

F 415 – Mecânica Geral II

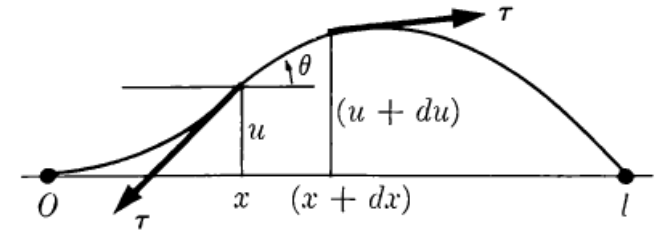
1º semestre de 2024

18/06/2024

Aula 24

Aula passada

Incluindo **dissipação** e **força externa** na equação da onda.



Força de **resistência do ar**: $dF_y^R = -D \frac{\partial q}{\partial t} dx$ Força **externa**: $dF_y^{ext} = F(x, t) dx$

$$\rho \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} + D \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = F(x, t)$$

Corda presa nas extremidades: $q(x = 0, t) = q(x = L, t) = 0$

“Chute” que satisfaz as **condições de contorno**:

$$q(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \eta_r(t) \Rightarrow \rho \ddot{\eta}_r(t) + \tau \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \eta_r(t) + D \dot{\eta}_r(t) = \frac{2}{L} f_r(t)$$

onde: $f_s(t) = \int_0^L \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) F(x, t) dx$

Exemplo: Corda amortecida sob a ação de uma força externa dada por

$$F(x, t) = F_0 \delta \left(x - \frac{L}{2} \right) \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} f_s(t) &= \int_0^L \sin \left(\frac{s\pi x}{L} \right) F_0 \delta \left(x - \frac{L}{2} \right) \cos \omega t \, dx \\ &= F_0 \sin \left(\frac{s\pi}{2} \right) \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\rho \ddot{\eta}_r(t) + \tau \left(\frac{s\pi}{L} \right)^2 \eta_r(t) + D \dot{\eta}_r(t) = \frac{2F_0}{L} \sin \left(\frac{s\pi}{2} \right) \cos \omega t \equiv F_s \cos \omega t$$

Usando a notação complexa: $\rho \ddot{\eta}_r(t) + \tau \left(\frac{s\pi}{L} \right)^2 \eta_r(t) + D \dot{\eta}_r(t) = F_s e^{i\omega t}$

$$\eta_s(t) = A_s e^{i\omega t} \Rightarrow \left[-s\omega^2 + \underbrace{\tau \left(\frac{s\pi}{L} \right)^2}_{s\omega_n^2} + iD\omega \right] A_s e^{i\omega t} = F_s e^{i\omega t}$$

$$s\omega_n^2 = \tau \left(\frac{s\pi}{L} \right)^2 \Rightarrow \omega_n^2 = C^2 \left(\frac{s\pi}{L} \right)^2$$

$$\Rightarrow A_s = \frac{F_s}{-s(\omega^2 - \omega_n^2) + iD\omega} \equiv \frac{F_s}{z_s}$$

$$A_s = \frac{1}{|z_s|} F_s e^{-i\delta_s}$$

$$\begin{aligned} z_s &= s(\omega_n^2 - \omega^2) + iD\omega \\ &= |z_s| e^{i\delta_s} \end{aligned}$$

$$z_n(t) = \frac{F_n}{|z_n|} e^{i(\omega t - \delta_n)} \Rightarrow z_n^{ph}(t) = \text{Re}[z_n(t)]$$

