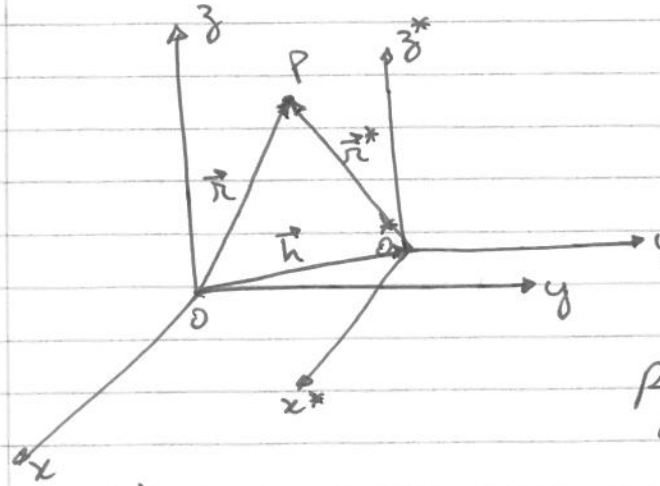
Capítulo 7: Sistemas de coordenadas móveis

Já comentamos que as leis de Newton são válidas em sistemas de referência inerciais e salientamos que esses devem ser considerados como sistema em repouso em relação às ~~as~~ estrelas fixas (ou que se movem com velocidade uniforme em relação a elas). Vamos examinar agora como as leis de Newton devem ser modificadas quando aplicadas em um referencial NÃO-INERCIAL.

. TRANSLAÇÕES:

Para isso, considere primeiro dois referenciais com origens em O e O^*, tais que seus eixos sempre permanecem paralelos, mas suas origens apresentam movimento relativo.



Vamos imaginar que o referencial de O é fixo em relação às estrelas fixas. Um ponto P qualquer no espaço é localizado pelo vetor $\vec{r}$ em relação a O e pelo vetor $\vec{r}^*$ em relação a O^*.

Se $\vec{h}$ é o vetor que liga O a O^*, como na figura, então:

$$\vec{r} = \vec{r}^* + \vec{h}$$

Diferenciando em relação ao tempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}^*}{dt} + \frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{v}^* + \vec{v}_h$$

Na equação acima, $\vec{v}$ e $\vec{v}^*$ são as velocidades de P em relacao a O e O^*, respectivamente e $\vec{v}_h$ é a velocidade de O^* em relação a O, ou também, a velocidade relativa do referencial móvel ao referencial fixo.

Diferenciando mais uma vez:

$$\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a}_h$$

em notação óbvia.

Como o referencial $\underline{O}$ é inercial, a equação de movimento se torna:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Se utilizarmos a expressão de $\vec{a}$ em termos de $\vec{a}^*$ teremos a equação de movimento no sistema O^*

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}^* + m\vec{a}_h} \qquad (1)$$

Portanto, num sistema não-inercial, as leis de Newton têm que ser modificadas pelo termo

$$m\vec{a}_h = m\frac{d^2\vec{h}}{dt^2}$$

que mede quanto o sistema não-inercial considerado está acelerado em relação ao referencial inercial.
Note que se reescrevermos (1):

$$m\vec{a}^* = m\frac{d^2\vec{r}^*}{dt^2} = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{h}}{dt}$$

o termo $\left(-m\frac{d^2\vec{h}}{dt^2}\right)$ tem o mesmo efeito que uma força adicional que age sobre a partícula em O^*. Por isso, chamamos:

$$-m\frac{d^2\vec{h}}{dt^2}$$

de "FORÇA FICTÍCIA" ou "FORÇA NÃO-INERCIAL". Quando estamos num sistema de referência acelerado "sentimos" essa força fictícia adicional além das forças convencionais que já estariam lá se estivéssemos em um referencial inercial. Portanto, PODEMOS USAR AS LEIS DE NEWTON EM SISTEMAS NÃO-INERCIAIS DESDE QUE ADICIONEMOS AS FORÇAS FICTÍCIAS ÀS FORÇAS CONVENCIONAIS.

Note também que, se O^* se move com velocidade constante em relação a O, $\vec{a}_h = \vec{0}$ e a equação de movimento não é modificada.

