

F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

20/06/2024

Aula 25

Aula passada

Transformações de Galileu:

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x - vt \\ y' & = & y \\ z' & = & z \\ t' & = & t \end{array}$$



$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}' = m\vec{a}' \quad \rightarrow \text{mantém a mesma forma}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 \phi - \nabla'^2 \phi = 0$$

$\rightarrow$ não mantém a mesma forma

Aula passada

Postulados da relatividade restrita:

1. Todas as leis físicas têm a mesma forma em quaisquer referenciais inerciais (incluindo a mecânica e o eletromagnetismo) (“princípio de relatividade de Galileu”).
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma independente do movimento de suas fontes.

Aula passada

Do segundo postulado: $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$

Transformações de Lorentz:

De S para S':

$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)\end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

De S' para S:

$$\begin{aligned}x &= \gamma (x' + vt') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)\end{aligned}$$

Aula passada

Transformações de Lorentz:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)\end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial'^2 \phi}{\partial t'^2} - \nabla'^2 \phi = 0$$

- A equação de onda mantém a **mesma forma**, assim como todas as equações do eletromagnetismo: este **não** precisa ser modificado.
- Porém, a mecânica newtoniana **não** mantém a mesma forma: **precisa ser modificada!**

Aula passada

Em termos das coordenadas do espaço-tempo:

$$\begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1$$

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \text{constante}$$

Aula passada

Dois eventos **simultâneos** em K :

$$\begin{array}{ll} A : & (x_1, y_1, z_1, t) \quad \text{em } K \\ B : & (x_2, y_2, z_2, t) \quad \text{em } K \end{array}$$

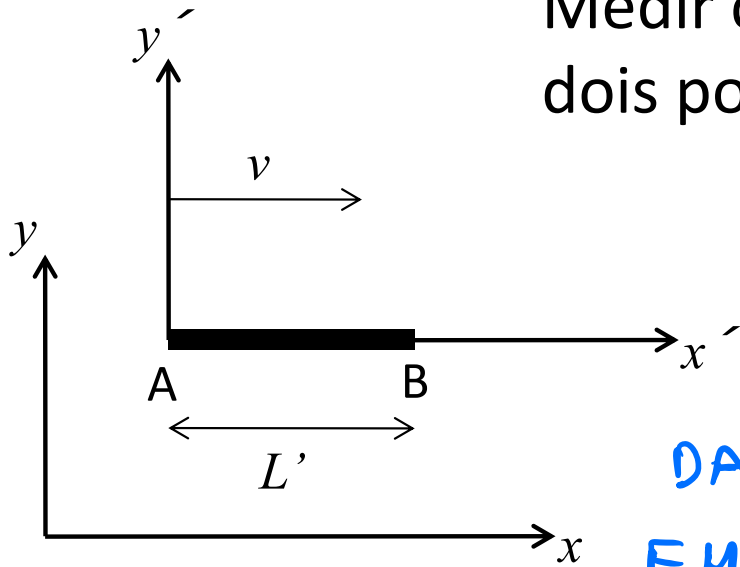
Em K' eles **não** serão necessariamente simultâneos:

$$\Delta t' = -\frac{\gamma v}{c^2} \Delta x$$

Sua **ordem temporal é indefinida** (a não ser que $\Delta x=0$)!

Contração de Fitzgerald-Lorentz

Medir comprimentos é determinar a distância entre dois pontos num mesmo instante de tempo.



$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$\Rightarrow \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

DA DEFINIÇÃO, O COMPRIMENTO EM S É Δx SE $\Delta t = 0$

$$\Rightarrow \Delta x' = L' = \gamma \Delta x = \gamma L \Rightarrow \boxed{L = \frac{L'}{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \boxed{L \leq L'}$$

ALTERNATIVAMENTE:

$$\text{EM } S', \quad \left. \begin{array}{l} A: (0, 0, 0, t'_A) \\ B: (L', 0, 0, t'_B) \end{array} \right\} \begin{array}{l} t_A = \gamma(t'_A + \frac{v}{c^2} \cdot 0) \\ t_B = \gamma(t'_B + \frac{v}{c^2} L') \end{array}$$

