F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

26/03/2024

Aula 7

Aula passada

$$M\dot{\vec{R}} = \sum_k m_k \vec{v}_k$$

Momento linear: $\dfrac{d\left(\sum_k \mathbf{p}_k\right)}{dt} = \dfrac{d\left(M\dot{\mathbf{R}}\right)}{dt} = \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}$

$$\boxed{\text{se } \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{P} = \text{const.}}$$

Momento angular (em relação a um ponto Q): $\mathbf{L}_Q = \sum_k m_k \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_Q\right) \times \left(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_Q\right)$

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \sum_k \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_Q\right) \times \mathbf{F}_k - M\left(\mathbf{R} - \mathbf{r}_Q\right) \times \ddot{\mathbf{r}}_Q$$

1. O segundo termo se anula se o ponto Q é a origem de um referencial inercial.
2. O segundo termo se anula se o ponto Q é o centro de massa.

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \sum_k \left(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_Q\right) \times \mathbf{F}_k = \mathbf{N}_Q$$

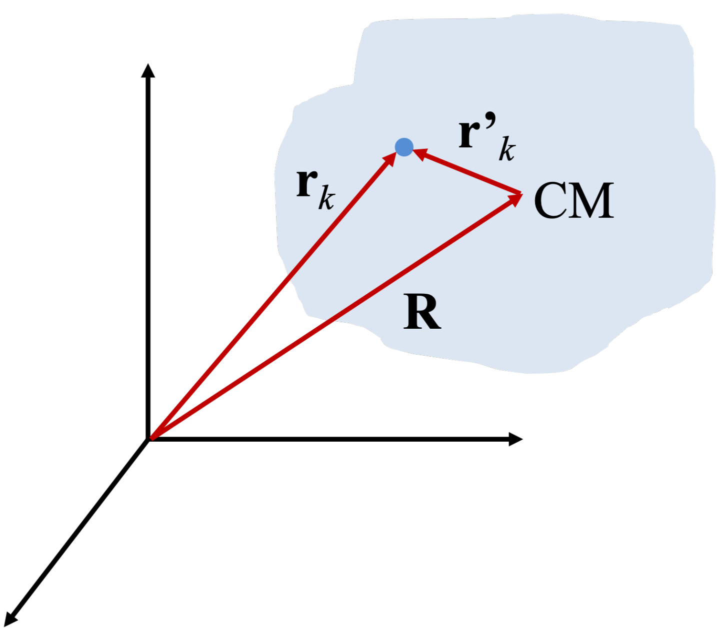
$$\boxed{\text{se } \mathbf{N}_Q = 0 \Rightarrow \mathbf{L}_Q = \text{const.}}$$

Aula passada

Energia mecânica total: se o as forças são conservativas

$$\mathbf{F}_k = -\boldsymbol{\nabla}_k V\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N\right) \Rightarrow \boxed{\sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2 + V = \text{const.}}$$

A energia cinética e o momento angular totais podem ser escritos como a soma de uma contribuição devido ao movimento do centro de massa e outra contribuição devido ao movimento das partículas em relação ao centro de massa.



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \sum_k \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{r}}_k'^2 \\ \mathbf{L} &= M \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} + \sum_k m_k \mathbf{r}_k' \times \dot{\mathbf{r}}_k' \end{aligned}$$

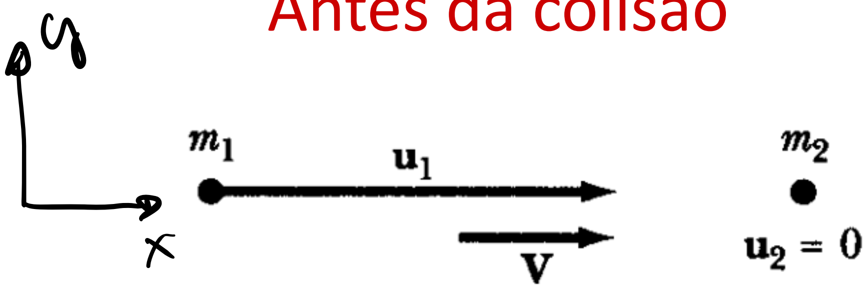
$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$$

