SISTEMAS CONTÍNUOS

O estudo de sistemas contínuos mecânicos é importante para a descrição de deformações de corpos sólidos, líquidos e gasosos. Essa descrição leva ao aparecimento de deformações ondulatórias como o som. Além disso, trata-se da base para as chamadas TEORIAS DE CAMPO, que são de extrema importância na física.

Vamos motivar esse estudo tomando como base a corda com massas. Queremos "simular" uma corda contínua e homogênea, de densidade linear de massa $\rho = \frac{M}{L}$, presa nas extremidades por um sistema de um número infinito de massas. Assim, queremos tomar:

$$n \to \infty \quad , \quad d \to 0 \quad \text{tal que} \quad (n+1)d = L = \text{const.}$$

e

$$d \to 0, \quad m \to 0 \quad \text{tal que} \quad \rho = \frac{M}{L} = \frac{nm}{(n+1)d} \longrightarrow \text{const.}$$

A posição da j-ésima massa é jd onde $j = 1, \ldots, n$. Quando $d \to 0$ e $n \to \infty$, o conjunto de posições discretas jd tende ao contínuo $[0, L]$:

$$jd \in \{0, d, 2d, \ldots, \underbrace{(n+1)d}_{L}\} \xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ d \to 0}]{} x \in [0, L]$$

Vamos usar a variável contínua real $x \in [0, L]$ para substituir jd:

$$jd \to x$$

** FAZER AS EQS. DE MOVIMENTO ANTES

A solução geral em termos de modos normais é:

$$q_j(t) = \sum_{r=1}^{n} \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right)(\mu_r \cos\omega_r t + \nu_r \sin\omega_r t)$$

onde:

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{T}{md}}\,\sin\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right)$$

Podemos fazer a passagem para o contínuo da seguinte maneira:

$$\sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right) = \sin\left(\frac{r\pi jd}{(n+1)d}\right) \xrightarrow[d\to 0]{n\to\infty} \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)$$

$$q_j(t) \to q(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)(\mu_r \cos\omega_r t + \nu_r \sin\omega_r t)$$

Além disso, como n é o número total de modos normais, a soma sobre r se estende de 1 a ∞.

Os coeficientes μ_r e ν_r são obtidos de:

$$\mu_r = \frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right) q_j(0)$$

$$\nu_r = \frac{2}{\omega_r(n+1)}\sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{r\pi j}{n+1}\right) \dot{q}_j(0)$$

Mas, se $x = jd$ podemos definir $\Delta x = d$ e:

$$\mu_r = \frac{2}{(n+1)d} \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) q_j \underbrace{(d)}_{\Delta x}$$

$$\xrightarrow[d \to 0]{n \to \infty} \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) q(x,0) = \mu_r$$

Analogamente:

$$V_r = \frac{2}{\omega_r L} \int_0^L \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \frac{\partial q(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} dx$$

~~Finalmente~~, As freqüências normais são:

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin\left[\frac{r\pi}{2(n+1)} \frac{\times d}{\times d}\right] = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}} \sin\left[\frac{r\pi d}{2L}\right]$$

$$\xrightarrow[m \to 0]{d \to 0} \cancel{2}\sqrt{\frac{\tau}{md}} \frac{r\pi d}{\cancel{2}L} = \cancel{2}\sqrt{\frac{\tau d}{m}} \frac{r\pi}{\cancel{2}L} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \left(\frac{r\pi}{L}\right)$$

** As equações de movimento ficam

$$\ddot{q}_j = \frac{\tau}{md}(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1})$$

$$= \frac{\tau}{m}\left[\frac{(q_{j-1} - q_j)}{d} - \frac{(q_j - q_{j+1})}{d}\right]$$

Podemos identificar, as frações acima como aproximações discretas da derivada espacial (que se tornam exatas no limite):

$$\frac{q_{j-1}-q_j}{d} \xrightarrow[d\to 0]{} -\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x-\frac{d}{2}}$$

$$\frac{q_j-q_{j+1}}{d} \xrightarrow[d\to 0]{} -\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x+\frac{d}{2}}$$

Portanto, o lado direito fica:

$$-\frac{d\tau}{m}\times \frac{\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x-d/2}-\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x+d/2}}{d} \longrightarrow +\frac{\tau}{\rho}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\tau}{\rho}\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}}$$

ou

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}=0 \quad \text{onde} \quad c=\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

