

F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

25/06/2024

Aula 26

Aulas passadas

Postulados da relatividade restrita:

1. Todas as leis físicas têm a mesma forma em quaisquer referenciais inerciais (incluindo a mecânica e o eletromagnetismo) (“princípio de relatividade de Galileu”).
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma independente do movimento de suas fontes.

Aulas passadas

Transformações de Lorentz:

De S para S':

$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right)\end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

De S' para S:

$$\begin{aligned}x &= \gamma (x' + vt') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right)\end{aligned}$$

Aulas passadas

Em termos das coordenadas no espaço-tempo:

$$x^0 = ct$$

$$x^1 = x$$

$$x^2 = y$$

$$x^3 = z$$

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Aula passada

Quadri-vetores: $(A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A})$ $A^{0'} = \gamma \left(A^0 - \frac{v}{c} A^1 \right)$

Exemplo: $A^{1'} = \gamma \left(A^1 - \frac{v}{c} A^0 \right)$

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, \vec{r})$$

$$A^{2'} = A^2$$

$$A^{3'} = A^3$$

Produto escalar de quadri-vetores:

$$\begin{aligned} A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 &= A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \\ &= A^{0'} B^{0'} - \vec{A}' \cdot \vec{B}' = \text{invariante} \end{aligned}$$

Aula passada

Intervalo invariante entre dois eventos: um escalar de Lorentz

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \text{invariante}$$

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = \text{invariante}$$

$$\Delta s^2 > 0 \rightarrow \text{intervalo tipo tempo}$$

$$\Delta s^2 < 0 \rightarrow \text{intervalo tipo espaço}$$

$$\Delta s^2 = 0 \rightarrow \text{intervalo tipo luz}$$

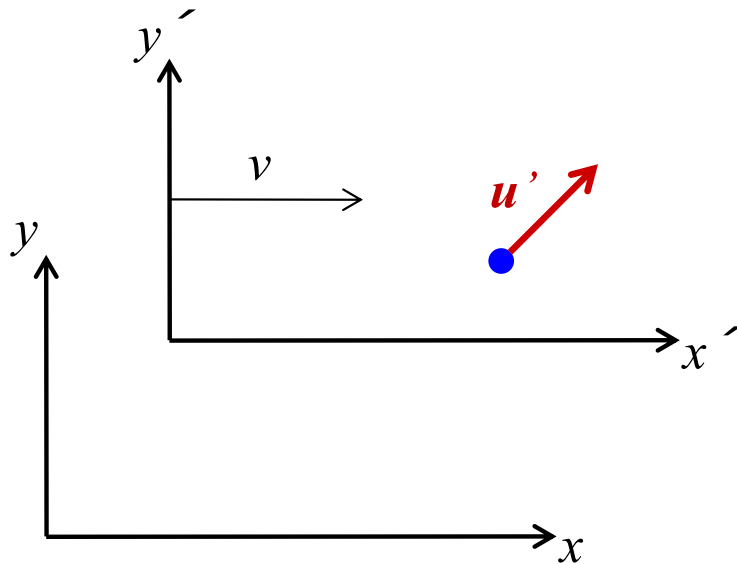
Eventos separados por intervalos tipo-espaço
não podem ter ligação causal!

Aula passada

A seguinte combinação é um invariante (escalar) de Lorentz: **tempo próprio**

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma_u} = \frac{dt'}{\gamma_{u'}}; \gamma_u = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Aula passada



Adição de velocidades:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma (1 + vu'_x/c^2)}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma (1 + vu'_x/c^2)}$$

Quadrivelocidade: $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma_u \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma_u (c, \mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} (c, \mathbf{u})$

$$U^{0'} = \gamma (U^0 - \beta U^1)$$

$$U^{1'} = \gamma (U^1 - \beta U^0)$$

$$U^{2'} = U^2$$

$$U^{3'} = U^3$$



Aula passada

Quadri-vetor de onda da luz:

$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right) \rightarrow \text{quadri - vetor}$

Efeito Doppler da luz

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \beta k_1 \right)$$

$$k'_1 = \gamma \left(k_1 - \beta \frac{\omega}{c} \right)$$

$$k'_2 = k_2$$

$$k'_3 = k_3$$

$$\omega' = \gamma \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)$$

$$(\text{afastamento/red shift}) \quad \omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

$$(\text{aproximação/blue shift}) \quad \omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

Transformações de Lorentz:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial'^2 \phi}{\partial t'^2} - \nabla'^2 \phi = 0$$

