F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

14/03/2024

Aula 4

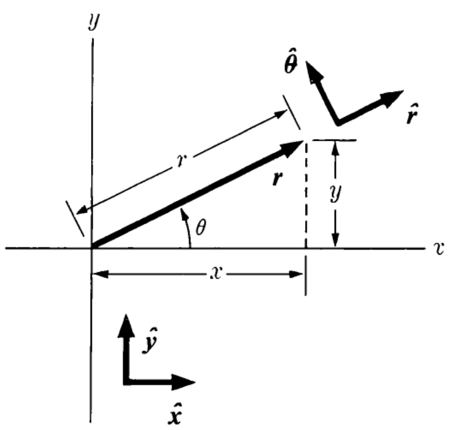
Aula passada

A dinâmica de $\boldsymbol{r}$ é equivalente ao problema de uma partícula de massa μ sujeita a uma força que aponta pra origem.

$$L_{CM} = \frac{\mu}{2}\left|\dot{\boldsymbol{r}}\right|^2 - U\left(r\right) \longrightarrow \boxed{\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = -\frac{dU}{dr}\hat{\boldsymbol{r}}}$$

Conservação do momento angular interno: $\boldsymbol{\ell} = \mu\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} = \text{const.}$

O movimento relativo é sempre num plano perpendicular ao vetor fixo $\boldsymbol{\ell}$: 3D → 2D.



Coordenadas polares no plano:

$$L_{CM} = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U\left(r\right)$$

Aula passada

$$L_{CM} = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U\left(r\right)$$

Na análise do movimento no plano, vê-se que θ é coordenada ignorável. A lei de conservação associada é a do módulo do momento angular interno.

$$\ell = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.}$$

Uma consequência dessa conservação é a 2a. lei de Kepler: durante a trajetória, a posição da partícula varre áreas a uma taxa constante.

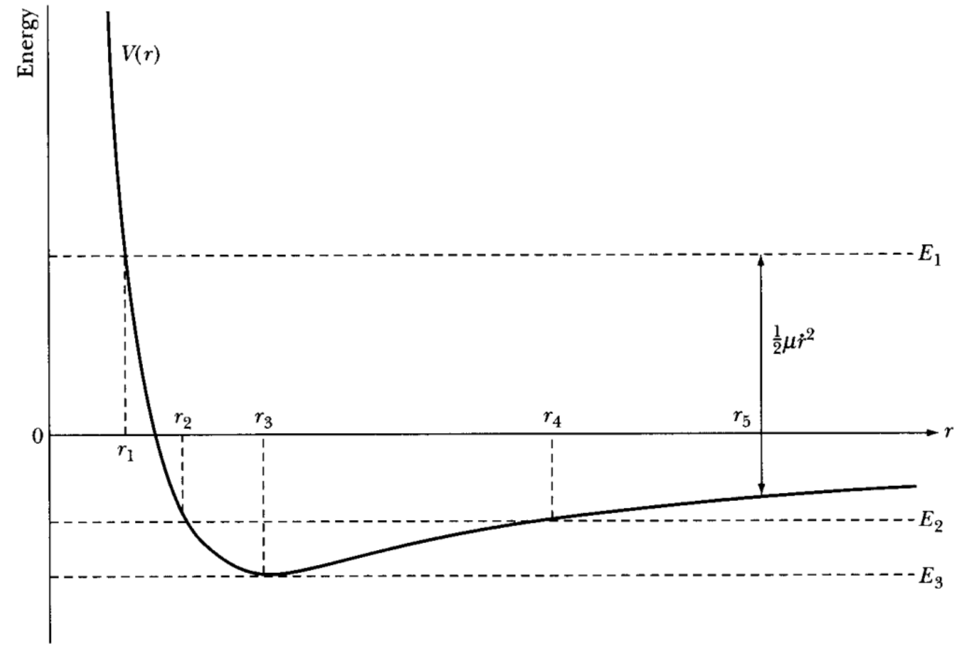
- Importante notar que a 2a. lei de Kepler vale pra qualquer potencial central.

Aula passada

Conservação da energia mecânica total:

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\mu}{2}r^2\dot{\theta}^2 + U(r) = \text{const.}$$

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r) = \text{const.}$$

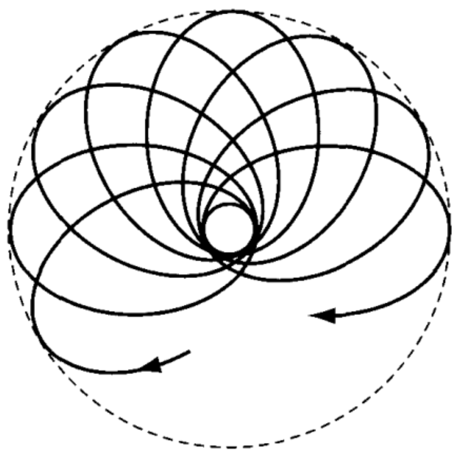


Potencial efetivo:

$$V(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r) \Rightarrow \text{pontos de retorno}$$

As trajetórias genéricas podem ser:

1. Compactas (a partícula não vai pra infinito) ou não compactas (a partícula vem e/ou vai pra infinito).
2. As trajetóricas compactas podem ser fechadas ou abertas.



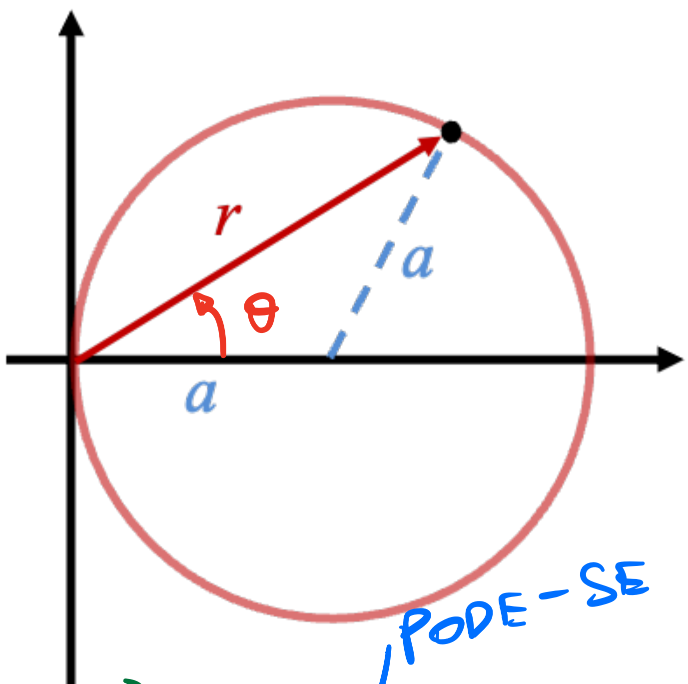
Aula passada

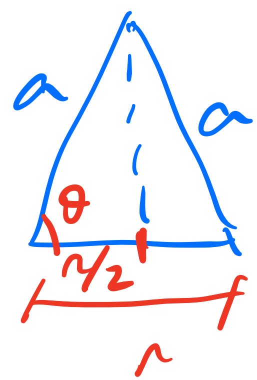
Equação da trajetória: $u(\theta) \equiv \frac{1}{r(\theta)} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{\ell^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$

$$\boxed{F(r) = -\frac{dU}{dr}}$$

8.11 Uma partícula move-se sob a influência de uma força central da forma $F(r) = -k/r^n$. Se a sua órbita é circular e passa pelo centro de força, mostre que $n = 5$.

