PEQUENAS OSCILAÇÕES

O problema de pequenas oscilações ocorre quando um sistema de N graus de liberdade tem um ponto equilíbrio estável de suas coordenadas generalizadas:

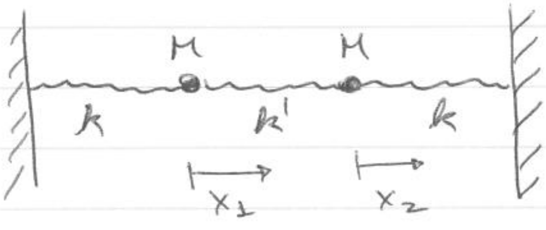
$$q_j = q_j^{(0)} \rightarrow \text{PONTO DE EQUILÍBRIO}$$

Há aqui uma grande analogia ao pontos de equilíbrio de um sistema conservativo com apenas um grau de liberdade. Nesse último caso, sabemos que pequenos desvios de uma posição de EQUILÍBRIO ESTÁVEL dão origem a um movimento oscilatório periódico em torno do ponto de equilíbrio.

Fisicamente, é razoável esperar que no caso de N graus de liberdade, pequenos desvios de uma configuração de EQUILÍBRIO ESTÁVEL também levem a movimentos periódicos. Como veremos, a diferença é que haverá, em geral, diferentes tipos de movimentos oscilatórios, cada um com uma freqüência característica.

Esse tipo de análise encontra muitas aplicações na análise de vibrações de moléculas e sólidos, circuitos elétricos e outros.

Comecemos com um exemplo. Considere duas massas iguais M, em movimento unidimensional, conectadas por molas de constantes conhecidas entre si e a 2 paredes:



A figura ao lado mostra a configuração de equilíbrio e descreveremos as posições das massas a partir do equilíbrio por x_1 e x_2.

A energia potencial elástica é:

$$V = \frac{k}{2}x_1^2 + \frac{k}{2}x_2^2 + \frac{k'}{2}(x_1-x_2)^2$$

Note o último termo: (x_1-x_2) é a deformação líquida da mola central. A energia cinética é óbvia e a Lagrangiana fica:

$$L = \frac{M}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{k}{2}x_1^2 - \frac{k}{2}x_2^2 - \frac{k'}{2}(x_1-x_2)^2$$

$$= \frac{M}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{(k+k')}{2}x_1^2 - \frac{(k+k')}{2}x_2^2 + k' x_1 x_2$$

Notar que apenas o último termo acopla as oscilações de 1 e 2.

As eqs. de Euler-Lagrange ficam:

$$M\ddot{x}_1 + (k+k')x_1 - k'x_2 = 0$$

$$M\ddot{x}_2 + (k+k')x_2 - k'x_1 = 0$$

Se queremos achar movimentos oscilatórios "chutamos" uma solução do tipo:

$$x_1(t) = B_1 e^{+i\omega t}$$

$$x_2(t) = B_2 e^{i\omega t}$$

onde assume-se o procedimento usual de se tomar a parte real ao final. Assim:

$$\left[-\omega^2 M + (k+k')\right] B_1 - k' B_2 = 0$$

$$\left[-\omega^2 M + (k+k')\right] B_2 - k' B_1 = 0$$

que é um sistema de equações lineares homogêneos. Como se sabe, ele tem solução apenas se a matriz dos coeficientes tem determinante nulo.

$$\begin{vmatrix} (k+k') - \omega^2 M & -k' \\ -k' & (k+k') - \omega^2 M \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left[(k+k') - \omega^2 M\right]^2 - k'^2 = 0$$

$$\Rightarrow (k+k') - \omega^2 M = \pm k'$$

$$\Rightarrow \omega_{\pm} = \sqrt{\frac{(k+k' \pm k')}{M}} = \begin{cases} \omega_+ = \sqrt{\dfrac{k+2k'}{M}} \\ \omega_- = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \end{cases}$$

Obtemos então que há apenas 2 ~~fr~~ freqüências possíveis (ω_+ e ω_-) de oscilação: são chamadas de FREQÜÊNCIAS NORMAIS OU CARACTERÍSTICAS.

As amplitudes B_1 e B_2 ~~p~~ de cada oscilação podem ser obtidas do sistema original:

$$\omega_+ : \left[-(\cancel{k} + 2k') + \cancel{k} + k'\right] B_1 = k' B_2$$

$$\Rightarrow -k' B_1 = k' B_2 \Rightarrow B_1 = -B_2$$

$$\omega_- : \left[-k + k + k'\right] B_1 = k' B_2 \Rightarrow B_1 = B_2$$

Assim, para ~~o~~ ω_+:

$$\left.\begin{array}{l} X_1(t) = B\, e^{i\omega_+ t} \\ X_2(t) = -B\, e^{i\omega_+ t} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1(t) = |B| \cos(\omega_+ t + \delta) \\ X_2(t) = -|B| \cos(\omega_+ t + \delta) \end{array}$$

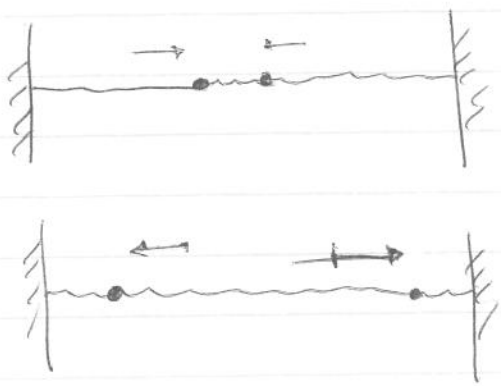
de tal forma que $X_1(t) = -X_2(t)$

Para ω_-:

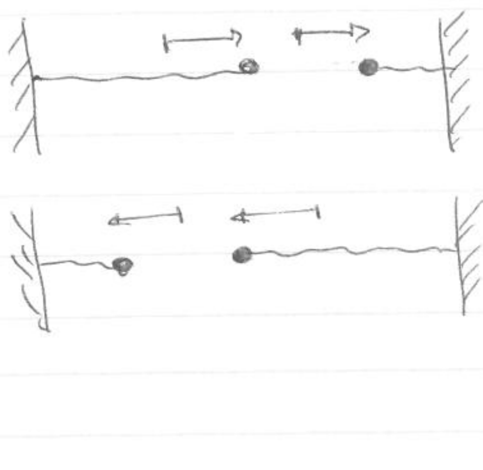
$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) = B\, e^{i\omega_- t} \\ x_2(t) = B\, e^{i\omega_- t} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1(t) = |B| \cos(\omega_- t + \delta) \\ x_2(t) = |B| \cos(\omega_- t + \delta) \end{array}$$

e $x_1(t) = x_2(t)$

Cada uma dessas soluções é chamada de um MODO NORMAL DE VIBRAÇÃO. Podemos visualizar cada modo, nesse caso:



O modo ao lado, correspondente a ω_+, é o MODO ANTI-SIMÉTRICO. Como o movimento envolve a mola central a freqüência é maior do que seria se $k' = 0$



O modo com freqüência ω_- é o MODO SIMÉTRICO. Como, nesse caso, a mola central não é alterada a freqüência é a mesma que se obteria se $k' = 0$.

A forma das soluções acima sugere considerar as seguintes combinações lineares das coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_1 = x_1 - x_2 \\ \\ \eta_2 = x_1 + x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) \\ \\ x_2 = \frac{1}{2}(-\eta_1 + \eta_2) \end{array}$$

Se trocamos variáveis nas eqs. de movimento:

$$M\ddot{x}_1 + (k+k')x_1 - k'x_2 = \frac{M}{2}(\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + \frac{(k+k')}{2}(\eta_1 + \eta_2)$$

$$- \frac{k'}{2}(-\eta_1 + \eta_2) = 0$$

e

$$M\ddot{x}_2 + (k+k')x_2 - k'x_1 = \frac{M}{2}(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + \frac{(k+k')}{2}(\eta_2 - \eta_1)$$

$$- \frac{k'}{2}(\eta_2 + \eta_1) = 0$$

Somando as duas equações:

$$M\ddot{\eta}_2 + (k+k')\eta_2 - k'\eta_2 = M\ddot{\eta}_2 + k\eta_2 = 0$$

$$\Rightarrow \eta_2(t) = C\, e^{i\omega_- t} \qquad \omega_- = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Subtraindo uma da outra:

$$M\ddot{\eta}_1 + (k+k')\eta_1 + k'(\eta_1) = M\ddot{\eta}_1 + (k+2k')\eta_1 = 0$$

$$\Rightarrow \eta_1(t) = C'\, e^{i\omega_+ t} \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{k+2k'}{M}}$$

As coordenadas η_1 e η_2 são chamadas de COORDENADAS NORMAIS DO PROBLEMA.

A seguir, vamos considerar o problema genérico de um sistema com vários graus de liberdade.

Podemos escrever a solução geral do problema como uma superposição linear dos MODOS NORMAIS (LEMBRE-SE DE QUE AS EQS. SÃO LINEARES). Assim.

$$X_1(t) = B_+ \cos(\omega_+ t + \delta_+) + B_- \cos(\omega_- t + \delta_-)$$

$$X_2(t) = -B_+ \cos(\omega_+ t + \delta_+) + B_- \cos(\omega_- t + \delta_-)$$

A solução acima é geral porque tem 4 constantes arbitrárias (B_+, B_-, δ_+, δ_-, todas reais) e um sistema de 2 eqs. diferenciais lineares ordinárias de 2ª ordem requer 4 constantes arbitrárias. Elas são determinadas pelas condições iniciais.

Assim, vemos que a SOLUÇÃO GERAL É UMA SUPERPOSIÇÃO LINEAR DE MODOS NORMAIS, CADA UM COM SUA FREQUÊNCIA CARACTERÍSTICA. Apenas condições iniciais especiais levam à excitação de apenas um modo ($B_+ = 0$ ou $B_- = 0$, por exemplo).

CASO GERAL DE UM SISTEMA COM n GRAUS DE LIBERDADE

Seja um sistema conservativo com n graus de liberdade, descrito por coordenadas generalizadas q_k $(k=1,\dots,n)$. A Lagrangiana pode ser escrita como:

$$L = \sum_{j,k} \frac{m_{jk}}{2} \dot{q}_j \dot{q}_k - U(q_1,\dots,q_n),$$

Supomos que o sistema de coordenadas é fixo.

onde $m_{jk} = m_{jk}(q_1,\dots q_n)$ são funções das coordenadas, e $m_{jk}=m_{kj}$.
As equações de E-L são:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \qquad (l=1,\dots,n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \sum_j m_{jl} \dot{q}_j \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right] = \sum_j \left[\sum_m \frac{\partial m_{jl}}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_j \right.$$

$$\left. + \, m_{jl} \ddot{q}_j \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} = \sum_{jk} \frac{1}{2} \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{\partial U}{\partial q_l}$$

$$\Rightarrow \sum_{jm} \frac{\partial m_{jl}}{\partial q_m} \dot{q}_m \dot{q}_j + \sum_j m_{jl} \ddot{q}_j = \sum_{jk} \frac{1}{2} \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_k - \frac{\partial U}{\partial q_l}$$

$$(l=1,\dots,n)$$

A solução de equilíbrio corresponde a

$$q_\ell(t) = q_{\ell 0} \qquad (\ell = 1, \dots, n)$$

$$\Rightarrow \dot{q}_\ell(t) = 0 \qquad (\ell = 1, \dots, n)$$

Portanto, a condição para o equilíbrio fica:

$$\boxed{\left.\frac{\partial U}{\partial q_\ell}\right|_{q_{\ell 0}} = 0}$$

Podemos agora expandir U em torno do ponto de equilíbrio $q_{\ell 0}$:

$$U(q_1 \dots q_n) = U(q_{10} \dots q_{n0}) + \sum_k \left.\frac{\partial U}{\partial q_k}\right|_0 (q_k - q_{k0}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{jk} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right|_0 (q_j - q_{j0})(q_k - q_{k0}) + \dots$$

onde $\big|_0$ significa em $q_{\ell 0}$. ~~Podemos redefinir as coordenadas:~~

$$\cancel{q'_\ell = q_\ell - q_{\ell 0} \qquad (\ell = 1, \dots, n)}$$

~~e posteriormente~~ Notem que $\left.\frac{\partial U}{\partial q_k}\right|_0 = 0$ (EQUILÍBRIO) e $U(q_{10}, \dots q_{n0})$ é apenas uma constante e pode ser desprezada.

A análise da estabilidade do ponto $\vec{X}_o$ pressupõe obviamente, uma consideração da vizinhança do ponto $\vec{X}_o$.

É claro fisicamente que se $\vec{X}_o$ é um ponto de mínimo, o equilíbrio é ESTÁVEL.

Def.: $\vec{X}_o$ é um MÍNIMO SE

$$V(\vec{X}) \geq V_o(\vec{X}_o)$$

para todo $\vec{X} \in$ vizinhança de $\vec{X}_o$, ou seja,

$$\vec{X} = \vec{X}_o + \delta\vec{X} \quad \text{para } \delta\vec{X} \text{ suficientemente pequeno}$$

Isso porque:

$$E = T + V \equiv V(\vec{X}_o) + \delta E$$

$\Rightarrow$ Movimento é restrito a $\vec{X}$ tal que

$$V(\vec{X}) \leq E = V(\vec{X}_o) + \delta E$$

Se δE é pequeno, a região de $\vec{X}$ possíveis é pequena

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{X} \text{ NUNCA SE AFASTA MUITO DE } \vec{X}_o}$

Além disso:

$$T \leq \delta E \quad (T = \delta E \text{ se } \vec{X} = \vec{X}_o)$$

$\Rightarrow$ $\dot{\vec{X}}$ se mantém pequeno

$\Rightarrow$ $\boxed{\dot{\vec{X}} \text{ NUNCA SE AFASTA MUITO DE ZERO}}$

$\Rightarrow$ ESTÁVEL

É bom notar que a condição de equilíbrio ESTÁVEL é que q_{i0} seja um mínimo de U ou seja

$$U(q_1, \cdots q_n) \geq U(q_{10}, \cdots q_{n0})$$

para $\delta q_j = q_j - q_{j0}$ suficientemente pequeno.

Sabemos que um teste possível é que as Hessianas sejam todas positivas:

- $A_{11} > 0$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22} & \\ & & A_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{etc.}$$

Podemos igualmente expandir as funções m_{jk}:

$$m_{jk}(q_1, \dots q_n) = m_{jk}(q_{10}, \dots q_{n0}) + \sum_{l} \frac{\partial m_{jk}}{\partial q_l}\bigg|_0 (q_l - q_{l0}) + \cdots$$

Entretanto, na expressão da energia cinética, $\dot{q}_j$ já são quantidades pequenas para pequenos desvios do equilíbrio. Portanto, na mesma ordem de aproximação, podemos reter apenas o termo de ordem zero na expansão:

$$T = \sum_{jk} \frac{m_{jk}}{2}(q_{10}, \dots q_{n0})\, \dot{q}_j \dot{q}_k$$

que vamos escrever simplesmente como

$$T = \sum_{jk} \frac{m_{jk}}{2} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Se redefinirmos as coordenadas como:

$$q_k' = q_k - q_{k0}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{jk} A_{jk}\, q_j' q_k' \quad e \quad T = \frac{1}{2} \sum_{jk} m_{jk}\, \dot{q}_j' \dot{q}_k'$$

$$L = T - U$$

onde A_{jk} e m_{jk} são matrizes simétricas

$$A_{jk} = A_{kj} \quad e \quad m_{jk} = m_{kj}$$

Vamos, a partir de agora, deixar de escrever as linhas em q_j'

Em notação tensorial:

$$T = \frac{1}{2}\, \dot{\bar{q}} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \dot{\bar{q}}$$

$$U = \frac{1}{2}\, \bar{q} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{q}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\, \dot{\bar{q}} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \dot{\bar{q}} - \frac{1}{2}\, \bar{q} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{q}$$

As equações de E-L são:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \sum_j m_{lj}\, \dot{q}_j \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right] = \sum_j m_{lj}\, \ddot{q}_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} = -\sum_j A_{lj}\, q_j$$

$$\Rightarrow \sum_j m_{lj}\, \ddot{q}_j + \sum_j A_{lj}\, q_j = 0$$

$$\text{ou} \quad \bar{\bar{m}} \cdot \ddot{\bar{q}} + \bar{\bar{A}} \cdot \bar{q} = 0$$

Supondo uma dependência harmônica com o tempo:

$$\bar{q}(t) = \bar{a}\, e^{i\omega t}$$

Isso nos dá:

$$-\omega^2 \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a} + \bar{\bar{A}} \cdot \bar{a} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\omega^2 \bar{\bar{m}} + \bar{\bar{A}}\right) \cdot \bar{a} = 0$$

que é um sistema de equações lineares homogêneas. Suas soluções ocorrem para valores de freqüência tais que:

$$\det\left(-\omega^2 \bar{\bar{m}} + \bar{\bar{A}}\right) = 0$$

As <u>n</u> raízes dessa equação secular nos dão as freqüências normais ω_r e voltando ao sistema original obtemos os modos normais $\bar{a}_r$, a menos de uma normalização. Pode-se provar que ω_r são todos reais ($\omega_r^2 > 0$).

