# Dinâmica de corpos rígidos

Um corpo rígido é uma idealização útil de um sistema de partículas no qual supõe-se que as distâncias relativas entre as partículas que compõem o corpo se mantém constantes no tempo. Corpos reais se deformam, mas costumam ser bastante bem aproximados por essa idealização ~~[illegible]~~

A localização espacial de um corpo rígido requer, em geral, 6 quantidades:

- 3 coordenadas que localizam ou o centro de massa do corpo ou um ponto fixo em torno do qual ele gira

- 3 ângulos que determinam sua orientação espacial. Isso pode ser entendido se fixarmos um sistema de eixos cartesianos no corpo: para especificar a orientação desse sistema em relação a um outro fixo, podemos usar os 3 cossenos diretores.

Tanto num caso como no outro, a dinâmica rotacional é dada por:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

como vimos. Se o sistema fixo no corpo gira com velocidade angular instantânea $\vec{\omega}$ em relação ao sistema fixo, então qualquer ponto no corpo tem velocidade:

$$\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$$

em relação ao sistema fixo, onde usamos

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'_\alpha}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$$

(aqui, usaremos sem linha para o sistema inercial e com ~~sem~~ linha para o sistema girante) e o fato de que em relação ao sistema de referência preso ao corpo: $\frac{d\vec{r}\,'_\alpha}{dt} = 0$

Portanto:

$$\vec{L} = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)$$

Mas:

$$\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = r_\alpha^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha)\vec{r}_\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \left[ r_\alpha^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_\alpha)\vec{r}_\alpha \right]$$

Em componentes:

$$L_i = \sum_\alpha m_\alpha \left[ r_\alpha^2 \omega_i - \left( \sum_j \omega_j x_{\alpha j} \right) x_{\alpha i} \right]$$

$$= \sum_j \left[ \sum_\alpha m_\alpha \left( r_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right) \right] \omega_j$$

$$\Rightarrow L_i \equiv \sum_j I_{ij} \omega_j$$

onde :

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left( r_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right)$$

é o chamado TENSOR DE INÉRCIA. Suas componentes são:

$$I_{11} = \sum_\alpha m_\alpha ( r_\alpha^2 - x_{\alpha 1}^2 ) = \sum_\alpha m_\alpha ( y_\alpha^2 + z_\alpha^2 )$$

$$I_{22} = \sum_\alpha m_\alpha ( x_\alpha^2 + z_\alpha^2 )$$

$$I_{33} = \sum_\alpha m_\alpha ( x_\alpha^2 + y_\alpha^2 )$$

$$I_{12} = I_{21} = - \sum_\alpha m_\alpha x_\alpha y_\alpha$$

$$I_{13} = I_{31} = - \sum_\alpha m_\alpha x_\alpha z_\alpha$$

$$I_{23} = I_{32} = - \sum_\alpha m_\alpha y_\alpha z_\alpha$$

Note que esse é um tensor simétrico. Suas componentes têm dimensão de Massa × Comprimento² e dependem da escolha do sistema de coordenadas.

Os elementos diagonais são os <u>momentos de inércia</u> e os fora da diagonal são os <u>produtos de inércia</u>. Há apenas 6 números independentes num tensor simétrico.

No caso contínuo: $I_{11} = \int \rho(\vec{r}) (y^2 + z^2) dV$, etc.

A energia cinética de rotação também pode ser escrita em termos do tensor de inércia

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 = (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)$$

$$= \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)]$$

$$\Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_\alpha \vec{\omega} \cdot [\vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha] = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

ou

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i} L_i \omega_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_i I_{ij} \omega_j$$

Às vezes, escrevemos:

$$I_{ij} \longrightarrow \vec{\vec{I}} \text{ ou } \bar{\bar{I}} \text{ ou } \underset{\approx}{I}$$

e

$$\vec{L} = \vec{\vec{I}} \cdot \vec{\omega}$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega}$$

Cálculo do TI de um cubo (Fig. 11-1)

$$I_{11} = \rho \int dV (y^2+z^2) = \frac{M}{b^3} \int_0^b dx \int_0^b dy \int_0^b dz \, (y^2+z^2)$$

$$= \frac{2M}{b^3} \int_0^b dx \int_0^b dy \int_0^b dz \, (y^2) = \frac{2M}{b^3} \, b^2 \int_0^b y^2 \, dy$$

$$= \frac{2M}{b} \frac{b^3}{3} = \frac{2}{3} M b^2 = I_{22} = I_{33}$$

$$I_{12} = -\frac{M}{b^3} \int_0^b dx \int_0^b dy \int_0^b dz \, (xy) = -\frac{M}{b^2} \left[ \int_0^b dx \, x \right]^2$$

$$= -\frac{M}{b^2} \left[ \frac{b^2}{2} \right]^2 = -\frac{M b^2}{4} = I_{13} = I_{23}$$

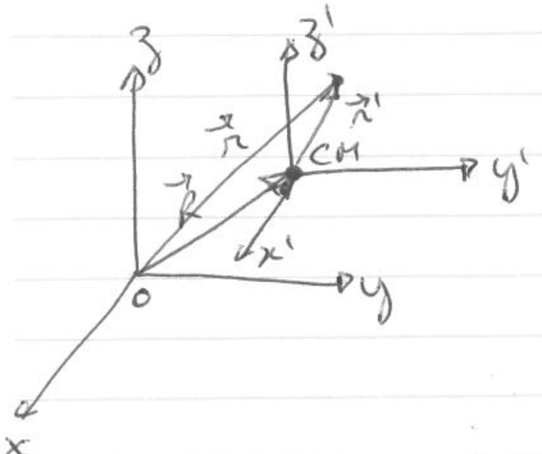
$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} M b^2 & -Mb^2/4 & -Mb^2/4 \\ & \frac{2}{3} M b^2 & -Mb^2/4 \\ & & (\frac{2}{3}) M b^2 \end{pmatrix} = M b^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}$$

## Teorema dos eixos paralelos

Sejam 2 sistemas de coordenadas de eixos paralelos, um dos quais tem sua origem no CM do sistema. Assim, podemos escrever:

$$\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{r}\,'_\alpha$$

onde $\vec{r}_\alpha$ é a posição da $\alpha$-ésima partícula no sistema genérico, $\vec{R}$ é a posição do CM nesse sistema e $\vec{r}\,'_\alpha$ é a posição da $\alpha$-ésima partícula em relação ao CM:




$$I_{0ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left( r_\alpha^2 \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right)$$

Mas:

$$r_\alpha^2 = r_\alpha'^2 + R^2 + 2\vec{r}\,'_\alpha \cdot \vec{R}$$

$$x_{\alpha i} x_{\alpha j} = (x'_{\alpha i} + X_i)(x'_{\alpha j} + X_j)$$
$$= x'_{\alpha i} x'_{\alpha j} + x'_{\alpha i} X_j + X_i x'_{\alpha j} + X_i X_j$$

Sulamericana

Notamos agora que os termos:

$$\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}'_\alpha = 0$$

$$\sum_\alpha m_\alpha x'_{\alpha i} = \sum_\alpha m_\alpha x'_{\alpha j} = 0$$

e ficamos com:

$$I_{0ij} = \sum_\alpha m_\alpha (r'^2_\alpha \delta_{ij} - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j})$$

$$+ \sum_\alpha m_\alpha (R^2 \delta_{ij} - X_i X_j)$$

$$\boxed{I_{0ij} = I_{cm ij} + M(R^2 \delta_{ij} - X_i X_j)}$$

A parte diagonal é conseqüência do teorema dos eixos paralelos conhecido da discussão de rotação em torno de um eixo fixo.

Exemplo: Calcular $I_{cm\,ij}$ para o cubo do exemplo anterior. Usando o teorema dos eixos paralelos:

$$\vec{R} = \frac{b}{2}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$$

$$\Rightarrow M(R^2\delta_{ij} - x_i x_j) = M\begin{bmatrix} 2b^2/4 & -b^2/4 & -b^2/4 \\ -b^2/4 & 2b^2/4 & -b^2/4 \\ -b^2/4 & -b^2/4 & 2b^2/4 \end{bmatrix}$$

$$= Mb^2\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{I}}_{cm} = \overline{\overline{I}}_{oo} - M(R^2\delta_{ij} - x_i x_j) = Mb^2\begin{bmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$- Mb^2\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} = Mb^2\begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{Mb^2}{6}\,\mathbb{1}$$

## Propriedades de transformação sob rotações

Sabemos que um vetor é uma quantidade tal que suas coordenadas se transformam de uma maneira bem definida sob rotações do sistema de coordenadas, a saber:

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j$$

Sabemos que a matriz $\lambda_{ij}$ é ortogonal, porque as rotações preservam o produto escalar:

$$\sum_i x'_i y'_i = \sum_i \sum_{j,k} \lambda_{ij} x_j \lambda_{ik} y_k = \sum_i x_i y_i$$

Isso só é válido para vetores genéricos se:

$$\sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} = \delta_{j,k} = \sum_i \lambda^T_{ji} \lambda_{ik}$$

ou, se considerarmos $\lambda_{ij}$ o elemento da matriz $\underset{\approx}{\lambda}$ (ou $\bar{\lambda}$)

$$\sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} = \left(\underset{\approx}{\lambda}^T \underset{\approx}{\lambda}\right)_{jk} = (\mathbb{1})_{jk}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{\approx}{\lambda}^T \underset{\approx}{\lambda} = \underset{\approx}{\mathbb{1}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underset{\approx}{\lambda}^{-1} = \underset{\approx}{\lambda}^T}$$

Mas $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ são vetores, portanto,

$$L'_i = \sum_j \lambda_{ij} L_j \Rightarrow L_i = \sum_j \lambda^T_{ij} L'_j = \sum_j \lambda_{ji} L'_j$$

$$\omega'_i = \sum_j \lambda_{ij} \omega_j \Rightarrow \omega_i = \sum_j \lambda_{ji} \omega'_j$$

