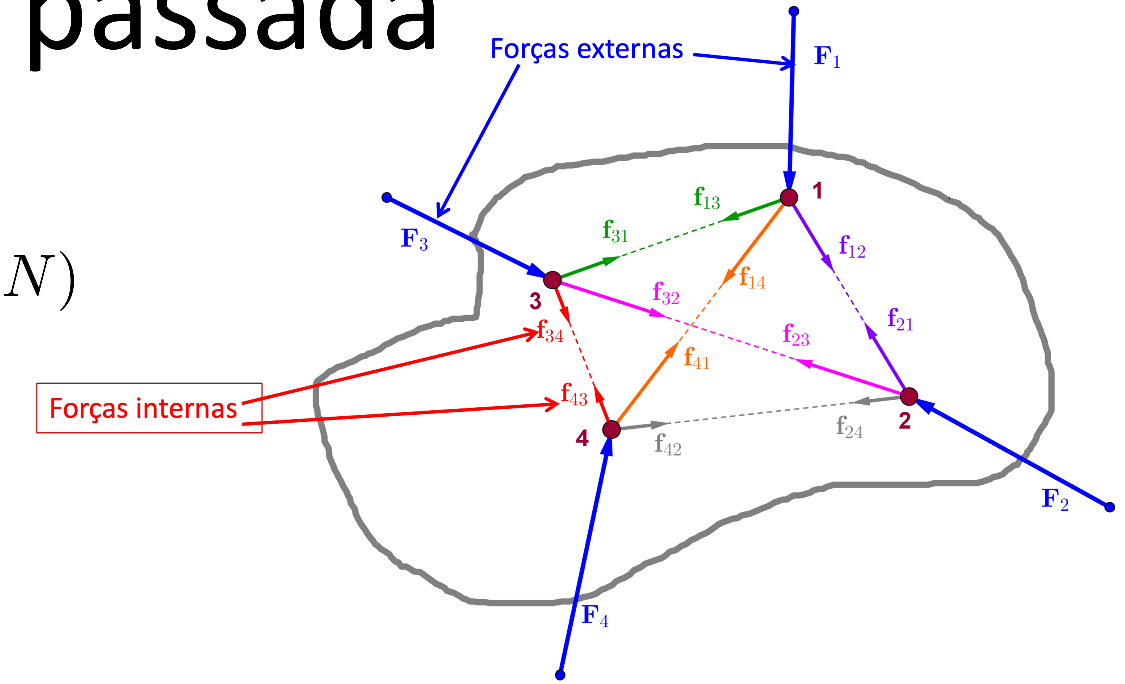
F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

21/03/2024

Aula 6

Aula passada



Sistema de N partículas:

$$m_k \frac{d^2\mathbf{r}_k}{dt^2} = \mathbf{F}_k + \mathbf{f}_k \quad (k = 1, 2, \ldots N)$$

Somando sobre todas as partículas:

$$\sum_k m_k \frac{d^2\mathbf{r}_k}{dt^2} = \sum_k \mathbf{F}_k + \sum_k \mathbf{f}_k$$

Lado direito: $\sum_k \mathbf{F}_k + \cancel{\sum_k \mathbf{f}_k} = \mathbf{F}$

A 3a. lei de Newton garante que a força interna total é nula.

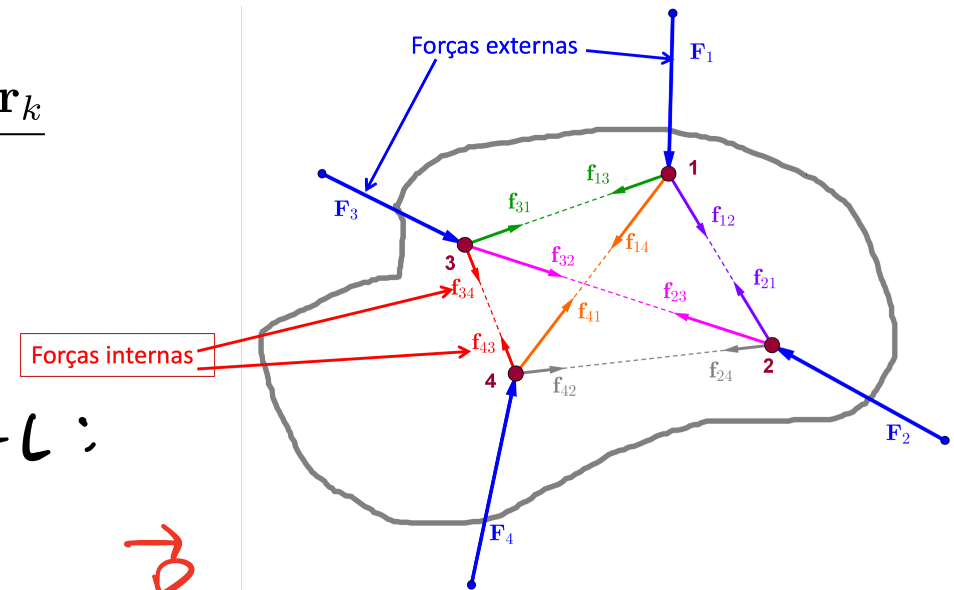
Lado esquerdo: $\sum_k m_k \frac{d^2\mathbf{r}_k}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\sum_k m_k \frac{d\mathbf{r}_k}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_k m_k \mathbf{v}_k\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_k \mathbf{p}_k\right) = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$