Aula passada

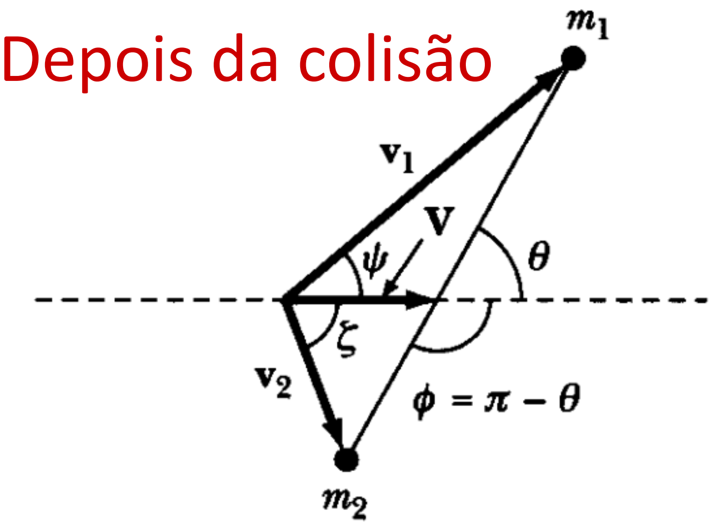
Colisões elásticas: não há mudança na energia interna das partículas antes e depois da colisão. Logo, a energia cinética total antes e depois da colisão são as mesmas (já que a energia potencial vai a zero quando as partículas se afastam):

⇒ conservação da energia cinética total e do momento linear total.

Antes da colisão



Depois da colisão



Conservação do momento linear:

$$
\begin{aligned}
m_1 u_1 &= m_1 v_1 \cos\psi + m_2 v_2 \cos\zeta \quad (1) \\
0 &= m_1 v_1 \sin\psi - m_2 v_2 \sin\zeta \quad (2)
\end{aligned}
$$

Conservação da energia cinética:

$$
\frac{m_1}{\cancel{2}} u_1^2 = \frac{m_1}{\cancel{2}} v_1^2 + \frac{m_2}{\cancel{2}} v_2^2 \quad (3)
$$

Se m_1, m_2 e u_1 são conhecidos, temos 4 variáveis (v_1, v_2, ψ, ζ) e 3 equações: sistema sub-determinado.

$(1)^2: m_2^2 v_2^2 \cos^2\xi = (m_1 u_1 - m_1 v_1 \cos\psi)^2$

$(2)^2: m_2^2 v_2^2 \sin^2\xi = m_1^2 v_1^2 \sin^2\psi$

$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow m_2^2 v_2^2 = m_1^2 v_1^2 \sin^2\psi + (m_1 u_1 - m_1 v_1 \cos\psi)^2 \quad (4)$

USANDO (3) E (4), ELIMINO OU v_1 OU v_2 EM TERMOS DE ψ:

$T_0 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \quad ; \quad T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad ; \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$\Rightarrow T_0 = T_1 + T_2 \Rightarrow 1 = \frac{T_1}{T_0} + \frac{T_2}{T_0}$

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^2 = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left[\cos\psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\psi}\right]^2$$

$$\frac{T_2}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 u_1^2} = 1 - (\quad)$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{v_1^2}{u_1^2} = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left[\cos\psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\psi}\right]^2$$

Se $m_1 < m_2$, apenas o sinal positivo acima dá uma solução física.

Se $m_1 > m_2$, ambos os sinais são possíveis: há dois valores possíveis de energia cinética final correspondendo ao mesmo ângulo ψ.