Logo:

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \Longrightarrow L'_i = \sum_j I'_{ij} \omega'_j$$

onde:

$$\sum_j \lambda_{ij} L_j = \sum_k I'_{ik} \sum_l \lambda_{kl} \omega_l$$

Multiplicando ambos os lados por $\lambda_{im}$ e somando ~~se~~ sobre $i$:

$$\sum_j \underbrace{\left( \sum_i \lambda_{im} \lambda_{ij} \right)}_{\delta_{m,j}} L_j = \sum_{ilk} \lambda_{im} I'_{ik} \lambda_{kl} \omega_l$$

$$\Rightarrow L_m = \sum_l \left( \sum_{ik} \lambda_{im} I'_{ik} \lambda_{kl} \right) \omega_l$$

e, comparando com a equação acima, :

$$I_{ml} = \sum_{ik} \lambda^T_{mi} I'_{ik} \lambda_{kl} \Rightarrow \bar{\bar{I}} = \underset{\approx}{\lambda}^T \bar{\bar{I}}' \underset{\approx}{\lambda}$$

Analogamente: $I'_{ij} = \sum_{kl} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda^T_{lj} \Rightarrow \bar{\bar{I}}' = \bar{\bar{\lambda}}\, \bar{\bar{I}}\, \bar{\bar{\lambda}}^T$

De maneira geral, um tensor de ordem $n$ é uma quantidade com $n$ índices que se transforma segundo:

$$T'_{abcd\ldots} = \sum_{ijkl\ldots} \lambda_{ai} \lambda_{bj} \lambda_{ck} \lambda_{dl} \cdots T_{ijkl\ldots}$$

~~Note portanto que a situação é parecida~~

/ /

## Eixos principais

A forma geral de um tensor de inércia depende do sistema de coordenadas. Se houver um sistema de eixos no qual o tensor assume a forma diagonal isso se torna extremamente útil:

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = I_i \delta_{ij}$$

pois se $\vec{\omega}$ aponta ao longo dos eixos correspondentes, digamos o eixo $\hat{e}_m$

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j$$

$$\text{Se } \omega_j = \omega \delta_{jm} \Rightarrow L_i = \sum_j I_{ij} \omega \delta_{jm}$$

$$= I_{im} \omega = I_i \omega \delta_{im}$$

e $\vec{L}$ também aponta na direção de $\hat{e}_m$: $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

De maneira geral:

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j = I_i \omega_i$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2$$

As direções dos eixos que "diagonalizam" $I_{ij}$ são chamadas EIXOS PRINCIPAIS do corpo (para uma origem dada).

Vamos agora achar os eixos principais de um corpo. De maneira geral, o TI para um sistema qualquer de eixos não é diagonal. Vamos supor que $I_{ij}$ é dado para esse sistema de eixos genérico. Seja $\vec{\omega}$ uma velocidade angular que aponta na direção de um dos eixos principais. Como vimos, nesse caso $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$:

$$\Rightarrow \vec{L} = I \vec{\omega}$$

Mas:

$$\vec{L} = \overline{\overline{I}} \cdot \vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

ou, em componentes,

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j = I \omega_i$$

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

or equivalently:

$$\begin{pmatrix} I_{11}-I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22}-I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33}-I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = 0$$

que é um sistema de equações lineares homogêneas. A condição para que ele tenha uma solução é o anulamento do determinante da matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} I_{11}-I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22}-I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33}-I \end{vmatrix} = 0$$

Essa é uma equação cúbica, chamada equação secular. Veremos mais adiante que ela tem 3 raízes reais (e positivas). Cada raiz será o momento de Inércia $I_i$ em relação a um dos 3 eixos principais $\hat{e}_i$. Podemos achar os eixos facilmente achando a solução do sistema de equações lineares para o valor $I_i$ ($i = 1, 2, 3$). Essa solução é dada a menos de uma constante multiplicativa, ou seja, se $\omega_j^{(i)}$ é solução $K\omega_j^{(i)}$ também é. Se escolhermos um unitário na direção de $\vec{\omega}^{(i)}$, teremos o unitário procurado:

$$\hat{\omega}^{(i)} = \frac{\vec{\omega}^{(i)}}{|\vec{\omega}^{(i)}|}$$

**Exemplo**: Encontre os eixos principais para o cubo do primeiro exemplo:

$$I_{ij} = Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3-\lambda & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{3}-\lambda\right)^3 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}-\lambda\right)^3 - \frac{3}{16}\left(\frac{2}{3}-\lambda\right) - \frac{1}{32} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{6} \quad \lambda_2 = \frac{11}{12} \ ; \ \lambda_3 = \frac{11}{12}$$

$\lambda_1$:
$$\begin{pmatrix} 2/3-1/6 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3-1/6 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & \frac{2}{3}-1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$2\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = 0 \Rightarrow \omega_1 = (\omega_2 + \omega_3)/2$$
$$-\omega_1 + 2\omega_2 - \omega_3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) + 2\omega_2 - \omega_3 = 0$$

$$\Rightarrow 3\omega_2 - 3\omega_3 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \omega_3 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$$

$\hat{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \Rightarrow$ diagonal do cubo

$$2/3 - \frac{11}{12} = \frac{8-11}{12} = -\frac{1}{4}$$

$\lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$$

Isso gera um espaço 2D. Por exemplo:

$$\hat{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - \hat{y})$$

$$\hat{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z})$$

Os auto-valores são todos reais:

A equação secular é uma equação cúbica com coeficientes reais. Sabemos que pelo menos uma de suas raízes é real, mas não sabemos ainda se as outras 2 são reais ou pares de complexos conjugados. Vamos provar que se $I_{ij}$ é simétrico (e real), as raízes são todas reais.

Suponhamos que $I_k^*$ seja uma raiz com auto-vetor $\hat{\omega}^{(k)}$:

$$\bar{\bar{I}} \cdot \hat{\omega}^{(k)} = I_k \hat{\omega}^{(k)}$$

Ainda não sabemos se $I_k$ ou $\hat{\omega}^{(k)}$ são reais. Tomemos $(\hat{\omega}^{(k)*} \cdot)$ pela esquerda:

$$\hat{\omega}^{(k)*} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \hat{\omega}^{(k)} = I_k \hat{\omega}^{(k)*} \cdot \hat{\omega}^{(k)} \quad (1)$$

Tomando o complexo conjugado dessa equação (lembrando que $\bar{\bar{I}}$ é real):

$$\hat{\omega}^{(k)} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \hat{\omega}^{(k)*} = I_k^* \hat{\omega}^{(k)} \cdot \hat{\omega}^{(k)*} = I_k^* \hat{\omega}^{(k)*} \cdot \hat{\omega}^{(k)}$$

pela comutatividade do produto escalar. Mas

$$\vec{a} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \vec{b} = a_i I_{ij} b_j = a_i I_{ji} b_j = \vec{b} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \vec{a}$$

já que $I_{ij}$ é simétrico. Assim:

$$\hat{\omega}^{(k)*} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \hat{\omega}^{(k)} = I_k^* \hat{\omega}^{(k)*} \cdot \hat{\omega}^{(k)} \quad (2)$$

Sulamericana

Subtraindo (2) de (1):

$$(I_k - I_k^*)\, \hat{\omega}^{(k)*} \cdot \hat{\omega}^{(k)} = 0$$

Mas $\hat{\omega}^{(k)} = \sum_i \omega_i^{(k)} \hat{e}_i \Rightarrow \hat{\omega}^{(k)*} \cdot \hat{\omega}^{(k)} = \sum_i |\omega_i^{(k)}|^2 > 0$

Logo: $I_k = I_k^* \Rightarrow \boxed{I_k \in \mathbb{R}}$ C.Q.D.

Se os auto-valores são reais, também são os auto-vetores

Auto-vetores de auto-valores diferentes são ortogonais entre si.

Sejam dois auto-valores distintos

$$I_\ell \neq I_k$$

$$\bar{\bar{I}} \cdot \hat{\omega}^{(\ell)} = I_\ell\, \hat{\omega}^{(\ell)} \quad (3)$$

$$\bar{\bar{I}} \cdot \hat{\omega}^{(k)} = I_k\, \hat{\omega}^{(k)} \quad (4)$$

$(\hat{\omega}^{(k)} \cdot)(3)$ e $(\hat{\omega}^{(\ell)} \cdot)(4) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{\omega}^{(k)} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \hat{\omega}^{(\ell)} = I_\ell\, \hat{\omega}^{(k)} \cdot \hat{\omega}^{(\ell)} \quad (5)$$

$$\hat{\omega}^{(\ell)} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \hat{\omega}^{(k)} = I_k\, \hat{\omega}^{(\ell)} \cdot \hat{\omega}^{(k)} = I_k\, \hat{\omega}^{(k)} \cdot \hat{\omega}^{(\ell)}$$

Mas $\hat{\omega}^{(\ell)} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \hat{\omega}^{(k)} = \hat{\omega}^{(k)} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \hat{\omega}^{(\ell)} = I_k\, \hat{\omega}^{(k)} \cdot \hat{\omega}^{(\ell)} \quad (6)$

$(5) - (6) \Rightarrow (I_\ell - I_k)\, \hat{\omega}^{(k)} \cdot \hat{\omega}^{(\ell)} = 0$

Se $I_\ell \neq I_k \Rightarrow \boxed{\hat{\omega}^{(k)} \cdot \hat{\omega}^{(\ell)} = 0}$

C.Q.D.

Se 2 auto-valores são iguais (raiz dupla) pode-se sempre escolhê-los ortogonais entre si.