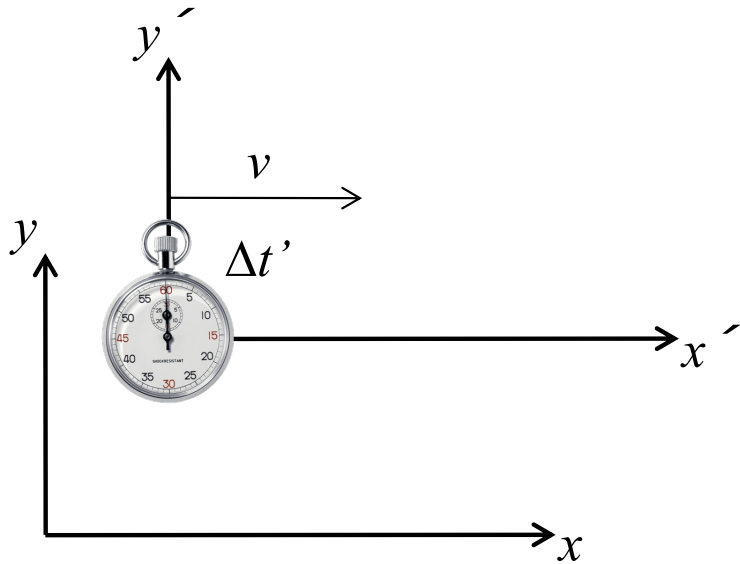
PARA MEDIR EM S: $t_A = t_B$

$$\cancel{\gamma} t_A' = \cancel{\gamma} \left(t_B' + \frac{v L'}{c^2} \right) \Rightarrow t_B' - t_A' = - \frac{v L'}{c^2}$$

$$\left. \begin{aligned} x_A &= \gamma (x_A' + v t_A') \\ x_B &= \gamma (x_B' + v t_B') \end{aligned} \right\} x_B - x_A = L = \gamma \left[\underbrace{(x_B' - x_A')}_{L'} + v (t_B' - t_A') \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= \gamma \left[L' - \frac{v^2}{c^2} L' \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (1 - v^2/c^2) L' \\ &= \sqrt{1 - v^2/c^2} L' = \boxed{\frac{L'}{\gamma} = L} \end{aligned}$$

Dilatação temporal



$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right)$$

RELÓGIO PARADO EM S' :

$$\Delta x' = 0$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t' > \Delta t'$$

O INTERVALO TEMPORAL É MÍNIMO NO REFERENCIAL ONDE O RELÓGIO ESTÁ PARADO ("PRÓPRIO").

Dilatação temporal

- Consequências importantes:
 - Decaimento dos múons gerados por raios cósmicos ou em aceleradores.
 - GPS
 - Medidas com relógios atômicos.

$$\tau_{\mu}^0 = 2,3 \times 10^{-6} \text{ s}$$

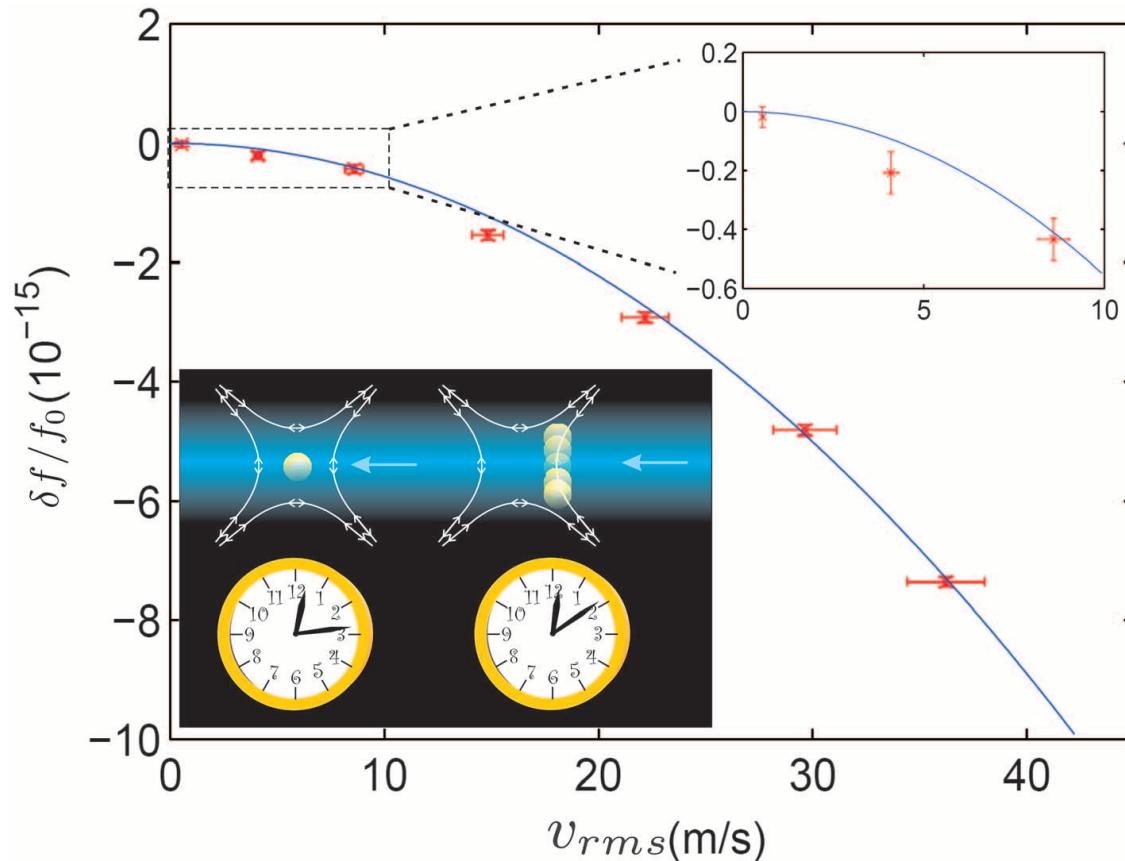
GERADOS COM VELOCIDADES DA ORDEM DE

$$v = 0,99c \Rightarrow \Delta z = 690 \text{ m} = v \tau_{\mu}^0$$

$$\tau_{\mu}(\text{TERRA}) = \gamma \tau_{\mu}^0 \approx 16 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$\Delta x(\text{TERRA}) \approx 4.900 \text{ m}$$