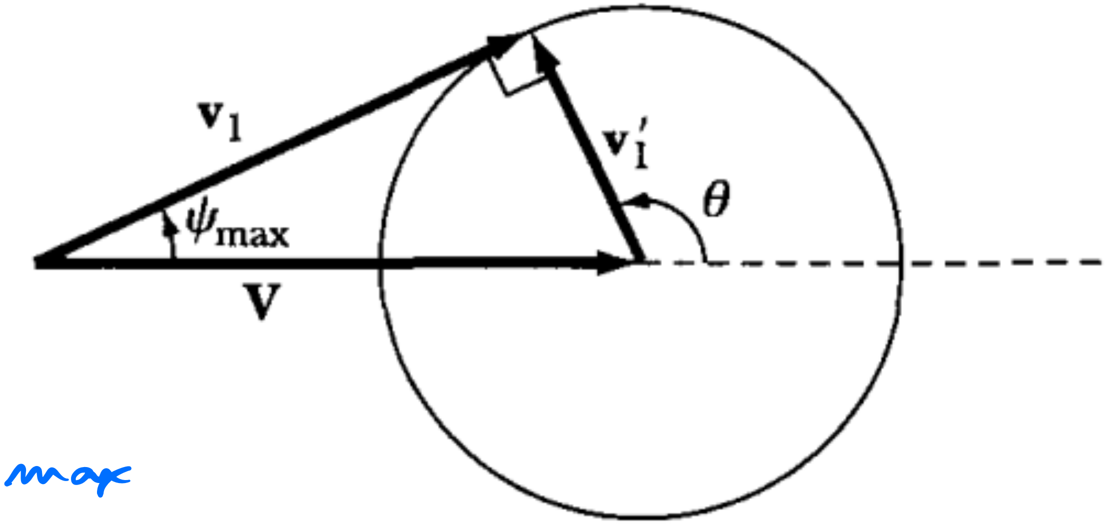
- O maior valor de T_1 corresponde a uma colisão mais “de raspão” e o menor valor de T_1 corresponde a uma colisão mais frontal.
- Os ângulos ζ são diferentes em cada caso.

$$\frac{T_2}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\cos^2\zeta$$

Ângulo ψ máximo ($m_1 > m_2$)

A SOLUÇÃO $\frac{T_1}{T_0}$ DEPENDE DE

$$\sqrt{\underbrace{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)}_{<1}^2 - \sin^2\psi}$$



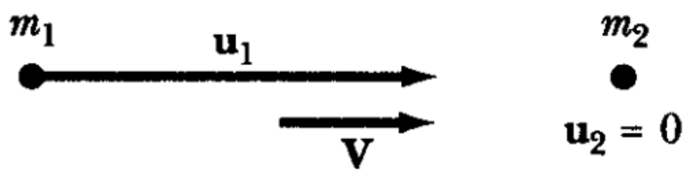
$$\Rightarrow \sin\psi \le \frac{m_2}{m_1} = \sin\psi_{max}$$

$$\psi \le \psi_{max} = \arcsin\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$$

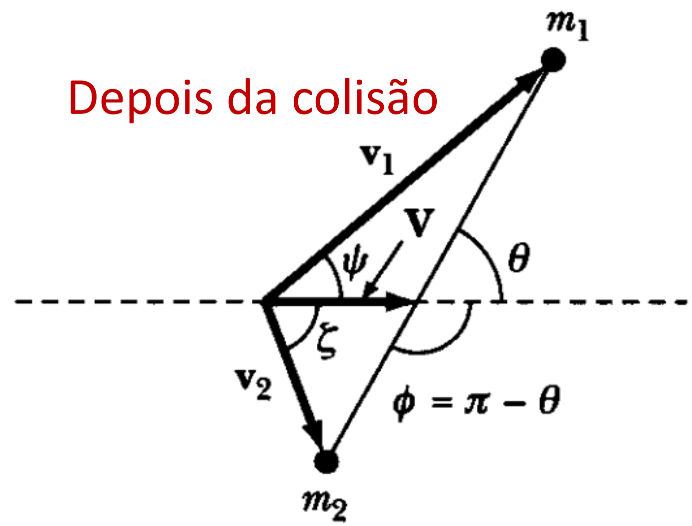
SE $m_1 = m_2 \Rightarrow \boxed{\psi_{max} = \frac{\pi}{2}}$

Colisões elásticas (LAB)

Antes da colisão



Depois da colisão



$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$T_0 = T_1 + T_2$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} \left[\cos\psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\psi} \right]^2$$

