F 415 – Mecânica Geral II

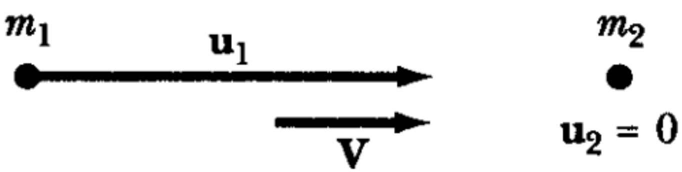
1º semestre de 2024

04/04/2024

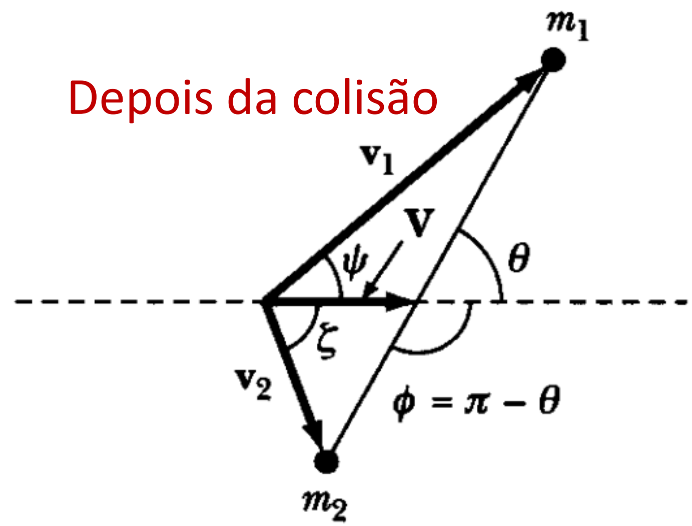
Aula 8

Aula passada: colisões elásticas

Antes da colisão



Depois da colisão



$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

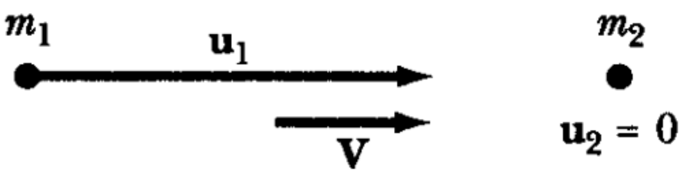
$$T_0 = T_1 + T_2$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left[\cos\psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\psi}\right]^2$$

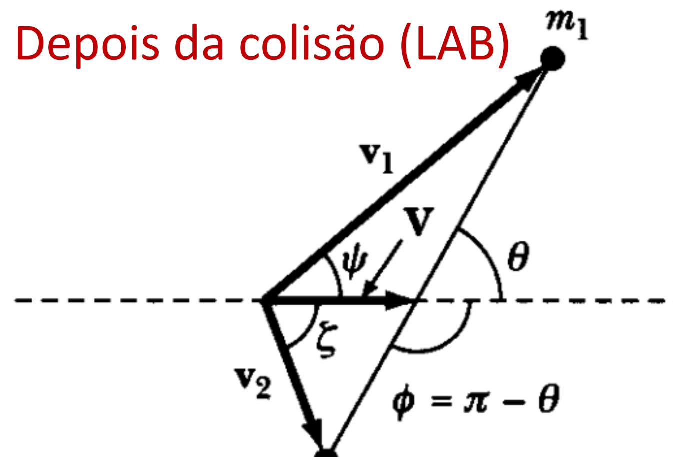
$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\cos^2\zeta$$

Aula passada: referenciais do CM e do LAB

Antes da colisão (LAB)

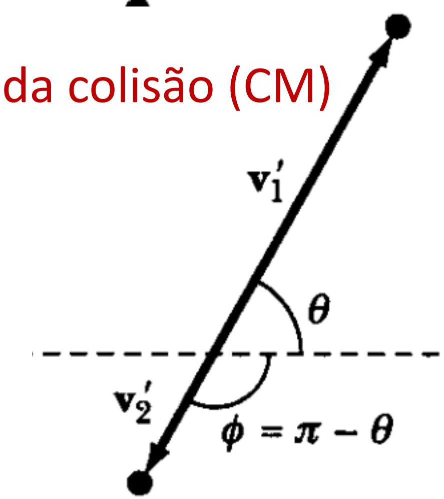


Depois da colisão (LAB)