Dilatação temporal devido à relatividade especial

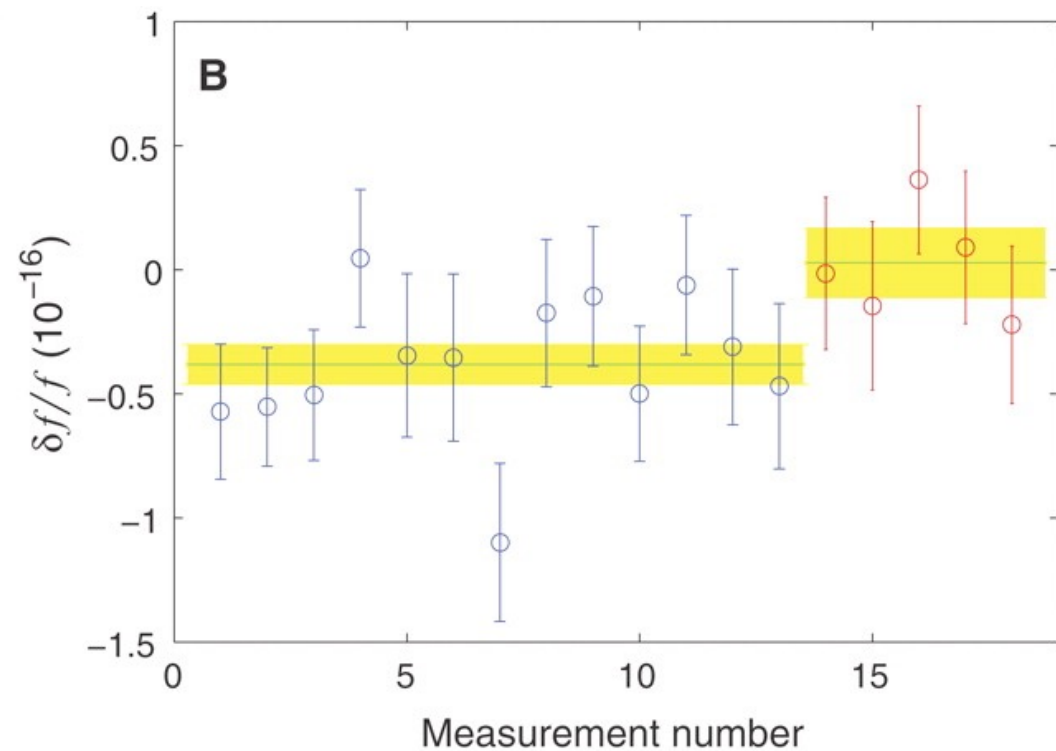
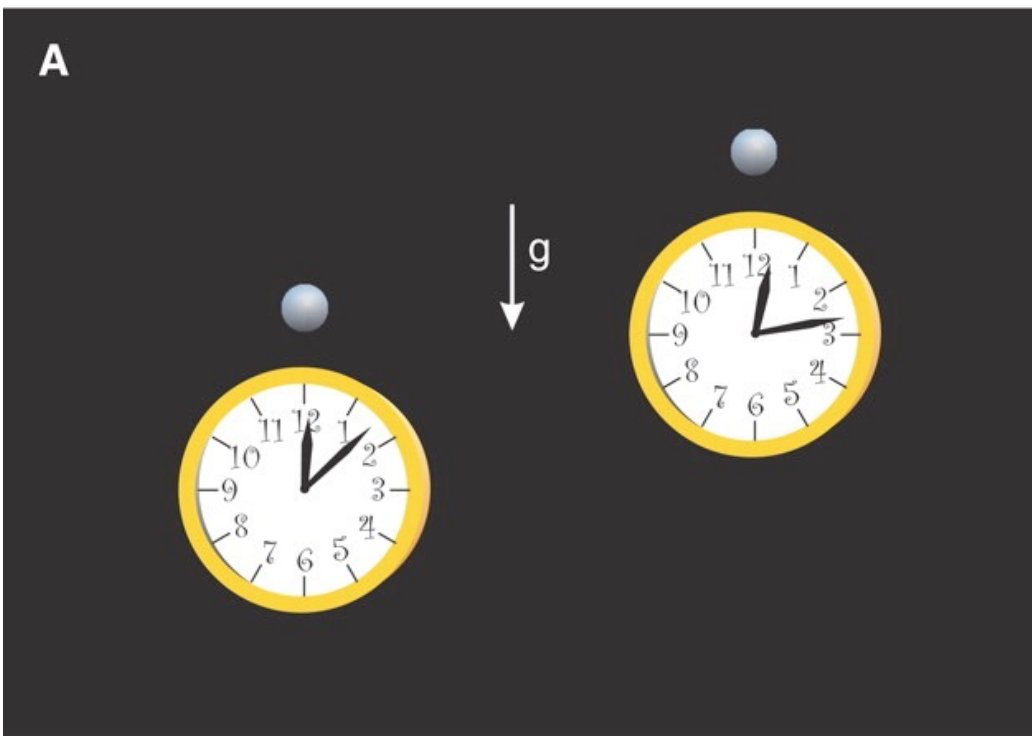