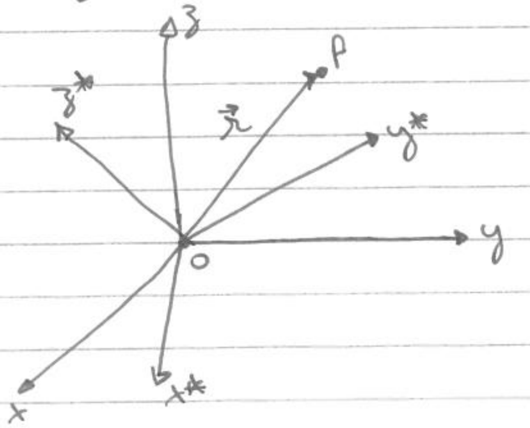
$$\vec{F} = m\vec{a}^* \qquad \text{se} \quad \vec{a}_h = \vec{0}$$

Isso prova a afirmação já feita, que referenciais inerciais são aquelas EM REPOUSO com relação às estrelas fixas ou com velocidade constante em relação a elas. Segue que não podemos distinguir referenciais inerciais que se movem c/ velocidade constante um em relação ao outro; TODOS SÃO LEGÍTIMOS.

O fato de que as leis de Newton não se modificam quando passamos de um referencial inercial a outro se movendo com velocidade constante em relação ao primeiro é conhecido como PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE (DE GALILEU).

. Sistemas de coordenadas girantes.

Vamos supor agora que há dois sistemas de coordenadas com ORIGEM COMUM O e que giram de maneira arbitrária. Vamos tomar o sistema de eixos x, y e z como fixo e o outro sistema de eixos x^*, y^* e z^* como girando:



Vamos tomar também os unitários $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ ao longo dos eixos do primeiro sistema e $\hat{x}^*, \hat{y}^*$ e $\hat{z}^*$ ao longo dos eixos do segundo

A coisa mais importante a ser notada é que, em relação ao sistema $S(x, y, z)$ os eixos $\hat{x}^*, \hat{y}^*$ e $\hat{z}^*$ do sistema S^* NÃO SÃO FIXOS, embora $\hat{x}^*, \hat{y}^*$ e $\hat{z}^*$ sejam fixos no sistema S^* e $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ sejam fixos no sistema S.

Pois bem, ao calcularmos as derivadas temporais de vetores quaisquer, PRECISAREMOS ESPECIFICAR EM RELAÇÃO A QUAL SISTEMA A DERIVADA É TOMADA. Por exemplo, a ~~...~~ derivada temporal de $\hat{x}^*$ é, de modo geral, NÃO-NULA EM S MAS É NULA EM S^*!

Introduziremos, portanto, dois tipos de derivadas

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \quad e \quad \frac{d^*\vec{A}}{dt}$$

de um vetor qualquer $\vec{A}$ em relação a S e S^*, respectivamente. Queremos saber como relacionar uma a outra.

Se decompusermos $\vec{A}$ nos dois sistemas teremos:

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \qquad (1)$$

e

$$\vec{A} = A_x^* \hat{x}^* + A_y^* \hat{y}^* + A_z^* \hat{z}^* \qquad (2)$$

Obviamente, como $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ são fixos em S e $\hat{x}^*, \hat{y}^*$ e $\hat{z}^*$ são fixos em S^*, teremos:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_x \hat{x} + \dot{A}_y \hat{y} + \dot{A}_z \hat{z}$$

e

$$\frac{d^*\vec{A}}{dt} = \dot{A}_x^* \hat{x}^* + \dot{A}_y^* \hat{y}^* + \dot{A}_z^* \hat{z}^*$$

Entretanto, tomando d/dt de (2):

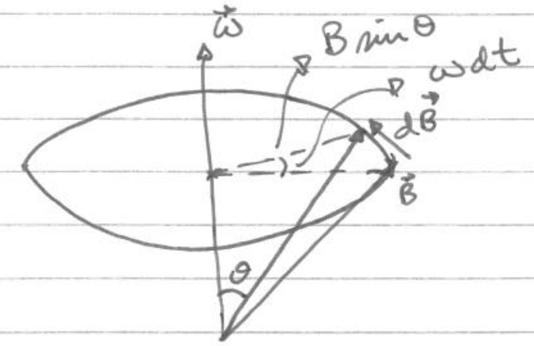
$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \underbrace{\dot{A}_x^* \hat{x}^* + \dot{A}_y^* \hat{y}^* + \dot{A}_z^* \hat{z}^*}_{\frac{d^*\vec{A}}{dt}} + A_x^* \frac{d\hat{x}^*}{dt} + A_y^* \frac{d\hat{y}^*}{dt} + A_z^* \frac{d\hat{z}^*}{dt}$$