$$z_n^{ph} = \frac{F_n}{|z_n|} \cos(\omega t - \delta_n)$$

$$|z_n| = \sqrt{[s(\omega_n^2 - \omega^2)]^2 + D^2 \omega^2}$$

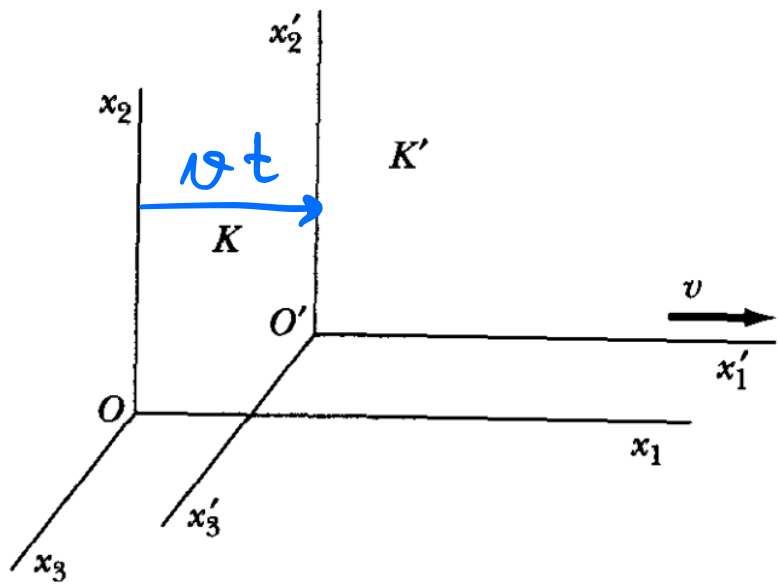
$$\omega_n = \frac{c \pi}{L}$$

$$\tan \delta_n = \frac{D \omega}{s(\omega_n^2 - \omega^2)}$$

$z_n^{ph}(t)$ TEM AMPLITUDE MÁXIMA SE $\omega = \omega_n$ PARA ALGUM VALOR DE n (RESSONÂNCIA)

Relatividade Especial

Transformações de Galileu



K' MOVE-SE COM VELOCIDADE CONSTANTE $\vec{v} = v \hat{x}$ EM RELAÇÃO A K , MANTENDO OS EIXOS PARALELOS ENTRE SI.

$$x' = x - vt$$

$$x = x' + vt'$$

$$y' = y$$

$$y = y'$$

$$z' = z$$

$$z = z'$$

$$t' = t$$

$$t = t'$$

PARA UMA VELOCIDADE RELATIVA GÊNÉRICA:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

$$t' = t$$

AS EQS. DA MECÂNICA NEWTONIANA MANTÊM A MESMA FORMA NOS DOIS REFERENCIAIS,

EM K' : $m_i \frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt'^2} = \vec{F}_i' = -\vec{\nabla}_i' U \quad (1)$

U SO' DEPENDE DAS DISTÂNCIAS ENTRE AS PARTÍCULAS: $U[\{|\vec{r}_i' - \vec{r}_j'\}|]$ (FORÇAS CENTRAIS)

$$\frac{d\vec{r}_i'}{dt'} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} - \vec{v}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_i'}{dt'^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d\vec{r}_i'}{dt'} \right] = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$$

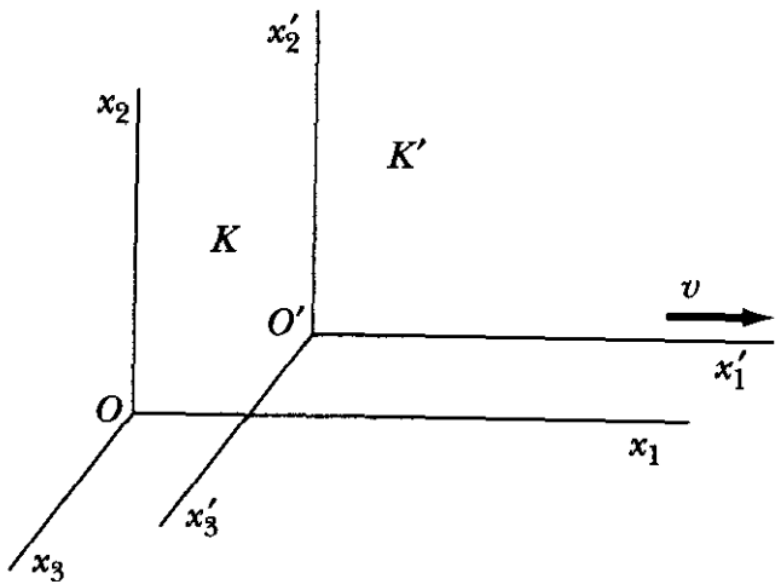
$$\vec{r}_i' - \vec{r}_j' = \vec{r}_i - \vec{r}_j \Rightarrow U[\{|\vec{r}_i' - \vec{r}_j'|\}] = U[\{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\}]$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

AS EQS. (1) MANTÊM A MESMA FORMA NOS DOIS REFERENCIAIS.