$r(\theta) = ?$





$\frac{r}{2} = a\cos\theta$

$r(\theta) = 2a\cos\theta$

$u(\theta) = \frac{1}{2a\cos\theta}$

PODE-SE CALCULAR

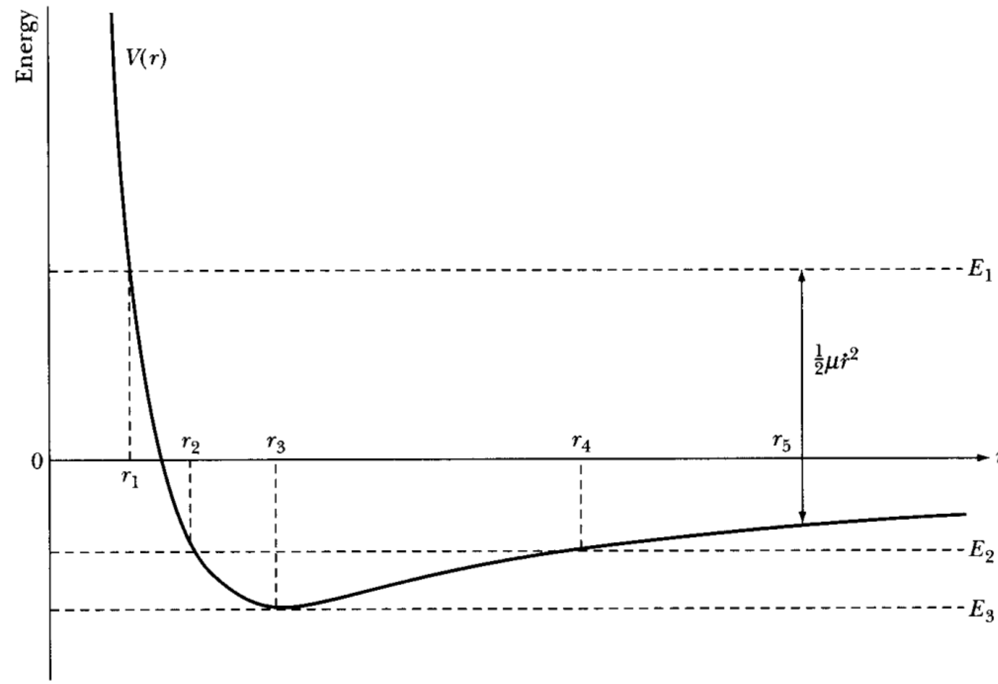
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{a\cos^3\theta} \times \frac{8a^2}{8a^2} = \frac{8a^2}{(2a\cos\theta)^3} = 8a^2u^3$$

$$= -\frac{\mu}{l^2u^2}\left(-k u^n\right) = \frac{k\mu}{l^2} u^{(n-2)} \Rightarrow \boxed{n=5}$$

O problema de Kepler

$$U(r) = -\frac{k}{r}$$ onde $k = GMm$

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} = -\frac{k}{r^2}$$



$$\begin{aligned} V_{min} < E < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{compacta} \\ E \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{não compacta} \end{aligned}$$

A trajetória

$$u(\theta) \equiv \frac{1}{r(\theta)} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{\ell^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$\boxed{F(r) = -\frac{dU}{dr}}$$

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} = -ku^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu k}{\ell^2}$$

SOLUÇÃO GERAL: $u(\theta) = u_H^G(\theta) + u_{NH}^P(\theta)$

$$u(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mu k}{\ell^2}$$

$$\frac{1}{r(\theta)} = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mu k}{\ell^2}$$

$\alpha > 0$

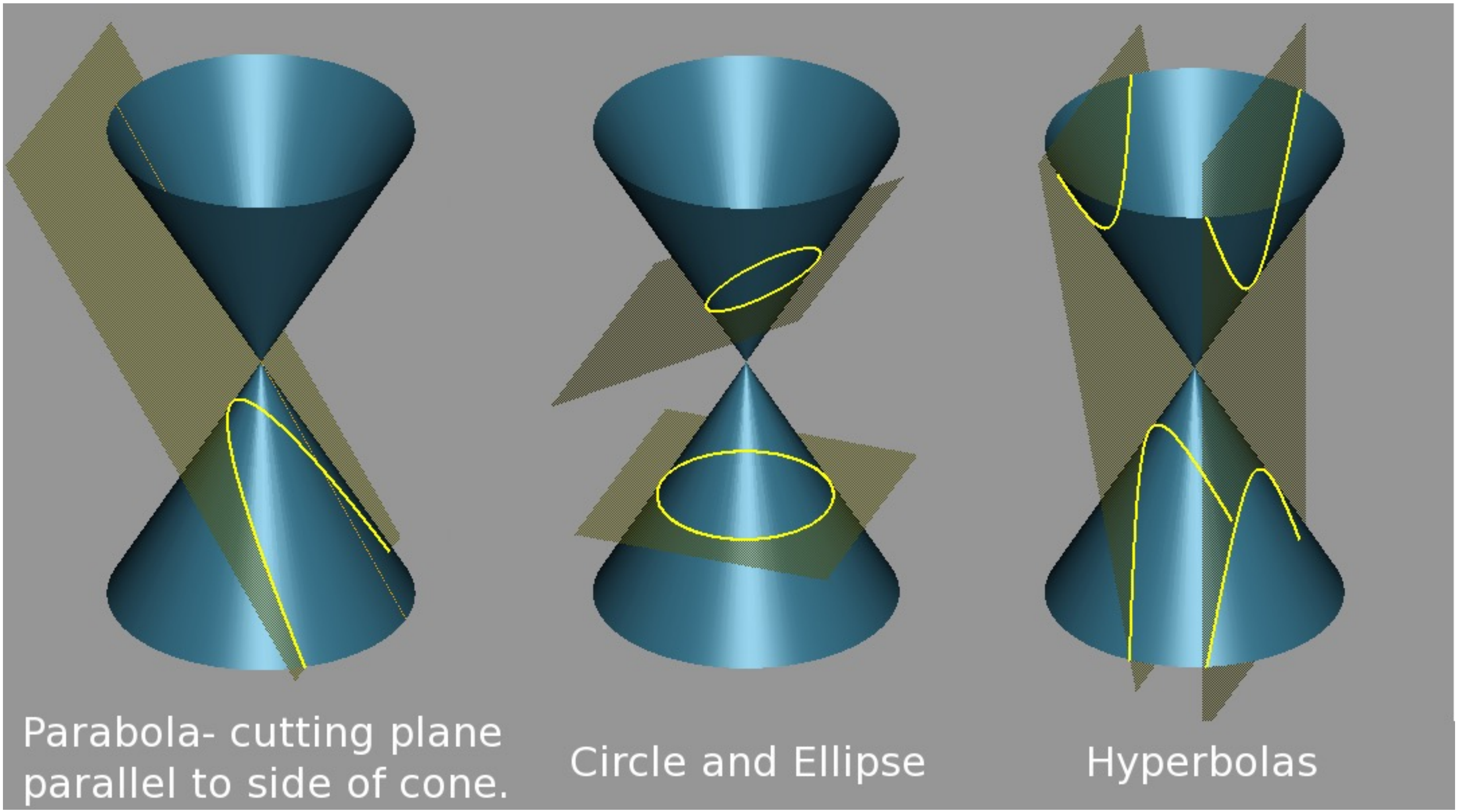
$\varepsilon \geq 0$

SEM PERDA DE GENERALIDADE: $\theta_0 = 0$ E $A > 0$

$$r(\theta) = \frac{1}{A\cos\theta + \frac{\mu k}{\ell^2}} \times \frac{\ell^2/\mu k}{\ell^2/\mu k} = \frac{\ell^2/\mu k}{1 + \varepsilon\cos\theta} = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\ell^2}{\mu k}}$$

