

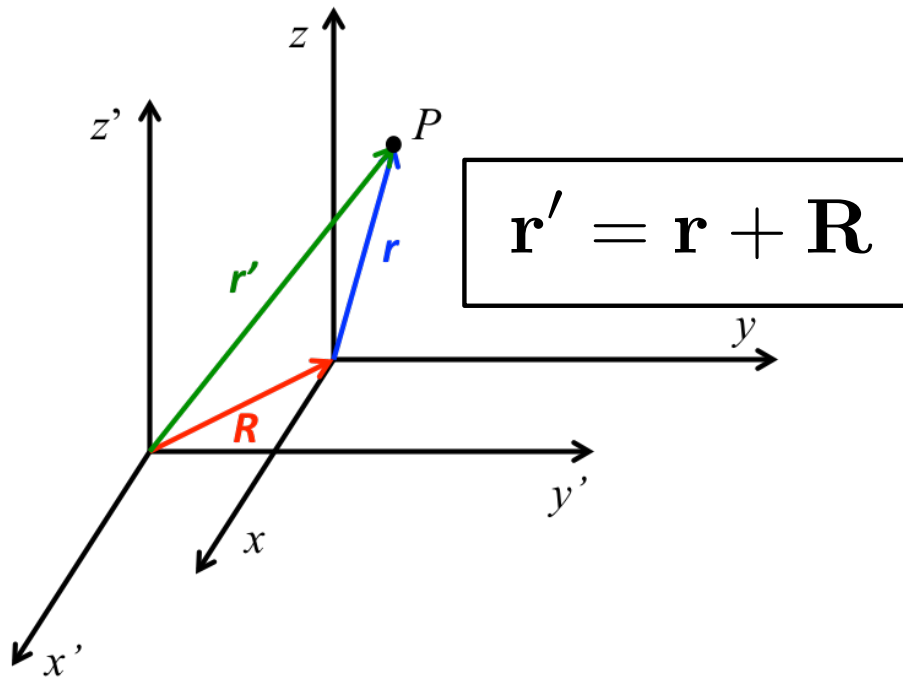
F 415 – Mecânica Geral II

1º semestre de 2024

09/04/2024

Aula 9

Aula passada



S' : referencial inercial

S : referencial qualquer (não inercial em geral)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$$

Aplicando a 2a. Lei de Newton no S' :

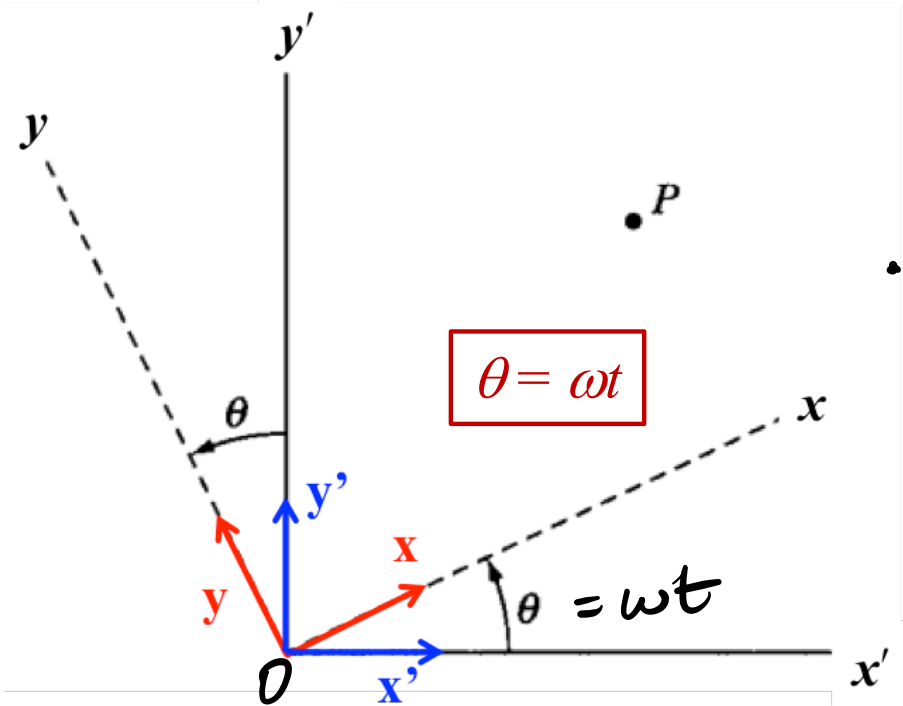
$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right)$$

No referencial não inercial S : $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$

Força não inercial:

$$\mathbf{F}_{NI} = -m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$$

Sistemas não-inerciais - rotações



$$\begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix}$$

- VARIAÇÕES TEMPORAIS DE VETORES DEPENDEM DO SIST. DE REF. EM QUE SÃO MEDIDAS. CONSIDERE $\hat{x}$

$$\text{EM } S': \frac{d'\hat{x}}{dt} \neq 0$$

$$\text{EM } S: \frac{d\hat{x}}{dt} = 0$$

OS SÍMBOLOS $\frac{d'}{dt}$ E $\frac{d}{dt}$ DENOTAM DERIVADAS TEMPORAIS EM S' E S , RESPECTIVAMENTE.

SEJA UM VETOR $\vec{A}(t)$:

$$\vec{A}(t) = a'_x(t) \hat{x}' + a'_y(t) \hat{y}' + a'_z(t) \hat{z}' \quad (\text{EM } S')$$

$$= a_x(t) \hat{x}(t) + a_y(t) \hat{y}(t) + a_z(t) \hat{z}(t) \quad (\text{EM } S') \quad (1)$$

$$\vec{A}(t) = a_x(t) \hat{x} + a_y(t) \hat{y} + a_z(t) \hat{z} \quad (\text{EM } S) \quad (2)$$

DERIVANDO EM RELAÇÃO A t (1) EM S'