Queremos agora achar $\frac{d\hat{x}^*}{dt}, \ldots$. Se S^* está girando com velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação a S, isso quer dizer que os eixos do sistema S^* giram com velocidade angular $|\vec{\omega}|$ em torno de um eixo de direção dada por $\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$. Nesse caso, é possível achar $\frac{d\hat{x}^*}{dt}$, etc.

Considere um vetor fixo em S^* (como $\hat{x}^*, \hat{y}^*$ e $\hat{z}^*$) $\vec{B}$. Num intervalo de tempo infinitesimal dt, $\vec{B}$ varia de $d\vec{B}$ tal que:

$$|d\vec{B}| = (B \sin\theta)(\omega\, dt)$$

onde θ é o ângulo em $\vec{B}$ e $\vec{\omega}$.



A direção de $d\vec{B}$ é tal que

$d\vec{B} \perp \vec{B}$ e

$d\vec{B} \perp \vec{\omega}$

e $d\vec{B} \parallel \vec{\omega} \times \vec{B}$

Na verdade, todos esses fatos levam a que:

$$d\vec{B} = \vec{\omega} \times \vec{B}\, dt$$

ou:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{B}$$

Portanto: $\dfrac{d\hat{x}^*}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}^*$, etc. e:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d^*\vec{A}}{dt} + A_x^*(\vec{\omega} \times \hat{x}^*) + A_y^*(\vec{\omega} \times \hat{y}^*) + A_z^*(\vec{\omega} \times \hat{z}^*)$$

ou:

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d^*\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

que é nossa fórmula fundamental. Para acharmos as derivadas segundas, fazemos:

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^*\vec{A}}{dt}\right) + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{A} =$$

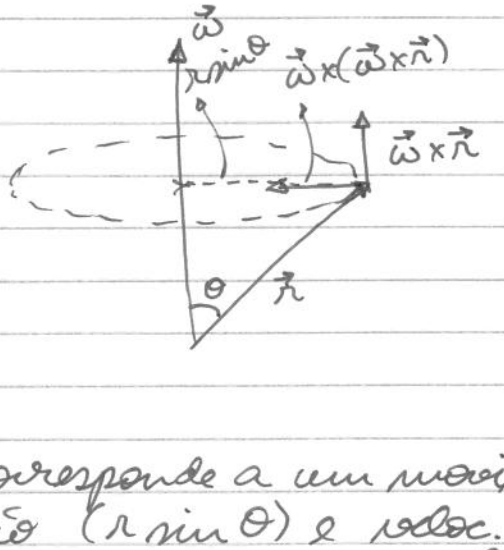
$$= \frac{d^{2*}\vec{A}}{dt^2} + \vec{\omega} \times \frac{d^*\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d^*\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{A}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{A}$$

$$\boxed{\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{d^{2*}\vec{A}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{d^*\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{A}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{A}}$$

Se tomarmos $\vec{A}$ como o vetor posição $\vec{r}$:

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^{2*}\vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{d^*\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}$$

que é o chamado teorema de Coriolis. O ~~segundo~~ terceiro termo da expressão leva o nome de aceleração centrípeta e o ~~terceiro~~ segundo termo de aceleração de coriolis. Que o ~~pri~~ ~~segundo~~ terceiro termo corresponde ao nosso conceito antigo de aceleração centrípeta é fácil de ver de:



$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega\, |\vec{\omega} \times \vec{r}|$$

pois $\vec{\omega}$ e $\vec{\omega} \times \vec{r}$ são $\perp$ e

$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega^2 r \sin\theta = \frac{v^2}{r \sin\theta}$$

que corresponde a um movimento circular instantâneo de raio $(r \sin\theta)$ e veloc. angular ω.

A aceleração de Coriolis só é não-nula quando a velocidade da partícula é não-nula.