Antes da colisão (CM)

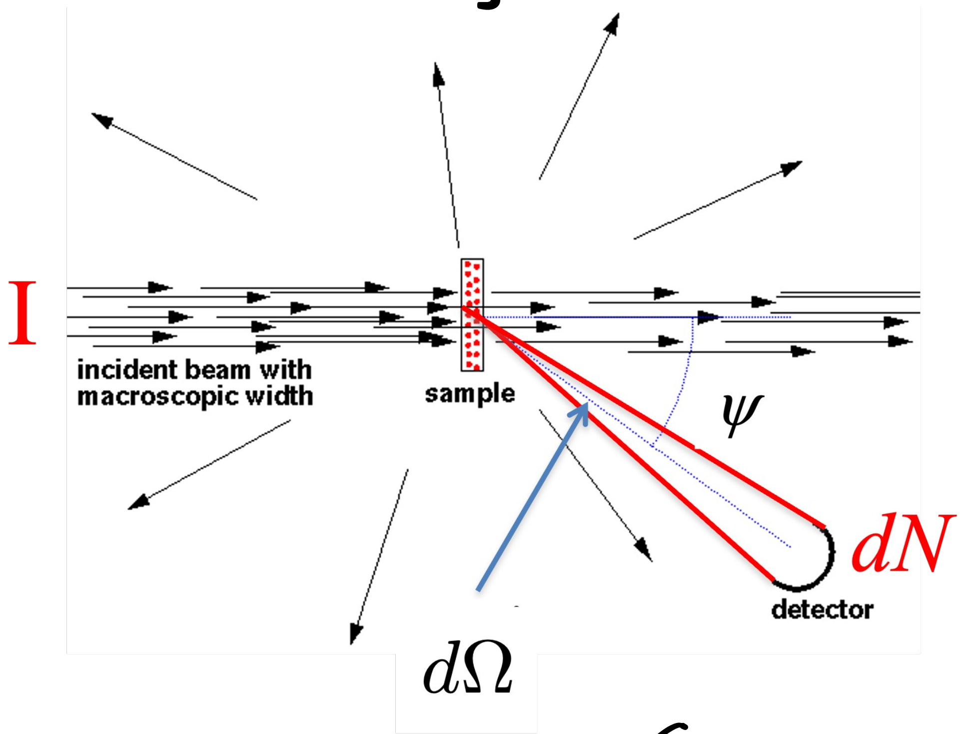
Depois da colisão (CM)