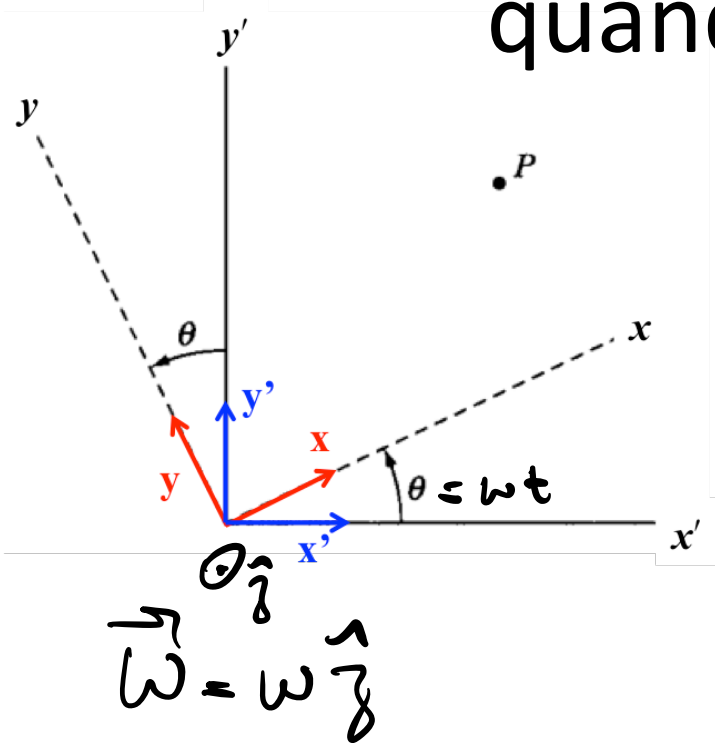
$$\frac{d'\vec{A}(t)}{dt} = \dot{a}_x(t) \hat{x}(t) + \dot{a}_y(t) \hat{y}(t) + \dot{a}_z(t) \hat{z}(t) + a_x(t) \frac{d'\hat{x}(t)}{dt} + a_y(t) \frac{d'\hat{y}(t)}{dt} + a_z(t) \frac{d'\hat{z}(t)}{dt}$$

DERIVANDO EM RELAÇÃO A t (2) EM S :

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \dot{a}_x(t) \hat{x} + \dot{a}_y(t) \hat{y} + \dot{a}_z(t) \hat{z}$$

$$\frac{d'\vec{A}(t)}{dt} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} + a_x(t) \frac{d'\hat{x}}{dt} + a_y(t) \frac{d'\hat{y}}{dt} + a_z(t) \frac{d'\hat{z}}{dt}$$

Taxa de variação dos versores do S quando observados do S'



$$\begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}(t) = \cos \omega t \hat{x}' + \sin \omega t \hat{y}'$$

$$\hat{y}(t) = -\sin \omega t \hat{x}' + \cos \omega t \hat{y}'$$

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \omega [-\sin \omega t \hat{x}' + \cos \omega t \hat{y}']$$

$$= \omega \hat{y}(t)$$

$$\frac{d\hat{y}(t)}{dt} = \omega [-\cos \omega t \hat{x}' - \sin \omega t \hat{y}'] = -\omega \hat{x}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}(t) \quad \text{e} \quad \frac{d\hat{y}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{y}(t)$$

DE MANEIRA GERAL, EM 3D, :

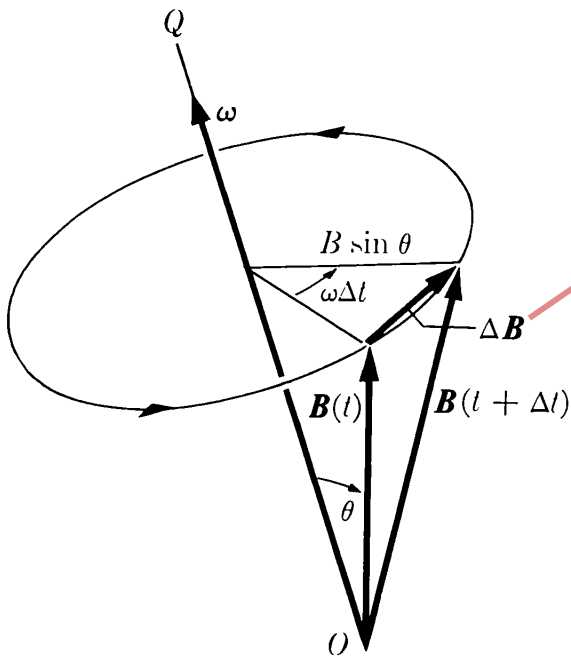
$$\frac{d\hat{z}(t)}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{z}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d'\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + a_x(t) \vec{\omega} \times \hat{x}(t) + a_y(t) \vec{\omega} \times \hat{y}(t) + a_z(t) \vec{\omega} \times \hat{z}(t)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{A}$$

$$\boxed{\frac{d'\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

Variação de um vetor devido apenas à rotação do referencial em torno de um eixo qualquer em TRÊS DIMENSÕES



$$|\Delta \mathbf{B}| = (B \sin \theta) \cdot (\omega \Delta t) = \omega B \sin \theta \Delta t$$

$$\Delta \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B} \Delta t$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}$$

$$\frac{d' \hat{x}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{x}$$

$$\frac{d' \hat{y}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{y}$$

$$\frac{d' \hat{z}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{z}$$

Derivadas temporais segundas

$$\frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} = \frac{d'}{dt} \left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right] = \frac{d'}{dt} \left[\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A} \right] =$$

$$= \underbrace{\frac{d'}{dt} \left[\frac{d\vec{A}}{dt} \right]} + \underbrace{\frac{d'}{dt} [\vec{\omega} \times \vec{A}]}_{} =$$

$$= \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{A}}{dt} + \underbrace{\frac{d}{dt} [\vec{\omega} \times \vec{A}]}_{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{A} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{A}}{dt}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{A})$$

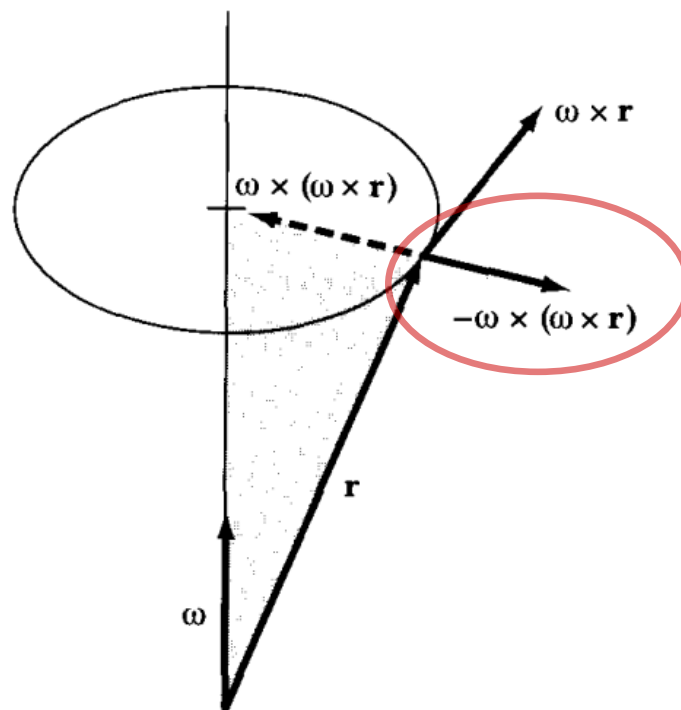
$$= \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{A}) + 2 \vec{\omega} \times \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{A}$$