Se o sistema S é um referencial inercial

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Podemos então expressar a 2ª lei de Newton no sistema S* através do teorema de Coriolis:

$$\vec{F} = m\frac{d^{2*}\vec{r}}{dt^2} + 2m\vec{\omega}\times\frac{d^*\vec{r}}{dt} + m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}$$

Portanto, num sistema girante (que é um referencial NÃO-INERCIAL por consequência) podemos aplicar as leis de Newton DESDE QUE ADICIONEMOS NOVAS FORÇAS FICTÍCIAS:

$$m\frac{d^{2*}\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \underbrace{- 2m\vec{\omega}\times\frac{d^*\vec{r}}{dt} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}}_{\text{FORÇAS NÃO-INERCIAIS OU FICTÍCIAS}}$$

A primeira força fictícia é chamada de FORÇA DE CORIOLIS e a segunda de FORÇA CENTRÍFUGA. A terceira só existe se S* apresenta rotação não uniforme com relação a S.

Se S* se move de maneira geral em relação a S, sem manter a mesma origem, a relação entre $\vec{r}$ e $\vec{r}^*$ é obtida somando-se os efeitos de translação e rotação:

$$\vec{r} = \vec{r}^* + \vec{h}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^*\vec{r}^*}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}^* + \frac{d\vec{h}}{dt}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^{2*}\vec{r}}{dt^2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}^*) + 2\vec{\omega} \times \frac{d^*\vec{r}^*}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}^* + \frac{d^2\vec{h}}{dt^2}$$

. Efeitos da rotação da Terra

Podemos aplicar os resultados acima para corpos que se movem em um referencial fixo da Terra. Como esta gira com velocidade angular $\vec{\omega}$ em relação a um referencial inercial (podemos tomá-lo nesse caso, como fixo em relação ao Sol), haverá forças não-inerciais. Se o corpo tem massa m e está sob a ação de seu ~~próprio~~ peso e de uma força genérica $\vec{F}$:

$$m\frac{d^{2*}\vec{r}}{dt^2} = F + m\vec{g} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \frac{d^*\vec{r}}{dt}$$

já que $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$. Se o corpo está em repouso seu peso aparente será:

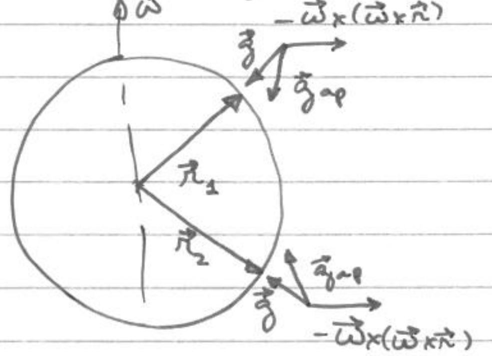
$$m\vec{g}_{ap}(\vec{r}) = m\vec{g}(\vec{r}) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

ou:

$$\vec{g}_{ap}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r}) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

A aceleração da gravidade local será portanto corrigida por um termo proveniente da força centrífuga.

Do diagrama:



Para a Terra:

$$\omega^2 R_T \cong 3.4\times10^{-2}\ \frac{m}{s^2}$$

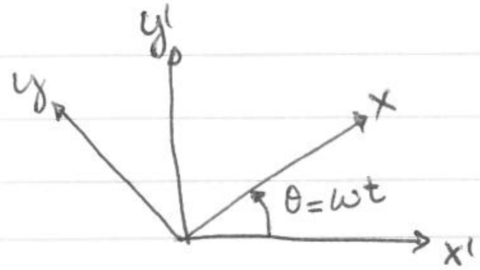
$$\cong 0{,}3\%\ \text{de}\ g_0$$

vemos que $\vec{g}_{ap}$ tem um pequeno componente adicional que sempre aponta na direção do Equador (Norte no hemisfério Sul e Sul no Hemisfério Norte).
O vetor $\vec{g}_{ap}$ local determina à direção vertical de uma linha de prumo e a direção horizontal da superfície de um líquido em repouso.
Além disso, a forma ovalada da Terra tem como origem a direção local de $\vec{g}_{ap}$ de tal forma que a superfície da Terra tende a ser sempre normal a $\vec{g}_{ap}$.