C. W. Chou *et al.*,
Science **329**, 1630 (2010)

Fig. 2. Relativistic time dilation at familiar speeds (10 m/s = 36 km/hour $\approx$ 22.4 miles/hour). (Lower left inset) As the Al^+ ion in one of the twin clocks is displaced from the null of the confining RF quadrupole field (white field lines), it undergoes harmonic motion and experiences relativistic time dilation. In the experiments, the motion is approximately perpendicular to the probe laser beam (indicated by the blue shading). The Al^+ ion clock in motion advances at a rate that is slower than its rate at rest. In the figure, the fractional frequency difference between the moving clock and the stationary clock is plotted versus the velocity ($v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$) (rms, root mean square) of the moving clock. The solid curve represents the theoretical prediction. (Upper right inset) A close-up of the results for $v_{rms} < 10$ m/s in the dashed box. The vertical error bars represent statistical uncertainties, and the horizontal ones cover the spread of measured velocities at the applied electric fields.

Dilatação temporal devido à relatividade geral

altura= 33 cm



C. W. Chou *et al.*, Science **329**, 1630 (2010)

Quadri-vetores

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

QUALQUER CONJUNTO
DE 4 QUANTIDADES
(A^0, A^1, A^2, A^3) QUE
SE TRANSFORMAM SOB
"BOOSTS" COMO (x^μ)
É UM 4-VETOR

$$\begin{pmatrix} A^{0'} \\ A^{1'} \\ A^{2'} \\ A^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \text{INVARIANTE DE LORENTZ}$$

$$\Rightarrow (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = \text{INVARIANTE DE LORENTZ}$$

SE A^μ E B^μ SÃO 2 4-VETORES:

$$\Rightarrow (A^0 B^0) - (A^1 B^1) - (A^2 B^2) - (A^3 B^3) = \text{INVARIANTE DE LORENTZ}$$

||

$$A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$A^\mu = (A^0, \vec{A})$$

EXEMPLOS DE 4-VETORES:

- x^μ

- Δx^μ

- dx^μ

Quadri-vetores

$$\begin{aligned} \text{Quadri-vetores: } (A_0, A_1, A_2, A_3) &= (A_0, \vec{A}) & A'_0 &= \gamma \left(A_0 - \frac{v}{c} A_1 \right) \\ & & A'_1 &= \gamma \left(A_1 - \frac{v}{c} A_0 \right) \\ & & A'_2 &= A_2 \\ & & A'_3 &= A_3 \end{aligned}$$

Exemplo:

$$x_\mu = (ct, x, y, z) = (x_0, \vec{r})$$

Produto escalar de quadri-vetores:

$$\begin{aligned} A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 &= A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \\ &= A'_0 B'_0 - \vec{A}' \cdot \vec{B}' = \text{invariante} \end{aligned}$$

Intervalo invariante

SE $\Delta x^\mu = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ É UM 4-VETOR

$$\Rightarrow (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = \text{INTERVALO INVARIANTE}$$

$$= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t^2 - \vec{\Delta \vec{r}} \cdot \vec{\Delta \vec{r}}$$

$$= \text{INVARIANTE DE LORENTZ} \quad \equiv \Delta s^2$$

(a) $\Delta s^2 > 0$ PARA DOIS EVENTOS, DIZ-SE

QUE OS EVENTOS SÃO SEPARADOS POR

UM INTERVALO DO TIPO-TEMPO

SÃO EVENTOS TAIS QUE EXISTE UM REF.

ONDE ELAS OCORREM NO MESMO PONTO NO ESPAÇO
($\Delta \vec{r}' = 0$)
VER NOTAS

(b) SE $\Delta s^2 < 0 \Rightarrow$ INTERVALO TIPO-ESPAÇO

$\Rightarrow$ EXISTE UM REFERENCIAL ONDE OS
EVENTOS SÃO SIMULTÂNEOS ($\Delta t' = 0$)

PROVA NAS NOTAS

(c) $\Delta s^2 = 0 \Rightarrow$ INTERVALOS TIPO-LUZ

EVENTOS CONECTÁVEIS POR UM SINAL
DE LUZ

ESSA CLASSIFICAÇÃO É INDEPENDENTE
DO REF.