## Matriz de transformação para os eixos principais

A discussão anterior indica que se fizermos uma transformação de coordenadas para um sistema de eixos dados pelos 3 eixos principais, o tensor de inércia assumirá a forma diagonal no novo sistema de eixos. De fato, achemos a transformação $\lambda_{ij}$ para essa rotação. Suponhamos que

$$\hat{\omega}^{(k)} \qquad k = 1, 2, 3$$

são a 3 direções ortonormalizadas. Seja $\lambda_{ij}$ a transformação procurada. Portanto:

$$\bar{\bar{I}}' = \bar{\bar{\lambda}} \, \bar{\bar{I}} \, \bar{\bar{\lambda}}^T$$

e $\bar{\bar{I}}' = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ onde $I_k$ é o momento de inércia associado a $\hat{\omega}^{(k)}$

Como $\bar{\bar{\lambda}}^T = \bar{\bar{\lambda}}^{-1}$:

$$\bar{\bar{I}} \, \bar{\bar{\lambda}}^T = \bar{\bar{\lambda}}^T \, \bar{\bar{I}}' \Rightarrow I_{ij} \lambda^T_{jk} = \lambda^T_{il} I'_{lk} = \lambda^T_{ik} I_k \, (1)$$

onde usamos que $I'_{lk} = I_k \delta_{lk}$. Mas, se $\hat{\omega}^{(k)}$ é o eixo principal com $I_k$:

$$I_{ij} \omega_j^{(k)} = I_k \omega_i^{(k)} \, (2)$$

Comparando (1) e (2) vemos que se escolhermos

$$\lambda^T_{jk} = \omega_j^{(k)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lambda_{kj} = \omega_j^{(k)}}$$

a equação (1) será automaticamente satisfeita. Ou seja, a matriz $\lambda_{ij}$ que "gira" o sistema de coordenadas de modo a diagonalizar $I_{ij}$ é tal que SUAS LINHAS são as componentes dos auto-vetores normalizados a 1. A condição de ortonormalização é necessária para garantir que a matriz $\lambda_{ij}$ seja ortogonal:

$$\lambda_{ik} \lambda^T_{kj} = \underbrace{\lambda_{ik} \lambda_{jk}}_{} = \delta_{ij}$$

produto escalar das linhas $\underline{i}$ e $j$.

Exemplo: Achar a matriz $\lambda_{ij}$ que diagonaliza o TI do cubo:

Como já vimos:

$$I_1 = \frac{Mb^2}{6} \Rightarrow \hat{\omega}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})$$

$$I_2 = \frac{11 Mb^2}{12} \Rightarrow \hat{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{y})$$

$$I_3 = \frac{11}{12} Mb^2 \Rightarrow \hat{\omega}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{x}+\hat{y}-2\hat{z})$$

Logo:

$$\underset{\approx}{\lambda} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

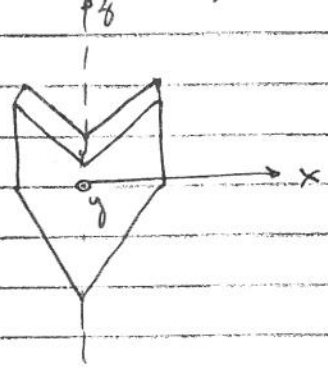
Mostre explicitamente que

$$\overline{\overline{I}}' = \overline{\overline{\lambda}}\, \overline{\overline{I}}\, \overline{\overline{\lambda}}^T$$

onde $\overline{\overline{I}}' = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$

Para a diagonalização, alguns argumentos de simetria são úteis:

1) Se um corpo tem um plano de simetria, o eixo perpendicular a esse plano é um eixo principal




← Plano y-z é um plano de simetria

$\rho(x,y,z) = \rho(-x,y,z)$

⇒ $\hat{x}$ é um eixo principal

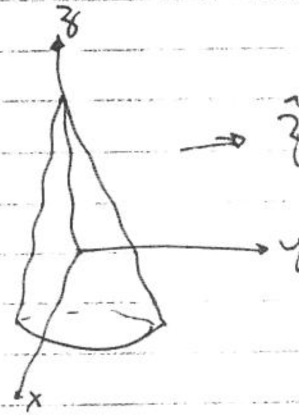
Isso porque: $I_{xy} = -\int \rho(x,y,z)\, dV\, (xy) = +\int \rho(-x,y,z)\, dV (xy)$

$= \int \rho(x,y,z)(xy)\, dV = -I_{xy} \Rightarrow I_{xy} = 0$

e $I_{xz} = 0$

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & I_{yz} \\ 0 & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{x} \text{ eixo principal}$$

2) Se um corpo tem um eixo de simetria, o eixo é principa[l] e o plano ~~perpendicu~~ perpendicular ao eixo é degenerado (tem dois eixos principais com o mesmo momento de inércia)




→ $\hat{z}$ é um eixo principal e o plano (xy) é degenerado

Seja $z$ o eixo de simetria.

$\Rightarrow \rho(x,y,z) \Rightarrow \rho(\rho,z)$ independente de $\theta$

onde usamos coordenadas cilíndricas. Portanto:

$$I_{xz} = -\int \rho(\rho,z)\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta\; xz = -\int \rho(\rho,z)\,dz\,\overset{\rho}{\vee}d\rho\,d\theta\; z\rho\cos\theta = 0$$

pois $\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = 0$

Analogamente: $I_{yz} = 0$

$$I_{xy} = -\int \rho(\rho,z)\,\rho^2 \sin\theta\cos\theta\,\overset{\rho}{\vee}d\rho\,dz\,d\theta = 0$$

pois $\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2\theta\,d\theta = 0$

Finalmente:

$$I_{xx} = \int \rho(\rho,z)\overset{\rho}{\vee}d\rho\,dz\,d\theta\,[z^2+y^2] = \int \rho(\rho,z)\overset{\rho}{\vee}d\rho\,dz\,d\theta\,[z^2+\rho^2\sin^2\theta]$$

$$= I_{yy} = \int \rho(\rho,z)\overset{\rho}{\vee}d\rho\,dz\,d\theta\,[z^2+\rho^2\cos^2\theta]$$

pois $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \pi$

$$\Rightarrow \overset{\Rightarrow}{I} = \begin{bmatrix} I_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\hat{z}$ é eixo principal

$(x,y)$ é um plano degenerado

## As equações de Euler

Como vimos, se a origem do sistema de coordenadas é fixa em relação ao sistema inercial ou coincide com o CM, o movimento de rotação de um corpo rígido é dado por:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Vamos imaginar agora um sistema de coordenadas de mesma origem, porém preso ao corpo e, portanto, girando junto com ele. Se denotarmos por $\frac{d'}{dt}$, a derivada temporal em relação a esse sistema girante (NOTE QUE AQUI MUDAMOS A NOTAÇÃO EM RELAÇÃO AO CAPÍTULO 10)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular instantânea comque o sistema girante gira em relação ao sistema fixo. Portanto:

$$\vec{N} = \frac{d'\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times (\overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \vec{\omega})$$

já que $\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \cdot \vec{\omega}$ e $\frac{d'\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

O sistema preso ao corpo mais conveniente é o de EIXOS PRINCIPAIS. Nesse caso, tomando as componentes em relação aos eixos principais $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$:

$$N_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 (I_3 \omega_3) - \omega_3 (I_2 \omega_2)$$

$$N_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 (I_1 \omega_1) - \omega_1 (I_3 \omega_3)$$

$$N_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 (I_2 \omega_2) - \omega_2 (I_1 \omega_1)$$

ou:

$$\boxed{\begin{aligned} N_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2 \omega_3 \\ N_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_1 \omega_3 \\ N_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1 \omega_2 \end{aligned}}$$

EQUAÇÕES DE EULER

Se tomarmos $(\vec{\omega}\,\cdot)$ com a equação original:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{N} = \vec{\omega} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega})$$

já que $\bar{\bar{I}}$ é simétrico. Portanto

$$\frac{dT_{rot}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{N}$$ que é o teorema de trabalho-energia para o movimento rotacional

Outra consequência dessas equações é que a rotação com velocidade angular constante e na ausência de torques só é possível em torno dos eixos principais. De fato:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \quad e \quad \vec{N} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \times (\overline{\overline{I}} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} \times \vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} \parallel \vec{L}$$

Mas já vimos que $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ se $\vec{\omega}, \vec{L} \parallel$ eixos principais. Uma roda de carro deve ser balanceada para garantir que seu eixo de rotação seja um eixo principal, do contrário, deverá haver torques externos sobre o eixo e as conseguintes reações sobre o resto do trem de potência, gerando vibrações, barulho, etc. A situação $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$ caracteriza o chamado equilíbrio dinâmico.

## Rotação livre:

Vamos analisar agora a rotação na AUSÊNCIA de torques $\vec{N} = \vec{0}$. Vamos considerar inicialmente o caso de um corpo simétrico, em que dois momentos de inércia principais são iguais: $I_1 = I_2$

Nesse caso, as equações de Euler ficam:

$$(I_1 - I_3)\,\omega_2 \omega_3 - I_1 \dot{\omega}_1 = 0$$

$$(I_3 - I_1)\,\omega_1 \omega_3 - I_1 \dot{\omega}_2 = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3(t) = \text{const.}$$

As duas primeiras equações ficam, definindo

$$\beta \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1} \quad \text{e} \quad \Omega \equiv \beta \omega_3$$

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2$$
$$\dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1$$

Derivando a primeira e usando a segunda e vice-versa:

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = \ddot{\omega}_2 + \Omega^2 \omega_2 = 0$$

$$\omega_1(t) = A_1 \cos(\Omega t + \delta_1)$$
$$\omega_2(t) = A_2 \cos(\Omega t + \delta_2)$$

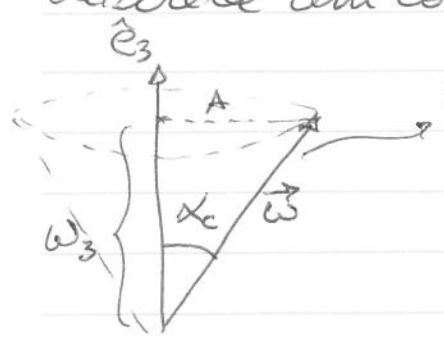
Voltando às equações de primeira ordem

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega\,\omega_2 \Rightarrow -A_1\Omega \sin(\Omega t + \delta_1) = -\Omega A_2 \cos(\Omega t + \delta_2)$$

Podemos escolher $\delta_1 = \delta$ e $\delta_2 = \delta - \pi$ e $A_1 = A_2 = A$.