$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2}$$

$$2\zeta = \pi - \theta = \phi$$

Seção de choque no LAB



$$\frac{dN}{I} = \tilde{\sigma}(\psi)\, d\Omega$$

$$dN = \sigma I \, d\Omega$$

$$\boxed{\tilde{\sigma}(\psi) = \frac{dN}{I\, d\Omega}}$$

$$[d\Omega] = 1$$

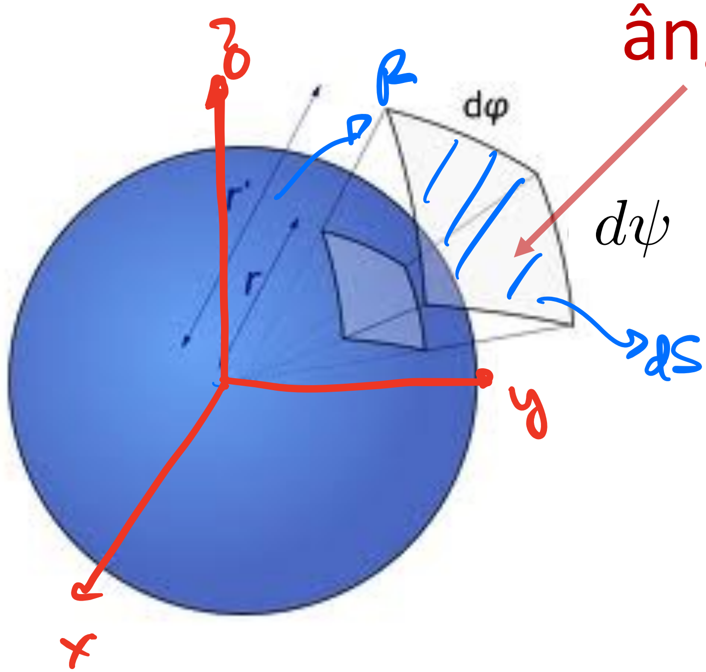
$$[\tilde{\sigma}(\psi)] = \frac{1}{\cancel{T}} \frac{L^2 \cancel{T}}{1} = L^2$$

dN = # DE PARTÍCULAS DETECTADAS POR UNIDADE DE TEMPO $\quad [dN] = \frac{1}{T}$

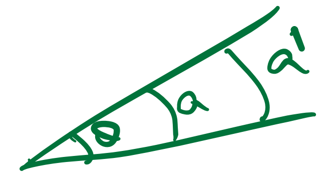
I = NÚMERO DE PARTÍCULAS NO FEIXE INCIDENTE POR UNIDADE DE TEMPO, POR UNIDADE DE ÁREA TRANSVERSAL $\quad [I] = \frac{1}{L^2 T}$

Ângulo sólido: definição

ângulo sólido $d\Omega$



$$\boxed{d\Omega = dS/R^2}$$



$$\theta = \frac{a}{R} = \frac{a'}{R'}$$

$$dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

PARA POTENCIAIS CENTRAIS DESAPARECE A DEPENDÊNCIA COM ϕ:

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \, \sin\theta \, d\theta = 2\pi \sin\theta \, d\theta$$

Transformando do LAB para o CM

A análise é mais fácil no CM, então é melhor calcular no CM e transformar depois pro LAB.

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2}$$

SEÇÃO DE CHOQUE NO CM DE $\sigma(\theta)$ ENTÃO:

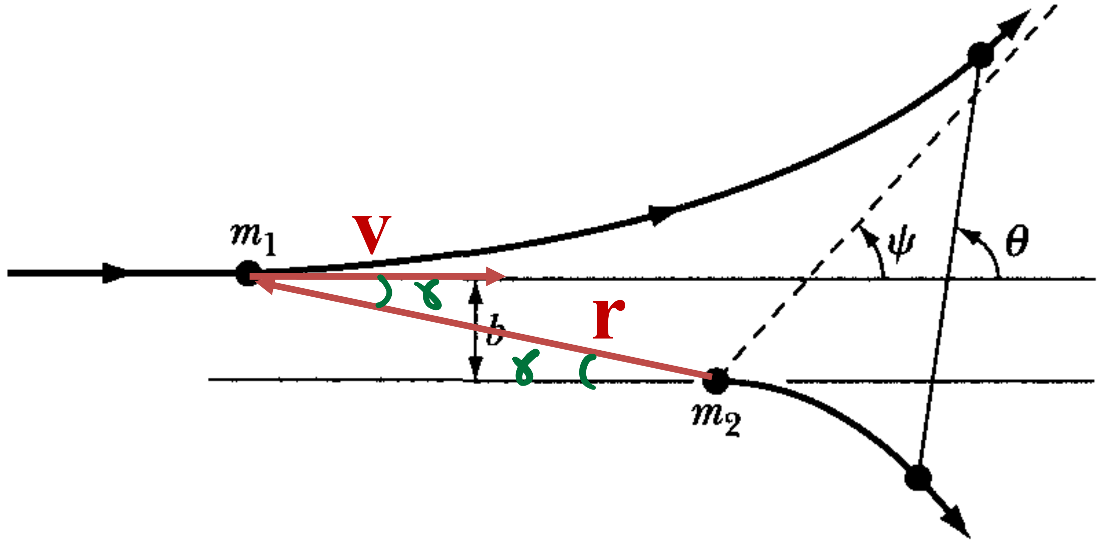
$$\frac{dN}{I} = \sigma(\theta) \underbrace{2\pi \sin\theta \, d\theta}_{d\Omega} = \tilde{\sigma}(\psi) \underbrace{2\pi \sin\psi \, d\psi}_{d\Omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{\sigma}(\psi) = \sigma(\theta) \frac{\sin\theta}{\sin\psi} \frac{d\theta}{d\psi}}$$