O problema de auto-valor que obtivemos:

$$(-\omega^2 \bar{\bar{m}} + \bar{\bar{A}}) \cdot \bar{a} = 0$$

define uma equação secular:

$$\det(-\omega^2 \bar{\bar{m}} + \bar{\bar{A}}) = 0$$

que é uma equação secular de ordem $\underline{n}$ na variável ω^2. Sejam ω_r^2 suas $\underline{n}$ soluções $(r=1,\dots,n)$. Para cada $\underline{r}$, podemos achar os auto-vetores correspondentes $\bar{a}_r$

$$(-\omega_r^2 \bar{\bar{m}} + \bar{\bar{A}}) \cdot \bar{a}_r = 0$$

$$\omega_r^2 \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}_r = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{a}_r$$

ou $$+\omega_r^2 \sum_k m_{jk} a_{kr} = \sum_k A_{jk} a_{kr} \quad (1)$$

onde a_{kr} é a k-ésimo componente de $\bar{a}_r$. Analogamente, podemos escrever uma equação para o s-ésimo auto-valor/vetor, usando j como variável muda e $\underline{k}$ como variável não somada (ou seja, trocando $j \rightleftarrows k$):

$$+\omega_s^2 \sum_j m_{kj} a_{js} = \sum_j A_{kj} a_{js} \quad (2)$$

$$\left[\omega_s^2 \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}_s = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{a}_s \quad (2)\right.$$

Como tanto $\bar{\bar{m}}$ quanto $\bar{\bar{A}}$ são simétricos:

$$+\omega_s^2 \sum_j m_{jk} a_{js} = \sum_j A_{jk} a_{js} \quad (2')$$

Multiplicando (1) por a_{js} e somando em j e (2') por a_{kr} e somando em k

Multiplicando $\bar{a}_s \cdot (1)$ e $\bar{a}_r \cdot (2) \Rightarrow \omega_r^2\, \bar{a}_s \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}_r = \bar{a}_s \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{a}_r$ (3)

e $\omega_s^2\, \bar{a}_r \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}_s = \bar{a}_r \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{a}_s$ (4)

$$+\omega_r^2 \sum_{jk} m_{jk} a_{kr} a_{js} = \sum_{jk} A_{jk} a_{kr} a_{js} \quad (3)$$

$$+\omega_s^2 \sum_{jk} m_{jk} a_{kr} a_{js} = \sum_{jk} A_{jk} a_{kr} a_{js}$$

$$\Rightarrow (\omega_r^2 - \omega_s^2) \sum_{jk} a_{js} m_{jk} a_{kr} = 0$$

Subtraindo (3)-(4) e usando q. $\bar{\bar{m}}$ e $\bar{\bar{A}}$ são simétricos:
$(\omega_r^2 - \omega_s^2)\, \bar{a}_s \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}_r = 0$

Se $\omega_r^2 - \omega_s^2 \neq 0 \Rightarrow \sum_{jk} a_{js} m_{jk} a_{kr} = 0$

$$\Rightarrow \bar{a}_s^T \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}_r = 0$$

Assim os auto-valores de auto-vetores diferentes são ortogonais num sentido generalizado. Auto-valores degenerados podem ser tratados de maneira a definir auto-vetores ortogonais no sentido acima.

O caso $r = s$ nada diz sobre a soma

$$\bar{a}_s^T \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}_s$$

Entretanto pode-se provar (vide adiante) que ela não pode se anular. Como a equação de auto-valores só define os auto-vetores a menos de uma normalização, podemos escolher normalizá-los de forma que:

$$\bar{a}_s^T \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}_s = 1 \quad \forall s.$$

de tal forma que, de maneira geral,

$$\sum_{jk} a_{js} m_{jk} a_{kr} = \delta_{rs}$$

Note que $\bar{\bar{A}}$ não é ortogonal.

$\cancel{\bar{\bar{A}}^T \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{I}}}$ ~~onde~~

$$\bar{\bar{A}}^T \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{I}} \quad \text{onde } (\bar{\bar{A}})_{js} = a_{js} \quad (5)$$

(/ /)

(***)

Atenção: Na classe, chamamos o k-ésimo componente de $\bar{a}_s$ de:

$$a_{sk}$$

de tal forma que

$$(\bar{\bar{\Lambda}})_{ij} = a_{ij} \rightarrow \text{que é o } j\text{-ésimo componente de } \bar{a}_i$$

Essa definição é <u>diferente</u> da usada nessas notas: uma é a transposta da outra. Por isso, em classe, as fórmulas deduzidas foram:

$$\bar{\bar{\Lambda}} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{\bar{\Lambda}}^T = \bar{\bar{1}}$$

$$\bar{\bar{\Lambda}} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{\Lambda}}^T = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$$

$$\bar{q} = \bar{\bar{\Lambda}}^T \cdot \bar{\eta}$$

Suponhamos que apenas o modo $\underline{s}$ está excitado

$$\bar{q}(t) = \bar{a}_s \cos(\omega_s t + \delta_s)$$

$$\dot{\bar{q}}(t) = -\omega_s \bar{a}_s \sin(\omega_s t + \delta_s)$$

$$T = \frac{1}{2}\, \dot{\bar{q}} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \dot{\bar{q}} = \frac{\omega_s^2}{2}\, \bar{a}_s \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}_s \sin^2(\omega_s t + \delta_s)$$

Mas a energia cinética só é nula se $\dot{\bar{q}}(t) = 0$.
Portanto:

$$\bar{a}_s \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}_s > 0$$

É interessante definir a matriz

$\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ cujo elemento jk é a_{jk}

Nesse caso, a eq. (1) pode ser escrita como:

$$-\omega_r^2\,(\bar{\bar{m}}\cdot\bar{\bar{\mathbf{A}}})_{jr} = (\bar{\bar{A}}\cdot\bar{\bar{\mathbf{A}}})_{jr}$$