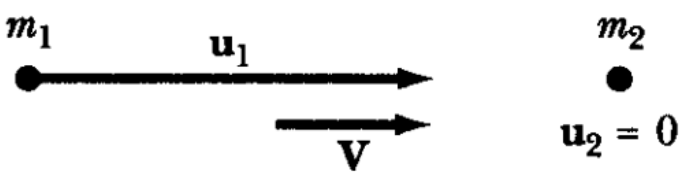
$$\frac{T_2}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} \cos^2\zeta$$

SE $m_1 > m_2 \Rightarrow T_1$ PODE ASSUMIR 2 VALORES

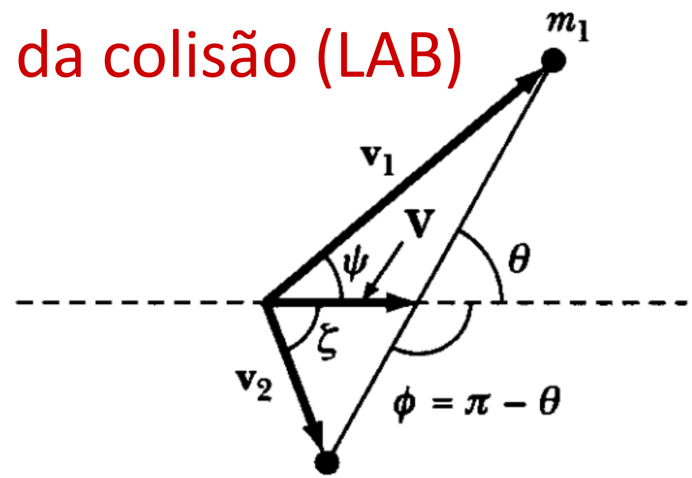
$m_1 < m_2 \Rightarrow T_1$ SÓ COM O SINAL (+)

Referenciais do CM e do LAB

Antes da colisão (LAB)



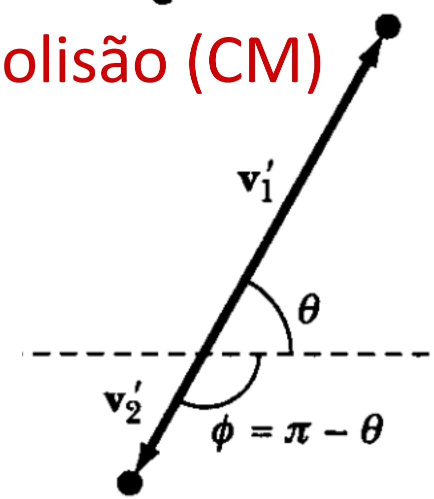
Depois da colisão (LAB)



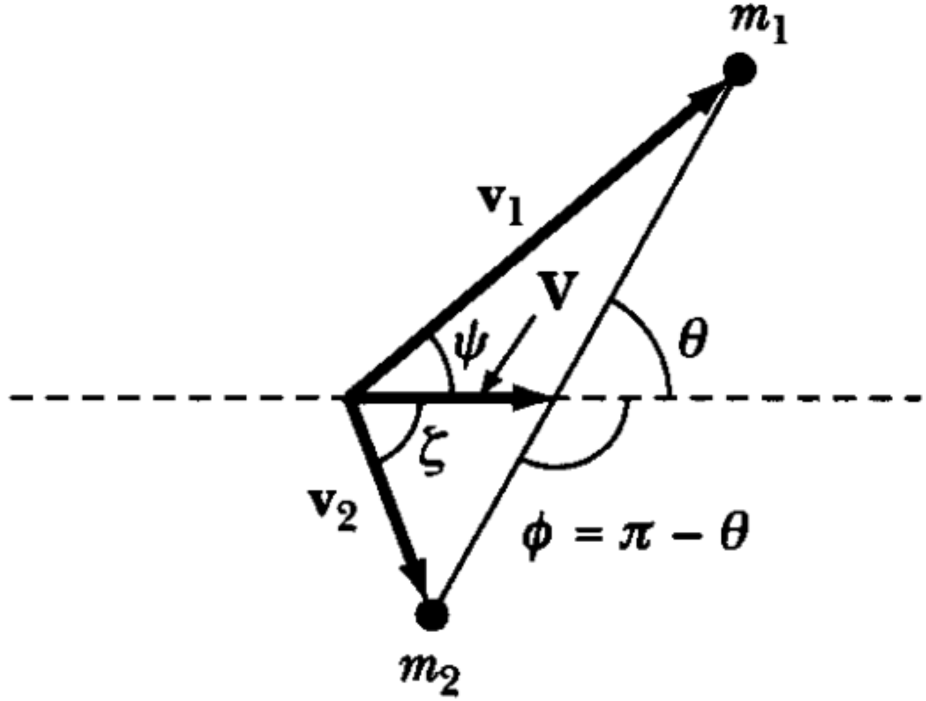
Antes da colisão (CM)