Parâmetro de impacto

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2$$



Para o problema efetivo de uma partícula (referencial do CM):

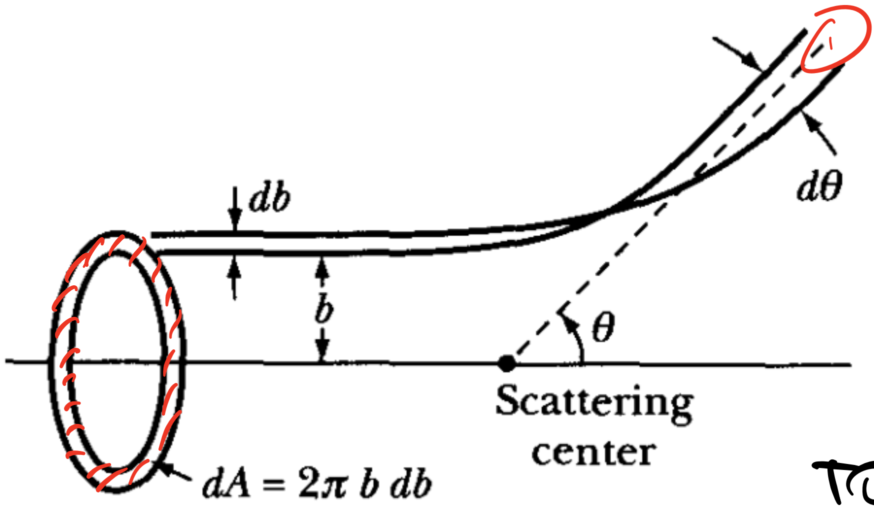
$$\vec{\ell} = \mu\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \Rightarrow |\vec{\ell}| = \ell = \mu |\vec{r} \times \vec{v}| = \mu v \underbrace{r \sin\gamma}_{b} = \mu b v$$

b = PARÂMETRO DE IMPACTO

b DETERMINA A QUANTIDADE CONSERVADA $\underline{\ell}$

ALÉM DISSO: $E = \frac{\mu}{2} v^2$ (OUTRA QUANTIDADE CONSERVADA)

Seção de choque no CM em termos do parâmetro de impacto $b(\theta)$



PARA θ DADA E FIXA, O VALOR DE $\underline{b}$ DETERMINA A DEFLEXÃO TOTAL $\underline{\theta}$ E VICE-VERSA: $b(\theta)$

TODAS AS PARTÍCULAS QUE ATRAVESSAM O ÂNULO DE ÁREA $2\pi b\,db = dA$ SÃO DEFLETIDAS ENTRE θ E $\theta + d\theta$

$$dN = I \times dA = I\, 2\pi b\, db = I\, \sigma(\theta)\, d\Omega = I\, \sigma(\theta)\, 2\pi \sin\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{2\pi} b\, db = \cancel{2\pi}\, \sigma(\theta) \sin\theta\, d\theta \Rightarrow \boxed{\sigma(\theta) = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|}$$

Espalhamento de Rutherford no CM

$$\boxed{U(r) = \frac{k}{r}, \quad k = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0}} \qquad E = \frac{\mu}{2}v^2 \qquad \ell = \mu b v$$