Se definirmos a matriz diagonal $\bar{\bar{\Omega}}$

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \omega_n^2 \end{pmatrix} = \delta_{ij}\,\omega_i^2$$

então:

$$(-\bar{\bar{m}}\cdot\bar{\bar{\mathbf{A}}}\cdot\bar{\bar{\Omega}})_{jr} = (\bar{\bar{A}}\cdot\bar{\bar{\mathbf{A}}})_{jr}$$

ou simplesmente:

$$\bar{\bar{m}}\cdot\bar{\bar{\mathbf{A}}}\cdot\bar{\bar{\Omega}} = \bar{\bar{A}}\cdot\bar{\bar{\mathbf{A}}}$$

Multiplicando pela esquerda com $\bar{\bar{\mathbf{A}}}^T$:

$$\underbrace{\bar{\bar{\mathbf{A}}}^T\cdot\bar{\bar{m}}\cdot\bar{\bar{\mathbf{A}}}}_{\bar{\bar{I}}}\cdot\bar{\bar{\Omega}} = \bar{\bar{\Lambda}}^T\cdot\bar{\bar{A}}\cdot\bar{\bar{\Lambda}}$$

$\Rightarrow \bar{\bar{\mathbf{A}}}^T\cdot\bar{\bar{A}}\cdot\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \bar{\bar{\Omega}}$, ou seja, $\bar{\bar{a}}$ "diagonaliza" $\bar{\bar{A}}$.

Assim podemos escrever a solução geral como superposição de todos os modos normais:

$$\bar{q}_r(t) = \alpha_r \bar{a}_r \cos(\omega_r t + \delta_r)$$

onde introduzimos (em notação real já) fatores de amplitude e fase α_r e δ_r e

$$\bar{q}(t) = \sum_r \alpha_r \bar{a}_r \cos(\omega_r t + \delta_r)$$

que é uma solução com $2n$ constantes arbitrárias α_r e δ_r, determinadas pelas condições iniciais.

Em componentes:

$$q_j(t) = \sum_r \alpha_r a_{jr} \cos(\omega_r t + \delta_r)$$

$$\boxed{q_j(t) \equiv \sum_r a_{jr} \eta_r(t)} \Rightarrow \bar{q} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\eta}$$

onde $\eta_r(t) = \alpha_r \cos(\omega_r t + \delta_r)$ é a coordenada normal r. A lei de transformação acima pode ser usada diretamente para escrever a Lagrangiana em termos das variáveis normais:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \dot{\bar{q}} = \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}} \cdot \bar{\bar{A}}^T \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\eta} = \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}} \cdot \dot{\bar{\eta}}$$

ou $$T = \frac{1}{2} \sum_{jk} m_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{jk} \sum_{rs} m_{jk} a_{jr} a_{ks} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{rs} \delta_{rs} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s = \frac{1}{2} \sum_r \dot{\eta}_r^2$$

Além disso:

$$V = \frac{1}{2}\,\bar{q}\cdot\bar{\bar{A}}\cdot\bar{q} = \frac{1}{2}\sum_{jk} A_{jk}\, q_j q_k =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r,s}\sum_{js} A_{jk}\, a_{jr}\, a_{ks}\, \eta_r \eta_s$$

$U = \frac{1}{2}\,\bar{\eta}\cdot\bar{\bar{\Lambda}}^T\cdot\bar{\bar{A}}\cdot\bar{\bar{\Lambda}}\cdot\bar{\eta}$

Mas de (5) e (3)

$\bar{\bar{\Lambda}}^T\cdot\bar{\bar{A}}\cdot\bar{\bar{\Lambda}} = \omega_r^2\delta_{rs} \equiv \bar{\bar{\Omega}}$

$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\,\bar{\eta}\cdot\bar{\bar{\Omega}}\cdot\bar{\eta}$

Mas a equação (3) que escrevemos antes é tal que

$$U = \frac{1}{2}\sum_{r,s}\underbrace{\left[-\omega_r^2\sum_{jk} m_{jk}\, a_{js}\, a_{kr}\right]}_{-\omega_r^2\delta_{rs}}\eta_r\eta_s$$

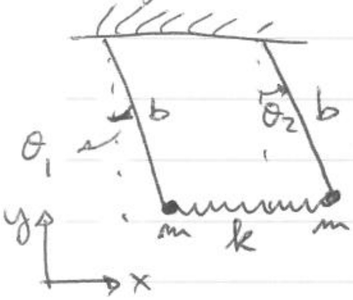
$$= \frac{-1}{2}\sum_r \omega_r^2\eta_r^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\sum_r\left(\dot{\eta}_r^2 + \omega_r^2\eta_r^2\right)$$

$\Rightarrow$ Eqs. de E-L $\Rightarrow$ $\ddot{\eta}_r + \omega_r^2\eta_r = 0$

$\Rightarrow \eta_r(t) = \alpha_r\cos(\omega_r t + \delta_r)$ como vimos.

2 pêndulos acoplados



$$T = \frac{m}{2}\left[(b\dot{\theta}_1)^2 + (b\dot{\theta}_2)^2\right] = \frac{mb^2}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$U = U_{el} + U_g$$

$$U_g = mg(y_1 + y_2)$$

$$U_{el} = \frac{k}{2}\left\{\left[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2\right]^{1/2} - \ell\right\}^2$$

onde ℓ é o comprimento relaxado da mola.