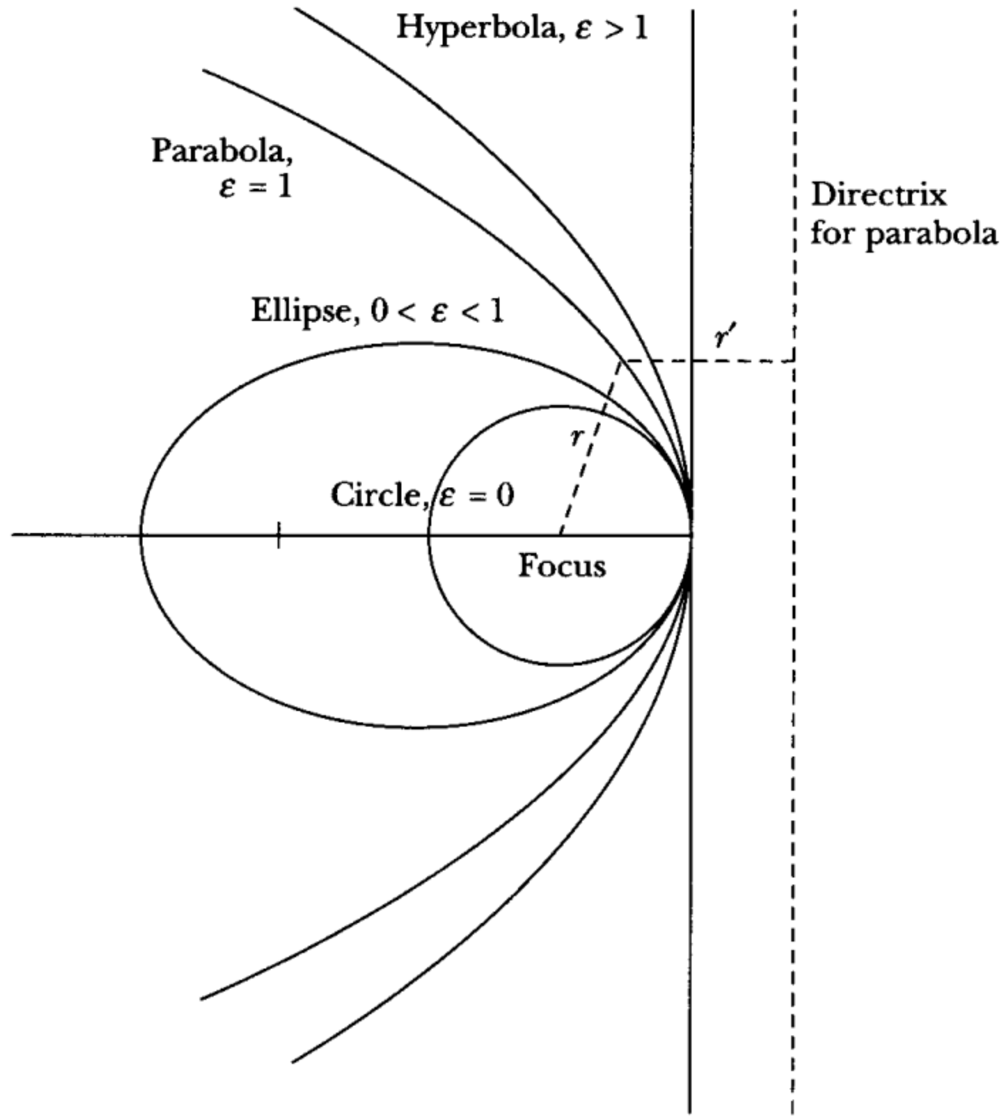
Curvas cônicas



Cônicas

$$\boxed{r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos\theta}}$$

ε = EXCENTRICIDADE



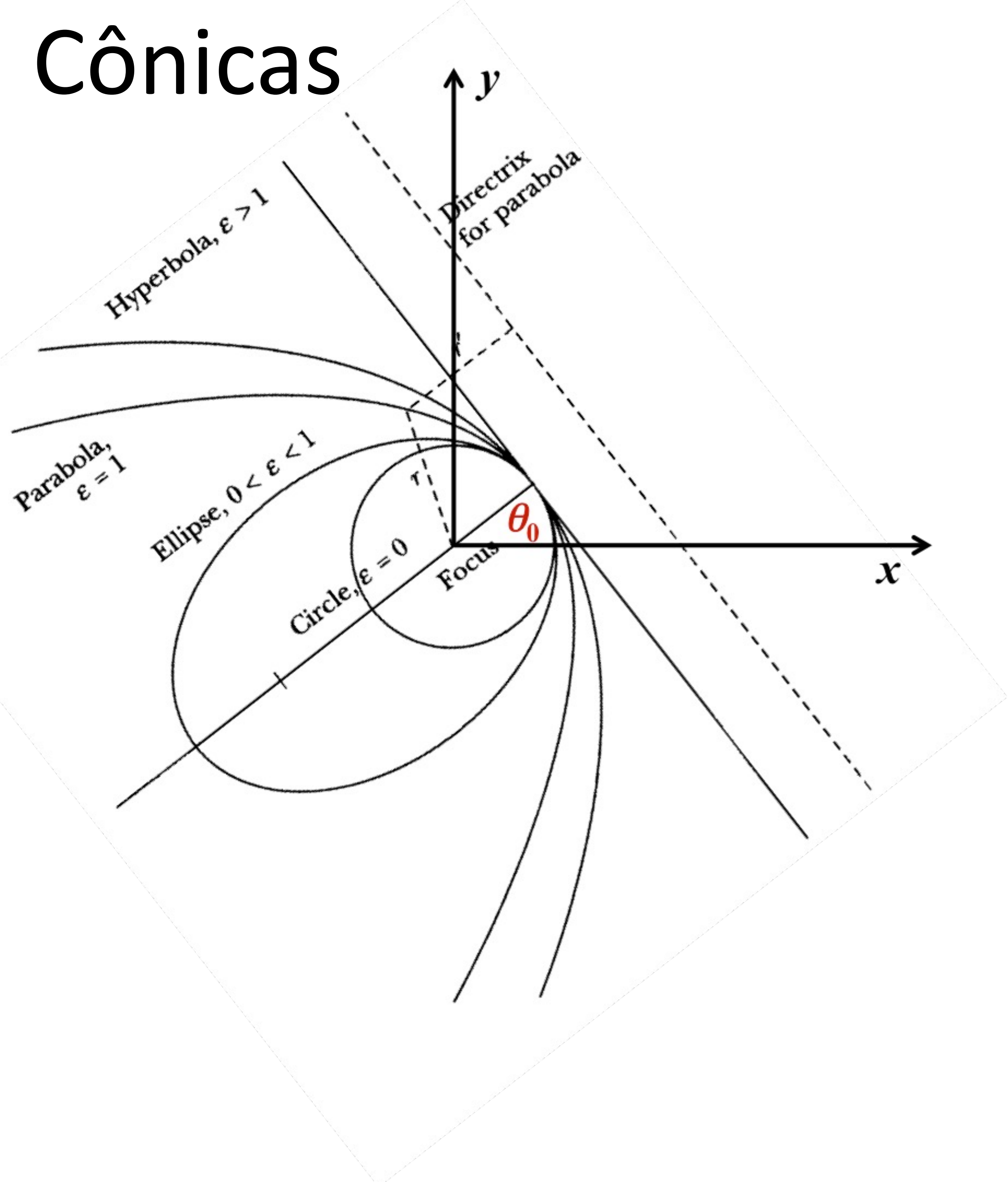
Cônicas

$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)}$$

JUSTIFICA TOMAR

$\varepsilon \geq 0$

$\theta_0 = 0$



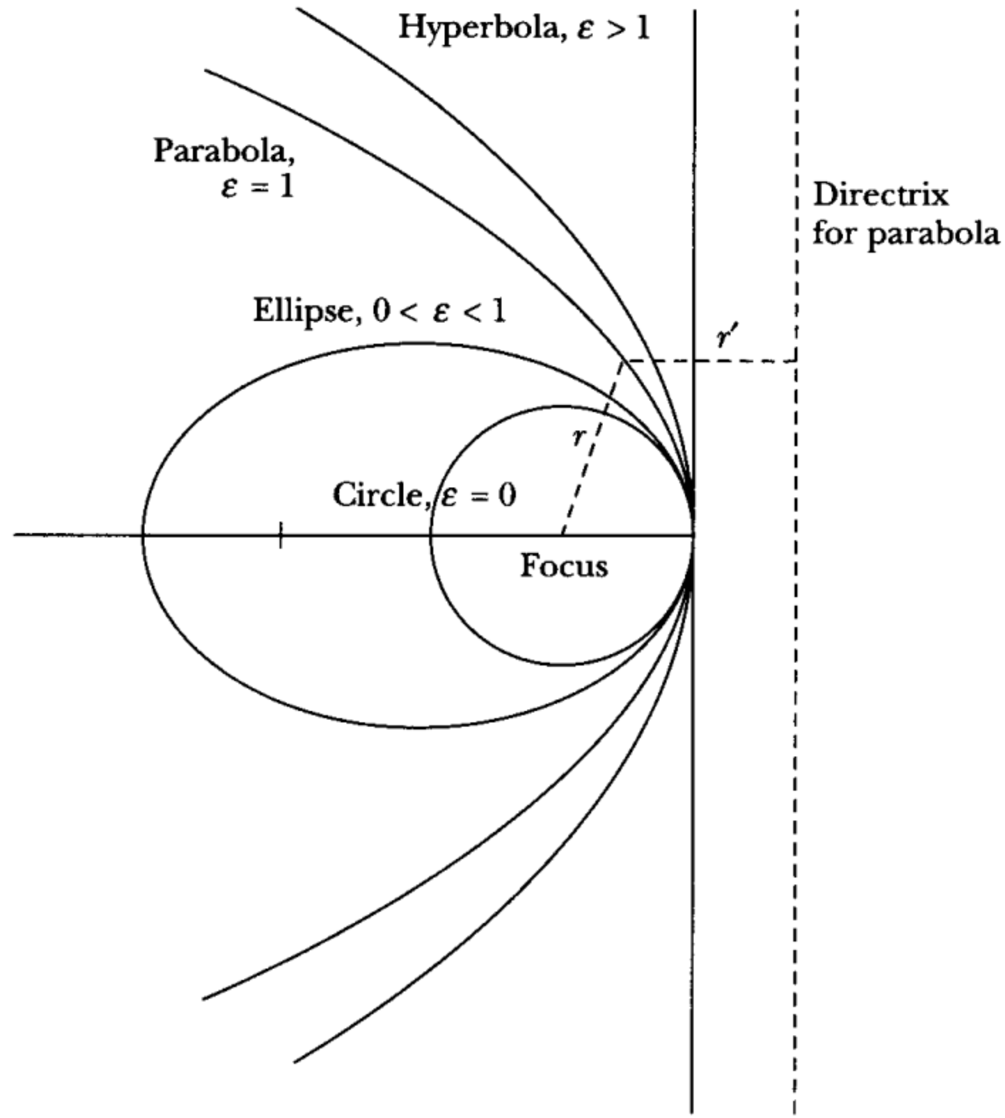
Cônicas: periastro e apoastro

$$\boxed{r\left(\theta\right)=\frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta}}$$

$$r_{min}=\frac{\alpha}{1+\varepsilon} \qquad (\theta=0)$$

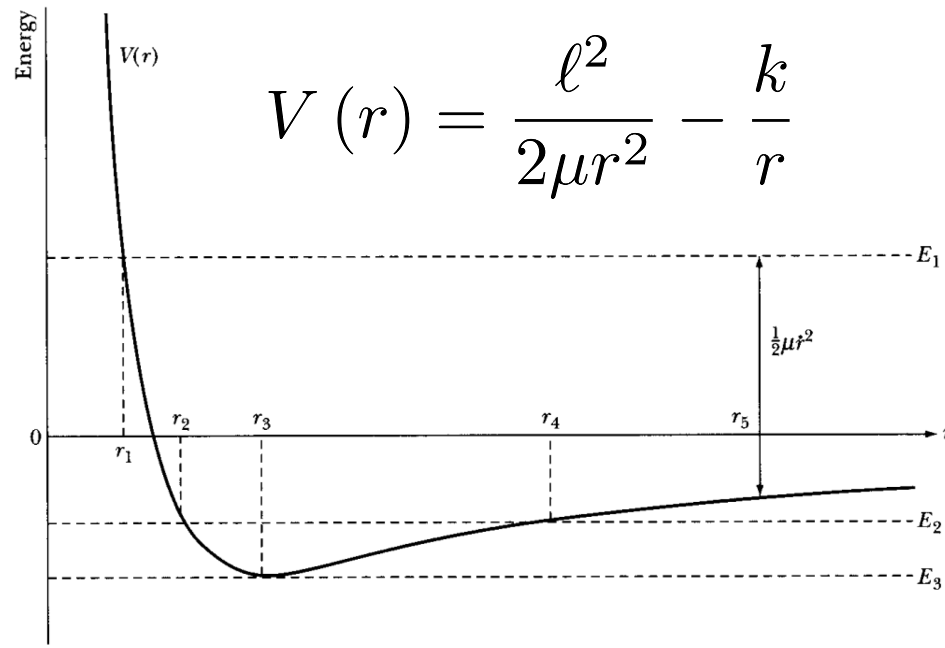
PARA A ELIPSE :

$$r_{max}=\frac{\alpha}{1-\varepsilon} \qquad (\theta=\pi)$$



A excentricidade em termos da energia

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r) = \text{const.}$$



$$V(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

$r_{min,max}$ PONTOS DE RETORNO DE $V(r)$:

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow E = \frac{\ell^2}{2\mu r_0^2} - \frac{k}{r_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\ell^2}{2\mu} u_0^2 - k u_0$$

$$u_0^2 - \frac{2\mu k}{\ell^2} u_0 - \frac{2\mu E}{\ell^2} = 0$$

$$\Rightarrow u_0 = \frac{1}{\alpha}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}}\right]$$