$\vec{P} = \mu \dot{\vec{R}} = 0$

Depois da colisão (CM)



$\vec{P} = \mu \dot{\vec{R}} = 0$



$$
\begin{aligned}
\tan\psi &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2} \\
2\zeta &= \pi - \theta = \phi
\end{aligned}
$$

Outras relações úteis

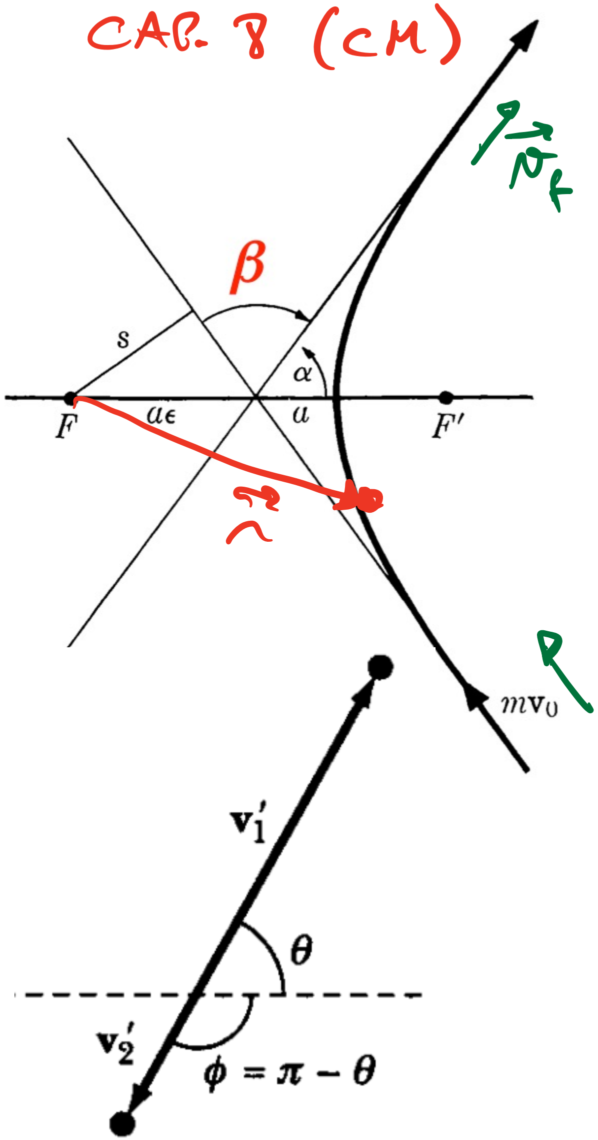
$$\sin\zeta \quad = \quad \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}\sin\psi = \sqrt{\frac{m_1 T_1}{m_2 T_2}}\sin\psi$$

(LAB)

$$\tan\psi \quad = \quad = \frac{\sin 2\zeta}{(m_1/m_2) - \cos 2\zeta} = \frac{\sin\phi}{(m_1/m_2) - \cos\phi}$$

Relação entre a deflexão calculada no problema de 2 corpos (cap. 8) e θ

CAP. 8 (CM)



$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{v}_1 = \dot{\boldsymbol{R}} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}$$

$$\xRightarrow{\frac{d}{dt}}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}$$

NO CM: $\dot{\vec{R}} = 0$:

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}$$

1) $\vec{v}_1$ E $\vec{v}_2$ TÊM SENTIDOS OPOSTOS

2) $\vec{v}_1 \parallel \dot{\vec{r}} = \vec{v}$

A VELOCIDADE RELATIVA $\vec{v}$ FOI DEFLETIDA DE β

MAS, COMO $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}$, A PARTÍCULA 1,