- As equações do eletromagnetismo mantêm a mesma forma sob transformações de Lorentz.
- Porém, a mecânica newtoniana não mantém a mesma forma: **precisa ser modificada!**

Dinâmica Relativística

CAP. 9: NUM SISTEMA ISOLADO, A 3ª LEI DE NEWTON LEVA À CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR:

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i \quad \oplus \quad \vec{F}_{i \leftarrow j} = -\vec{F}_{j \leftarrow i} \Rightarrow \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{CONSERVADO}$$

GENERALIZAÇÃO RELATIVÍSTICA:

MANTER A 3ª LEI MAS MODIFICAR A DEFINIÇÃO DE MOMENTO LINEAR:

$$m \vec{u} \longrightarrow ?$$

$$\begin{aligned} m U^\mu &= m \gamma_u(c, \vec{u}) \Rightarrow \text{PARTE ESPACIAL É } \gamma_u m \vec{u} = \\ &= \frac{m \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \text{TAL QUE, SE } |\vec{u}| \ll c \\ &\simeq m \vec{u} \end{aligned}$$

$$\text{PROPOSTA: } \vec{p} = \frac{m \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma_u m \vec{u}$$

$$2^{\circ} \text{ Lei: } \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_i \vec{u}_i}{\sqrt{1-u_i^2/c^2}} \right]$$

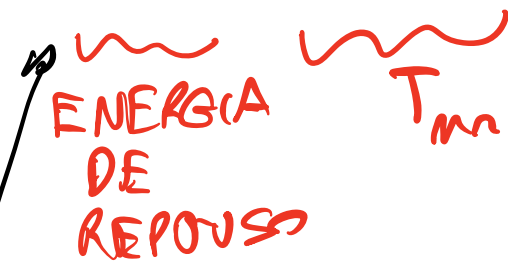
A PARTE TEMPORAL DO MESMO 4-VECTOR (4-MOMENTO)

$$E': \quad m \gamma_u c \equiv \frac{E}{c} \Rightarrow \boxed{E = \gamma_u m c^2}$$

ENERGIA TOTAL RELATIVÍSTICA DA PARTÍCULA

$$p^\mu = m U^\mu = m \gamma_u (c, \vec{u}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad \text{4-MOMENTO}$$

$$E \xrightarrow{u \ll c} \frac{m c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \simeq m c^2 + \frac{1}{2} m u^2$$



$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \simeq 1 + \frac{u^2}{2c^2} + O\left(\frac{u^4}{c^4}\right)$$

Teorema de trabalho-energia relativístico

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{u} dt = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u} dt =$$
$$= m \int_1^2 \frac{d}{dt} \left[\frac{\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right] \cdot \vec{u} dt = m \left(\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) \Big|_1^2 - m \int_1^2 \gamma_u \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} dt$$

$$1^\circ = m \gamma_u u^2 \Big|_1^2; \quad 2^\circ = -\frac{m}{2} \int_1^2 \gamma_u \frac{d(\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{u^2})}{dt} dt = -\frac{m}{2} \int_1^2 \frac{du^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$
$$= -mc^2 \sqrt{1-u^2/c^2} \Big|_1^2$$

$$W = \left[\frac{mu^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - mc^2 \sqrt{1-u^2/c^2} \right] \Big|_1^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \underbrace{\gamma_u mc^2}_E \Big|_1^2$$

$$W = \Delta E = \Delta [\gamma_u mc^2]$$

NO LIMITE NÃO RELATIVÍSTICO:

$$\Delta E = \Delta T = \Delta \left[\frac{1}{2} m u^2 \right]$$

DEFINE-SE TAMBÉM UMA ENERGIA CINÉTICA RELATIVÍSTICA:

$$T = E - mc^2 = (\gamma_u - 1) mc^2$$

SE A MASSA DA PARTÍCULA NÃO VARIAR:

$$\Delta E = \Delta T$$

Relação entre E e p

$$\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) = p^\mu = m U^\mu = m \gamma_u (c, \vec{u})$$

$$\begin{aligned} U^\mu U_\mu &= (U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 = \\ &= (\gamma_u c)^2 - \gamma_u^2 u^2 = \frac{c^2 - u^2}{1 - u^2/c^2} = c^2 \end{aligned}$$

$$(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = m^2 c^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow \boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

SE A MASSA DA PARTÍCULA É NULA: $\boxed{E = pc}$

FÓTONS: EXATO

NEUTRINO: APROXIMADAMENTE

Dinâmica Relativística

Momento linear relativístico: $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma m\mathbf{u}$