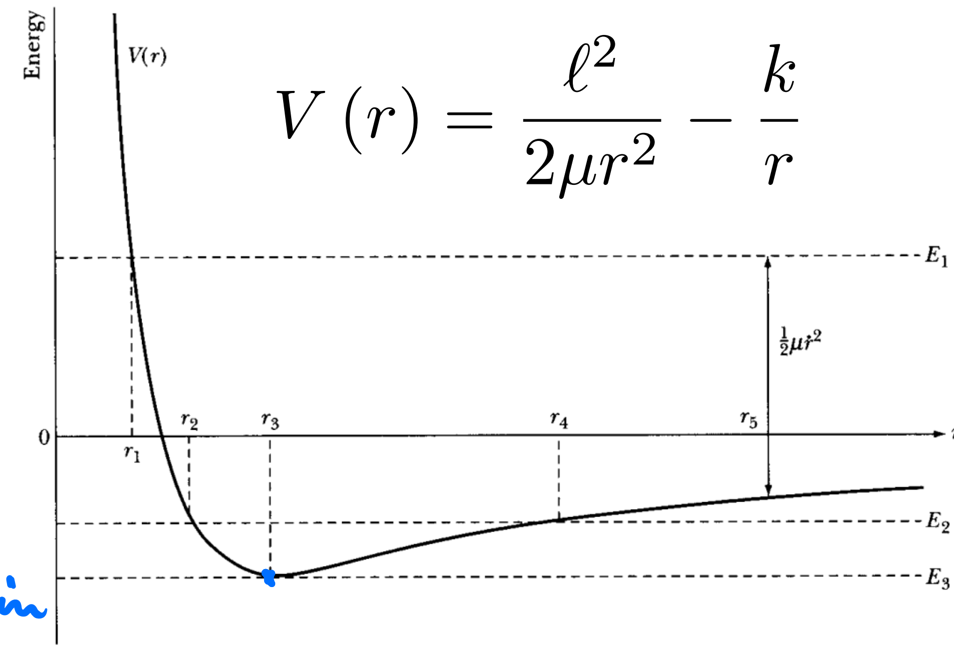
$$\frac{1}{r_{min}} = \frac{1}{\alpha}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}}\right] = \frac{1+\varepsilon}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}}}$$

O valor mínimo da energia

$$\frac{dV(r)}{dr} = 0 \Rightarrow r_3 \text{ TAL QUE } V_{min} = V(r_3)$$

$$-\frac{\ell^2}{\mu r_3^3} + \frac{k}{r_3^2} = 0$$

$$\Rightarrow r_3 = \frac{\ell^2}{\mu k} \equiv \alpha$$



$$V(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

$$\Rightarrow V_{min} = V\left(\frac{\ell^2}{\mu k}\right) = -\frac{\mu k^2}{2\ell^2}$$

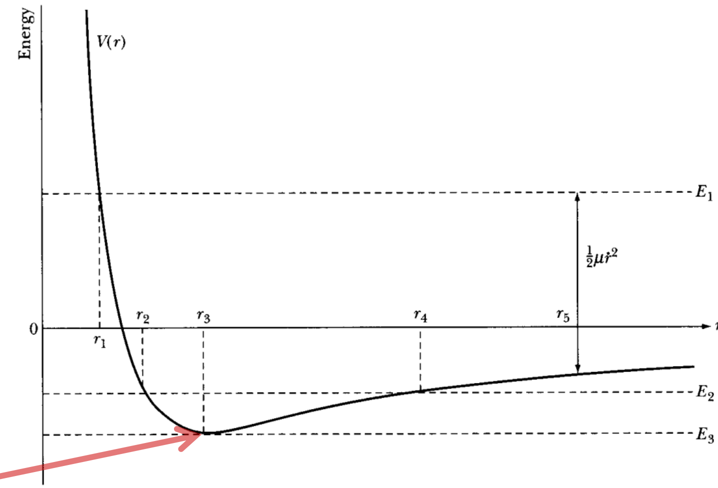
$$\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{E}{V_{min}}} = \sqrt{1 + \frac{E}{|V_{min}|}}$$

Resumo até aqui

Problema de Kepler: $k = GMm$

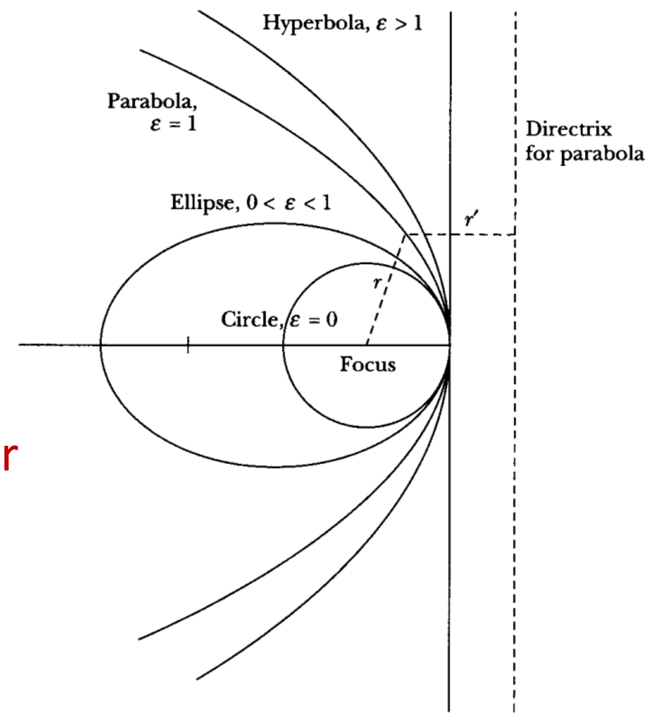
$$
\begin{aligned}
U(r) &= -\frac{k}{r} \Rightarrow r(\theta) = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta} \\
\alpha &= \frac{\ell^2}{\mu k} \\
\varepsilon &= \sqrt{1+\frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}} = \sqrt{1-\frac{E}{V_{min}}}
\end{aligned}
$$

$$V_{min} = -\frac{\mu k^2}{2\ell^2}$$

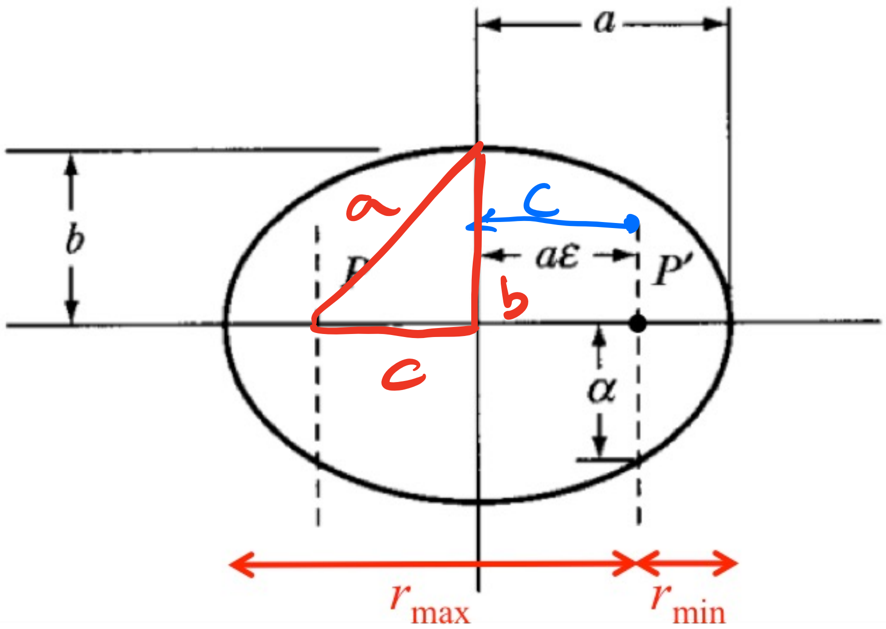


$$
\begin{aligned}
E = V_{min} &\Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow && \text{círculo} \\
V_{min} < E < 0 &\Rightarrow 0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow && \text{elipse} \\
E = 0 &\Rightarrow \varepsilon = 1 \Rightarrow && \text{parábola} \\
E > 0 &\Rightarrow \varepsilon > 1 \Rightarrow && \text{hipérbole}
\end{aligned}
$$