Transformações de Galileu



$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} - v\hat{\mathbf{x}}$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt'^2} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

Se a força depende, por exemplo, apenas da **distância** entre as partículas (força central), esta não muda sob transformações de Galileu e, portanto, tampouco a força.

$$\vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{F}' = m \vec{a}'$$

As leis de Newton **mantém a forma** (são covariantes) por transformações de Galileu.

As equações do eletromagnetismo

não são covariantes de Galileu

$$\begin{array}{lcl} x' & = & x - vt \\ y' & = & y \\ z' & = & z \\ t' & = & t \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{NO VÁCUO, TODAS AS COMPONENTES} \\ \text{DE } \vec{E} \text{ E } \vec{B} \text{ SATISFAZEM A EQ. DE ONDA} \\ \text{SEJA } \psi(\vec{r}, t) \text{ UMA DESSAS COMPONENTES} \end{array}$$

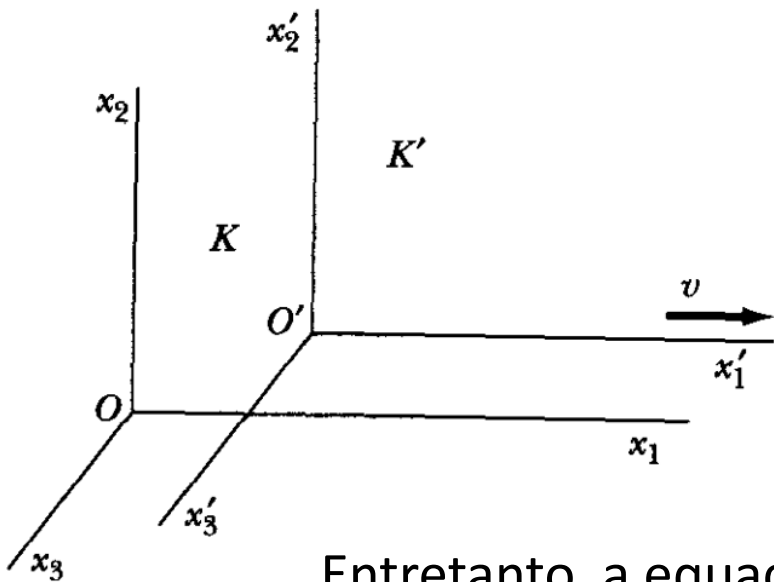
$$\text{EM } K': \left(\nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \psi = 0 \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{POR TR. DE GALILEU: } \vec{\nabla}' = \vec{\nabla}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x_i} + \cancel{\frac{\partial t}{\partial t'}} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \psi = 0$$

Transformações de Galileu



$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Entretanto, a equação de onda muda de forma.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 \phi - \nabla'^2 \phi = 0$$

No caso de onda sonora, a velocidade c é em relação ao meio. Se o meio se move, sua velocidade se adiciona a c . Não há nada de surpreendente nisso.

O mesmo poderia valer para ondas eletromagnéticas: seu meio de propagação seria o **éter**. Porém, todas as tentativas de detecção do éter e de seus efeitos **falharam**.

Postulados da relatividade especial (Einstein, 1905)

1. Todas as leis físicas têm a mesma forma em quaisquer referenciais inerciais (incluindo a mecânica e o eletromagnetismo) (“princípio de relatividade de Galileu”).
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma independente do movimento de suas fontes.