Como vimos: $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\mu k^2}{2\ell^2 E}} = \sqrt{\frac{\cancel{\mu} k^2}{\cancel{\mu} v^2}\frac{1}{\mu^2 b^2 v^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{\mu^2 b^2 v^4}}$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{k}{\mu b v^2} = \frac{k}{2E\, b(\theta)} \Rightarrow \boxed{b(\theta) = \frac{k}{2E}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\sigma(\theta) = \frac{b(\theta)\,|b'(\theta)|}{\sin\theta} = \boxed{\frac{k^2}{E^2}\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \sigma_{RUTH}(\theta)}$$

Espalhamento de Rutherford no LAB
$(m_1 = m_2)$

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\cancel{2}\sin\theta/2\,\cancel{\cos\theta/2}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\theta/2} = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \frac{\theta}{2}} \qquad \mu = \frac{m_1}{2}$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}_{RUTH}(\psi) = 4\cos\psi\,\sigma(\theta = 2\psi) = \boxed{4\cos\psi\,\frac{k^2}{E^2}\,\frac{1}{\sin^4\psi}}$$

$$E = \frac{\mu}{2}v^2 = \frac{m_1}{4}v^2$$

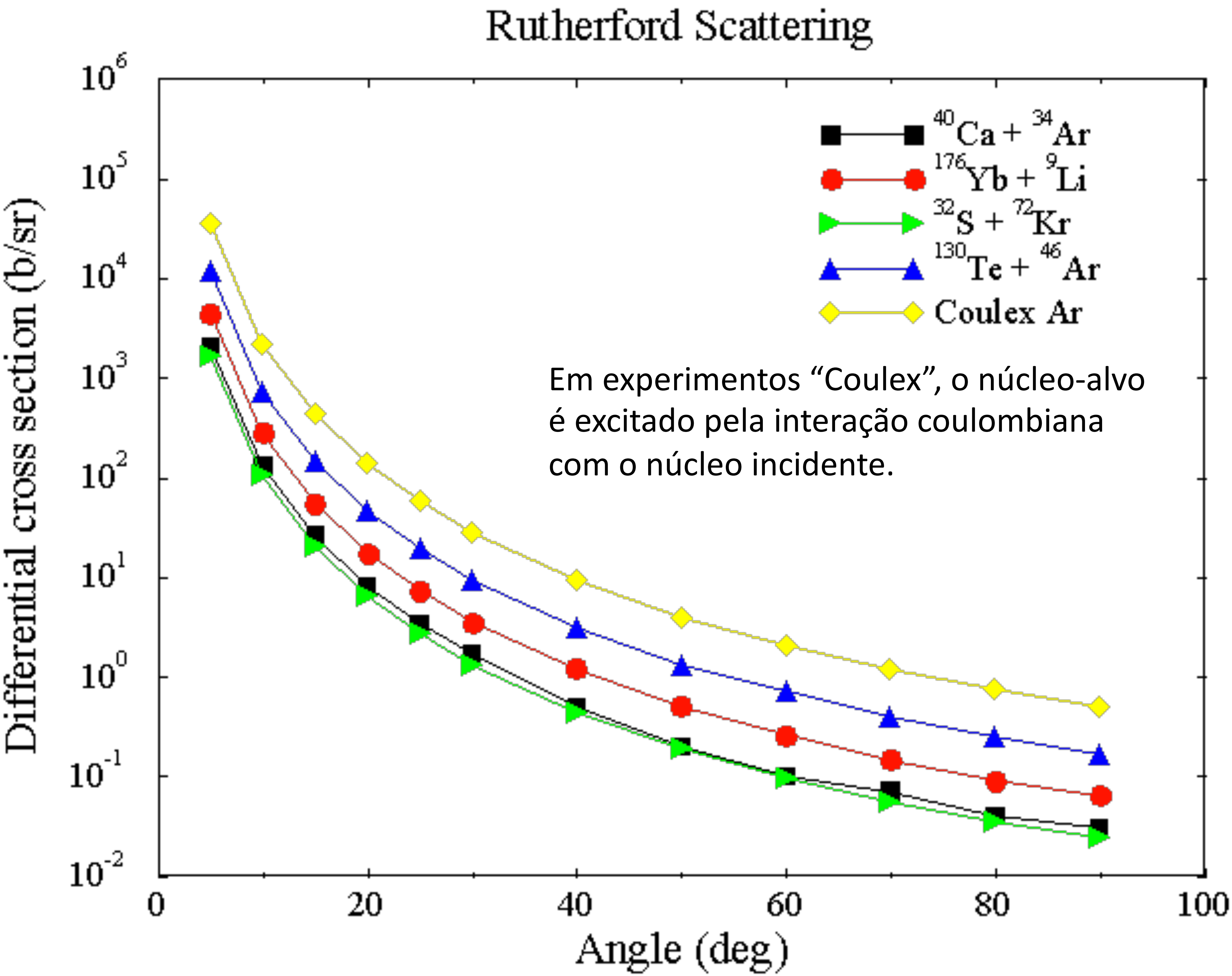
Espalhamento de Rutherford no LAB

$(m_1 \ll m_2)$

$\mu \cong m_1$

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2} \cong \tan\theta \Rightarrow \boxed{\psi \cong \theta}$$

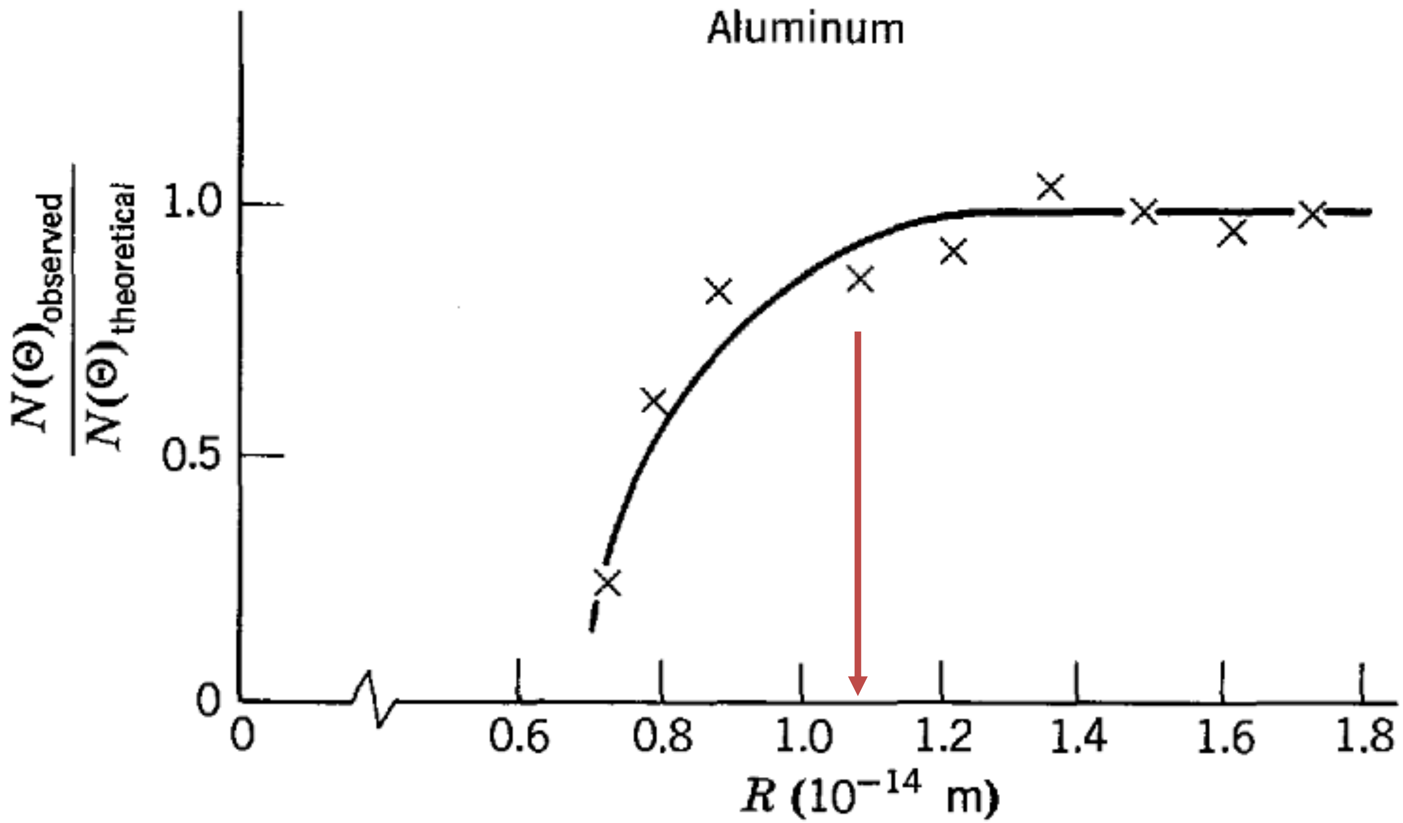
$$\boxed{\tilde{\sigma}_{RUTH}(\psi) = \frac{k^2}{E^2}\frac{1}{\sin^4(\psi/2)} = \frac{4k^2}{m_1^2 v^4}\frac{1}{\sin^4(\psi/2)}}$$