$x_1 = b\sin\theta_1$ e $y_i = b(1-\cos\theta_i)$ $(i = 1, 2)$

$x_2 = \ell + b\sin\theta_2$

$$\Rightarrow U_g = mgb(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2) \cong \frac{mgb}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2)$$

$$(y_1-y_2)^2 \simeq O(\theta_1^4, \theta_2^4, \theta_1^2\theta_2^2) \rightarrow \text{podemos desprezar}$$

$$(x_1-x_2)^2 \cong [\ell + b(\theta_2-\theta_1)]^2$$

$$U_{el} \cong \frac{k}{2}\left\{\ell + b(\theta_2-\theta_1) - \ell\right\}^2 = \frac{kb^2}{2}(\theta_2-\theta_1)^2$$

$$U \cong \frac{mgb}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2) + \frac{kb^2}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2)$$

$$\bar{\bar{m}} = mb^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \bar{\bar{A}} = \begin{pmatrix}kb^2+mgb & -kb^2\\ -kb^2 & kb^2+mgb\end{pmatrix}$$

$$\det(\omega^2\bar{\bar{m}} + \bar{\bar{A}}) = 0 \Rightarrow (kb^2 + mgb - mb^2\omega^2)^2 - (kb^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow kb^2 + mgb - mb^2\omega^2 = \pm kb^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{b}}\,;\; \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{b} + \frac{2k}{m}}$$

$$\omega_0: \begin{pmatrix} kb^2 & -kb^2 \\ -kb^2 & kb^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(0)} \\ a_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1^{(0)} = a_2^{(0)} \Rightarrow \bar{a}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2mb^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

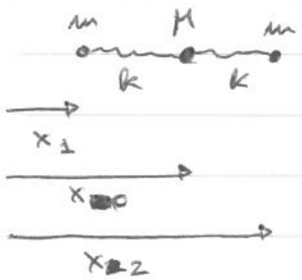
a mola não é deformada e o pêndulo oscila como um pêndulo simples

$$\omega_1: \begin{pmatrix} -kb^2 & -kb^2 \\ -kb^2 & -kb^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1^{(1)} = -a_2^{(1)}$$

$$\bar{a}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2mb^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a mola é comprimida por um valor que é o dobro do deslocamento, daí $\frac{2k}{m}$ somado a $\frac{g}{b}$.

Molécula triatômica linear



$$U = \frac{k}{2}(x_1 - x_0 + l)^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_0 - l)^2$$

Equilíbrio: $\dfrac{\partial U}{\partial x_i} = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = k(x_1 - x_0 + l) = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 - l$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = k(x_2 - x_0 - l) = 0 \Rightarrow x_2 = x_0 + l$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_0} = k(x_0 - \cancel{l} - x_1 + x_0 + \cancel{l} - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x_0 = x_1 + x_2$$

Tomemos arbitrariamente os pontos de equilíbrio

$$\left.\begin{aligned} x_0^{(0)} &= 0 \\ x_1^{(0)} &= -l \\ x_2^{(0)} &= +l \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} q_1 &= x_1 - x_1^{(0)} = x_1 + l \\ q_2 &= x_2 - x_2^{(0)} = x_2 - l \\ q_0 &= x_0 - x_0^{(0)} = x_0 \end{aligned}$$

$$U = \frac{k}{2}(q_1 - q_0)^2 + \frac{k}{2}(q_2 - q_0)^2 = \frac{k}{2}(q_1^2 + q_2^2 + 2q_0^2) - k(q_1 + q_2)q_0$$

$$\bar{\bar{A}} = k\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{M}{2}(\dot{q}_0^2) \Rightarrow \bar{\bar{m}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(-\omega^2 \bar{\bar{m}} + \bar{A}) = \begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix}$$

$$= (k-\omega^2 m)^2 (2k-\omega^2 M) - 2k^2 (k-\omega^2 m) =$$

$$= (k-\omega^2 m)\left[(k-\omega^2 m)(2k-\omega^2 M) - 2k^2\right]$$

$$= (k-\omega^2 m)\left[\cancel{2k^2} + \omega^4 m M - k\omega^2 (M+2m) - \cancel{2k^2}\right]$$

$$= \omega^2 (k-\omega^2 m)\left[\omega^2 m M - k(M+2m)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)}$$

$$\omega_0 = 0: \quad \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(0)} \\ a_2^{(0)} \\ a_3^{(0)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a_1^{(0)} = a_2^{(0)} \quad e \quad a_2^{(0)} = a_3^{(0)} \Rightarrow a_1^{(0)} = a_2^{(0)} = a_3^{(0)}$$

$$\Rightarrow a^{(0)} = K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usando a normalização $\bar{a}^{(0)} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}^{(0)} = 1$

$$K^2 (2m+M) = 1$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{2m+M}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}: \quad \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & 2k - k\frac{M}{m} & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} \\ \omega_2^{(1)} \\ \omega_3^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_2^{(1)} = 0 \quad e \quad \omega_1^{(1)} = -\omega_3^{(1)}$$

$$\Rightarrow \omega^{(1)} = K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{2m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}: \quad \begin{pmatrix} -k\left(\frac{2m}{M}\right) & -k & 0 \\ -k & -k\left(\frac{M}{m}\right) & -k \\ 0 & -k & -k\left(\frac{2m}{M}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^{(2)} \\ \omega_2^{(2)} \\ \omega_3^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -2m\,\omega_1^{(2)} &= M\,\omega_2^{(2)} \\ M\,\omega_2^{(2)} &= -2m\,\omega_3^{(2)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_1^{(2)} &= \omega_3^{(2)} \\ \omega_2^{(2)} &= -\frac{2m}{M}\omega_1^{(2)} \end{aligned}$$

$$\omega^{(2)} = K \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow K^2\left(2m + \frac{4m^2}{M^{\cancel{2}}}\cancel{M}\right) = 1$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{\sqrt{2m}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2m}{M}}}$$

Pêndulo triplo acoplado simetricamente:

Em unidades naturais ($m=1,\ l=1,\ g=1$)