Forças não-inerciais devido a rotações do sistema de coordenadas

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2 \overset{m}{\checkmark} \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \overset{m}{\checkmark} \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

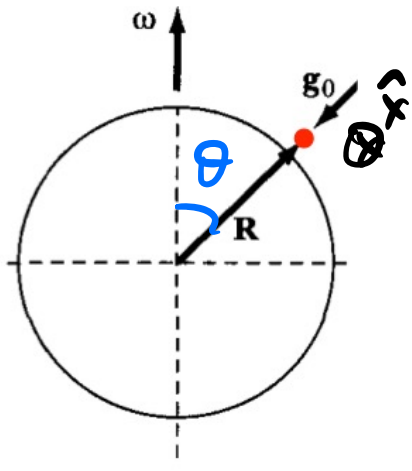
$$\Rightarrow m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} - \underbrace{m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{F}_{\text{CENTRÍFUGA}}} - \underbrace{2m \vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{F}_{\text{CORIOLIS}}} - \underbrace{m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{\vec{F}_{\text{NI}}}$$

Força centrífuga



Efeitos da rotação da Terra

UM CORPO PARADO NA SUPERFÍCIE DA TERRA SENTE:



$$\vec{F}_{CENT} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

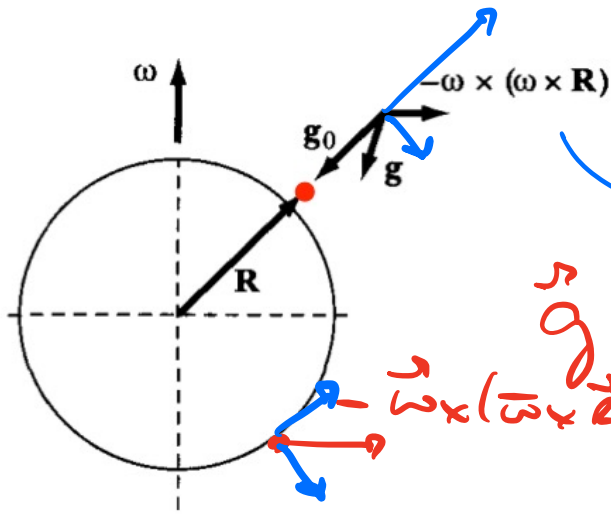
$$|\vec{F}_{CENT}| = m |\vec{\omega} \times \omega R \sin \theta \hat{x}|$$

$$= m \omega^2 R \sin \theta$$

ORDEN DE GRANDEZA: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1 \text{ dia}}$

$R = 6.4 \times 10^3 \text{ km} \Rightarrow \omega^2 R \sim 3.4 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0.3\% g_0$

Peso aparente

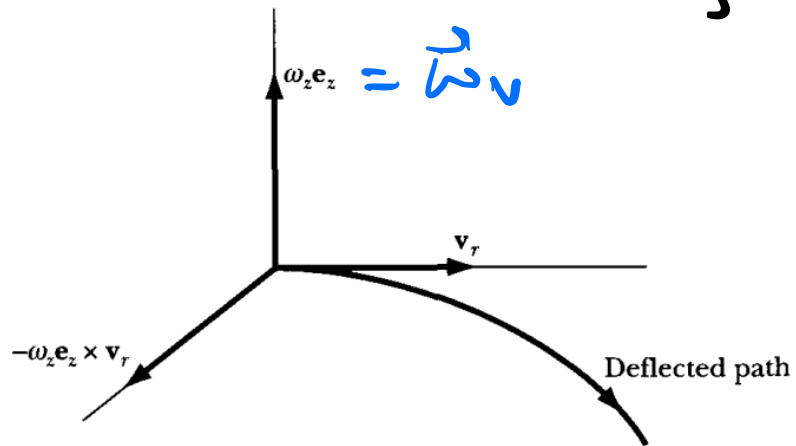


DIREÇÃO:

$$\vec{g} = \vec{g}_{Ap} = \vec{g}_0 - \omega \times (\omega \times \vec{R})$$

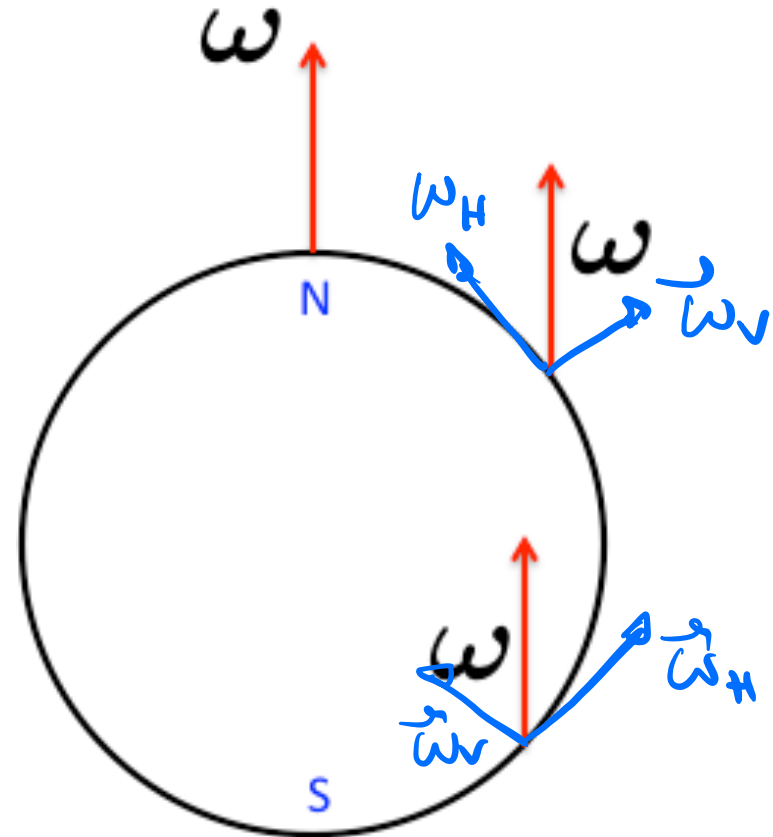
EFEITO É : MÁXIMO NO EQUADOR
NULO NOS POLOS