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1(t) &= A\cos(\Omega t + \delta) \\ \omega_2(t) &= A\sin(\Omega t + \delta) \end{aligned}} \begin{aligned} &\Rightarrow \dot{\omega}_1 = -A\Omega \sin(\Omega t + \delta) \\ &\Rightarrow \dot{\omega}_2 = A\Omega \cos(\Omega t + \delta) \end{aligned}$$

que satisfazem as 2 equações de primeira ordem. Portanto, a projeção de $\vec{\omega}$ no plano $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ gira com velocidade angular $\Omega$ e módulo $A$. Como a projeção em $\hat{e}_3$, $\omega_3$ é constante, $\vec{\omega}$ descreve um cone com semi-ângulo $\alpha_c$.




CONE DO CORPO

$$\tan \alpha_c = \frac{A}{\omega_3}$$

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_3^2 + A^2}$$

$$\begin{cases} \omega_3 = \omega \cos \alpha_c \\ A = \omega \sin \alpha_c \end{cases}$$

Para tentar traçar o movimento do corpo no espaço é conveniente usar como referência o vetor momento angular $\vec{L}$ que, como $\vec{N}=0$, é constante no tempo. A outra constante do movimento é a energia cinética de rotação pois:

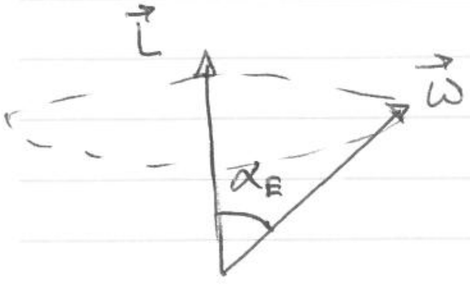
$$\frac{dT_{rot}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{N} = 0$$

Mas como:

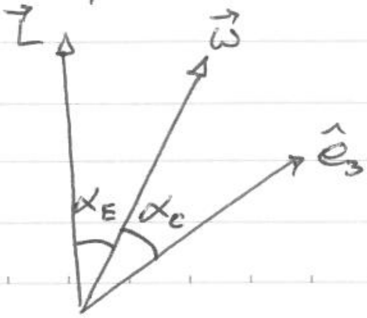
$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\omega L \cos\alpha_E$$

e como $|\vec{\omega}| = \text{const.}$ segue que o vetor $\vec{\omega}$ descreve um outro cone (CONE ESPACIAL) girando em torno de $\vec{L}$ com semi-ângulo $\alpha_E$:

$$\cos\alpha_E = \frac{2T}{\omega L}$$




Na verdade, podemos mostrar que os vetores $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ e $\hat{e}_3$ são sempre COPLANARES:




$$\Longleftrightarrow \vec{\omega} \cdot (\hat{e}_3 \times \vec{L}) = 0$$

Temos que:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$$

e:

$$\vec{L} = \bar{\bar{I}} \cdot \vec{\omega} = I_1 (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2) + I_3 \omega_3 \hat{e}_3$$

pois $I_1 = I_2$. Segue que:

$$\hat{e}_3 \times \vec{L} = I_1 (+\omega_1 \hat{e}_2 - \omega_2 \hat{e}_1) = I_1 (-\omega_2 \hat{e}_1 + \omega_1 \hat{e}_2)$$

Finalmente:

$$\vec{\omega} \cdot (\hat{e}_3 \times \vec{L}) = (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3) \cdot I_1 (-\omega_2 \hat{e}_1 + \omega_1 \hat{e}_2)$$

$$= I_1 (-\omega_1 \omega_2 + \omega_2 \omega_1) = 0$$

o que prova que $\vec{\omega}$, $\vec{L}$ e $\hat{e}_3$ são COPLANARES

Finalmente, como $\vec{\omega}$ determina o eixo instantâneo de rotação, pontos ao longo de $\vec{\omega}$ no sistema de eixos ligado ao corpo estão instantaneamente PARADOS. Portanto, dizemos que o CONE DO CORPO ROLA SEM DESLIZAR SOBRE O CONE ESPACIAL

VER FIGURA 11-11
VER APPLET NA PÁGINA DO CURSO

É possível relacionar $\alpha_C$ e $\alpha_E$. Como vimos

$$\cos\alpha_E = \frac{2T}{\omega L}$$

Mas:

$$\vec{L} = I_1(\omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2) + I_3\omega_3\hat{e}_3 = I_1(\vec{\omega} - \omega_3\hat{e}_3) + I_3\omega_3\hat{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{L} = I_1\vec{\omega} + \beta I_1\omega_3\hat{e}_3$$

$$\Rightarrow L^2 = I_1^2\omega^2 + \beta^2 I_1^2\omega_3^2 + 2\beta I_1^2\omega_3^2$$

$$\Rightarrow L^2 = I_1^2\left[\omega^2 + (\beta^2 + 2\beta)\omega^2\cos^2\alpha_C\right] \text{ pois } \omega_3 = \omega\cos\alpha_C$$

$$\boxed{\omega L = I_1\omega^2\left[1 + (\beta^2 + 2\beta)\cos^2\alpha_C\right]^{1/2}}$$

Além disso:

$$2T = \vec{\omega}\cdot\vec{L} = I_1\omega^2 + \beta I_1\omega_3^2 = I_1\omega^2 + \beta I_1\omega^2\cos^2\alpha_C$$

$$\Rightarrow \boxed{2T = I_1\omega^2\left[1 + \beta\cos^2\alpha_C\right]}$$

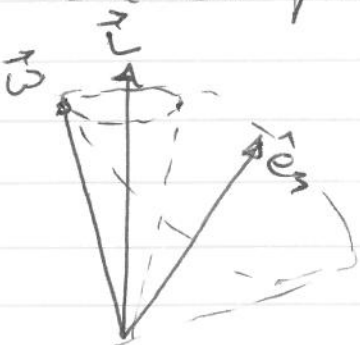
Finalmente:

$$\boxed{\cos\alpha_E = \frac{1 + \beta^2\cos^2\alpha_C}{\left[1 + (\beta^2 + 2\beta)\cos^2\alpha_C\right]^{1/2}}}$$ que não depende de $\omega$!

Da expressão:

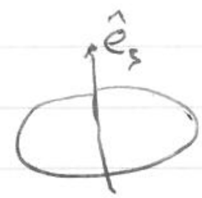
$$\vec{L} = I_1\vec{\omega} + \beta I_1 \omega_3 \hat{e}_3$$

vê-se que, se $\beta > 0$, a orientação relativa de $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ e $\hat{e}_3$ é tal que:

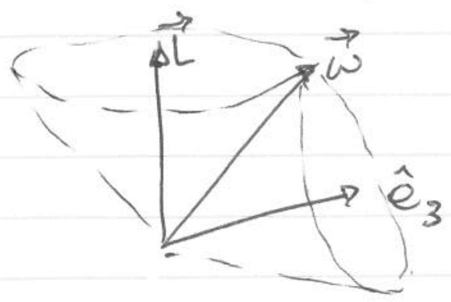



e o cone espacial fica dentro do cone do corpo.

$\beta > 0 \Rightarrow I_3 > I_1 \Rightarrow$ <u>objeto</u> <u>oblato</u>




Do contrário ($\beta < 0$), a orientação é outra




e o cone do corpo fica fora do cone espacial

$\beta < 0 \Rightarrow I_3 < I_1 \Rightarrow$ objeto <u>prolato</u>


e portanto o cone do corpo

Fica como exercício (11-27) mostrar que $\vec{\omega}$ e $\vec{e}_3$ giram em torno do $\vec{L}$ com velocidade angular:

$$\omega\left[1 + (\beta^2 + 2\beta)\cos^2\alpha_c\right]^{1/2} = \omega\left[\sin^2\alpha_c + \frac{I_3^2}{I_1^2}\cos^2\alpha_c\right]^{1/2} = \frac{L}{I_1}$$

Estabilidade de rotações livres

Sabemos que se (na ausência de torques) $\vec{\omega} \parallel \hat{e}_i \parallel \vec{L}$, ou seja, se um corpo gira em torno de um dos seus eixos principais, então $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$ e ele continua a girar nessa direção (EQUILÍBRIO DINÂMICO) pois

$$\bar{\bar{I}} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N} = 0$$

A pergunta que queremos responder é se esse equilíbrio é estável, ou seja, se $\vec{\omega}$ desviar um pouco de $\hat{e}_i$, esse desvio aumenta indefinidamente ou permanece pequeno. Vamos considerar o caso de um corpo genérico $I_3 > I_2 > I_1$ (já vimos que se $I_1 = I_2$, o equilíbrio em torno de $\hat{e}_3$ é estável). Suponhamos que $\vec{\omega}$ se desvia pouco de $\hat{e}_1$:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \delta_2 \hat{e}_2 + \delta_3 \hat{e}_3$$

$$\delta_1, \delta_2 \ll \omega_1$$

As equações de Euler são:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\delta_2 \delta_3 = 0$$

$$I_2 \dot{\delta}_2 + (I_1 - I_3)\delta_3 \omega_1 = 0$$

$$I_3 \dot{\delta}_3 + (I_2 - I_1)\delta_2 \omega_1 = 0$$

O termo $\delta_2\delta_3$ é de ordem 2 nas quantidades pequenas logo:

$$I_1 \dot{\omega}_1 \cong 0 \Rightarrow \omega_1 \cong \omega_{10} = \text{constante.}$$