Em experimentos “Coulex”, o núcleo-alvo é excitado pela interação coulombiana com o núcleo incidente.

Desvios da fórmula de Rutherford

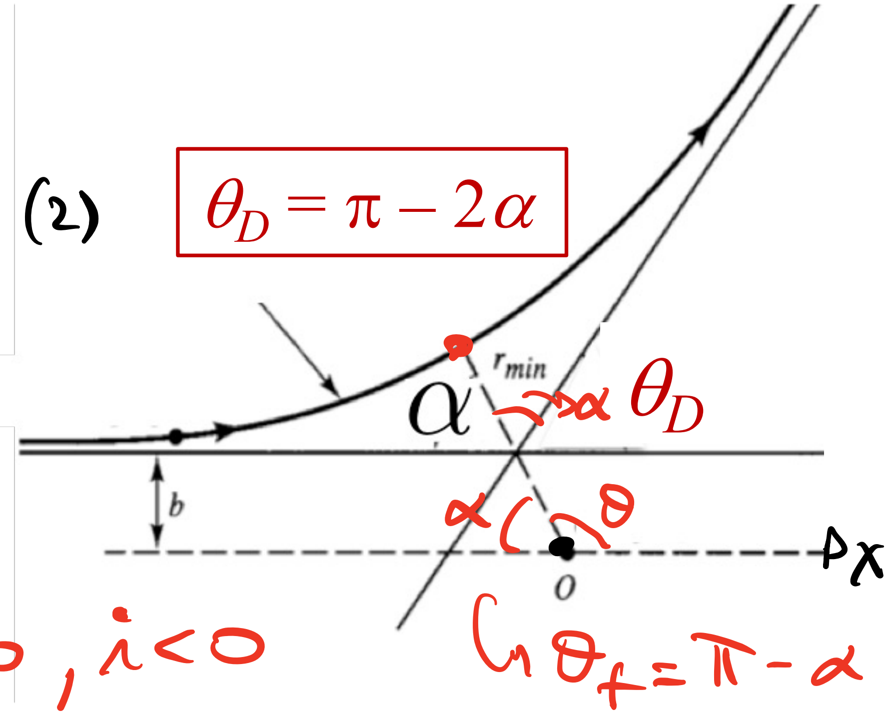
Para grandes ângulos (colisões frontais) e energias tais que o ponto de maior aproximação é bem pequeno, foram observados desvios em relação à previsão da fórmula de Rutherford -> penetração do núcleo atômico; interação através da força nuclear forte.