NO CM, TAMBÉM FOI DEFLETIDA DE β:

$\theta = \beta$

Alguns casos particulares

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2}$$
$$2\zeta = \pi - \theta = \phi$$

(i) SE $m_1 << m_2$:

$$\tan\psi \simeq \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \Rightarrow \psi \simeq \theta$$

(ii) SE $\boxed{m_1 = m_2:}$

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\cancel{2}\sin\theta/2\,\cancel{\cos\theta/2}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\theta/2}$$

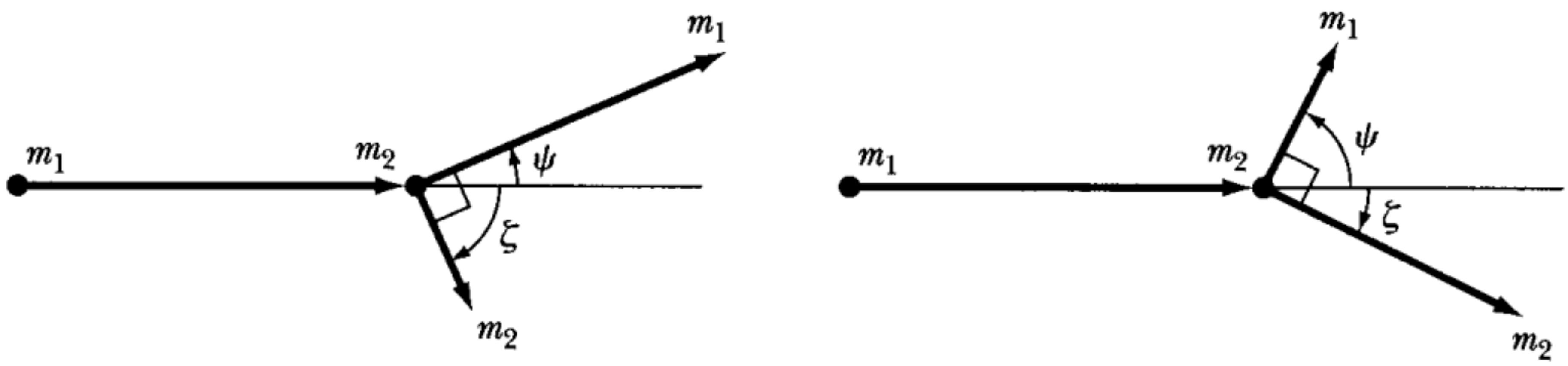
$$= \tan\frac{\theta}{2} \Rightarrow \boxed{\psi = \frac{\theta}{2}}$$

$$2\psi = \theta$$
$$2\zeta = \pi - \theta$$

(+)

$$2(\psi + \zeta) = \pi \Rightarrow \boxed{\psi + \zeta = \frac{\pi}{2}}$$

Se $m_1 = m_2$ as velocidades finais são perpendiculares.



Realidade

Analysis of billiard ball collisions in 2D, R. E. Wallace and M. C. Schroeder, Am. J. Phys. **56**, 815 (1988)