Se o corpo está em movimento há também a força de Coriolis. É fácil ver que ela ~~apontará~~ defletirá sempre para a esquerda do movimento no hemisfério Sul (e ao contrário no Norte). Ela é normalmente muito pequena e pode ser desprezada na maioria dos casos. Entretanto, ela tem grande importância para o movimento de grandes massas de ar na superfície da Terra determinando a direção dos corre- das de ventos principais e a direção de circulação de ciclones.

Rediscussão da fórmula que relaciona a derivada temporal em referenciais que giram um em relação ao outro

Vamos considerar novamente o problema particularizando, em nome da clareza, para o caso bidimensional:



A dificuldade fundamental não tem origem matemática, mas física. O ponto central é perceber o que depende do tempo em S e S'. Aí está a diferença entre derivadas temporais em S e S', pois há quantidades que dependem do tempo em um referencial que não dependem do tempo no outro. A fim de enfatizar essas diferenças, vamos mostrar claramente as quantidades que dependem do tempo através de "(t)". Quantidades sem esse "(t)" são constantes naquele referencial.

Assim, ~~em~~ um vetor genérico $\vec{A}(t)$, no referencial S' é tal que:

$$\vec{A}(t) = a'_x(t)\,\hat{x}' + a'_y(t)\,\hat{y}' = a_x(t)\,\hat{x}(t) + a_y(t)\,\hat{y}(t) \quad (1)$$

onde quantidades com linha se referem a S' e sem linha a S. Note como $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$ são <u>independentes do tempo</u>.

Em contraste, no referencial S:

$$\vec{A} = a_x(t)\,\hat{x} + a_y(t)\,\hat{y} = a'_x(t)\,\hat{x}'(t) + a'_y(t)\,\hat{y}'(t) \quad (2)$$

É importante perceber que as funções $a'_x(t)$, $a'_y(t)$, $a_x(t)$ e $a_y(t)$, que aparecem em ambos os referenciais são as mesmas. Evidentemente, o mesmo não se aplica aos vetores unitários, já que eles são, cada um, constantes em um referencial mas dependentes do tempo em outro. Esse é o principal input físico.

Definimos $\frac{d}{dt}$ e $\frac{d'}{dt}$ as derivadas temporais em S e S', que, como é óbvio, são diferentes, já que os unitários se comportam diferentemente. Assim, de (1):

$$\frac{d'\vec{A}(t)}{dt} = \dot{a}'_x(t)\,\hat{x}' + \dot{a}'_y(t)\,\hat{y}'$$

$$= \dot{a}_x(t)\,\hat{x}(t) + \dot{a}_y(t)\,\hat{y}(t) + a_x(t)\frac{d'\hat{x}(t)}{dt} + a_y(t)\frac{d'\hat{y}(t)}{dt} \quad (3)$$

e de (2):

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{a}_x(t)\,\hat{x} + \dot{a}_y(t)\,\hat{y} = \dot{a}'_x(t)\,\hat{x}'(t) + \dot{a}'_y(t)\,\hat{y}'(t) +$$

$$+ a'_x(t)\frac{d\hat{x}'(t)}{dt} + a'_y(t)\frac{d\hat{y}'(t)}{dt} \quad (4)$$

Note que, como as funções $a_x(t), \ldots,$ são as mesmas em S e S' usamos a notação de ponto. Para os unitários, usamos $\frac{d}{dt}$ e $\frac{d'}{dt}$

Agora, a relação entre os unitários de S e S' é, em S':

$$\hat{x}(t) = \cos\omega t\, \hat{x}' + \sin\omega t\, \hat{y}'$$

$$\hat{y}(t) = -\sin\omega t\, \hat{x}' + \cos\omega t\, \hat{y}'$$

Assim, em S':

$$\frac{d'\hat{x}(t)}{dt} = \omega\left[-\sin\omega t\, \hat{x}' + \cos\omega t\, \hat{y}'\right]$$

$$\frac{d'\hat{y}(t)}{dt} = \omega\left[-\cos\omega t\, \hat{x}' - \sin\omega t\, \hat{y}'\right]$$