Além disso:

$$\dot{\delta}_2 = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2}\right)\omega_{10}\,\delta_3 \qquad (1)$$

$$\dot{\delta}_3 = \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3}\right)\omega_{10}\,\delta_2 \qquad (2)$$

Diferenciando (1) em relação ao tempo e usando (2):

$$\ddot{\delta}_2 = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2}\right)\omega_{10}\left(\frac{I_1 - I_2}{I_3}\right)\omega_{10}\,\delta_2$$

$$\Rightarrow \ddot{\delta}_2 + \left[\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)\,\omega_{10}^2}{I_2 I_3}\right]\delta_2 = 0$$

Analogamente:

$$\ddot{\delta}_3 + \underbrace{\left[\frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)\,\omega_{10}^2}{I_2 I_3}\right]}_{\equiv\,\Omega_1^2}\delta_3 = 0$$

Como $I_1 - I_3 < 0$ e $I_1 - I_2 < 0 \Rightarrow \Omega_1^2 > 0$ e as soluções ~~os movimento~~ são oscilatórias

$$\delta_2(t) = \omega_{20}\cos(\Omega_1 t + \alpha_2)$$

$$\delta_3(t) = \omega_{30}\cos(\Omega_1 t + \alpha_3)$$

e os desvios $\delta_2(t)$ e $\delta_3(t)$ permanecem pequenos. De maneira análoga, podemos analisar o movimento em torno de $\hat{e}_3$ e obteremos:

$$\vec{\omega} = \delta_1\hat{e}_1 + \delta_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3 \qquad \delta_1, \delta_2 << \omega_3$$

$$\Rightarrow \omega_3 \cong \omega_{30} = \text{const.}$$

$$\ddot{\delta}_1 + \Omega_3^2\,\delta_1 = 0$$

$$\ddot{\delta}_2 + \Omega_3^2\,\delta_2 = 0$$

$$\text{onde } \Omega_3^2 = \left[\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}\,\omega_{30}^2\right] > 0$$

pois $I_3 > I_1$ e $I_3 > I_2$. O movimento é ESTÁVEL pelo mesmo motivo.

Entretanto, uma análise para o caso

$$\vec{\omega} = \delta_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \delta_3\hat{e}_3 \qquad \delta_1, \delta_3 << \omega_2$$

revela que $\omega_2 \cong \omega_{20} = \text{const.}$ mas

$$\ddot{\delta}_1 + \left[\frac{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)\,\omega_{20}^2}{I_1 I_3}\right]\delta_1 = 0$$

$$\ddot{\delta}_3 + \underbrace{\left[\frac{(I_2 - I_1)(I_2 - I_3)\,\omega_{20}^2}{I_1 I_3}\right]}_{\Omega_2^2}\delta_3 = 0$$

onde:

$$\Omega_2^2 < 0 \text{ pois } I_2 > I_1 \text{ mas } I_2 < I_3 !$$

As soluções são exponenciais:

$$\delta_1(t) = A\, e^{|\Omega_2| t} + B\, e^{-|\Omega_2| t}$$

$$\text{onde } |\Omega_2| = \left[\frac{(I_1 - I_2)(I_2 - I_3)}{I_1 I_3}\right]^{1/2} \omega_{20} \in \mathbb{R}$$

e o movimento é instável!

Se $I_1 = I_2$, e $\vec{\omega}$ é quase paralelo inicialmente a $\hat{e}_1$, a equação (2) acima fica:

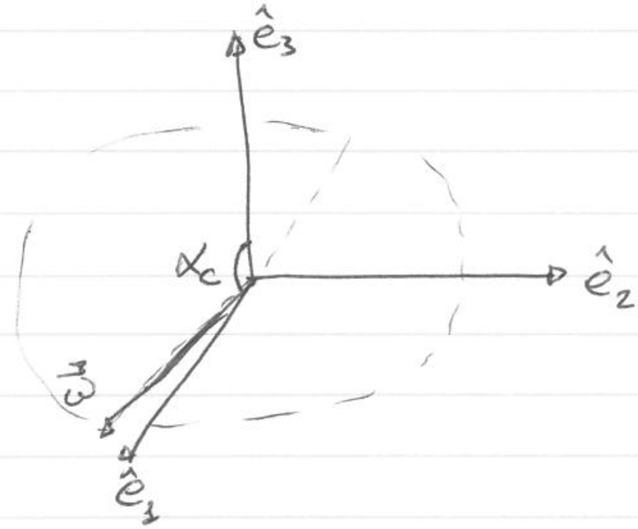
$$\dot{\delta}_3 = 0 \Rightarrow \delta_{3} = \delta_{30} = \text{const. e}$$

e (1) fica:

$$\dot{\delta}_2 = \beta\,\omega_{10}\,\delta_{30} \Rightarrow \delta_2(t) = \delta_{20} + \beta\,\omega_{10}\,\delta_{30}\, t$$

que também cresce (embora apenas linearmente) e o movimento é instável.

Da mesma maneira, se $\vec{\omega}$ é quase paralelo a $\hat{e}_2$ $\delta_1(t) = \delta_{10} + At$ e o movimento é instável. Apenas o movimento próximo a $\hat{e}_3$ é estável. Isso poderia ter sido concluído de cara do movimento do cone do corpo:




$\alpha_c \cong \frac{\pi}{2}$

Uma maneira útil de visualizar esses resultados é utilizar as constantes do movimento $\vec{L}$ e $T_{rot}$ em termos das componentes e $\vec{L}$:

$$T_{rot} = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \quad (3)$$

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad (4)$$

A eq. (4) define um círculo de raio $L$ no espaço $(L_1, L_2, L_3)$ e a equação (3) define um elipsóide de semi-eixos:

$$\sqrt{2TI_1}\,, \sqrt{2TI_2}\,, \sqrt{2TI_3}$$

Se $I_3 > I_2 > I_1$ é fácil mostrar que

$$\sqrt{2TI_1} < L < \sqrt{2TI_3},$$

ou seja, o raio da esfera (4) é maior que o menor semi-eixo e menor que o maior semi-eixo do elipsoide. Portanto, esfera e elipsoide se interceptam. Variando L no intervalo acima é possível discutir qualitativamente as curvas que correspondem a essa intersecção e entender que o movimento é próximo a $I_1$ e $I_3$ mas se desvia de $I_2$, embora seja sempre periódico. (VER FIGURAS).

# Ângulos de Euler

Os ângulos de Euler são definidos de maneira a descrever a orientação relativa entre 2 sistemas de eixos de origem comum. Na figura que analisamos (figura 11.4 do Symon), esses eixos são o sistema $xyz$, suposto fixo no espaço, e o sistema $123$, suposto preso ao corpo e girando com ele. Num dado instante uma orientação arbitrária de $123$ em relação a $xyz$ é definida por 3 ângulos $\theta$, $\phi$ e $\psi$.

- O ângulo $\underline{\theta}$ é o ângulo entre $\hat{z}$ e $\hat{e}_3$

- O plano 12 intercepta o plano $xy$ ao longo de uma linha chamada LINHA DE NÓS. O ângulo entre $\hat{x}$ e a linha de nós é $\phi$.

- Finalmente, o ângulo entre $\hat{e}_1$ e a linha de nós é $\underline{\psi}$

A figura também mostra um sistema auxiliar de eixos $\xi$ (ao longo da linha de nós), $\zeta$ (que coincide com o eixo $\hat{e}_3$) e $\eta$ (que pertence ao plano 12 e é normal a $\hat{\xi}$ e $\hat{\zeta}$.

É interessante notar que se pode partir de $xyz$ e chegar a $123$ através de 3 rotações:

- Uma rotação de $\phi$ em torno de $\hat{z}$
- Uma rotação de $\theta$ em torno da LINHA DE NÓS
- Uma rotação de $\psi$ em torno de $3$

Quando os ângulos de Euler variam, varia a orientação relativa de $123$ e $xyz$. Sejam as taxas de variação temporal dos 3 ângulos de Euler $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$.

- Se apenas $\phi$ variasse a velocidade angular instantânea seria:

$$\vec{\omega}_\phi = \dot{\phi}\,\hat{z}$$

- Se apenas $\theta$ variasse, teríamos:

$$\vec{\omega}_\theta = \dot{\theta}\,\hat{\xi}$$

- E se apenas $\psi$ variasse, teríamos:

$$\vec{\omega}_\psi = \dot{\psi}\,\hat{e}_3$$

De maneira geral, temos: $\boxed{\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{\xi} + \dot{\psi}\,\hat{e}_3}$

Queremos expressar $\vec{\omega}$ em termos de $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$

Da geometria da figura:

$$\hat{\xi} = \cos\psi\,\hat{e}_1 - \sin\psi\,\hat{e}_2$$

$$\hat{\eta} = \sin\psi\,\hat{e}_1 + \cos\psi\,\hat{e}_2$$

Além disso:

$$\hat{z} = \cos\theta\,\hat{e}_3 + \sin\theta\,\hat{\eta}$$

$$\Rightarrow \hat{z} = \sin\theta\sin\psi\,\hat{e}_1 + \sin\theta\cos\psi\,\hat{e}_2 + \cos\theta\,\hat{e}_3$$

Logo:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}(\sin\theta\sin\psi\,\hat{e}_1 + \sin\theta\cos\psi\,\hat{e}_2 + \cos\theta\,\hat{e}_3)$$

$$+\dot{\theta}(\cos\psi\,\hat{e}_1 - \sin\psi\,\hat{e}_2)$$

$$+\dot{\psi}\,\hat{e}_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{\omega} = {} & (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)\,\hat{e}_1 \\ & + (-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)\,\hat{e}_2 \\ & + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\,\hat{e}_3\end{aligned}}$$

# Energia cinética em termos de ângulos de Euler

Para uma descrição Lagrangiana, vamos precisar da expressão de energia cinética de rotação de um corpo rígido. O caso geral é bastante complicado, mas vamos focar no caso simétrico $I_1 = I_2$. Nesse caso:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}\sum_i I_i \omega_i^2$$

no sistema de eixos principais e

$$T = \frac{1}{2} I_1(\omega_1^2+\omega_2^2) + \frac{I_3}{2}\omega_3^2$$

Mas:

$$\omega_1^2+\omega_2^2 = (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi)^2 + (-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi)^2$$

$$= \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta$$

$$\omega_3^2 = (\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2$$

## O pião simétrico

Vamos resolver o movimento de um corpo (pião) simétrico ($I_1 = I_2$), que tem um ponto que NÃO É O CENTRO DE MASSA fixo no espaço. No caso do pião, esse ponto é geralmente sua base. Vamos definir momento angular e torque em relação a esse ponto fixo.