Intervalo invariante: $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \text{invariante}$

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = \text{invariante}$$

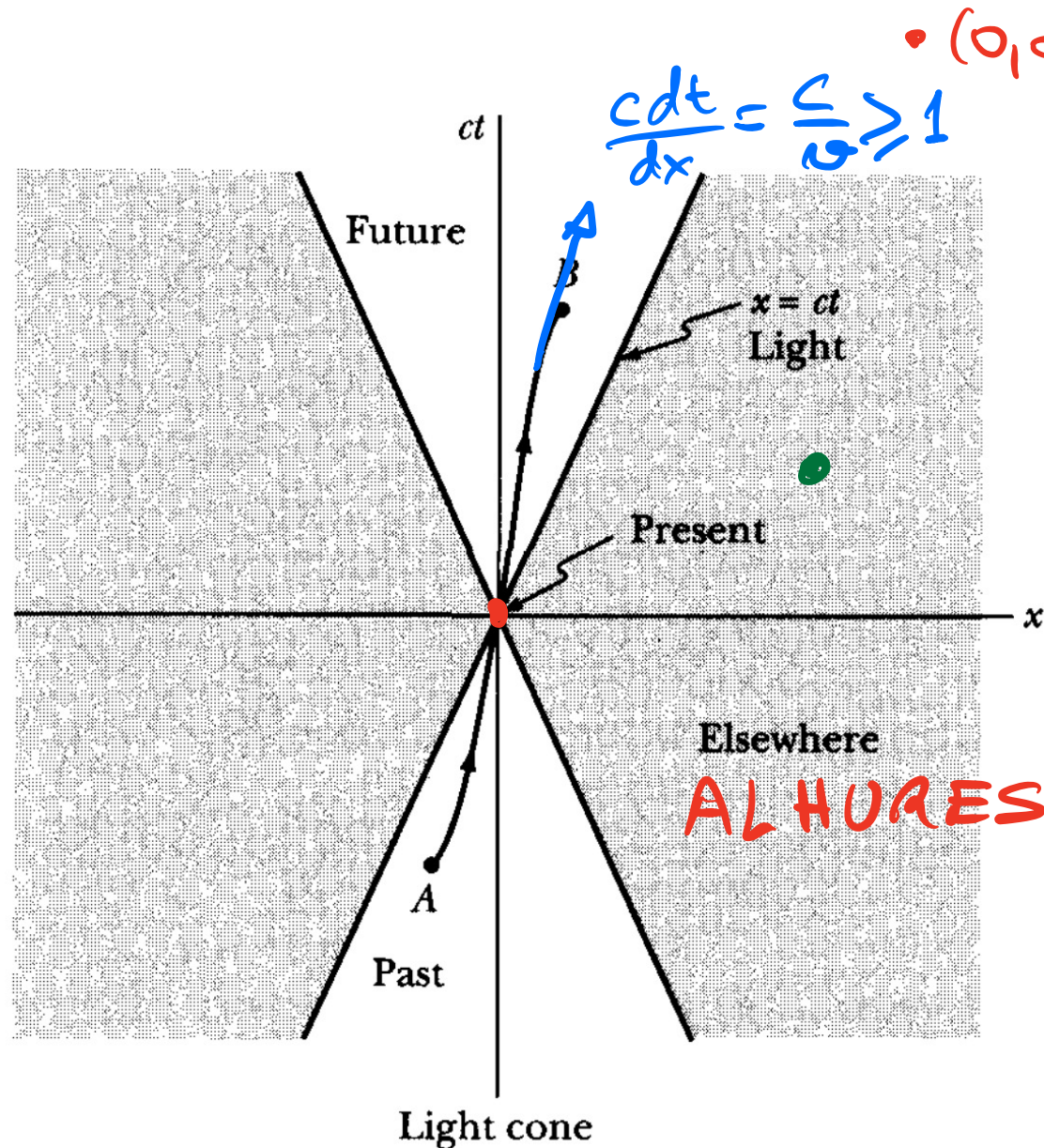
$\Delta s^2 > 0 \rightarrow$ intervalo tipo tempo

$\Delta s^2 < 0 \rightarrow$ intervalo tipo espaço

$\Delta s^2 = 0 \rightarrow$ intervalo tipo luz

Eventos separados por intervalos tipo espaço não podem ter relação causal entre si!