$$\boxed{\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}}$$

Se a força externa total se anula, $\mathbf{F}=0$, o momento linear total é conservado.

Momento linear total e centro de massa

Centro de massa: $\mathbf{R} = \dfrac{\sum_k m_k \mathbf{r}_k}{\sum_k m_k} = \dfrac{\sum_k m_k \mathbf{r}_k}{M}$



$$M\vec{R} = \sum_k m_k \vec{r}_k$$

TOMO A DERIVADA TEMPORAL:

$$M\dot{\vec{R}} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k = \sum_k m_k \vec{v}_k = \vec{P}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{P}} = \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}}$$

SE $\vec{F} = 0 \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{R}} = \text{CONST.}}$

Leis de conservação: momento angular

MOMENTO ANGULAR DA PARTÍCULA $\underline{k}$ EM RELAÇÃO À ORIGEM DO SISTEMA DE COORD.

$$\vec{L}_k = m_k \vec{r}_k \times \vec{v}_k$$

MOM. ANG. EM RELAÇÃO A UM PONTO $\underline{Q}$:

$$\Rightarrow \vec{L}^{Q}_k = m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{v}_k - \vec{v}_Q)$$

TAXA DE VARIAÇÃO DO MOM. ANG. TOTAL EM RELAÇÃO A $\underline{Q}$:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_k L^Q_k\right] = \frac{d}{dt}\left[\sum_k m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{v}_k - \vec{v}_Q)\right] =$$

$$= \sum_k m_k \left[\overbrace{(\vec{v}_k - \vec{v}_Q) \times (\vec{v}_k - \vec{v}_Q)}^{0} + (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{a}_k - \vec{a}_Q)\right]$$

$$\frac{d\vec{L}^Q}{dt} = \sum_k m_k \vec{r}_k \times \vec{a}_k - \sum_k m_k \vec{r}_k \times \vec{a}_Q - \vec{r}_Q \times \left(\sum_k m_k \vec{a}_k\right) + \sum_k m_k \vec{r}_Q \times \vec{a}_Q$$

1º + 3º TERMOS: $\sum_k m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_k = \sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{F}_k + \vec{f}_k)$

$$= \sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k + \sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{f}_k = \vec{N}^Q + \underbrace{\sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{f}_k}_{\text{PROVAREMOS QUE SE ANULA}}$$

2º TERMO: $-M \vec{R} \times \vec{a}_Q$

4º TERMO: $M \vec{r}_Q \times \vec{a}_Q$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}^Q}{dt} = \vec{N}^Q - M(\vec{R} - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_Q}$$