1ª lei de Kepler



A matemática da elipse



$$\boxed{r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos\theta}}$$

Queremos a, b e c em termos de α e ε.

$$2a = r_{min} + r_{max}$$

$$= \frac{\alpha}{1+\varepsilon} + \frac{\alpha}{1-\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2}}$$

$$c = \frac{1}{2}(r_{max} - r_{min}) = \boxed{\frac{\varepsilon\alpha}{1-\varepsilon^2} = \varepsilon a = c}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \boxed{\frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = b}$$

Os semi-eixos em termos da energia

$$\alpha = \frac{\ell^2}{\mu k}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}}$$

DE: $a = \dfrac{\alpha}{1-\varepsilon^2}$

$\Rightarrow a = \dfrac{k}{2|E|} \Rightarrow \boxed{E = -\dfrac{k}{2a}} < 0$

$b = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \boxed{\dfrac{\ell}{\sqrt{2\mu|E|}} = b}$

Resumo da elipse

$$\begin{aligned}
r_{min} &= \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \quad (\theta = 0) \\
r_{max} &= \frac{\alpha}{1-\varepsilon} \quad (\theta = \pi) \\
r_{max} + r_{min} &= 2a \\
r_{max} - r_{min} &= 2c = 2\varepsilon a \\
a &= \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{2\,|E|} \Rightarrow E = -\frac{k}{2a} \\
b &= \sqrt{1-\varepsilon^2}a = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu\,|E|}}
\end{aligned}$$

3ª lei de Kepler

Da 2a. lei de Kepler: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\ell^2}{2\mu} \Rightarrow \int \dfrac{dA}{dt}dt = \int dA = \int \dfrac{\ell^2}{2\mu}dt$

INTEGRANDO NUM PERÍODO COMPLETO:

$$\int dA = \frac{\ell^2}{2\mu}\int dt$$

$$\int dA = \pi a b = \frac{\ell^2}{2\mu} T \Rightarrow T = \frac{2\pi\mu}{\ell^2} ab$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\, a^{3/2} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2\frac{\mu}{k}}$$

SE $M >> m \Rightarrow \mu \simeq m$

$k = G M_\odot m$

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} \simeq \frac{4\pi^2}{G M_\odot}}$$

3ª LEI DE KEPLER

As leis de Kepler do movimento dos planetas

1. A órbita de cada planeta é uma elipse com o Sol num dos focos. ✓

2. O segmento de reta que vai do planeta ao Sol varre áreas iguais em períodos de tempo iguais. ✓

3. Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores das suas elipses. ✓

$$GM_{\odot} = 1.33 \times 10^{20}\ m^3/s^2$$

1. O Sputnik I tinha um perigeu (ponto de maior proximidade) de 227 km acima da superficie da Terra, ponto no qual sua velocidade era de 28.710 km/h. Encontre o distância de apogeu (maior distância) em relação à superfície da Terra e o seu período de revolução. Use $GM_T \approx 3.986 \times 10^{14} \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$ e $R_T \approx 6400$ km.

$r_{min} = h_{min} + R_T = 6.627$ km ; $v_p = 28.710$ km/h $= 7.975 \frac{m}{s}$

$$2a = r_{min} + r_{max} = -\frac{k}{E} = -\frac{GM_T m}{E}$$

$$E = T + U = \frac{m}{2} v_p^2 - \frac{GM_T m}{r_{min}}$$

$$\frac{E}{m} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{GM_T}{r_{min}}$$

$r_{max} = 7.443$ km

$h_{max} = r_{max} - R_T$
$= 1.043$ km

DA 3º LEI DE KEPLER: $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}$

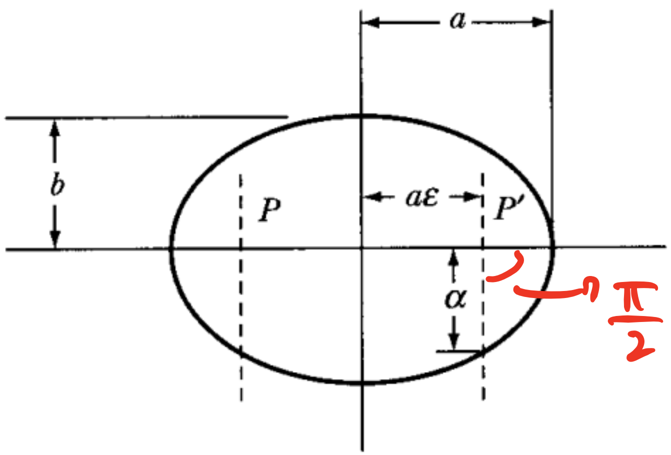
$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = 7.035 \text{ km}$$

$T = 5.872$ s $\cong 98$ min

2. O Explorer I tinha um perigeu de 360 km e um apogeu de 2549 km acima da superficie da Terra. Encontre sua distância acima da superficie da Terra quando ele passava num ponto a 90° em torno da Terra a partir do perigeu.

$$r_{min} = 6.760 \text{ km}$$

$$r_{max} = 8.949 \text{ km}$$

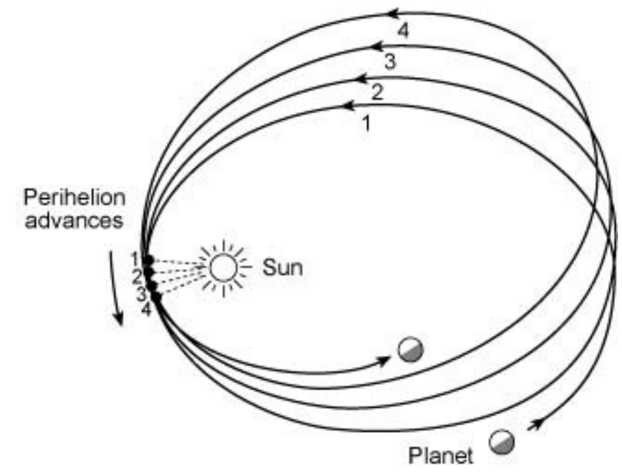


$$r\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\frac{\pi}{2}} = \alpha$$

$$\frac{1}{r_{min}} + \frac{1}{r_{max}} = \frac{1+\varepsilon}{\alpha} + \frac{1-\varepsilon}{\alpha} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 7.700 \text{ km}$$