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2\right)$$

$$U = \frac{1}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - 2\varepsilon\,\theta_1\theta_2 - 2\varepsilon\,\theta_2\theta_3 - 2\varepsilon\,\theta_1\theta_3\right)$$

$$\overline{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\omega^2 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1-\omega^2 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 1-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\omega^2)^3 - 2\varepsilon^3 - 3\varepsilon^2(1-\omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow (\omega^2 - 1 - \varepsilon)^2(\omega^2 - 1 + 2\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{1+\varepsilon}$$
$$\omega_3 = \sqrt{1-2\varepsilon}$$

$$\omega_3: \begin{pmatrix} 2\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 2\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 2\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^{(3)} \\ a_2^{(3)} \\ a_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2a_1^{(3)} = a_2^{(3)} + a_3^{(3)} \qquad 2a_2^{(3)} = a_1^{(3)} + a_3^{(3)} \Rightarrow 2a_1^{(3)} - a_2^{(3)} = 2a_2^{(3)} - a_1^{(3)}$$

$$\Rightarrow a_1^{(3)} = a_2^{(3)} \Rightarrow a_3^{(3)} = a_1^{(3)} = a_2^{(3)} \Rightarrow \vec{a}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ω_1, ω_2:
$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(1,2)} \\ a_2^{(1,2)} \\ a_3^{(1,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1^{(r)} + a_2^{(r)} + a_3^{(r)} = 0 \qquad (r = 1, 2)$$

Queremos que os modos sejam ortogonais (no sentido generalizado)

$$\bar{a}^{(1)} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}^{(2)} = 0 \quad \Rightarrow \bar{a}^{(1)} \cdot \bar{a}^{(2)} = 0$$

e normalizados a um: $\bar{a}^{(r)} \cdot \bar{\bar{m}} \cdot \bar{a}^{(r)} = \bar{a}^{(r)} \cdot \bar{a}^{(r)} = 1 \quad (r = 1, 2)$
Há liberdade escolha. Por exemplo:

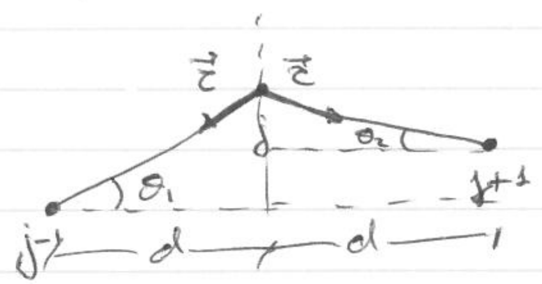
$$\bar{a}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{a}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

A corda com massas

Vamos considerar um sistema meio artificial mas que se mostrará muito útil para o estudo posterior de sistemas contínuos. Imagine uma corda esticada, presa pelas extremidades a paredes fixas, tal que a tensão na corda é τ. Massas de valor m são dispostas/presas à corda em intervalos espaciais iguais. O número total de massas é n. O espaçamento entre elas é d. Portanto, o comprimento total da corda é $L=(n+1)d$.

Vamos estudar a dinâmica transversal das massas. Sejam os deslocamentos verticais: q_j $(j=1,\dots,n)$

Se a tensão na corda não varia para pequenos deslocamentos q_j, podemos escrever



$$F_y(j-1\to j) = -\tau \sin\theta_1$$
$$F_y(j+1\to j) = -\tau \sin\theta_2$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta_1 &\simeq \theta_1 \simeq \tan\theta_1 = \frac{q_j - q_{j-1}}{d} \\ \sin\theta_2 &\simeq \frac{q_j - q_{j+1}}{d} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_j = -\frac{\tau}{d}(q_j - q_{j-1}) - \frac{\tau}{d}(q_j - q_{j+1})$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{q}_j = +\frac{\tau}{d}\left(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}\right)} \quad j = 1, \dots, n$$

Na verdade, para que as equações acima façam sentido para $j=1$ e $j=n$, devemos imaginar que $q_0 = 0 = q_{n+1}$.

É interessante escrever a Lagrangiana que dá origem às equações de movimento acima. É claro que:

$$T = \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j^2$$

Além disso, é fácil ver que a energia potencial deve ser:

$$U = \frac{\tau}{2d}\sum_{j=1}^{n+1} \left(q_{j-1} - q_j\right)^2$$

pois, para a k-ésima partícula, q_k aparecerá em 2 termos de U:

$$\frac{\tau}{2d}\left[\left(q_{k-1} - q_k\right)^2 + \left(q_k - q_{k+1}\right)^2\right]$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{\tau}{d}\left[-\left(q_{k-1} - q_k\right) + \left(q_k - q_{k+1}\right)\right]$$

$$= \frac{\tau}{d}\left[-q_{k-1} + 2q_k - q_{k+1}\right] = -\frac{\partial L}{\partial q_k}$$

e $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right] = \dfrac{\partial L}{\partial q_k} \Rightarrow m\ddot{q}_k = \dfrac{\tau}{d}\left[q_{k-1} - 2q_k + q_{k+1}\right]$ como antes

É fácil ver que se trata de uma Lagrangiana quadrática em q_j e $\dot{q}_j$, portanto passível de ser explorada como um problema de pequenas oscilações. Assumindo dependência harmônica com frequência única: $q_j(t) = a_j e^{+i\omega t}$

$$-\omega^2 m a_j = \frac{\tau}{d}(a_{j-1} - 2a_j + a_{j+1})$$

$$-\frac{\tau}{d} a_{j-1} + \underbrace{\left(\frac{2\tau}{d} - \omega^2 m\right)}_{\lambda} a_j - \frac{\tau}{d} a_{j+1} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -\tau/d & 0 & 0 \\ -\tau/d & \lambda & -\tau/d & 0 \\ 0 & -\tau/d & \lambda & \\ 0 & 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