$(\vec{R} - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_Q = 0$ SE

(i) $\vec{a}_Q = 0$

(ii) $\vec{r}_Q = \vec{R} \Rightarrow$ O PONTO Q É O CENTRO DE MASSA

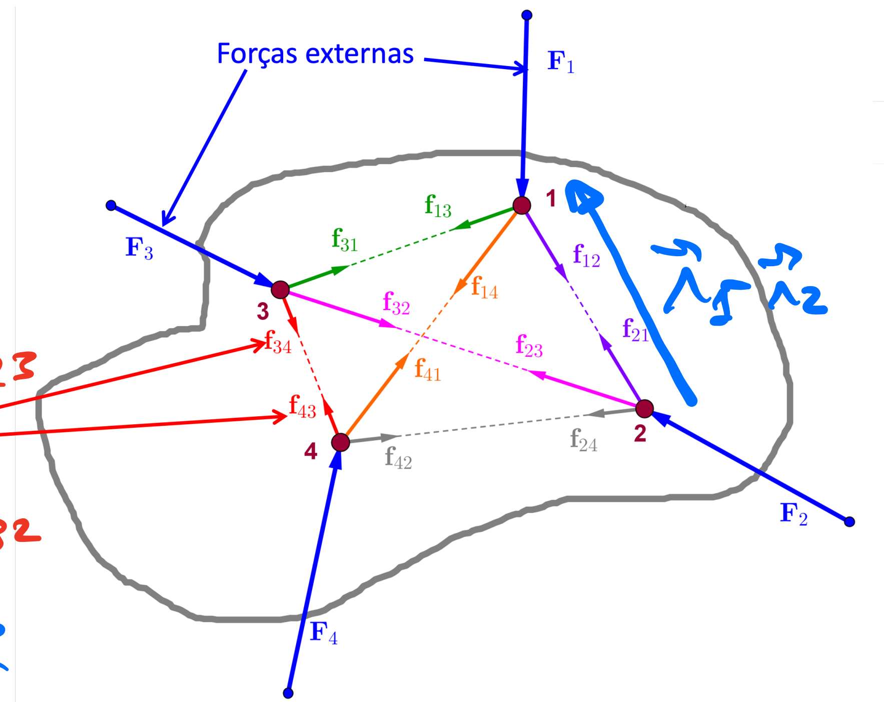
SE (i) OU (ii): $\boxed{\dfrac{d\vec{L}^Q}{dt} = \vec{N}^Q}$

$$N=3: \quad \sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_0) \times \vec{f}_k$$

$$k=1: \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{f}_{12} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{f}_{13}$$

$$k=2: \quad (\vec{r}_2 - \vec{r}_0) \times \vec{f}_{21} + (\vec{r}_2 - \vec{r}_0) \times \vec{f}_{23}$$

$$k=3: \quad (\vec{r}_3 - \vec{r}_0) \times \vec{f}_{31} + (\vec{r}_3 - \vec{r}_0) \times \vec{f}_{32}$$



$$0: \quad (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{f}_{12} - (\vec{r}_2 - \vec{r}_0) \times \vec{f}_{12}$$

$$= \left[(\vec{r}_1 - \cancel{\vec{r}_0}) - (\vec{r}_2 - \cancel{\vec{r}_0}) \right] \times \vec{f}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{f}_{12} = 0$$

O TORQUE TOTAL INTERNO É NULO SE AS FORÇAS FOREM CENTRAIS.

$$\frac{d\vec{L}^{O}}{dt} = \vec{N}^{O}$$

SE $\vec{N}^{O} = 0$ (TORQUE EXTERNO TOTAL SE ANULA)

$\Rightarrow \vec{L}^{O} = \text{CONST.}$

Convervação da energia mecânica: forças conservativas

SUPONHAMOS QUE A FORÇA SOBRE A k-ÉSIMA PARTÍCULA É DERIVÁVEL DE UMA FUNÇÃO ENERGIA POTENCIAL:

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots, \vec{r}_k)$$

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = -\vec{\nabla}_k V = -\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x_k} - \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y_k} - \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z_k}$$

TOMO PRODUTO ESCALAR COM $\vec{v}_k$ E SOMO SOBRE $\underline{k}$

$$\sum_k m_k \underbrace{\vec{v}_k \cdot \dot{\vec{v}}_k}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\vec{v}_k \cdot \vec{v}_k\right]} = -\sum_k \vec{v}_k \cdot \vec{\nabla}_k V \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\sum_k \frac{m_k}{2}|\vec{v}_k|^2}_{T}\Big] = -\sum_k \vec{v}_k \cdot \vec{\nabla}_k V$$

$$\sum_k \vec{v}_k \cdot \vec{\nabla}_k V = \sum_k \left[\frac{dx_k}{dt}\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{dy_k}{dt}\frac{\partial V}{\partial y_k} + \frac{dz_k}{dt}\frac{\partial V}{\partial z_k} \right]$$

$$= \frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial (T+V)}{dt} = 0$$

$$T + V = E \leftarrow \text{const.}$$

Forças conservativas internas e externas

FORÇA EXTERNA CONSERVATIVA:

$$V_g(x,y,z) = \sum_k m_k g z_k$$

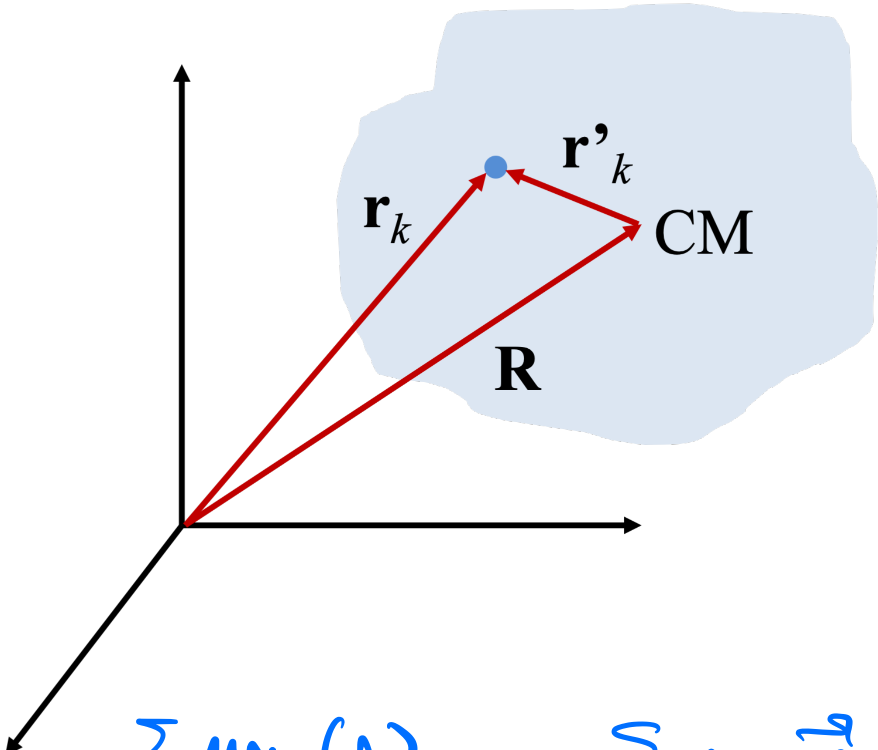
FORÇAS INTERNAS CONSERVATIVAS:

FORÇAS CENTRAIS:

$$U(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

N PARTÍCULAS: $U(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N) = \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \frac{-G m_i m_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$

Expressões úteis para o momento angular e energia cinética



$\mathbf{r}_k$: posição da k-ésima partícula
$\mathbf{R}$: posição do Centro de Massa
$\mathbf{r}'_k$: posição da k-ésima partícula em relação ao CM

$\Rightarrow \vec{r}_k = \vec{R} + \vec{r}\,'_k \quad (1)$

$\Rightarrow \dot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}\,'_k \quad (2)$

$$\sum_k m_k (1) \Rightarrow \underbrace{\sum_k m_k \vec{r}_k}_{\cancel{M\vec{R}}} = \cancel{M\vec{R}} + \sum_k m_k \vec{r}\,'_k \Rightarrow \boxed{\sum_k m_k \vec{r}\,'_k = 0}$$

$$\boxed{\sum_k m_k \dot{\vec{r}}\,'_k = 0}$$

$$T = \sum_k \frac{m_k}{2} |\dot{\vec{r}}_k|^2 = \sum_k \frac{m_k}{2}\left[|\dot{\vec{R}}|^2 + |\dot{\vec{r}}\,'_k|^2 + \cancel{2\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}\,'_k} \right]$$

O ÚLTIMO TERMO É:

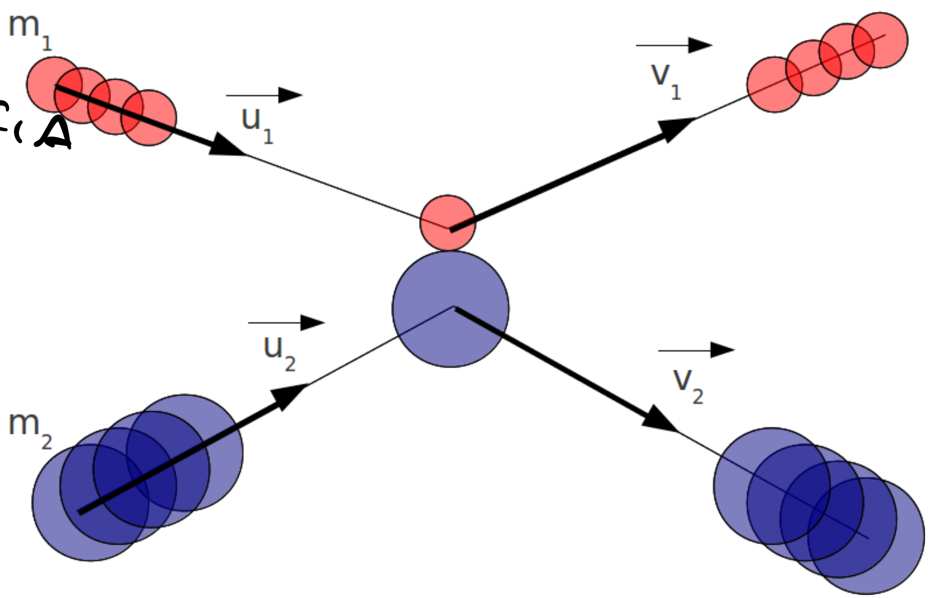
$$\sum_k m_k \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}'_k = \dot{\vec{R}} \cdot \left[\cancelto{0}{\sum_k m_k \dot{\vec{r}}'_k} \right] = 0$$