Força de Coriolis

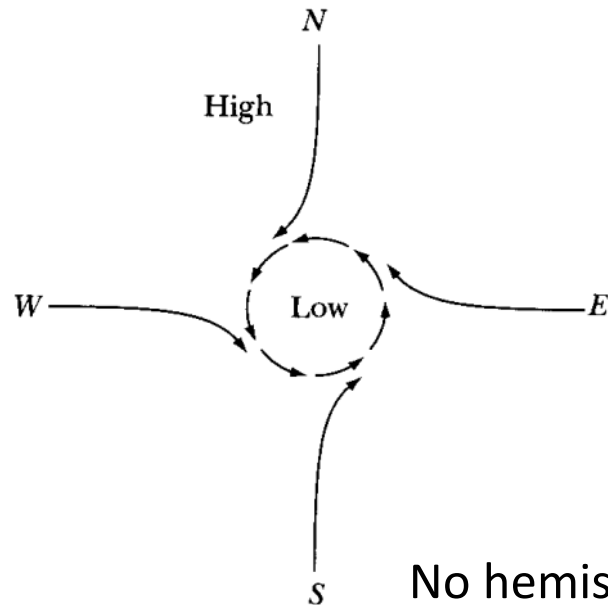
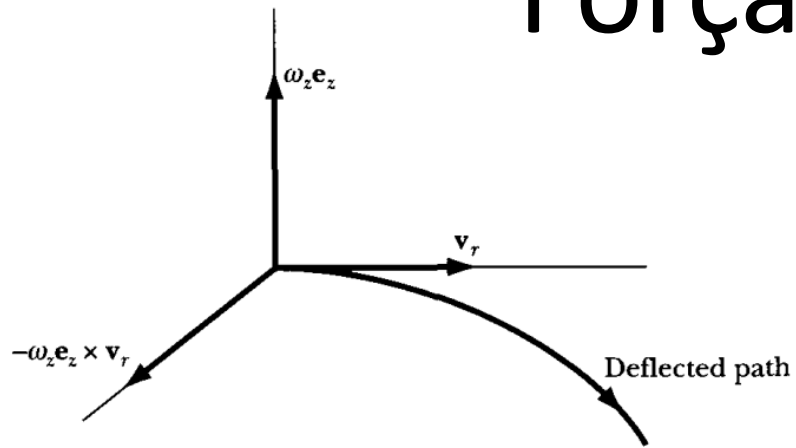


No hemisfério Norte a força de Coriolis **deflete para a direita** (figura ao lado). No hemisfério Sul, **para a esquerda**. Note que a componente relevante de ω aqui é a vertical, que é **para cima no Norte e para baixo no Sul**.

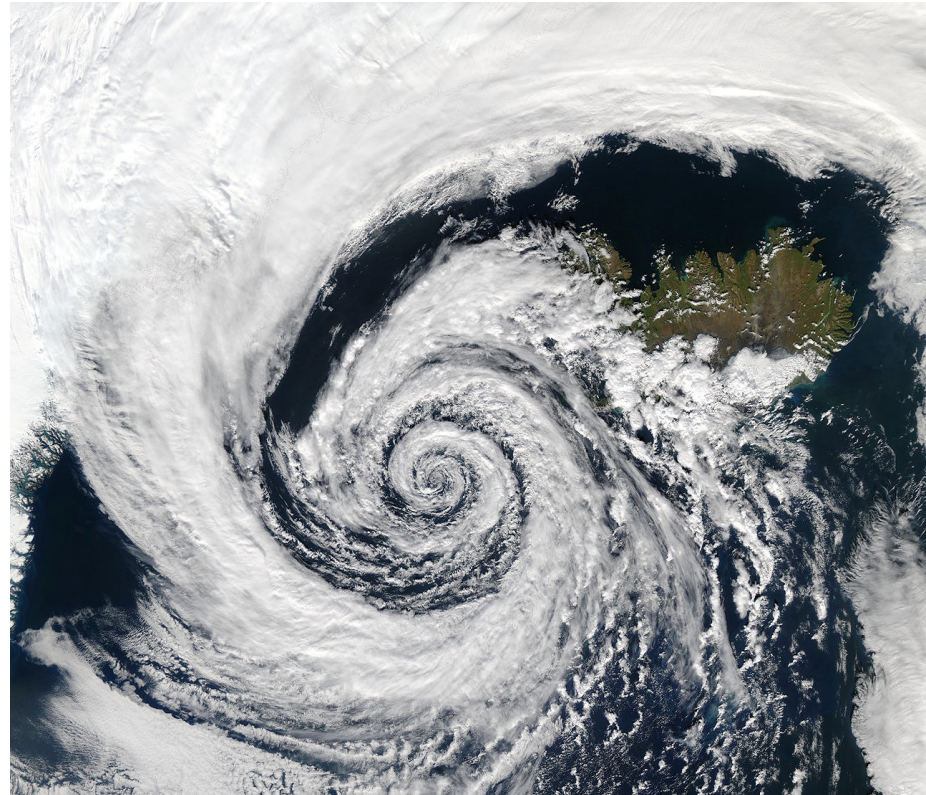
$$\vec{F}_{\text{COR}} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}$$