A estrutura da matriz acima apresenta uma periodicidade. A maneira mais elegante de resolvê-la é assumir uma solução em forma de <u>oscilação espacial periódica</u>:

$$a_j = a e^{i\gamma j} \Rightarrow a_j = a\cos(\gamma j + \delta)$$

tal que: $-\frac{\tau}{d} e^{-i\gamma} + \left(\frac{2\tau}{d} - \omega^2 m\right) - \frac{\tau}{d} e^{i\gamma} = 0$

$$\frac{2\tau}{d} - \omega^2 m = \frac{2\tau}{d}\cos\gamma \Rightarrow \omega^2 = \frac{2\tau}{md}(1-\cos\gamma) = \frac{4\tau}{md}\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{T}{md}}\,\sin\frac{\gamma}{2}}$$

A expressão acima não parece restringir os valores de $\underline{\omega}$, como o esperado. Entretanto, ainda não exigimos que:

$$a_0 = a_{n+1} = 0$$

$$a_0 = a\cos(\delta) = 0 \Rightarrow \delta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow a_j = a \sin \gamma_j$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = a \sin (n+1)\gamma_r = 0$$

$$\Rightarrow (n+1)\gamma_r = r\pi \Rightarrow \gamma_r = \frac{r\pi}{n+1} \quad (r = 1, 2, \dots n)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \omega_r = 2\sqrt{\frac{T}{md}}\,\sin\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right) \qquad r = 1, 2, \dots, n \\[2ex] a_{jr} = a_r \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right) \end{array}}$$

Deve-se notar que não é necessário considerar outros valores de r. De fato, para $r = n+1$

$$\Rightarrow \gamma_{n+1} = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{j(n+1)} = a_{n+1} \sin(\pi j) = 0$$

que não representa nenhum deslocamento. Além disso, se $r = n+1+p$; $p = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\cancel{\Rightarrow a_{jr} = a_r \sin\left[\frac{(n+1+p)\pi j}{n+1}\right] = a_r \sin\left[\pi j + \frac{p\pi j}{n+1}\right]}$$

$$\cancel{= a_r \cos(\pi j) \sin\left(\frac{p\pi j}{n+1}\right) = (-1)^j a_r \sin\left(\frac{p\pi j}{n+1}\right)}$$

$$r = 2(n+1) + p - n - 1 \equiv 2(n+1) - s \text{ onde } s = n+1-p$$

$$s = n, n-1, \dots, 1$$
$$p = 1, 2, \dots, n$$

Assim:

$$a_{jr} = a_r \sin\left[\frac{(2(n+1)-s)\pi j}{n+1}\right] = a_r \sin\left[2\pi j - \frac{s\pi j}{n+1}\right]$$

$$= -a_r \sin\left(\frac{s\pi j}{n+1}\right) = -a_{js}$$ e vemos que são

reproduzidos, a menos do sinal, os modos a_{jr} $r = 1, 2, \dots, n$.

A solução geral é:

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right) e^{i\omega_r t}$$

ou:

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^{n} \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right) (\mu_r \cos\omega_r t + \nu_r \sin\omega_r t)$$

onde escolhemos trabalhar com senos e cossenos de $\omega_r t$. As condições iniciais determinam os coeficientes μ_r e ν_r:

$$q_j(0) = \sum_{r=1}^{n} \mu_r \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right) \qquad (1)$$

$$\dot{q}_j(0) = \sum_{r=1}^{n} \omega_r \nu_r \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right) \qquad (2)$$

Podemos inverter essas equações para obtermos expressões para os coeficientes μ_r e ν_r:
Multiplicando (1) por $\sin\left(\frac{s\pi j}{n+1}\right)$ e somando em j:

$$\sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{s\pi j}{n+1}\right) q_j(0) = \sum_{r=1}^{n} \mu_r \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{s\pi j}{n+1}\right) \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right)$$

Mas:
$$\sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{s\pi j}{n+1}\right) \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right) = \frac{n+1}{2}\delta_{r,s}$$

Logo, o lado direito acima é $\left(\frac{n+1}{2}\right)\mu_s$ e

$$\boxed{\mu_r = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right) q_j(0)}$$

Analogamente:

$$V_r = \frac{2}{\omega_r(n+1)} \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right) \dot{q}_j(0)$$

/ /

Exemplo: Considere um sistema com n massas onde n é ímpar. Uma pequena velocidade inicial v_0 é impressa na partícula do meio ($j=(n+1)/2$) e sua posição inicial é $q_{(n+1)/2}(0)=0$. Encontre o movimento subseqüente.

Nesse caso: $q_j(0)=0$

$$\dot{q}_j(0)=v_0\,\delta_{j,(n+1)/2}$$

Assim: $\mu_r=0$

$$\nu_r=\frac{2}{\omega_r(n+1)}\sum_{j=1}^{n}\sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right)v_0\,\delta_{j,(n+1)/2}$$

$$=\frac{2v_0}{\omega_r(n+1)}\sin\left(\frac{r\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & \text{se } r \text{ é par}\\ (-1)^{(r+1)/2}\dfrac{2v_0}{\omega_r(n+1)} & \text{se } r \text{ é ímpar}\end{cases}$$

Assim:

$$q_j(t)=\sum_{r=1}^{(n+1)/2}\nu_{2r-1}\sin\left[\frac{(2r-1)\pi j}{n+1}\right]\sin\left[\omega_{(2r-1)}t\right]$$

$$=\sum_{r=1}^{(n+1)/2}(-1)^r\frac{2v_0}{\omega_{(2r-1)}(n+1)}\sin\left[\frac{(2r-1)\pi j}{n+1}\right]\sin\left[\omega_{(2r-1)}t\right]$$

$$=\sum_{r=1}^{(n+1)/2}(-1)^r\frac{v_0}{(n+1)}\sqrt{\frac{md}{\tau}}\,\frac{\sin\left[\frac{(2r-1)\pi j}{n+1}\right]}{\sin\left[\frac{(2r-1)\pi}{2(n+1)}\right]}\sin\left[2\sqrt{\frac{\tau}{md}}\sin\left(\left[\frac{(2r-1)\pi}{2(n+1)}\right]\right)t\right]$$

(ver applet da página)