$$\Rightarrow T = \underbrace{\frac{M}{2} |\dot{\vec{R}}|^2}_{\text{ASSOCIADO AO MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA}} + \underbrace{\sum_k \frac{m_k}{2} |\dot{\vec{r}}'_k|^2}_{\text{MOVIMENTOS INTERNOS EM RELAÇÃO AO C.M.}}$$

ANALOGAMENTE PARA O MOM. ANGULAR (VER NOTAS)

$$\vec{L} = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_k m_k \vec{r}'_k \times \dot{\vec{r}}'_k$$

Colisões elásticas



SE NÃO HÁ TRANSFERÊNCIA DE ENERGIA PARA GRAUS DE LIBERDADE INTERNOS DAS PARTÍCULAS, A COLISÃO É ELÁSTICA:

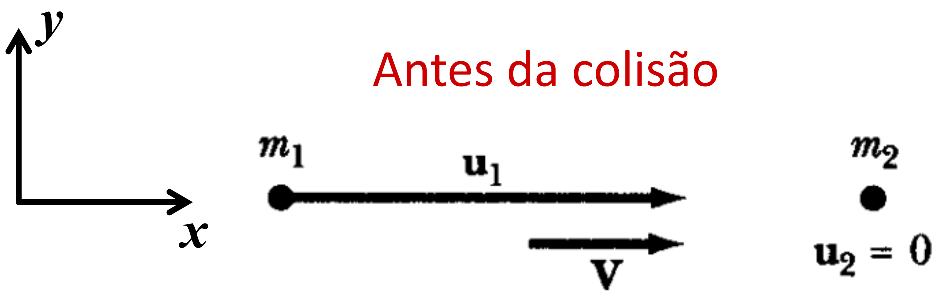
$T + V = \text{CONST.}$

NO PASSADO E FUTURO REMOTOS AS PARTÍCULAS ESTÃO INFINITAMENTE AFASTADAS $\Rightarrow V \to 0$

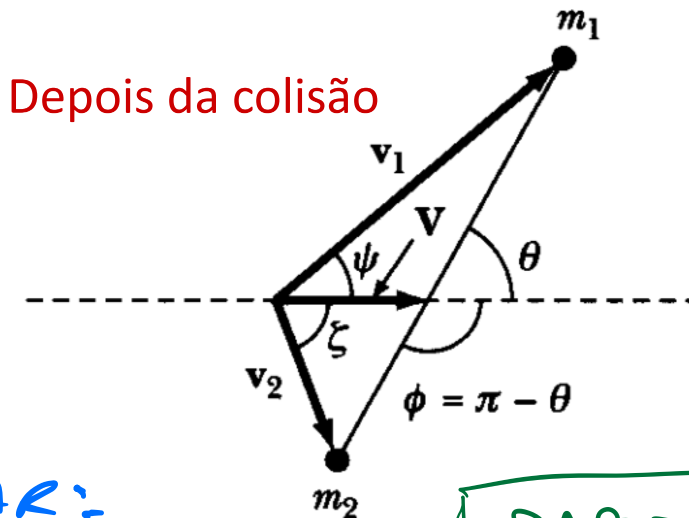
$$T_i(\underbrace{\text{PASSADO REMOTO}}_{t \to -\infty}) = T_f(\underbrace{\text{FUTURO REMOTO}}_{t \to +\infty})$$

Colisões elásticas de 2 partículas: referencial do laboratório (LAB)

Antes da colisão



Depois da colisão



CONS. DE MOMENTO LINEAR:

x: $m_1 u_1 = m_1 v_1 \cos\psi + m_2 v_2 \cos\zeta$

y: $0 = m_1 v_1 \sin\psi - m_2 v_2 \sin\zeta$

CONS. DE EN. CINÉTICA (ELÁSTICA):

$$\frac{m_1}{\cancel{2}} u_1^2 = \frac{m_2}{\cancel{2}} v_2^2 + \frac{m_1}{\cancel{2}} v_1^2$$

DADOS: m_1, m_2, u_1

INCÓGNITAS: v_1, v_2, ψ, ζ

3 EQUAÇÕES

SISTEMA SUB-DETERMINADO