Força de Coriolis



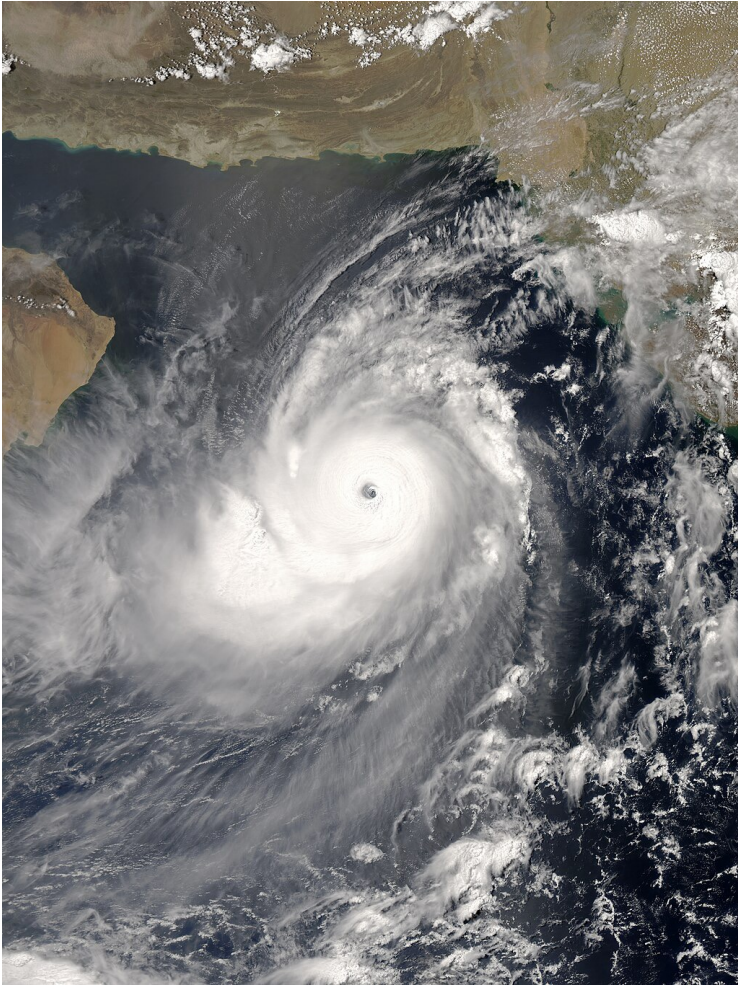
Perto da Islândia



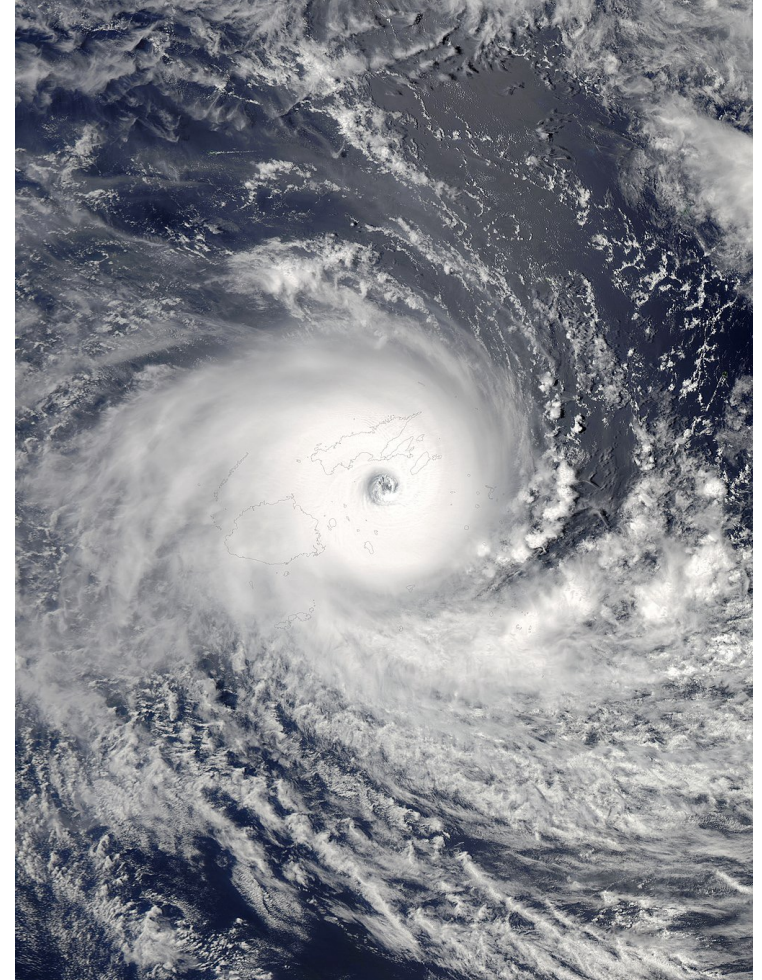
No hemisfério **Norte**, os ciclones giram em sentido **anti-horário**, com a zona de baixa pressão à esquerda e alta pressão à direita (figura). No hemisfério **Sul**, a rotação é **horária**, com a baixa pressão à direita.