$$\boxed{h_\alpha = 1.300 \text{ km}}$$

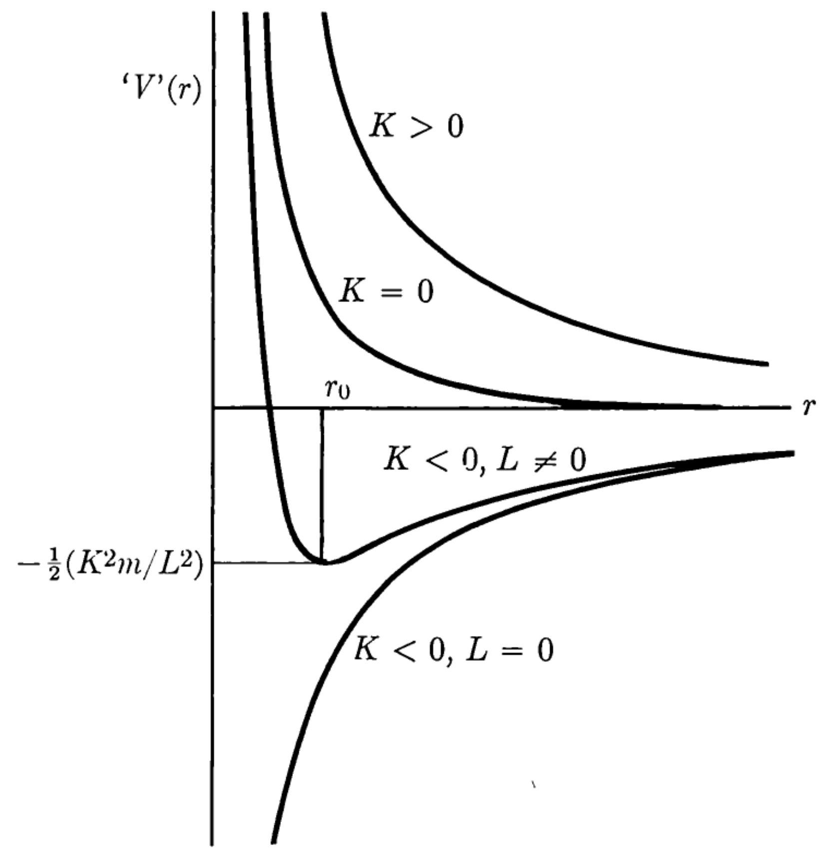
A precessão do perihélio



Pequenos desvios de órbitas circulares

Potencial $1/r$ repulsivo

$$V\left(r\right)=\frac{L^2}{2mr^2}+\frac{K}{r}$$



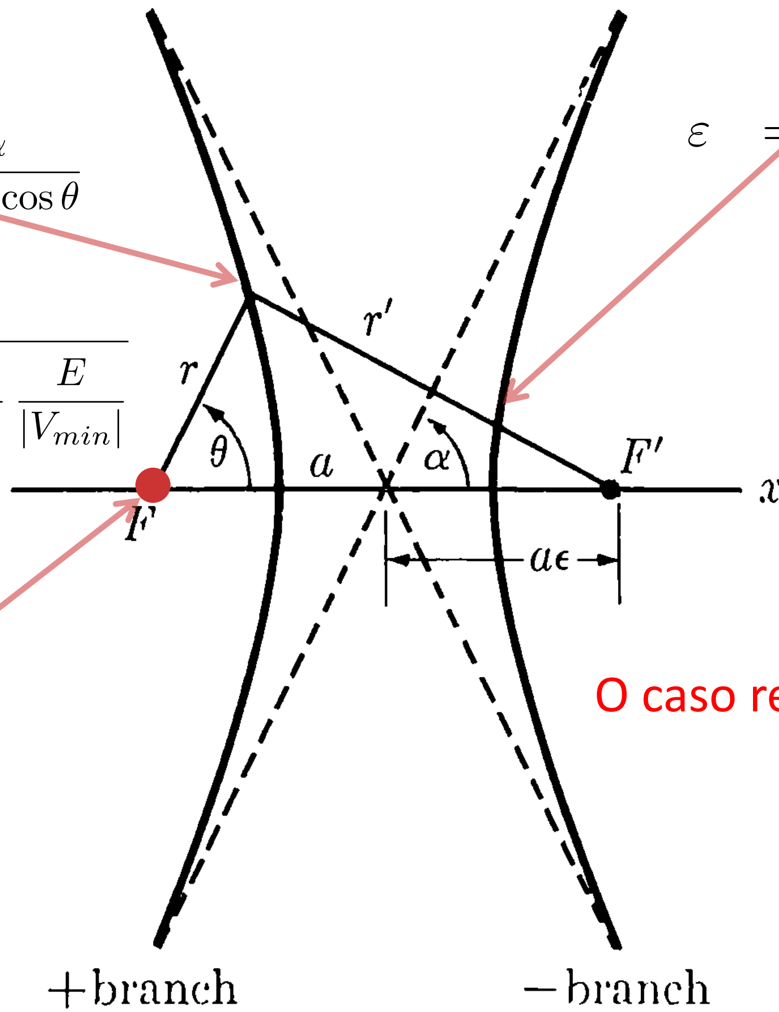
Potencial $1/r$ repulsivo

Potencial $1/r$ repulsivo

$$U(r) = \frac{k}{r} \Rightarrow r(\theta) = \frac{\alpha}{-1+\varepsilon\cos\theta}$$
$$\alpha = \frac{\ell^2}{\mu k}$$
$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}} \quad (E>0)$$

O caso atrativo é o ramo (+) da hipérbole

$$U(r) = -\frac{k}{r} \Rightarrow r(\theta) = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta}$$
$$\alpha = \frac{\ell^2}{\mu k}$$
$$\varepsilon = \sqrt{1+\frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}} = \sqrt{1+\frac{E}{|V_{min}|}}$$



centro de força

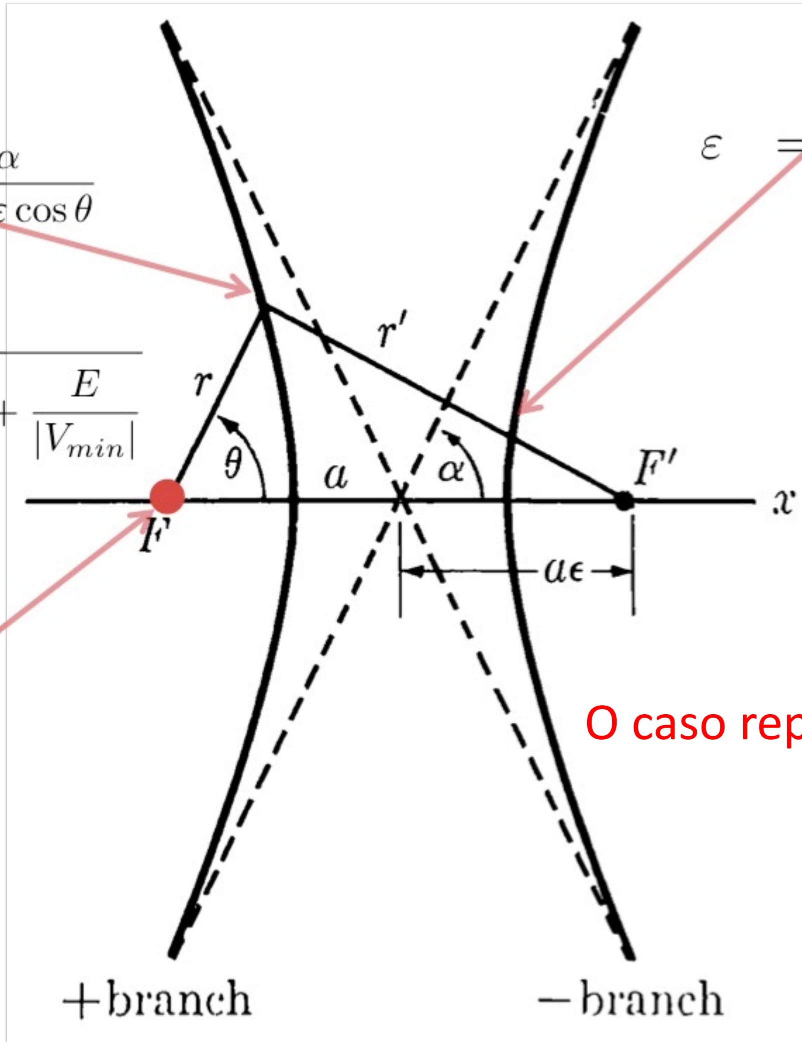
O caso repulsivo é o ramo (-) da hipérbole