Diagrama de Minkowski



• E •
SÃO TAIS
QUE
 $\Delta s^2 < 0$

Tempo próprio

EM K : PARTÍCULA COM VELOCIDADE $\vec{u}$
NO INTERVALO dt ELA SE DESLOCA DE

$$d\vec{x} = \vec{u} dt$$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2 = c^2 dt^2 - u^2 dt^2 = (c^2 - u^2) dt^2$$

$$= c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) dt^2 = \frac{c^2}{\gamma_u^2} dt^2$$

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

COMO ELE É INVARIANTE, EM K' :

$$ds^2 = \frac{c^2}{\gamma_u^2} dt'^2 = \frac{c^2}{\gamma_u^2} dt^2 = c^2 dt''^2 \equiv c^2 dz^2$$

CONCLUSÃO:

NO REF. PRÓPRIO ($\vec{u}'' = 0$): $dz = \frac{dt}{\gamma_u} \equiv$ INVARIANTE DE LORENTZ

$$dt = \gamma_u dz$$



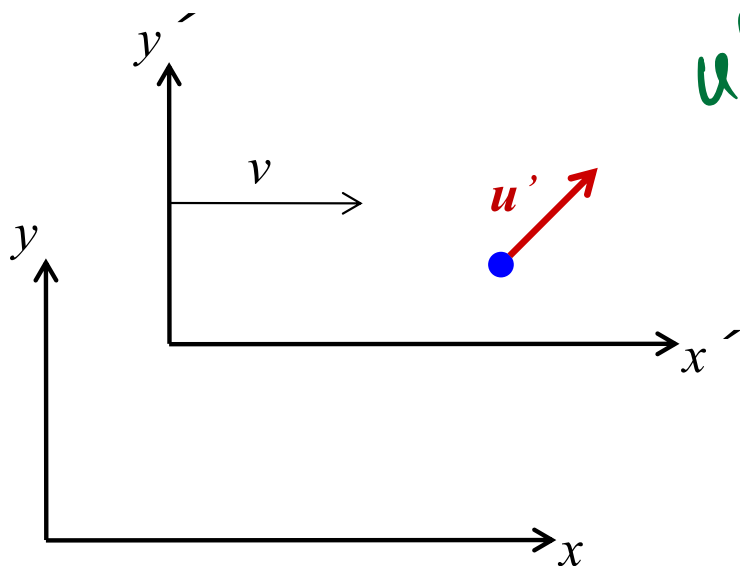
DILATAÇÃO
TEMPORAL

$\Rightarrow$ INTEGRANDO:

$$\int_1^2 dt = t_2 - t_1 = \int_1^2 \gamma_u dz \geq \int_1^2 dz$$

JÁ QUE $\gamma_u \geq 1$ $t_2 - t_1$

Soma de velocidades



$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

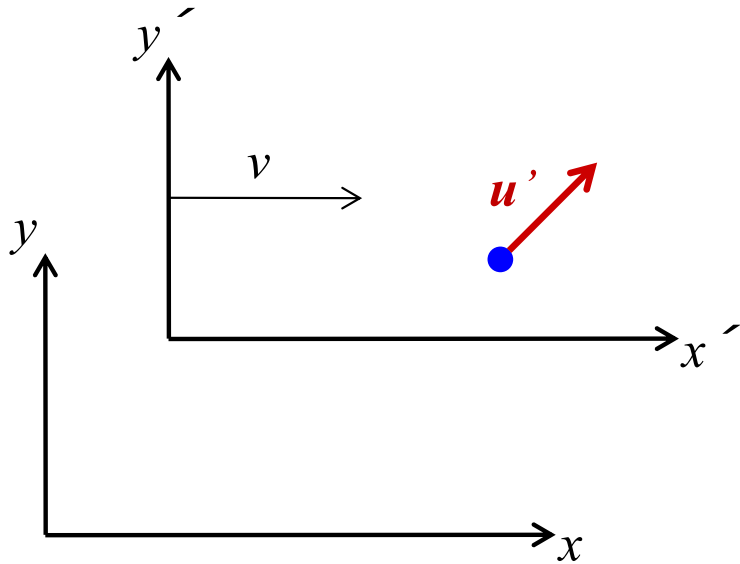
$$\begin{aligned} x &= \gamma (x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx &= \gamma (dx' + v dt') \\ dt &= \gamma \left(dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right) \end{aligned}$$

$$u_x \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma \left(dt' + \frac{v}{c^2} dx' \right)} = \frac{u'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u'_x \right)} ; u_z \text{ E' ANALOGO}$$

Soma de velocidades



$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma (1 + vu'_x/c^2)}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma (1 + vu'_x/c^2)}$$

Quadri-velocidade

dx^μ é 4-VETOR

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma_u \frac{dx^\mu}{dt} \rightarrow \text{4-VETOR VELOCIDADE}$$

$$U^0 = \gamma_u \frac{dx^0}{dt} = c \gamma_u$$

$$U^1 = \gamma_u \frac{dx^1}{dt} = \gamma_u u_x$$

$$U^2 = \gamma_u u_y$$

$$U^3 = \gamma_u u_z$$

$$U^\mu = (c \gamma_u, \gamma_u \vec{u})$$

$$U^\mu = \gamma_u (c, \vec{u})$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_u c \\ \gamma_u u_x \\ \gamma_u u_y \\ \gamma_u u_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Quadri-velocidade