A energia potencial desse sistema é a massa do corpo $M$, vezes $g$, vezes a altura do CENTRO DE MASSA. Se chamamos a distância do ponto fixo ao CM de $\underline{h}$ e descrevermos a orientação angular do corpo através de ângulos de Euler (tomando a direção $\hat{e}_3$ como o eixo de simetria do corpo), a altura do CM é $h\cos\theta$

$$\Rightarrow V(\theta) = Mgh\cos\theta$$

e a Lagrangiana fica:

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - Mgh\cos\theta$$

De cara, identificamos 3 constantes do movimento:

- $p_\phi$ e $p_\psi$, porque $L$ não depende de $\phi$ e $\psi$ (variáveis ignoráveis ou cíclicas)
- Energia total, porque $L$ não depende do tempo e o sistema de coordenadas é fixo. (sistema conservativo)

Portanto:

$$p_\psi = I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = \text{const.} = I_3\,\omega_3 \qquad (1)$$

$$p_\phi = I_1\,\dot\phi\sin^2\theta + I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\cos\theta = \text{const.} \qquad (2)$$

$$E = \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 + Mgh\cos\theta = \text{const.}$$

É interessante notar que o torque do peso tende a girar o corpo em torno da LINHA DE NÓS. $p_\phi$ e $p_\psi$ são os momentos angulares do corpo nas direções $\hat{z}_\phi\,(p_\phi)$ e $\hat{e}_3\,(p_\psi)$ que são sempre PERPENDICULARES À LINHA DE NÓS E PORTANTO AO TORQUE, e por isso são conservados.
Note também que <u>$\omega_3$ é constante</u>.

Podemos agora usar (1) e (2) trocar a dependência com $\dot\phi$ e $\dot\psi$ na energia por uma dependência com $\theta$ apenas. De fato:

$$\dot\psi + \dot\phi\cos\theta = \frac{p_\psi}{I_3} \qquad (3)$$

e $$I_1\,\dot\phi\sin^2\theta = p_\phi - I_3\cos\theta\left(\frac{p_\psi}{I_3}\right)$$

$$\Rightarrow \dot\phi = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} \qquad (4)$$

Levando (3) e (4) na expressão da energia:

$$E = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + Mgh\cos\theta + \frac{p_\psi^2}{2I_3} \quad (5)$$

Definindo a quantidade $E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}$

$$E' = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + Mgh\cos\theta = \text{const.} \quad (6)$$

O problema agora é análogo a um problema conservativo uni-dimensional com potencial:

$$V'(\theta) = \frac{1}{2I_1}\left(\frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + Mgh\cos\theta$$

$$E' = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + V'(\theta)$$

$p_\phi$, $p_\psi$ e $E$ (e, portanto, $E'$) são determinados pelas condições iniciais. Assim:

$$t = \int \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \sqrt{\frac{I_1}{2}} \int_{\theta(0)}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{E' - V'(\theta)}}$$

que nos dá, após inversão, $\theta(t)$. Levando $\theta(t)$ em (4) pode-se, em princípio, obter $\phi(t)$. Finalmente, levando $\theta(t)$ e $\phi(t)$ em (3), obtemos $\psi(t)$ e o problema foi reduzido a quadraturas. As integrais são, no entanto, relacionadas a integrais elípticas

Vamos obter uma compreensão mais analítica do movimento. Começamos pela forma genérica da função $V'(\theta)$ (para $p_\phi$ e $p_\psi$ genéricos)

(FIGURA 11-14)

É fácil ver que, por causa do fator $\frac{1}{\sin^2\theta}$, $V'(\theta)$ diverge quando $\theta \to 0$ e $\theta = \pi$. Além disso, há um mínimo num valor $\theta = \theta_0$ determinado por

$$\left.\frac{dV'(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = \frac{1}{I_1}\left(\frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right)\left(\frac{p_\psi\sin^2\theta_0 - \cos\theta_0(p_\phi - p_\psi\cos\theta_0)}{\sin^2\theta_0}\right)$$

$$- Mgh\sin\theta_0$$

$$= \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta_0)(p_\psi - p_\phi\cos\theta_0)}{I_1\sin^3\theta_0} - Mgh\sin\theta_0 = 0 \qquad (7)$$

Podemos analisar o movimento em analogia ao que foi feito no caso do potencial central.

- Para valores genéricos de energia $E'$ ($E_1'$ na figura), o movimento em $\theta$ corresponde a oscilações entre os pontos de retorno $\theta_1$ e $\theta_2$ dados por:

$$E' = V'(\theta_{1,2})$$

ou seja, a inclinação do pião em relação à vertical fica confinada ao intervalo $[\theta_1, \theta_2]$.

- Se $E' = V_{min} = E_2'$ (ver figura), onde $V_{min} = V'(\theta_0)$ o valor de $\theta$ é constante e igual a $\theta_0$. A inclinação do pião é fixa e ele faz um movimento de precessão em torno de $\hat{z}$ (PRECESSÃO REGULAR)

com velocidade angular:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta_0}{I_1 \sin^2\theta_0}$$

Podemos nos livrar da dependência com $p_\phi$ na expressão acima. De fato, definindo:

$$\beta \equiv p_\phi - p_\psi \cos\theta_0 \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\beta}{I_1 \sin^2\theta_0}$$

e levando em (7):

$$\beta\left[p_\psi - (\beta + p_\psi \cos\theta_0)\cos\theta_0\right] = Mgh\, I_1 \sin^4\theta_0$$

$$\Rightarrow \cos\theta_0\, \beta^2 - p_\psi \sin^2\theta_0\, \beta + Mgh\, I_1 \sin^4\theta_0$$

ou:

$$\beta = \frac{p_\psi \sin^2\theta_0 \pm \left[p_\psi^2 \sin^4\theta_0 - 4Mgh\, I_1 \cos\theta_0 \sin^4\theta_0\right]^{1/2}}{2\cos\theta_0}$$

Tirando $p_\psi^2 \sin^4\theta_0$ para fora da raiz quadrada

$$\boxed{\beta = \frac{p_\psi \sin^2\theta_0}{2\cos\theta_0}\left[1 \pm \left(1 - \frac{4Mgh\, I_1}{p_\psi^2}\cos\theta_0\right)^{1/2}\right]} \quad (8)$$

que só depende de $p_\psi = I_3\omega_3$ e $\theta_0$.

Se $\theta_0 > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta_0 < 0$ e o argumento da raiz é sempre positivo. Se $\theta_0 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta_0 > 0$ e o argumento da raiz só é positivo se:

$$p_\psi^2 \geq 4MghI_1\cos\theta_0$$

ou:

$$\omega_3 \geq \frac{2}{I_3}\sqrt{MghI_1\cos\theta_0} \equiv \omega_{min} \qquad (9)$$

Assim, a precessão regular só é possível se o pião girar suficientemente rápido. Nesse caso, há 2 velocidades angulares de precessão (PRECESSÃO RÁPIDA E LENTA), correspondendo às 2 raízes da equação para $\beta$. Quando $\omega_3 \gg \omega_{min}$

$$\left(1 - \frac{4MghI_1\cos\theta_0}{I_3^2\omega_3^2}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{\omega_{min}^2}{\omega_3^2}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{\omega_{min}^2}{2\omega_3^2}$$

$$\beta = \frac{I_3\omega_3\sin^2\theta_0}{2\cos\theta_0} \times \begin{cases} 2 \\ \dfrac{\omega_{min}^2}{2\omega_3^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta_r = \frac{I_3\omega_3\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0} \Rightarrow \boxed{\dot{\phi}_r = \frac{I_3\omega_3}{I_1\cos\theta_0} \quad \text{(PRECESSÃO RÁPIDA)} \quad (10)}$$

ou:

$$\beta_e = \frac{I_3 \sin^2\theta_0}{4\,\omega_3 \cos\theta_0}\,\omega_{min}^2 = \frac{I_3 \sin^2\theta_0}{4\,\omega_3 \cos\theta_0}\,\frac{4\,Mgh\,I_1 \cos\theta_0}{I_3^2}$$

$$\beta_e = \frac{I_1}{I_3}\,\frac{Mgh}{\omega_3}\,\sin^2\theta_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\phi}_e = \frac{Mgh}{I_3\,\omega_3} \quad \text{(PRECESSÃO LENTA)} \qquad (11)}$$

As condições iniciais que se realizam na prática geralmente são as que levam à PRECESSÃO LENTA.

