{dU}{dr} = 0}$$

$\theta:\quad \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \mu r^2 \dot\theta \ ; \ \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right] = 0 \rightarrow \boxed{\mu r^2 \dot\theta = \text{CONST.}} \Rightarrow \ell = \text{CONST.}$$

$\mu r^2 \dot\theta = |\vec\ell| \qquad |\vec\ell| = \mu\,|\vec r \times \dot{\vec r}|$

$\vec r = r\hat r$

$\dot{\vec r} = \dot r \hat r + r\frac{d\hat r}{dt} = \dot r \hat r + r\dot\theta\hat\theta$

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = (r\hat{r})(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = r^2\dot{\theta}\underbrace{\hat{r}\times\hat{\theta}}_{\hat{z}} = r^2\dot{\theta}\hat{z}$$

$$\vec{\ell} = \mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \underbrace{\mu r^2\dot{\theta}}_{|\vec{\ell}|}\hat{z}$$