Rotação das bolas e atrito com a mesa modifica a análise

A: ψ

B: ζ

C: $\psi+\zeta\,(=90^{\circ}\,??)$

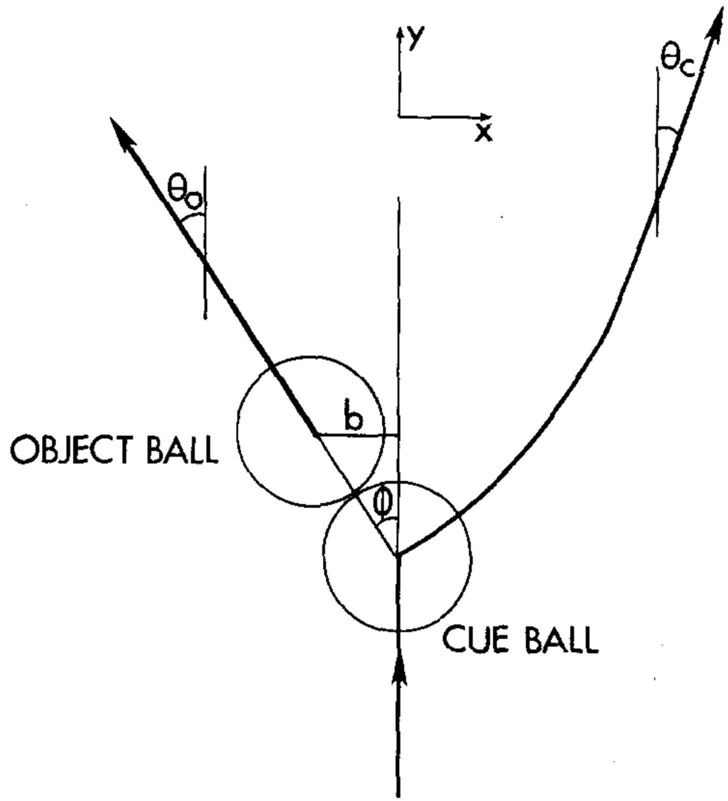


Fig. 1. Cue ball and object ball at the moment of contact, with the quantities b, ϕ, θ_o, and θ_c shown. Heavy lines represent the paths of the balls. (θ_o and ϕ are not initially assumed to be the same; this is proven in the text.)

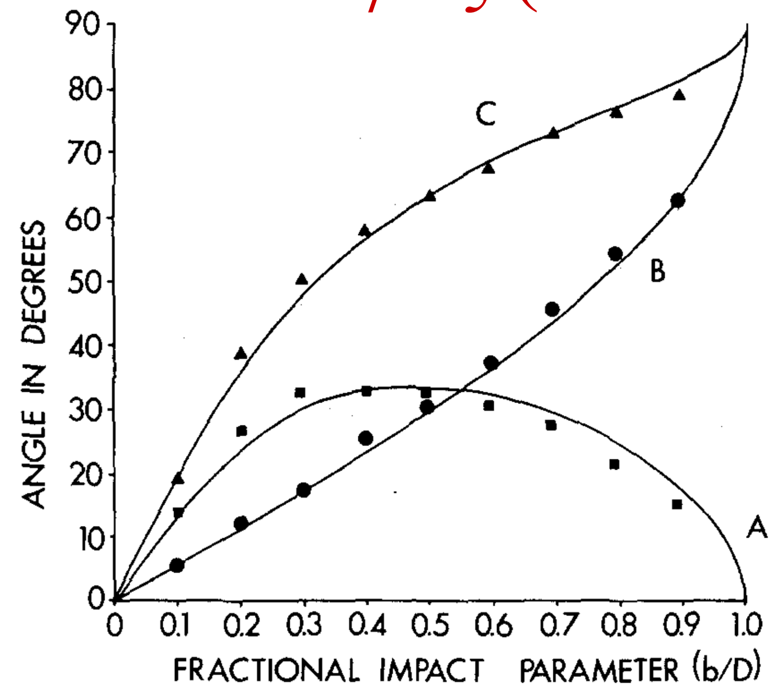


Fig. 3. Plot of theoretical predictions for cue ball angle θ_c (A), object ball angle θ_o (B), and the sum $\theta_c+\theta_o$ (C) versus the fractional impact parameter b/D. The experimental data are represented by ■, ●, and ▲ for θ_c, θ_o, and $\theta_c+\theta_o$, respectively.

Colisões inelásticas

SÃO TAIS QUE: $T_f - T_i = Q \neq 0$

$Q < 0$: COLISÃO ENDOENERGÉTICA (PERDAS POR DISSIPAÇÃO)

$Q > 0$: COLISÃO EXOENERGÉTICA (EXPLOSÃO)

PORÉM, O MOMENTO LINEAR TOTAL É CONSERVADO !!

A NÃO SER QUE $\underline{Q}$ SEJA CONHECIDO, HÁ UMA EQUAÇÃO A MENOS PARA A ANÁLISE.