Adição de velocidades:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}$$
$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma (1 + vu'_x/c^2)}$$
$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma (1 + vu'_x/c^2)}$$

Quadrivelocidade: $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma_u \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma_u (c, \mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} (c, \mathbf{u})$



$$U'_0 = \gamma (U_0 - \beta U_1)$$

$$U'_1 = \gamma (U_1 - \beta U_0)$$

$$U'_2 = U_2$$

$$U'_3 = U_3$$

Efeito Doppler da luz



A fase da onda conta o número de vales/nós:
não pode mudar com o referencial.

$$e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \Rightarrow \text{FASE} : \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} = \text{INVARIANTE}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{c}\right)(ct) - k_x x - k_y y - k_z z = \text{INVARIANTE}$$

$$(ct, x, y, z) = x^\mu = 4\text{-VETOR}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{c}, k_x, k_y, k_z\right) \Rightarrow 4\text{-VETOR}$$

Efeito Doppler da luz

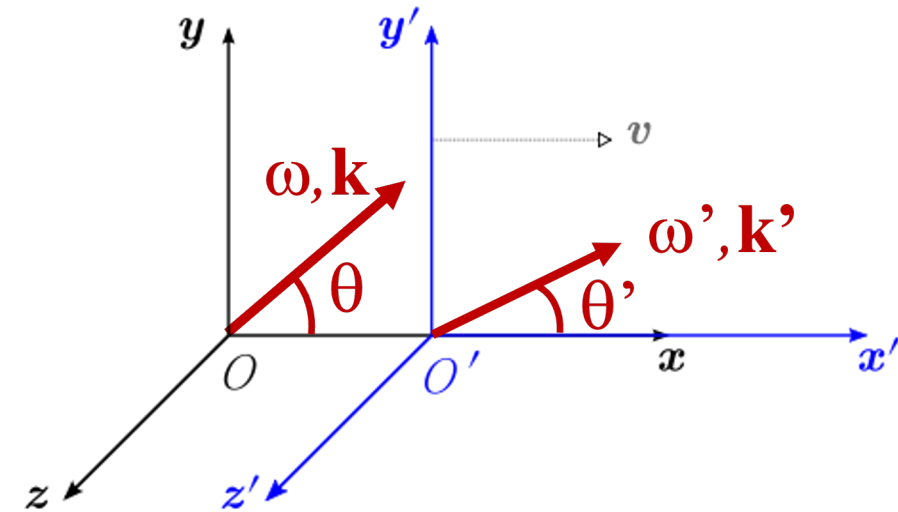


A fase da onda conta o número de vales/nós:
não pode mudar com o referencial.

$$\phi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \frac{\omega}{c}x^0 - k_x x^1 - k_y x^2 - k_z x^3 = \text{invariante de Lorentz}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right) \rightarrow \text{quadri-vetor}$$

Efeito Doppler da luz



$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \beta k_1 \right) \quad \frac{\omega}{c} = \gamma \left(\frac{\omega'}{c} + \beta k'_1 \right) \quad \checkmark$$

$$k'_1 = \gamma \left(k_1 - \beta \frac{\omega}{c} \right) \quad k_1 = \gamma \left(k'_1 + \beta \frac{\omega'}{c} \right)$$