Força de Coriolis

Mar do norte da Índia

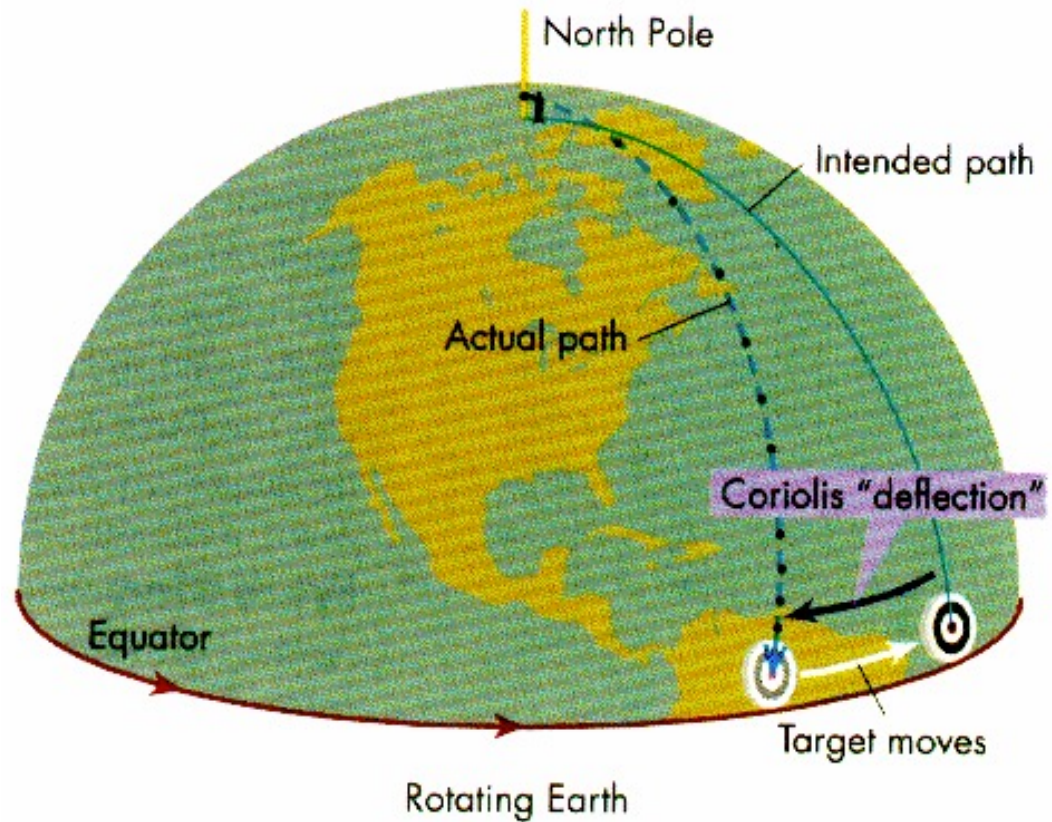
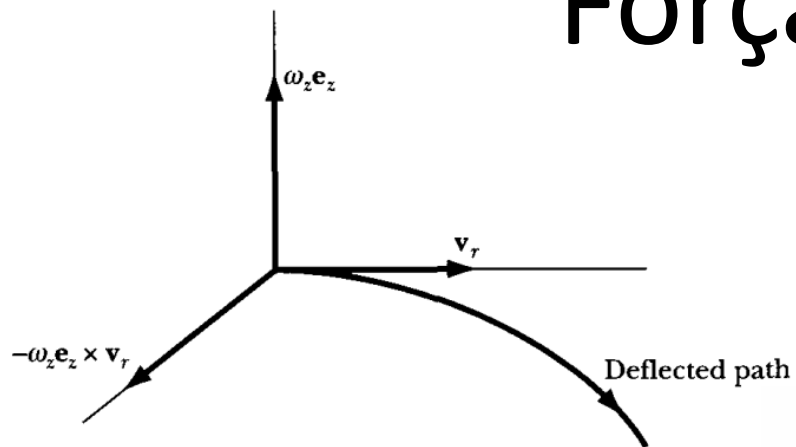


Pacífico Sul

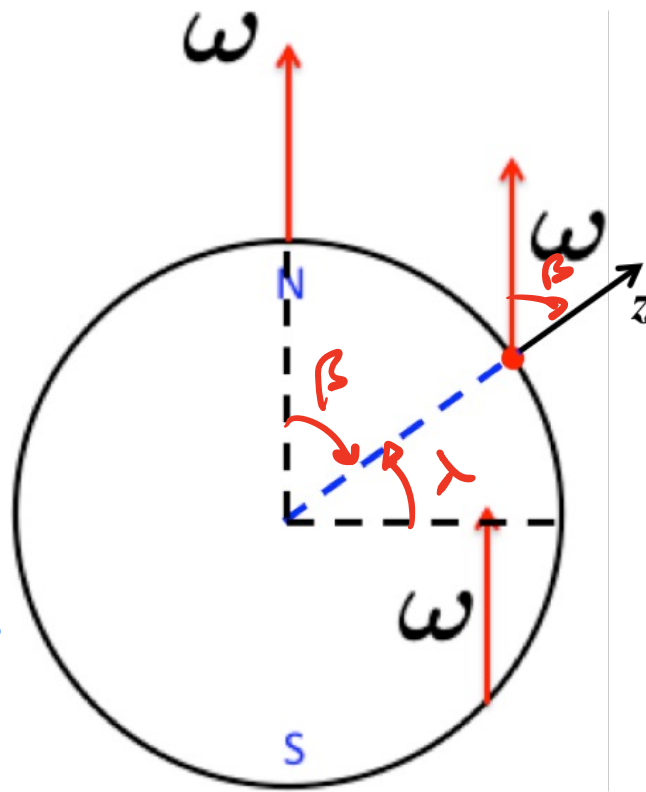
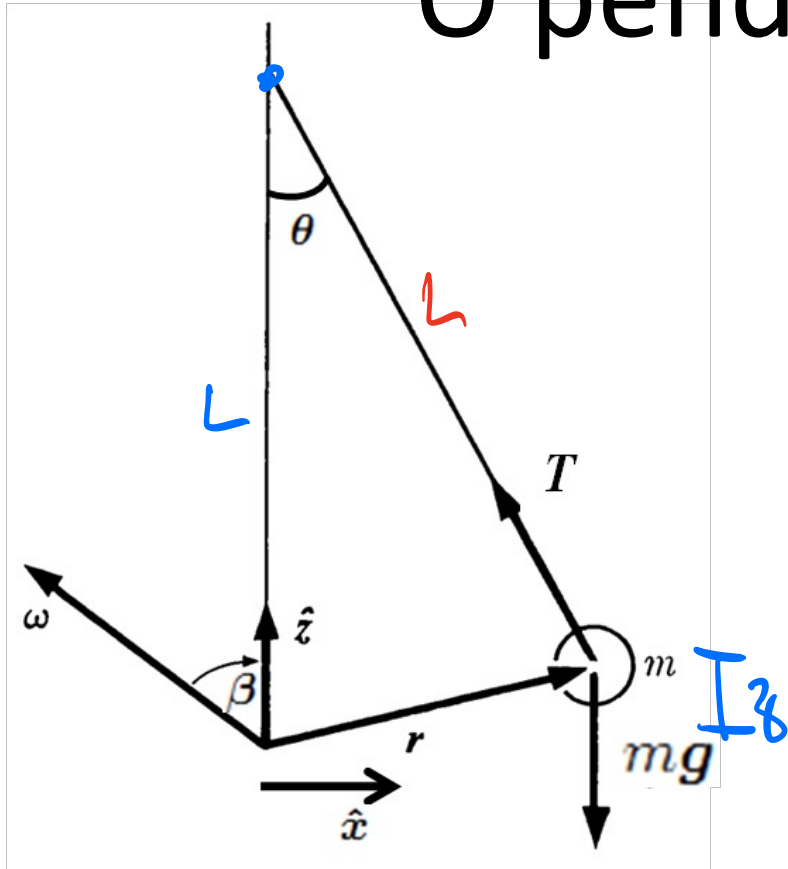


No hemisfério **Norte**, os ciclones giram em sentido **anti-horário**, com a zona de baixa pressão à esquerda e alta pressão à direita (figura). No hemisfério **Sul**, a rotação é **horária**, com a baixa pressão à direita.