Colisões 1D: coeficiente de restituição

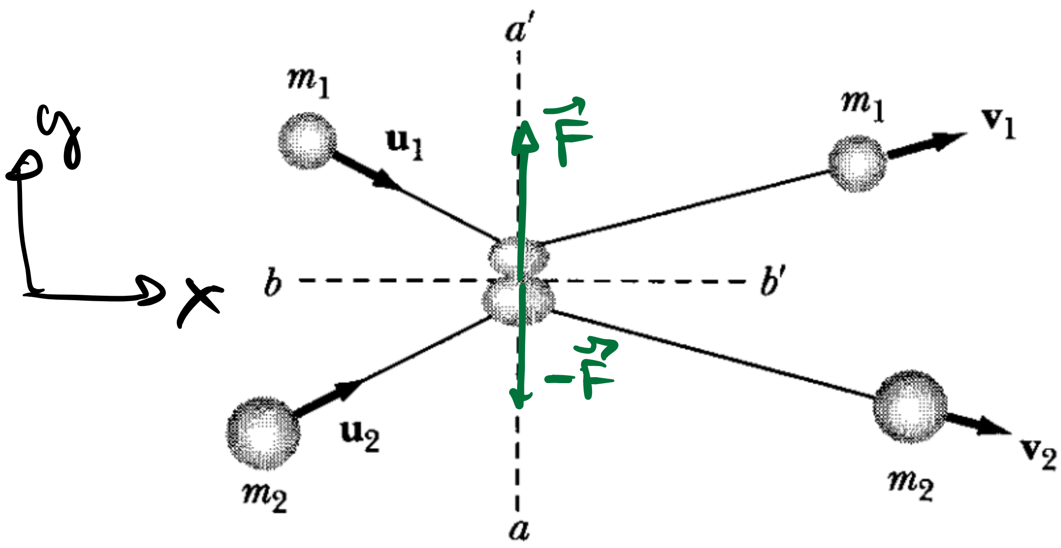
NEWTON (EMPÍRICA): AS VELOCIDADES RELATIVAS DAS PARTÍCULAS É APROXIMADAMENTE CONSTANTE E DEPENDE SÓ DAS PARTÍCULAS:

$$\varepsilon = \frac{|v_2 - v_1|}{|u_2 - u_1|}$$

SE A COLISÃO É TOTALMENTE INELÁSTICA (AS PARTÍCULAS "GRUDAM" UMA NA OUTRA NA COLISÃO): $\varepsilon = 0$

NUMA COLISÃO ELÁSTICA: $\varepsilon = 1$

DE MANEIRA GERAL: $0 \leq \varepsilon \leq 1$



INTERAÇÃO NORMAL DE CONTATO:

SÓ HÁ FORÇAS NA DIREÇÃO y

NA DIREÇÃO x, AS VELOCIDADES NÃO MUDAM:

$$\begin{cases} u_{2x} = v_{2x} \\ u_{1x} = v_{1x} \end{cases}$$

NA DIREÇÃO y, PODE-SE USAR O COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO $\underline{\varepsilon}$

Calcule a perda de energia mecânica $-Q$ em uma colisão frontal entre uma partícula de massa m_1 e velocidade u_1 e uma partícula de massa m_2 inicialmente em repouso, se o coeficiente de restituição é ε.

UMA DIMENSÃO: $m_1 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$

$Q = T_f - T_i \Longrightarrow \quad Q + \frac{m_1}{2} u_1^2 = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 \quad (2)$

$\varepsilon = \frac{|v_2 - v_1|}{u_1} \quad (3) \Rightarrow \varepsilon u_1 = v_2 - v_1 = \frac{m_1}{m_2}(u_1 - v_1) - v_1 \quad (3')$

DE (1): $v_2 = \frac{m_1}{m_2}(u_1 - v_1)$ LEVO EM (2) E (3)

(2): $-Q = \frac{1}{2}\left[m_1(u_1^2 - v_1^2) - m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2}(u_1 - v_1)^2\right] \quad (4)$

USO (3') PARA ELIMINAR v_1 EM (4): $T_0 = \frac{m_1}{2} u_1^2$

$-\frac{Q}{T_0} = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - m_1/m_2}$

$\varepsilon = 1$: $Q = 0$ (ELÁSTICA)

$\varepsilon = 0$ (TOTALMENTE INELÁSTICA)

$-\frac{Q}{T_0} = \frac{1}{1 - m_1/m_2}$