Se $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$ (nesse caso é preciso fixar a base do pião para que ele não caia) a raiz quadrada em (8) é sempre maior que 1 e $\beta$ (e portanto $\dot{\phi}$) tem sinais tais que:

$$\mathrm{sgn}(\beta_e) = -\,\mathrm{sgn}(p_\psi) = -\,\mathrm{sgn}(\omega_3) \quad \text{e}$$

$$\mathrm{sgn}(\beta_r) = +\,\mathrm{sgn}(\omega_3)$$

(note que $\cos\theta_0$ é negativo e que $\beta_+ = \beta_e$ e $\beta_- = \beta_r$ nesse caso). Assim, a precessão lenta é oposta a $\omega_3$ e a rápida tem o mesmo sinal que $\omega_3$.

OPCIONAL

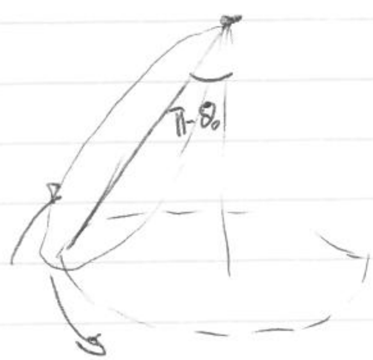
Quando $\omega_3 \to \infty$:

$$(\ )^{1/2} \cong \sqrt{\frac{4MghI_1|\cos\theta_0|}{I_3^2\omega_3^2}} = \frac{2}{I_3\omega_3}\sqrt{MghI_1|\cos\theta_0|}$$

$$\Rightarrow \beta_{r,e} = \pm \frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\sqrt{MghI_1|\cos\theta_0|}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \mp \sqrt{\frac{Mgh}{I_1|\cos\theta_0|}}$$

que é velocidade de precessão regular do pêndulo físico esférico.



No caso genérico em que $E' > V(\theta_0)$ o ângulo $\theta$ varia com o tempo. Nesse caso, ocorre o que chamamos de "nutação".

Quando há NUTAÇÃO a velocidade angular $\dot{\phi}$ varia com o tempo:

$$\dot{\phi} = \frac{P_\phi - P_\psi \cos\theta(t)}{I_1 \sin^2\theta(t)}$$

Dependendo dos valores de $P_\phi$, $P_\psi$ e $E'$ pode acontecer de haver um valor de $\theta = \theta_3 \in [\theta_1, \theta_2]$ no qual $\dot{\phi}$ troca de sinal, ou seja:

$$\dot{\phi} = (P_\phi - P_\psi \cos\theta_3)/I_1 \sin^2\theta_3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta_3 = \frac{P_\phi}{P_\psi}}$$

De maneira geral há 3 possibilidades (ver figura 11.15)(Symon 11.7)

1) Se não existe $\theta_3 \in [\theta_1, \theta_2]$, então $\dot{\phi}$ tem sempre o mesmo sinal que $\omega_3$ (caso (a))

2) Se existe $\theta_3 \in [\theta_1, \theta_2]$, então $\dot{\phi}$ troca de sinal durante a nutação (caso (b))
Nesse caso, $\dot{\phi}$ tem o mesmo sinal que $\omega_3$ para $\theta \in [\theta_3, \theta_2]$ e o sinal oposto quando $\theta \in [\theta_1, \theta_3]$

3) $\theta_3 = \theta_1$ (caso (c)). Nesse caso $\dot{\phi} = 0$ em $\theta = \theta_1 = \theta_3$ e o movimento apresenta cúspides na inclinação menor (mais próxima à vertical).

## Observações:

1) As condições iniciais comuns de se "soltar" o pião girando em torno de $\hat{e}_3$ a partir de um ângulo inicial $\theta_1$ correspondem ao caso limite (3) acima. De fato, nesse caso, as condições iniciais são

$$\theta = \theta_1 \ , \ \dot{\theta} = 0 \ , \ \dot{\phi} = 0 \ , \ \dot{\psi} = \omega_3 \ (\text{pois } \dot{\phi} = 0)$$

$$\Rightarrow p_\psi = I_3 \omega_3$$

$$p_\phi = I_3 \cos\theta_1 \, \omega_3 = p_\psi \cos\theta_1$$

$$E' = Mgh\cos\theta_1$$

$$V'(\theta) = \frac{p_\psi^2}{2I_1}\left(\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + Mgh\cos\theta$$

Claramente, $\theta_1$ é um ponto de retorno

$$V'(\theta_1) = Mgh\cos\theta_1 = E'$$

e em $\theta_1$, $\beta\Big|_{\theta=\theta_1} = p_\phi - p_\psi \cos\theta_1 = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = 0 \Rightarrow \theta_1 = \theta_3$

2) A situação (1) pode ser obtida com

$$\theta(0) = \theta_1 \ , \ \dot{\phi} \geqslant 0 \ , \ \dot{\theta} = 0 \ , \ \dot{\psi} > 0 \Rightarrow p_\phi > p_\psi \Rightarrow \nexists\, \theta_3 \in [\theta_1, \theta_2]$$

e a situação (2) com:

$$\theta(0) = \theta_1 \ , \ \dot{\phi} < 0 \ , \ \dot{\theta} = 0 \ , \ \dot{\psi} > 0 \Rightarrow p_\phi < p_\psi \Rightarrow \exists\, \theta_3 \in [\theta_1, \theta_2]$$

3) Na prática, o atrito no ponto fixo faz com que a amplitude de nutação diminua rapidamente e o movimento tende assintoticamente a uma precessão regular.

O PIÃO DORMENTE

Uma situação importante corresponde às condições iniciais de um pião posto a girar em torno de seu eixo $\hat{e}_3$ na posição vertical:

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\psi}(0) + \dot{\phi}(0) = \omega_3$$

Nesse caso a linha de nós é indeterminada e $\psi + \phi$ é o ângulo entre $\hat{e}_1$ e $\hat{x}$, seus valores separados sendo indeterminados. Assim:

$$p_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = I_3\omega_3$$

$$p_\phi = p_\psi \qquad E' = Mgh$$

$$V'(\theta) = \frac{I_3^2\omega_3^2}{2I_1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + Mgh\cos\theta$$
$$= \frac{I_3^2\omega_3^2}{2I_1}\left[\tan^2\frac{\theta}{2} + \alpha\cos\theta\right]$$

onde $\alpha = \dfrac{2MghI_1}{I_3^2\omega_3^2}$ e usamos que $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\dfrac{\theta}{2}$

A forma de $V'(\theta)$ pode ser vista da figura (Symon 11.8). O ponto $\theta = 0$ é um ponto de equilíbrio:

$$\left.\frac{dV'(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{I_3^2\omega_3^2}{2I_1}\left[\tan\frac{\theta}{2}\sec^2\frac{\theta}{2} - \alpha\sin\theta\right]\Bigg|_{\theta=0} = 0$$

e sua estabilidade é determinada por

$$\left.\frac{d^2V'(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = \frac{I_3^2\omega_3^2}{2I_1}\left[\frac{1}{2}\sec^4\frac{\theta}{2} + \tan^2\frac{\theta}{2}\sec^2\frac{\theta}{2} - \alpha\cos\theta\right]\Bigg|_{\theta=0}$$

$$= \frac{I_3^2\omega_3^2}{2I_1}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)$$

Se $\alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\frac{d^2V'(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} > 0$ e o equilíbrio é estável. Do contrário, o equilíbrio é instável. Assim, há instabilidade se:

$$\alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2MghI_1}{I_3^2\omega_3^2} > \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_3 < \frac{2}{I_3}\sqrt{MghI_1} = \omega_{min}$$

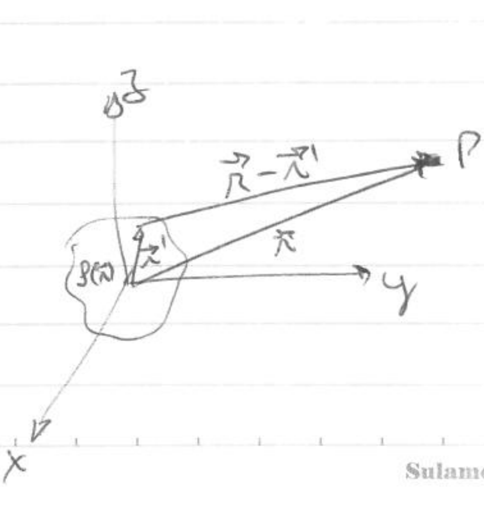
que, na verdade, é o mesmo $\omega_{min}$ anterior calculado em $\theta_0 = 0$.
Na prática, se inicialmente $\omega_3 > \omega_{min}$, o atrito irá diminuí-la até que $\omega_3 = \omega_{min}$ e o pião caia.

## A precessão dos equinócios

Uma aplicação importante da dinâmica de corpos simétricos é a precessão dos equinócios. A Terra é um corpo oblato com eixo de simetria praticamente coincidente ~~com~~ com seu eixo de rotação. Esse eixo é inclinado de $23^\circ 27'$ em relação à normal à ECLÍTICA, ou seja, ao plano definido pela órbita de revolução da Terra em torno do Sol. O Sol exerce um torque sobre a Terra cujo efeito é tentar girar o seu eixo da Terra no sentido de fazê-lo coincidir com a normal à ECLÍTICA. Sob a ação desse torque, como o pião sob a ação do peso, o eixo da Terra realiza uma precessão regular em torno da normal à eclítica. A Lua tem um efeito semelhante, que se soma ao efeito do Sol. Vamos estudar esse fenômeno.

Começamos por calcular o potencial gravitacional de ~~um corpo de massa $M$, sobre~~ uma distribuição de massa em torno da origem dada por $\rho(\vec{r}')$. Seja $\vec{r}$ o ponto onde queremos achar $V(\vec{r})$:

$$V(\vec{r}) = -G\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$



Sabemos que $\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \dfrac{1}{[r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma]^{1/2}}$

onde $\gamma$ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ tem uma expansão em Polinômios de Legendre:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{l} P_l(\cos\gamma) \qquad (r' < r)$$

Podemos calcular os primeiros termos da expansão

$l=0$:

$$\int d^3r'\, \rho(\vec{r}')\,\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\int d^3r'\, \rho(\vec{r}') = \frac{m}{r}$$

onde $m$ é a massa total da distribuição (no nosso caso, a massa da Terra).