$$k'_2 = k_2$$

$$k_2 = k'_2$$

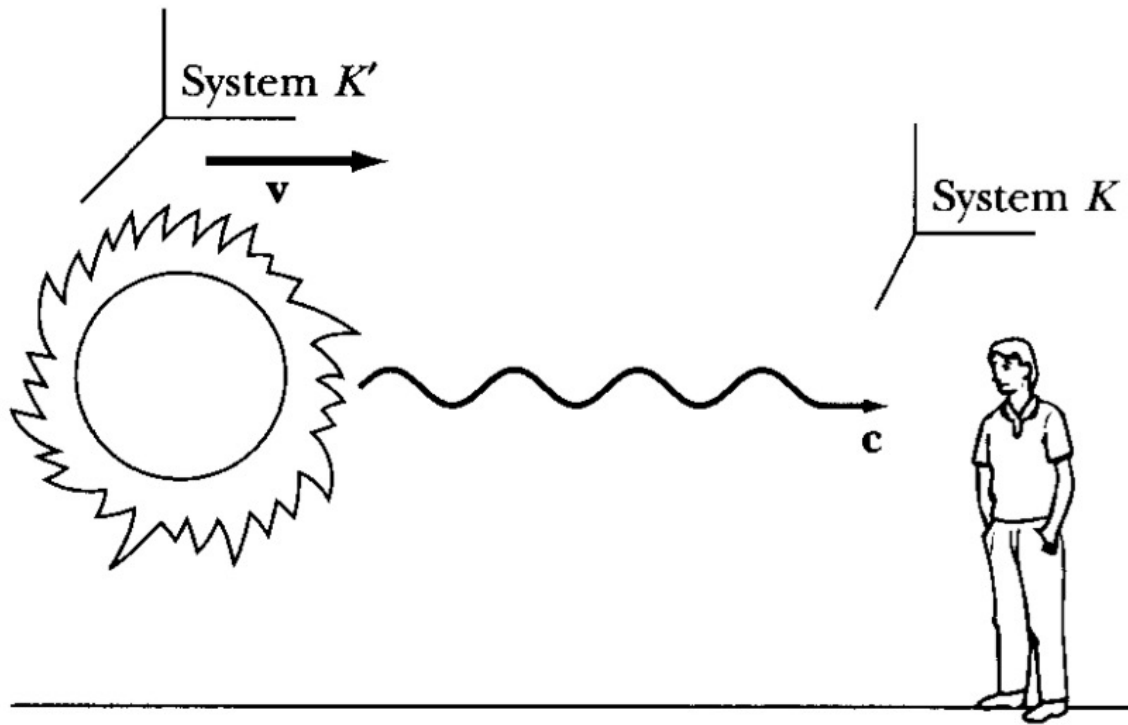
$$k'_3 = k_3$$

$$k_3 = k'_3$$

$$\Rightarrow \omega = \gamma (\omega' + c \beta k'_1) \quad \Rightarrow \omega = \gamma (\omega' + \beta \omega' \cos \theta')$$

$$k'_1 = k' \cos \theta' = \frac{\omega'}{c} \cos \theta'$$

$$\omega = \gamma \omega' (1 + \beta \cos \theta')$$



(a) Source and receiver approaching

$$\omega = \gamma \omega' \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta' \right)$$

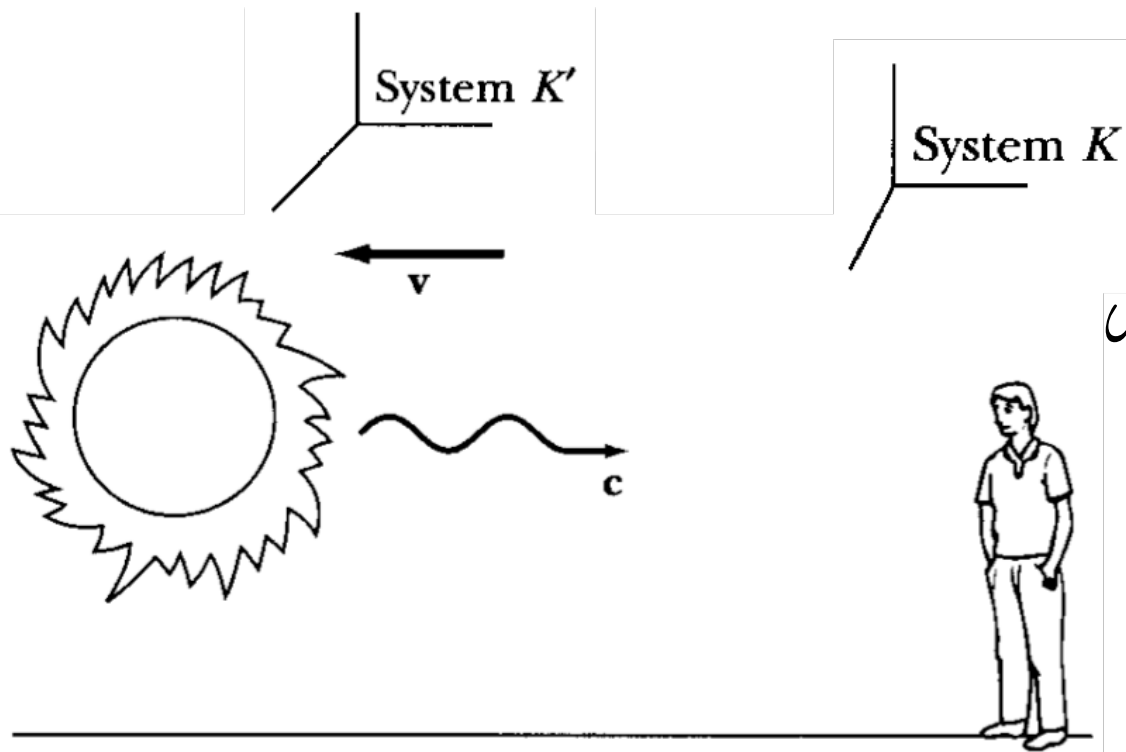
$$\Rightarrow \theta' = 0 \Rightarrow \cos \theta' = 1$$

$$\omega = \gamma \omega' \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

$$= \frac{1 + v/c}{\sqrt{(1 - v/c)(1 + v/c)}} \omega'$$

$$= \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \omega' > \omega'$$

BLUE-SHIFT



(b) Source and receiver receding

$$\omega = \gamma \omega' \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta' \right)$$

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} < \omega'$$

RED-SHIFT

“Red shift”