Força de Coriolis



O pêndulo de Foucault



HEM. NORTE:

$$\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

HEM. SUL:

$$\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

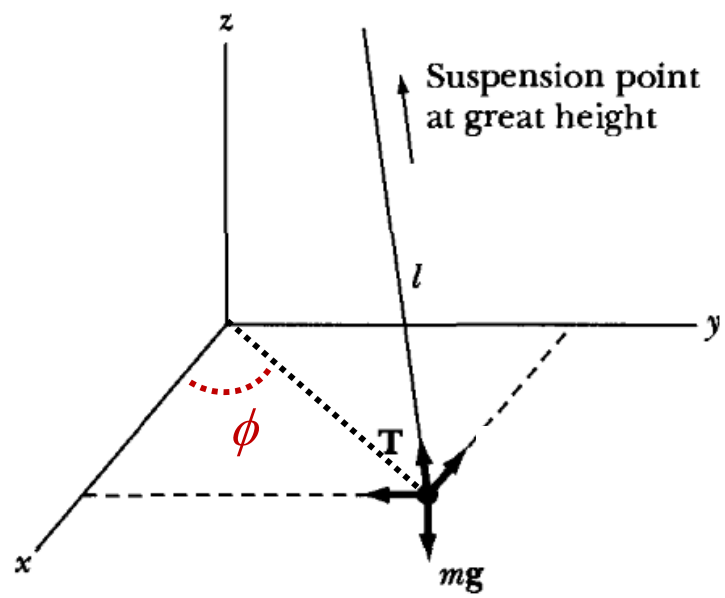
$$\lambda \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$$

NO REF. TERRA:

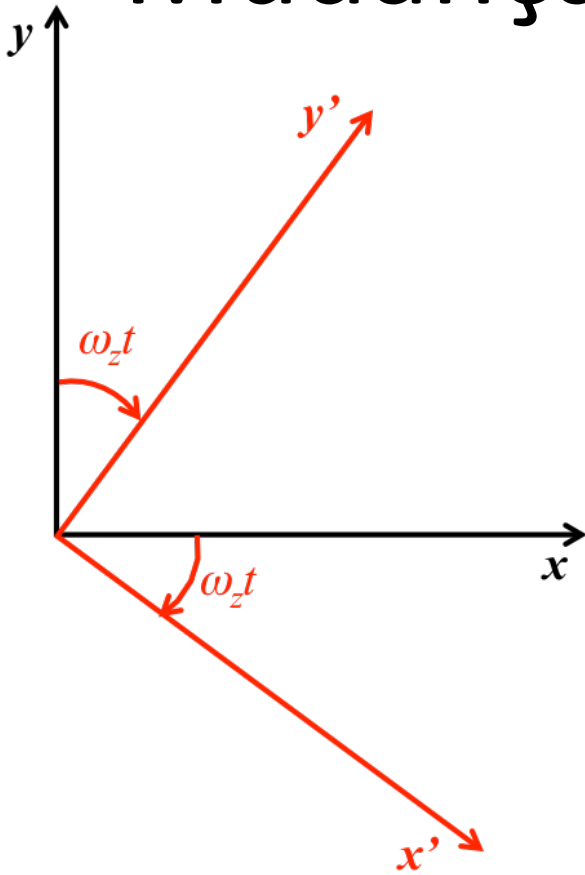
$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

POSICÃO DA PARTÍCULA: $\vec{r}$:

$$\begin{cases} x = L \sin \theta \cos \phi \\ y = L \sin \theta \sin \phi \\ z = L (1 - \cos \theta) \end{cases}$$