$l=1$:

$$\int d^3r'\, \frac{r' P_1(\cos\gamma)}{r^2}\rho(\vec{r}') = \frac{1}{r^2}\int d^3r'\, r'\cos\gamma\, \rho(\vec{r}')$$

$$= \frac{1}{r^3}\int d^3r'\, \vec{r}\cdot\vec{r}'\,\rho(\vec{r}') = \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\left[\int d^3r'\, \vec{r}'\,\rho(\vec{r}')\right]$$

Se tomarmos a origem do sistema de coordenadas no centro de massa da distribuição (centro da Terra):

$$\int d^3r'\, \vec{r}'\rho(\vec{r}') = M\vec{R} = 0$$ onde $\vec{R}$ é a posição do centro de massa

$\underline{l = 2}$: $P_2(\cos\gamma) = \frac{1}{2}(3\cos^2\gamma - 1)$

$$\frac{1}{2r^3}\int d^3r'\, \rho(\vec{r}')\, r'^2 (3\cos^2\gamma - 1)$$

Vamos escolher o sistema de coordenadas de tal forma que o plano da eclítica seja o plano $xy$. Assim:

$$\vec{r}' = r'(\sin\theta'\cos\phi'\,\hat{x} + \sin\theta'\sin\phi'\,\hat{y} + \cos\theta'\,\hat{z})$$

$$\vec{r} = r(\cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y})$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r r'} = \cos\gamma = \sin\theta'(\cos\phi'\cos\phi + \sin\phi'\sin\phi)$$
$$= \sin\theta'\cos(\phi - \phi')$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2r^3}\int d^3r'\, \rho(\vec{r}')\, r'^2\left[3\sin^2\theta'\cos^2(\phi-\phi') - 1\right] \equiv \frac{1}{2r^2} f(\phi)$$

onde $f(\phi)$ é uma função apenas do ângulo $\phi$ entre a posição do Sol e o eixo $\hat{x}$:


Vamos assumir uma órbita aproximadamente circular da Terra em torno do Sol e, portanto, do Sol em torno da Terra.

Como veremos depois, a taxa de precessão angular é muito menor que a taxa de varredura da órbita da Terra (ou o período de precessão é muito maior que um ano).

Portanto, podemos em ótima aproximação tomar a média sobre a órbita de revolução

$$f(\phi) \longrightarrow \int_0^{2\pi} f(\phi) \frac{d\phi}{2\pi} = \langle f(\phi) \rangle$$

Assim:

$$\int d^3r' \rho(\vec{r}') r'^2 [3 \sin^2\theta' \cos^2(\phi-\phi') - 1] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int d^3r' \rho(\vec{r}') r'^2 [3 \sin^2\theta' \cos^2(\phi-\phi') - 1]$$

Trocando a ordem de integrações e usando

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} = 1 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \cos^2(\phi-\phi') =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \left[\frac{1+\cos(2\phi-2\phi')}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

O termo $l=2$ fica então:

$$\frac{1}{2r^3} \int d^3r' \rho(\vec{r}') r'^2 \left[\frac{3}{2} \sin^2\theta' - 1\right] = \frac{1}{2r^3} \int d^3r' \rho(\vec{r}') \left[\frac{3}{2}(x'^2+y'^2) - \right.$$

$$\left. - r'^2\right]$$

$$\int d^3r' \rho(\vec{r}') (x'^2+y'^2) = I_{33}$$

$$\int d^3r' \rho(\vec{r}') r'^2 = \int d^3r' \rho(\vec{r}') [x'^2+y'^2+z'^2] =$$ (CONTINUA)

$$= \frac{1}{2}\int d^3r'\, \rho(\vec{r}')\left[(x'^2+y'^2)+(x'^2+z'^2)+(y'^2+z'^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(I_{11}+I_{22}+I_{33}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\bar{\bar{I}})$$

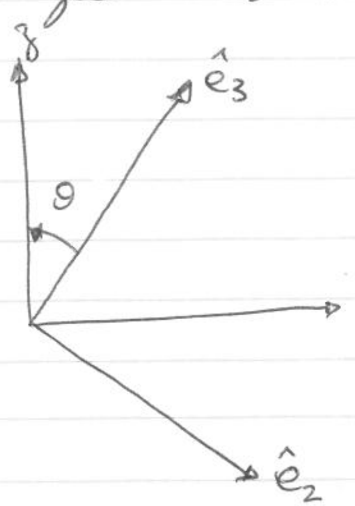
Finalmente, colocando todos os termos até ordem $l=2$:

$$V(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r} - \frac{G}{2r^3}\left[\frac{3}{2}I_{33} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\bar{\bar{I}})\right]$$

Em termos dos eixos principais, como o traço é invariante por transformações ortogonais (rotações)

$$\mathrm{Tr}(\bar{\bar{I}}) = I_1 + I_2 + I_3$$

Além disso, podemos obter $\bar{\bar{I}}$ no sistema acima fazendo uma rotação do sistema de eixos principais de um ângulo $\theta$ em torno de $x$ (por exemplo):




$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

onde $c = \cos\theta$

$s = \sin\theta$

Assim, no sistema $xyz$:

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & cI_1 & sI_3 \\ 0 & -sI_1 & cI_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 I_1 + s^2 I_3 & (I_3 - I_1) sc \\ 0 & (I_3 - I_1) sc & s^2 I_1 + c^2 I_3 \end{pmatrix}$$

Portanto: $I_{33} = \sin^2\theta \, I_1 + \cos^2\theta \, I_3$

$$= (1 - \cos^2\theta) I_1 + \cos^2\theta \, I_3$$

$$= I_1 + \cos^2\theta \, (I_3 - I_1)$$

$$\Rightarrow 3 I_{33} - (I_1 + I_2 + I_3) = 3 I_1 + 3\cos^2\theta (I_3 - I_1) - 2 I_1 - I_3$$

$$= (3\cos^2\theta - 1)(I_3 - I_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r} - \frac{G}{4r^3}(I_3 - I_1)(3\cos^2\theta - 1)}$$

~~O primeiro termo é a atração exercida no centro da Terra~~

/ /

Portanto, a energia ~~de atração~~ potencial gravitacional com um corpo (Sol ou Lua) de massa M é:

$$U(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM}{4r^3}(I_3-I_1)(3\cos^2\theta - 1)$$

O primeiro termo descreve apenas a atração gravitacional entre os corpos como se fossem partículas. O segundo termo descreve o torque sobre a Terra. Como $I_3 > I_1$, a energia é mínima para $\theta = 0$. Apenas o segundo termo afeta a dinâmica rotacional. Portanto se chamarmos

$$U_{rot}(\theta) = -\frac{3GM(I_3-I_1)}{4r^3}\cos^2\theta$$

podemos escrever a Lagrangiana:

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 - U_{rot}(\theta)$$

O procedimento para achar a velocidade angular de PRECESSÃO ANGULAR $\dot\phi$ é o mesmo do pião. Vamos tomar uma rota mais direta através das equações de Euler Lagrange. A equação para $\underline{\theta}$ é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow I_1\ddot\theta = I_1\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta - I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\dot\phi\sin\theta$$

$$-\frac{3GM}{2r^3}(I_3-I_1)\cos\theta\sin\theta$$

Na precessão regular $\theta = \underset{=\theta_0=}{\text{const.}} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$. Portanto:

$$I_1 \dot{\phi}^2 \cos\theta_0 - I_3 \omega_3 \dot{\phi} = \frac{3}{2}\frac{GM}{r^3}(I_3 - I_1)\cos\theta_0$$

onde usamos que $\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = \omega_3 = \frac{p_\psi}{I_3} = \text{const.}$

O 1º termo do lado direito é muito menor do que o 2º pois:

$$\dot{\phi} \ll \omega_3 \sim \frac{1}{1\,\text{dia}}$$

pois já antecipamos que $\dot{\phi} \ll \frac{1}{1\,\text{ano}}$, o que será confirmado a seguir. Assim:

$$\dot{\phi} = -\frac{3}{2\omega_3}\frac{GM}{r^3}\left(\frac{I_3 - I_1}{I_3}\right)\cos\theta_0$$

Da 3ª lei de Kepler $\frac{GM}{r^3} = \omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{T_{\text{ano}}}\right)^2$

$\omega_0$ = freq. ang. de revolução

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}}{\omega_0} = -\frac{3}{2}\left(\frac{\omega_0}{\omega_3}\right)\left(\frac{I_3 - I_1}{I_3}\right)\cos\theta_0$$

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega_3}\right) \cong \frac{1}{365} \qquad \left(\frac{I_3 - I_1}{I_3}\right) \simeq \frac{1}{306} \qquad \cos\theta_0 \simeq 0{,}92$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}}{\omega_0} \cong \frac{1}{81 \times 10^3} \Rightarrow T_\phi^S \simeq 81 \times 10^3 \text{ anos.}$$

Na verdade, devemos incluir a influência da Lua, cuja órbita é aproximadamente co-planar à eclíptica. Podemos adicionar ~~os~~ os dois efeitos e obter o resultado combinado

$$\frac{GM_S}{r_S^3} + \frac{GM_L}{r_L^3} = \omega_0^2\left[1 + \frac{GM_L}{\omega_0^2 r_L^3}\right] =$$

$$= \omega_0^2\left[1 + \frac{M_L}{M_S}\left(\frac{r_S}{r_L}\right)^3\right]$$

$$\simeq \omega_0^2\left[1 + 2.2\right] = 3.2\,\omega_0^2$$

$$T_\phi = \frac{81}{3.2}\times 10^3 \text{ anos} \simeq 25.3\times 10^3 \text{ anos}$$