Transformações de Lorentz

"DEDUÇÃO": UMA ONDA ESFÉRICA QUE É EMITIDA DA ORIGEM COMUM DE K E K' EM $t = t' = 0$, GERANDO UMA "CASCA" ESFÉRICA LUMINOSA CUJO RAIOS CRESCE COM VELOCIDADE c NOS 2 REFERENCIAIS.

$$K: (x, y, z, t) \quad \text{E} \quad K': (x', y', z', t')$$

SUPOR QUE AS LEIS DE TRANSFORMAÇÃO SÃO LINEARES, O QUE PODE SER JUSTIFICADO PELA HOMOGENEIDADE DO ESPAÇO-TEMPO.

$$\text{EM } K: \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \Rightarrow c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$K': \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \Rightarrow c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \lambda^2 [c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2]$$

OS DOIS LADOS SÃO IGUAIS A MENOS DE
 UMA CONSTANTE λ . A EQUIVALÊNCIA ENTRE
 OS DOIS REFERENCIAIS $\Rightarrow \lambda = 1$

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

PARA MOVIMENTOS RELATIVOS NA DIREÇÃO $\hat{x}$

$$y' = y \quad z' = z \quad (\text{ISOTROPIA DO ESPAÇO})$$

$$\Rightarrow c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 t^2 - x^2 \Rightarrow (x^0')^2 - (x^1')^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$$

NOTAÇÃO: $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

$$x^0' = ct' \quad , \quad (x^1)' = x' \quad ; \quad (x^2)' = y' \quad ; \quad (x^3)' = z'$$

$$(x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$$

SABEMOS QUE: $x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$ PARA ROTAÇÕES

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

POR ANALOGIA:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x^{0'} &= c x^0 - s x^1 \Rightarrow (x^{0'})^2 = c^2 (x^0)^2 + s^2 (x^1)^2 - 2sc x^0 x^1 \\ x^{1'} &= -s x^0 + c x^1 \Rightarrow (x^{1'})^2 = s^2 (x^0)^2 + c^2 (x^1)^2 - 2sc x^0 x^1 \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$(x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$$

A ORIGEM O' DE K' É DESCRITA POR:

$$(x^1)' = 0 \quad \text{EM } K' \quad \text{EM } K: x^1 = vt = \frac{v}{c}(ct) = \frac{v}{c}x^0$$

$$x^2' = -\gamma x^0 + \gamma x^1 = 0 \Rightarrow x^1 = \frac{\sinh \zeta}{\cosh \zeta} x^0 = \tanh \zeta x^0$$

$$\Rightarrow \tanh \zeta = \frac{v}{c} \equiv \beta$$

$$\Rightarrow \cosh \zeta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma$$

$$\sinh \zeta = \cosh \zeta \tanh \zeta = \beta \gamma$$

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$-1 < \beta < 1 \quad \gamma \geq 1$$

$$x^0 = ct$$

$$x^1 = x$$

$$x^2 = y$$

$$x^3 = z$$

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$-1 \leq \beta = \frac{v}{c} \leq 1$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$$

Em termos das 4 coordenadas:

"BOOST"

$$\begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \text{constante}$$

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$$

De S para S':

$$x' = \gamma (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$$

De S' para S:

$$x = \gamma (x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)$$

$$SE \frac{v}{c} < 1$$
$$\gamma \geq 1$$

Equação de onda

Transformações de Lorentz:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial'^2 \phi}{\partial t'^2} - \nabla'^2 \phi = 0$$

mantém a mesma forma (mostrar!)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \longrightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial'^2}{\partial t'^2} - \nabla'^2 = \square'$$

Relatividade da simultaneidade

EVENTO: (x, y, z, t)

DADOS DOIS EVENTOS
SIMULTÂNEOS EM K:

$$A: (x_A, y_A, z_A, t_A)$$

$$B: (x_B, y_B, z_B, t_B) \quad t_A = t_B$$

EM K' :

$$t'_A = \gamma \left(t_A - \frac{v}{c^2} x_A \right)$$

$$t'_B = \gamma \left(t_B - \frac{v}{c^2} x_B \right)$$

$$t'_B - t'_A = \gamma \left[\cancel{(t_B - t_A)} - \frac{v}{c^2} (x_B - x_A) \right] = -\gamma \frac{v}{c^2} (x_B - x_A)$$

SE $x_A \neq x_B \Rightarrow t'_B \neq t'_A$ OS EVENTOS NÃO SÃO
SIMULTÂNEOS EM K'

SE $x_A = x_B$ (ALÉM DE $t_A = t_B$) ELES SERÃO
SIMULTÂNEOS EM QUAISQUER REFERENCIAIS.