Energia total relativística: $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma mc^2$

Quadri-momento: $P^\mu = mU^\mu = m\gamma_u (c, \mathbf{u}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right)$

$$\left(\frac{E}{c} \right)^2 - p^2 = m^2 c^2 = \text{const.} \Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Energia cinética relativística: $T = (\gamma - 1) mc^2$

Equação da dinâmica: $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$

Teorema da energia-trabalho: $W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = T_2 - T_1 = E_2 - E_1$

Dinâmica Relativística

Leis de conservação: A energia total relativística e o momento total relativístico de um sistema isolado se conservam.

$$E_{TOT} = \sum_i \gamma_i m_i c^2 = \text{const.}$$

$$\mathbf{P}_{TOT} = \sum_i \gamma_i m_i \mathbf{u}_i = \text{const.}$$

$$P_{TOT}^\mu = \sum_i P_i^\mu = \sum_i m_i U_i^\mu = \sum_i m_i \gamma_{u_i} (c, \mathbf{u}_i) = \text{const.}$$

Notem que nem a massa total nem a energia cinética total se conservam de maneira geral!

Q3. Uma partícula com massa de repouso m e energia total relativística igual a duas vezes sua energia de repouso, colide frontalmente com uma partícula idêntica (mesma massa de repouso m), inicialmente em repouso. Após a colisão forma-se uma única partícula possuindo massa de repouso M (colisão totalmente inelástica). Nos itens abaixo, expresse suas respostas **em termos de c e m** .

- (a) Calcule o módulo v da velocidade da partícula incidente antes da colisão.
 (b) Usando conservação de energia-momento,
 (i) determine o módulo V da velocidade da partícula resultante em termos da velocidade v da partícula incidente. Use o resultado do item (a) para obter o valor numérico de V/c .
 (ii) determine a massa M da partícula resultante.
 (c) Calcule a energia cinética da partícula resultante.

(a) ANTES: $E = 2mc^2 = \gamma v mc^2 \Rightarrow \gamma v = 2 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$

(b) CONS. DE $E, \vec{p}$: ANTES: $E = 2mc^2 + mc^2 = 3mc^2$

$p_x = \gamma v m v = 2m \frac{\sqrt{3}}{2} c = \sqrt{3} mc$

DEPOIS: $E = \gamma V M c^2$

$p_x = \gamma V M V \Rightarrow$

$3mc^2 = \gamma V M c^2$

$\sqrt{3} mc = \gamma V M V$

$$V = \frac{\sqrt{3}c}{3} = \frac{c}{\sqrt{3}} \Rightarrow \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

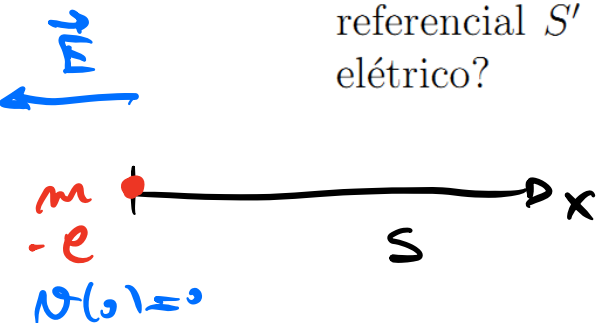
$$\Rightarrow \gamma_v M = 3m \Rightarrow M = 3m \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6} m > 2m$$

$$(c) T_f = (\gamma_v - 1) M c^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) \sqrt{6} m c^2$$

$$T_f = (3 - \sqrt{6}) m c^2$$

Q5. Um elétron de massa de repouso m , e carga elétrica $-e$, está em repouso na origem de um referencial S . Num dado momento liga-se um campo elétrico constante e uniforme de intensidade E . De acordo com a teoria especial da relatividade de Einstein:

- Qual a velocidade do elétron em função do tempo, no referencial S ?
- Qual o valor desta velocidade para tempos muito grandes?
- Qual será a distância do elétron à origem em função do tempo, medido no referencial S a partir do momento em que o campo é ligado?
- Se o campo elétrico permanecer ligado por um tempo T , qual será a energia total do elétron, no referencial S , após o campo elétrico ser desligado?
- Qual a velocidade do elétron, após o campo ser desligado, medida em um referencial S' que se move com velocidade v_0 na direção e sentido do campo elétrico?