Potencial $1/r$ repulsivo

$$
\begin{aligned}
U(r) &= \frac{k}{r} \Rightarrow r(\theta) = \frac{\alpha}{-1+\varepsilon\cos\theta} \\
\alpha &= \frac{\ell^2}{\mu k} \\
\varepsilon &= \sqrt{1+\frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}} \quad (E>0)
\end{aligned}
$$

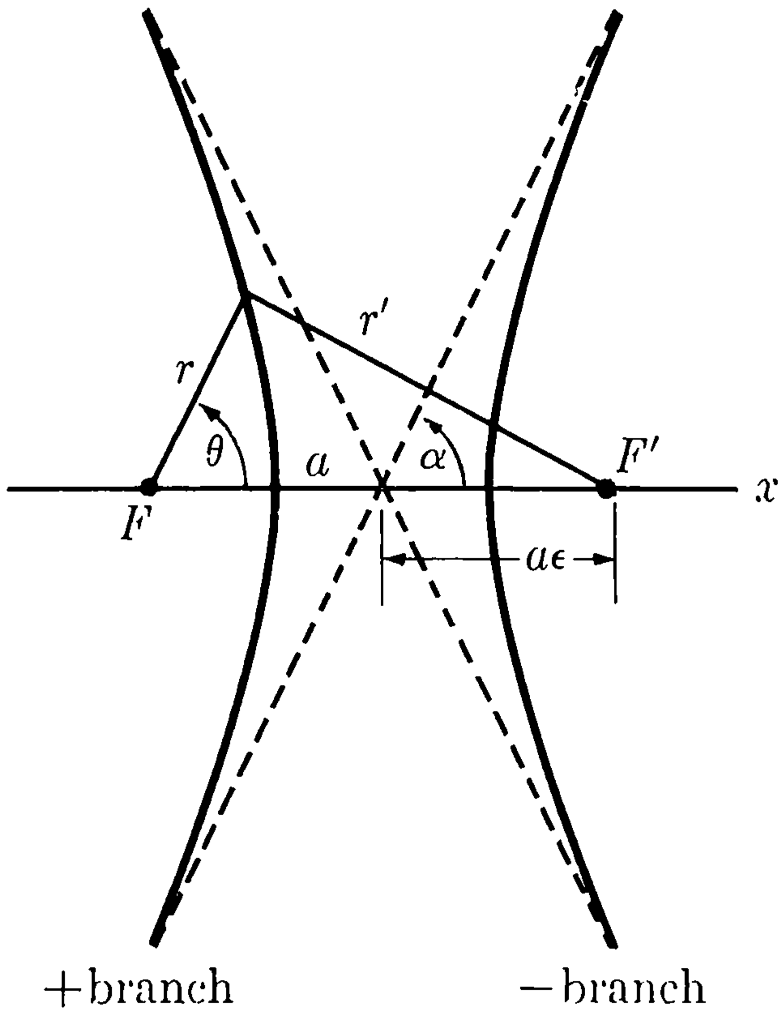
O caso atrativo é o ramo (+) da hipérbole

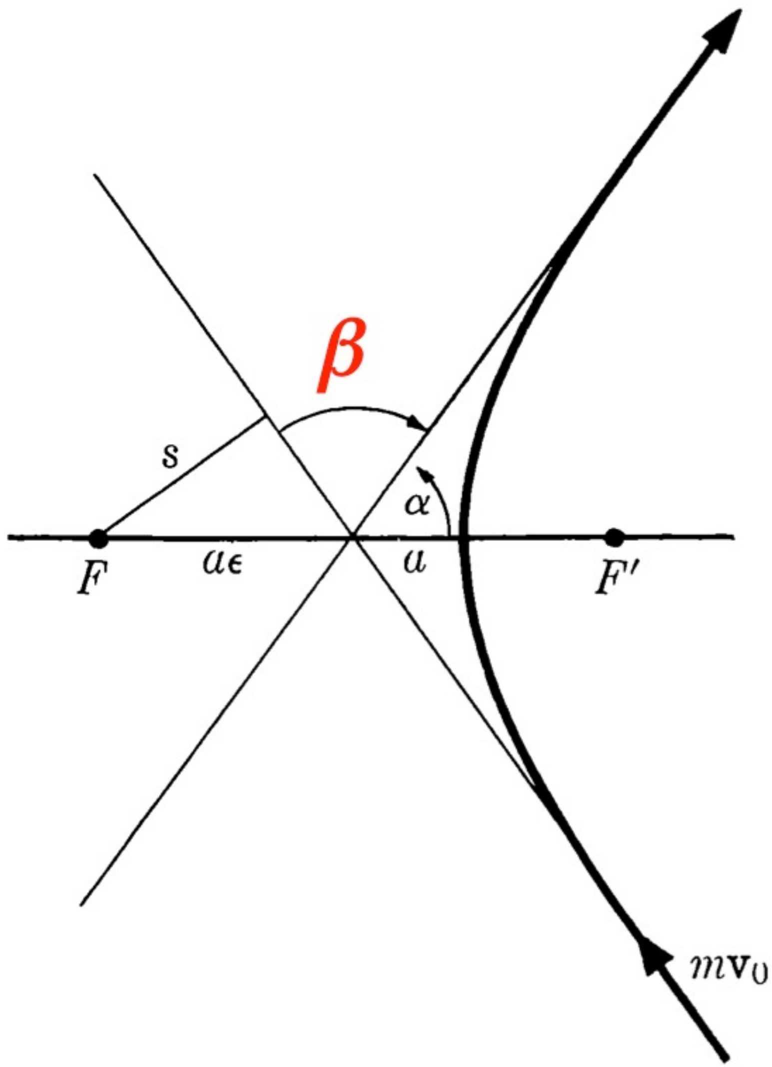
$$
\begin{aligned}
U(r) &= -\frac{k}{r} \Rightarrow r(\theta) = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta} \\
\alpha &= \frac{\ell^2}{\mu k} \\
\varepsilon &= \sqrt{1+\frac{2\ell^2 E}{\mu k^2}} = \sqrt{1+\frac{E}{|V_{min}|}}
\end{aligned}
$$



centro de força

O caso repulsivo é o ramo (-) da hipérbole


r
r′
θ
a
α
F
F′
x
aϵ
+branch
−branch



β
s
α
F
$a\epsilon$
a
F'
$m\mathbf{v}_0$