Mas $\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{z}'$, logo:

$$\vec{\omega}\times\hat{x}(t) = \omega\hat{z}'\times\left[\cos\omega t\, \hat{x}' + \sin\omega t\, \hat{y}'\right] = \omega\left[\cos\omega t\, \hat{y}' - \sin\omega t\, \hat{x}'\right]$$

$$= \frac{d'\hat{x}}{dt}$$

e

$$\vec{\omega}\times\hat{y}(t) = \omega\hat{z}'\times\left[-\sin\omega t\, \hat{x}' + \cos\omega t\, \hat{y}'\right] = \omega\left[-\sin\omega t\, \hat{y}' - \cos\omega t\, \hat{x}'\right]$$

$$= \frac{d'\hat{y}}{dt}$$

$$\Rightarrow a_x(t)\frac{d'\hat{x}(t)}{dt} + a_y(t)\frac{d'\hat{y}(t)}{dt} = a_x(t)\,\vec{\omega}\times\hat{x}(t) + a_y(t)\,\vec{\omega}\times\hat{y}(t) =$$

$$= \vec{\omega}\times\left[a_x(t)\hat{x}(t) + a_y(t)\hat{y}(t)\right] =$$

$$= \vec{\omega}\times\vec{A}(t) \quad (5)$$

Levando (5) na segunda de (3) e a primeira de (4) também na segunda de (3):

$$\frac{d'\vec{A}(t)}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}(t)$$

que é a expressão desejada. Note que usamos que, no instante $\underline{t}$ considerado:

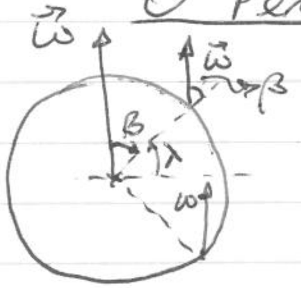
$$\hat{x} \text{ (em } S) = \hat{x}(t) \text{ (em } S')$$

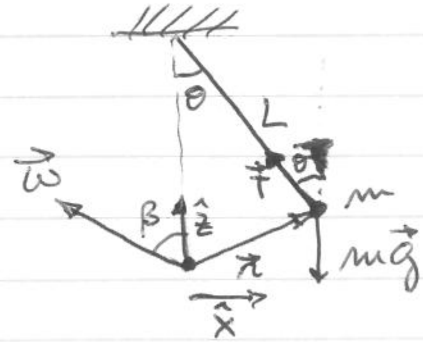
$$\hat{y} \text{ (em } S) = \hat{y}(t) \text{ (em } S')$$

embora suas derivadas dependam do referencial!

A generalização para 3 dimensões não apresenta nenhuma complicação <u>conceitual</u> adicional.

O Pêndulo de Foucault





$$\beta = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

Hemisfério Norte: $\beta \in [0, \pi/2]$; $\lambda \in [0, \pi/2]$
" Sul: $\beta \in [\pi/2, \pi]$; $\lambda \in [-\pi/2, 0]$

Equação de movimento no referencial ligado à Terra (S):

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

Posição da partícula:

$$x = L \sin\theta \cos\phi$$
$$y = L \sin\theta \sin\phi$$
$$z = L(1 - \cos\theta)$$

Onde θ é mostrado na figura e ϕ é como em coordenadas polares. Da figura:

$$T_z = T\cos\theta = T\left(1 - \frac{z}{L}\right)$$

$$T_x = -T \sin\theta \cos\phi = -T\, x/L$$
$$T_y = -T \sin\theta \sin\phi = -T\, y/L$$

$$\vec{\omega} = -\omega \sin\beta\, \hat{x} + \omega \cos\beta\, \hat{z}$$
$$\vec{\omega} = -\omega \cos\lambda\, \hat{x} + \omega \sin\lambda\, \hat{z}$$

$$\vec{g} = -g\, \hat{z}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \omega\left[-\cos\lambda\, \hat{x} + \sin\lambda\, \hat{z}\right] \times \left[\dot{x}\, \hat{x} + \dot{y}\, \hat{y} + \dot{z}\, \hat{z}\right]$$

$$= \omega\left[-\cos\lambda\, \dot{y}\, \hat{z} + \cos\lambda\, \dot{z}\, \hat{y} + \sin\lambda\, \dot{x}\, \hat{y} - \sin\lambda\, \dot{y}\, \hat{x}\right]$$

$$= (-\dot{y}\, \omega \sin\lambda)\, \hat{x} + (\dot{x}\, \omega \sin\lambda + \dot{z}\, \omega \cos\lambda)\, \hat{y} - \dot{y}\, \omega \cos\lambda\, \hat{z}$$

$$\ddot{x} = -\frac{T}{mL} x + 2\omega \sin\lambda\, \dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{T}{mL} y - 2\omega \sin\lambda\, \dot{x} - 2\omega \cos\lambda\, \dot{z}$$

$$\ddot{z} = \frac{T}{m}\left(1 - \frac{z}{L}\right) - g + 2\omega \cos\lambda\, \dot{y}$$