$b(\theta)$ para um potencial central

$$\ell = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \quad (1)$$

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V(r) = \text{const.} \quad (2)$$



$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{\pm \ell/\mu r^2}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V(r))}}$$

1ª PARTE DA TRAJETÓRIA: $\dot{\theta} < 0$, $\dot{r} < 0$

$$\frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} > 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{\ell/\mu r^2}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V(r))}}$$

INTEGRO $\frac{d\theta}{dr}$ DE $r \to \infty$ ATÉ $r = r_{min}$

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \int_{+\infty}^{r_{min}} \frac{d\theta}{dr}\, dr = \int_{+\infty}^{r_{min}} \frac{\ell/\mu r^2}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V(r))}}\, dr$$

$\theta_f = \pi - \alpha \qquad \theta_i = \pi \qquad \Delta\theta = \theta_f - \theta_i = -\alpha$

$$-\alpha = \int_{+\infty}^{r_{min}} \frac{\ell/\mu r^2}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V(r))}}\, dr$$

$$\frac{\pi - \theta_D}{2} = \alpha = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\ell/\mu r^2}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V(r)]}}\, dr$$

$E = \frac{\mu}{2} v^2$

$\ell = \mu b v$

$V(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r)$

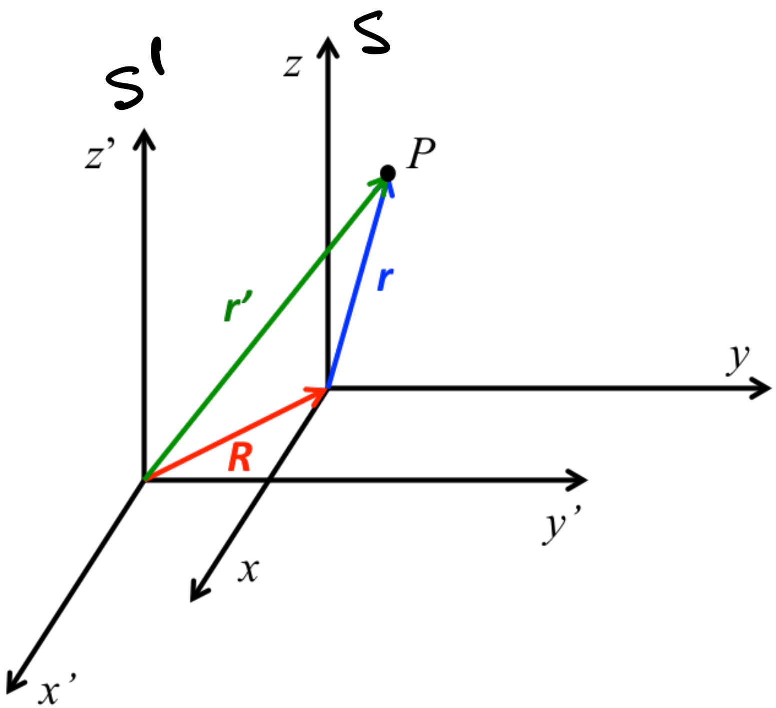
$$\theta_D = \pi - 2\alpha$$

$\to b(\theta_D) \to \sigma(\theta)$

TENTE OBTER O CASO $U(r) = \frac{k}{r}$

Sistemas não inerciais

Sistemas não-inerciais - translações



S': INERCIAL

S: MOVE-SE COM RELAÇÃO A S' MANTENDO OS EIXOS PARALELOS MAS A ORIGEM DE S PODE ESTAR ACELERADA EM RELAÇÃO À ORIGEM DE S'

POSIÇÕES: $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{R}$

VARIAÇÃO TEMPORAL:

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

APLICAR A 2^a LEI NO S':

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

2^a LEI DE NEWTON MODIFICADA PARA O REFERENCIAL NÃO INERCIAL $\underline{S}$. O TERMO ADICIONAL:

$$\vec{F}_{NI} = -m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

SE $\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{NI} = 0$