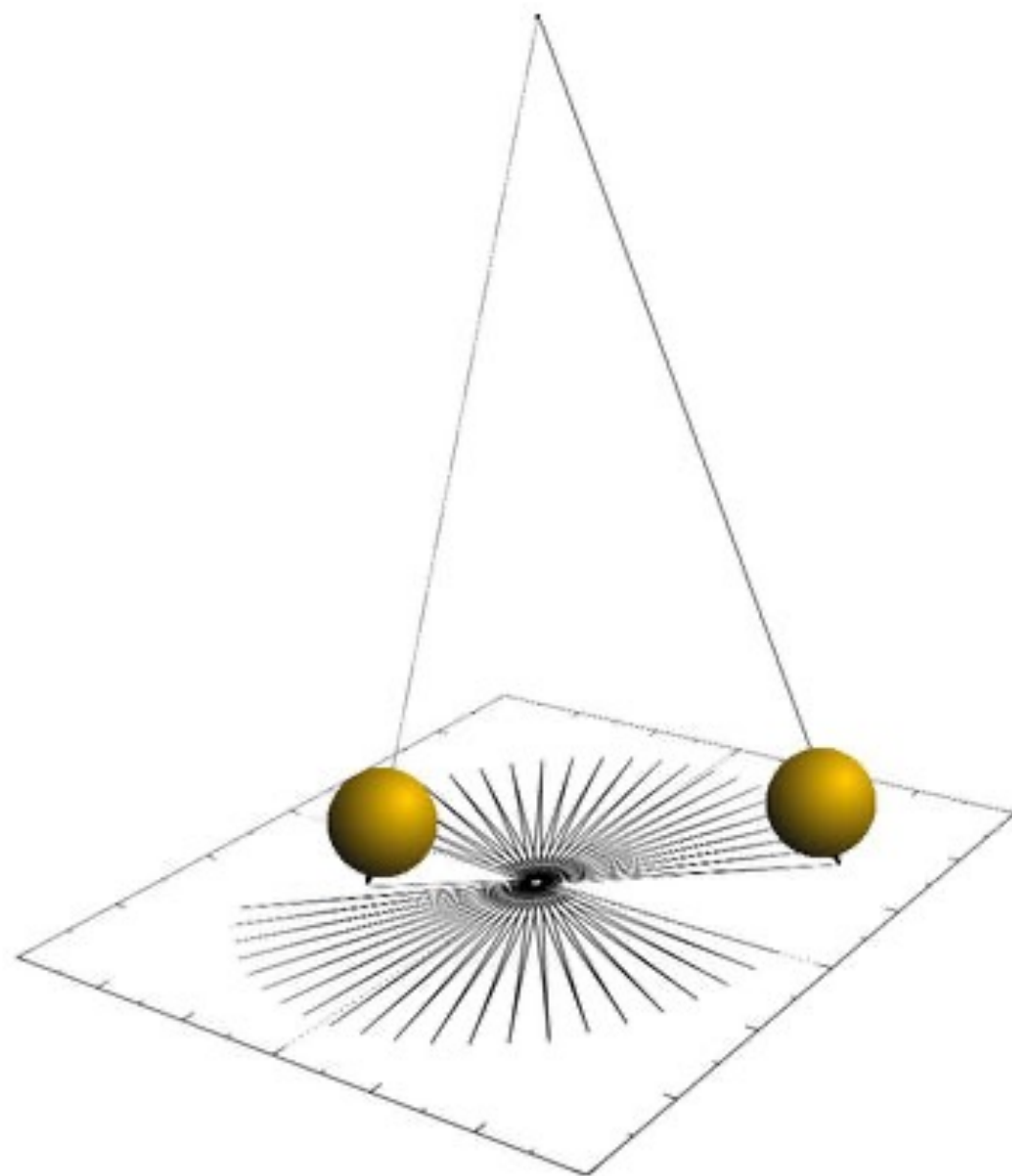


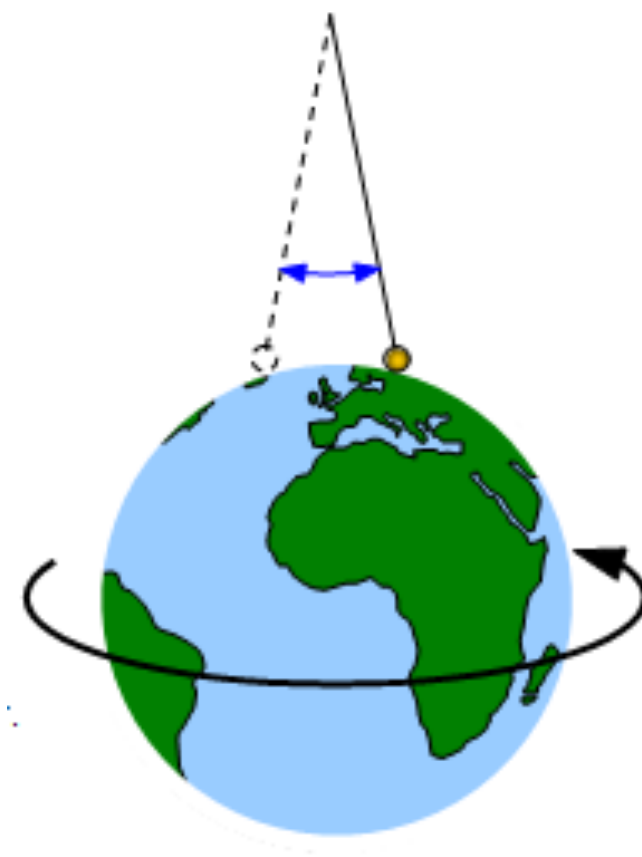
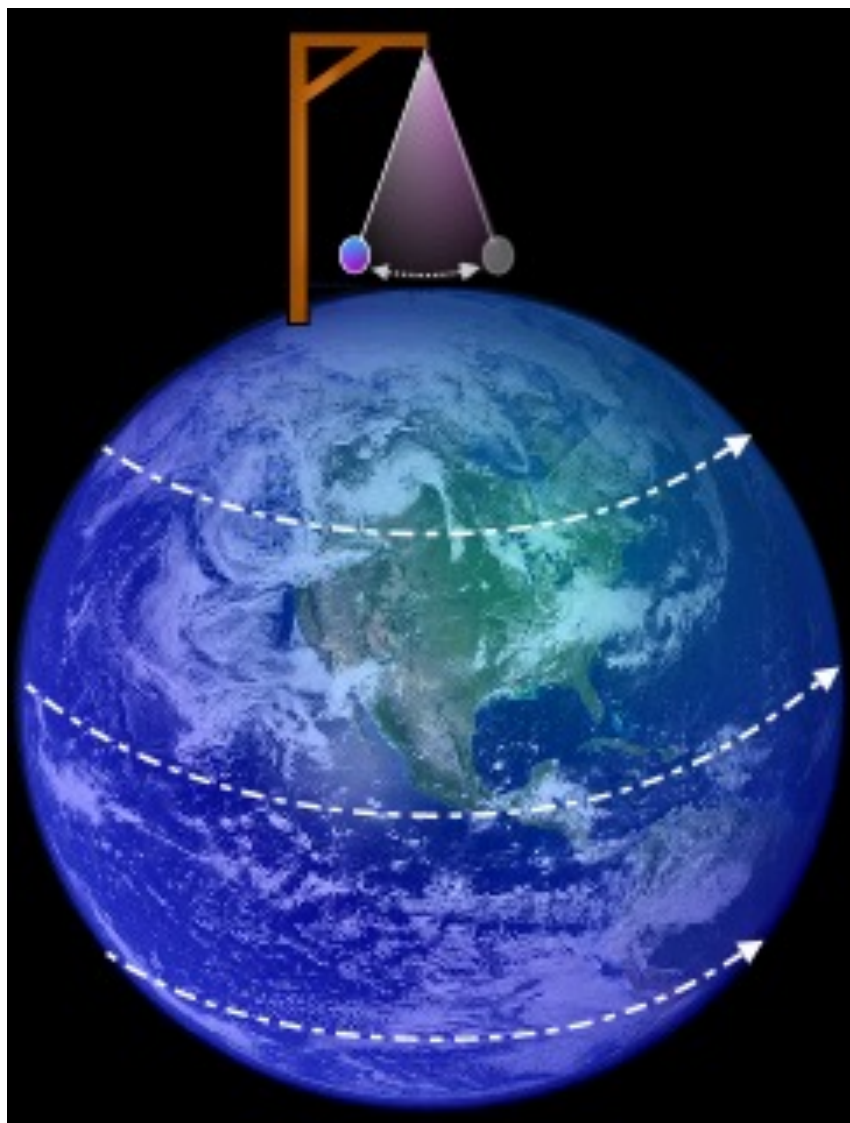
Mudança para um sistema girante



$$\begin{aligned}x &= \cos \omega_z t \, x' + \sin \omega_z t \, y' \\ y &= -\sin \omega_z t \, x' + \cos \omega_z t \, y'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x' &= \cos \omega_z t \, x - \sin \omega_z t \, y \\ y' &= \sin \omega_z t \, x + \cos \omega_z t \, y\end{aligned}$$





Fotografias de pêndulos de Foucault espalhados pelo mundo



No Panthéon, em Paris.



Na UERJ, no Rio de Janeiro