Claramente, os termos em ω são perturbações ao problema. Portanto, em primeira aproximação, podemos desprezá-los:

$$\ddot{x} \cong -\frac{T}{mL} x \qquad \ddot{z} \cong \frac{T}{m}\left(1 - \frac{z}{L}\right) - g$$

$$\ddot{y} \cong -\frac{T}{mL} y$$

Para $z \ll L$; $\dot{z} \cong \ddot{z} \cong 0$ e $T \cong mg$. Além disso:

$$\boxed{\omega_0^2 \equiv g/\ell}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &\cong -\frac{g}{L}\,x \equiv -\omega_0^2\,x \\ \ddot{y} &\cong -\frac{g}{L}\,y = -\omega_0^2\,y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= A_x^0 \cos(\omega_0 t + \delta_x^0) \\ y(t) &= A_y^0 \cos(\omega_0 t + \delta_y^0) \end{aligned}$$

que são as equações do pêndulo simples. Na próxima ordem escrevemos:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \cong 2\,\omega_z\,\dot{y} \qquad \boxed{\omega_z \equiv \omega \sin\lambda}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y \cong -2\,\omega_z\,\dot{x}$$

Considere agora transformar para um novo sistema de coordenadas (x', y') tal que

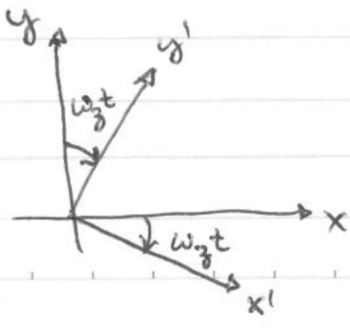
$$x = \cos\omega_z t\; x' + \sin\omega_z t\; y'$$

$$y = -\sin\omega_z t\; x' + \cos\omega_z t\; y'$$

ou

$$x' = \cos\omega_z t\; x - \sin\omega_z t\; y$$

$$y' = +\sin\omega_z t\; x + \cos\omega_z t\; y$$



O sistema S' gira no sentido horário em relação ao sistema preso à Terra S, com freqüência angular $\omega_z = \omega \sin\lambda$

$$\dot{x} = c\,\dot{x}' + s\,\dot{y}' + \omega_z(-s\,x' + c\,y')$$

$$\dot{y} = -s\,\dot{x}' + c\,\dot{y}' + \omega_z(-c\,x' - s\,y')$$

$$\ddot{x} = c\,\ddot{x}' + s\,\ddot{y}' + 2\omega_z(-s\,\dot{x}' + c\,\dot{y}') + O(\omega_z^2)$$

Levando essas equações na equação $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\omega_z \dot{y}$ e desprezando termos da ordem de ω_z^2:

$$c\,\ddot{x}' + s\,\ddot{y}' + 2\omega_z(-s\,\dot{x}' + c\,\dot{y}') + \omega_0^2(c\,x' + s\,y') =$$

$$= 2\omega_z(-s\,\dot{x}' + c\,\dot{y}')$$

Os termos em ω_z se cancelam e:

$$(\ddot{x}' + \omega_0^2 x')\cos\omega_z t + (\ddot{y}' + \omega_0^2 y')\sin\omega_z t = 0$$

Portanto, se:

$$x'(t) = A_x \cos(\omega_0 t + \delta_x)$$

$$y'(t) = A_y \cos(\omega_0 t + \delta_y)$$

a equação é satisfeita para todo $\underline{t}$. Portanto, o movimento é o de um pêndulo simples em S', que gira em relação à Terra com $\omega_z = \omega \sin\lambda$

$\Rightarrow T_p = \dfrac{1\,\text{dia}}{\sin\lambda}$. Em Campinas, $T_p \simeq 61\,h$
$\lambda \simeq 23°$