$$v_x(0) = v_y(0) = v_z(0) = 0$$



$$(a) \vec{F} = -e\vec{E} = eE_0 \hat{x} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]$$

$$eE_0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{m v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] \Rightarrow \frac{v_x(t)}{\sqrt{1-v_x^2(t)/c^2}} = \frac{eE_0}{m} t \quad (1)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{m v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] \quad \left. \begin{array}{l} v_0 m v_y = \text{CONST.} = 0 \\ v_0 m v_z = \text{CONST.} = 0 \end{array} \right\}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{m v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right]$$

$$v_y = 0, v_z = 0$$

$$v = v_x$$

$$\forall t$$

RESOLVENDO (2) PARA α_x :

$$\alpha_x(t) = \frac{eE_0 ct}{\sqrt{m^2 c^2 + e^2 E_0^2 t^2}}$$

TEMPOS CURTOS:

$$mc \gg eE_0 t$$

TEMPOS LONGOS:

$$mc \ll eE_0 t$$

TEMPOS CURTOS:

$$\alpha_x(t) \approx \frac{eE_0 \cancel{ct}}{\cancel{mc}} = \frac{eE_0 t}{m} = \frac{F}{m} t$$

(b)

TEMPOS LONGOS:

$$\alpha_x(t) \approx \frac{\cancel{eE_0 ct}}{\cancel{eE_0 t}} = c$$

(c) $x(t) = ?$

$$x(t) = \int_0^t \alpha_x(t) dt = \int_0^t \frac{eE_0 ct \, dt}{\sqrt{m^2 c^2 + e^2 E_0^2 t^2}} = \frac{c}{eE_0} \left[\sqrt{m^2 c^2 + e^2 E_0^2 t^2} - mc \right]$$

$$(d) E(t) = \gamma_{\beta(t)} m c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \beta_x^2(t)/c^2}}$$

$$\Rightarrow E(t) = [m^2 c^4 + e^2 c^2 E_0^2 t^2]^{1/2}$$

$$(e) \beta'_x(t) =$$

$\Downarrow$

$$\beta'_x(t) = \frac{\beta_x(t) + \beta_0}{1 + \beta_0 \beta_x(t)/c^2}$$

ONDE:

$$\beta_x(t) = \frac{e E_0 c t}{\sqrt{m^2 c^2 + e^2 E_0^2 t^2}}$$

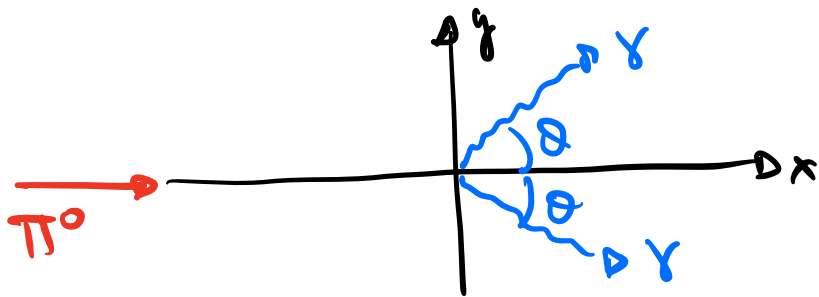
$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + v u'_x / c^2}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - v u_x / c^2}$$

$$v \rightarrow -v$$

$$u'_x = \frac{u_x + v}{1 + v u_x / c^2}$$

14-31. A neutral pion π^0 moving at speed $v = 0.98c$ decays in flight into two photons. If the two photons emerge on each side of the pion's direction with equal angles θ , find the angle θ and energies of the photons. The rest energy of π^0 is 135 MeV.



CONS. DE (E, β)

mc^2

$$P_x: \gamma_u mu = P_x \cos \theta + P'_x \cos \theta \quad (1)$$

$$P_y: 0 = P_y \sin \theta - P'_y \sin \theta \quad (2)$$

$$E: \gamma_u mc^2 = P_x c + P'_x c \quad (3)$$

$$\text{DE (2): } P_y = P'_y$$

$$(1): \gamma_u mu = 2 P_x \cos \theta$$

$$(3): \gamma_u mc^2 = 2 P_x \quad \text{[crossed out]}$$

$$\frac{(1)}{(3)}: \cos \theta = \frac{u}{c} = 0.98$$

$$\Rightarrow \theta = 11^\circ$$

$$\text{DE (3)} \Rightarrow E_\gamma = P_x c = \frac{\gamma_u}{2} mc^2 \cong 339 \text{ MeV}$$

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.98)^2}}$$