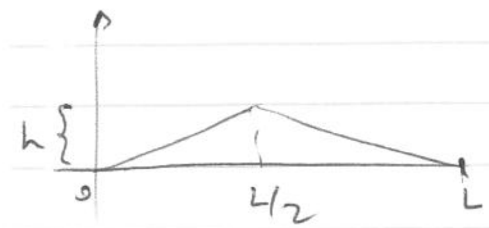
Com essa definição podemos escrever: $\omega_r=\frac{\pi c r}{L}$

$$q(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty}\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\left[\mu_r\cos\left(\frac{r\pi c t}{L}\right)+\nu_r\sin\left(\frac{r\pi c t}{L}\right)\right]$$

$$\mu_r=\frac{2}{L}\int_0^L dx\,\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)q(x,0)\;;\;\nu_r=\frac{2}{\pi c r}\int_0^L dx\,\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{t=0}$$

Exemplo: Considere as seguintes condições iniciais:

$$\left.\frac{\partial q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad q(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2h}{L}\,x & 0 \le x \le L/2 \\[2mm] \dfrac{2h}{L}(L-x) & \dfrac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$



Temos $\nu_n = 0$ e:

$$\mu_n = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2} \frac{2h}{L}\, x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^{L} \frac{2h}{L}(L-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right]$$

$$\int x \sin ax \, dx = -\frac{x}{a}\cos ax + \frac{1}{a}\int \cos ax \, dx$$

$$= -\frac{x}{a}\cos ax + \frac{1}{a^2}\sin ax$$

$$\int x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{Lx}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\int_{L/2}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_{L/2}^{L} = -\frac{L}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$\mu_n = \frac{4h}{L^2}\left[\cancel{-\frac{L^2}{2\pi n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cancel{- \frac{L^2}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]}\right.$$

$$\left. \cancel{+ \frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi)} - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cancelto{0}{\sin(n\pi)}\right] = \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{8h}{\pi^2 n^2}(-1)^{(n-1)/2} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

SOLUÇÃO DIRETA DA EQUAÇÃO DE ONDA

É interessante tentar encontrar diretamente da equação de onda suas soluções. Uma vantagem dessa abordagem é não ter de impor CONDIÇÕES DE CONTORNO desde o início, como supor a corda presa em suas extremidades ($q(0,t) = q(L,t) = 0$).

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

Vamos usar um método bastante poderoso para EDPs lineares: SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS. Suponhamos uma solução que seja produto de uma função de x por uma função de t (daí o nome do método):

$$q(x,t) = \psi(x)\,\chi(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\psi(x)}{c^2}\frac{d^2\chi}{dt^2} - \chi(t)\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$$

Dividindo por $\psi(x)\chi(t)$ e rearranjando:

$$\frac{1}{c^2}\frac{1}{\chi}\frac{d^2\chi}{dt^2} = \frac{1}{\psi}\frac{d^2\psi}{dx^2}$$

O lado esquerdo é uma função apenas de $\underline{t}$ e o direito apenas de x. A única maneira de uma função de uma variável independente $\underline{t}$ ser igual a uma função de uma outra variável independente x é as duas funções serem funções CONSTANTES.

(/ /)

Chamemos essa constante de $-\frac{\omega^2}{c^2}$. Assim

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + \omega^2 \chi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\psi = 0$$

cujas soluções são harmônicas:

$$\chi(t) = e^{\pm i\omega t} \quad e \quad \psi(x) = e^{\pm i\frac{\omega}{c}x}$$

Temos, portanto, soluções do tipo:

$$q(x,t) = e^{i\frac{\omega}{c}(x-ct)} \quad \text{ou} \quad e^{i\frac{\omega}{c}(x+ct)} \quad \text{ou}$$

$$e^{-i\frac{\omega}{c}(x-ct)} \quad \text{ou} \quad e^{-i\frac{\omega}{c}(x+ct)}$$

Nada, nesse ponto, restringe os valores possíveis de $\underline{\omega}$, assim a solução geral pode ser escrita:

$$q(x,t) = q_+(x,t) + q_-(x,t)$$

onde:

$$q_\pm(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, a(\omega) \, e^{i\frac{\omega}{c}(x\mp ct)}$$

Essas funções são a representação em termos de INTEGRAIS DE FOURIER de funções de $x-ct$ e $x+ct$.

Assim, dentro das limitações da teoria de integrais e transformadas de Fourier, de que as funções devem ser ~~de quadrado~~ de módulo integráveis, vemos que as soluções gerais da equação de onda sem imposição de condições de contorno são funções quaisquer das combinações $x-ct$ e $x+ct$.

contínuas por partes

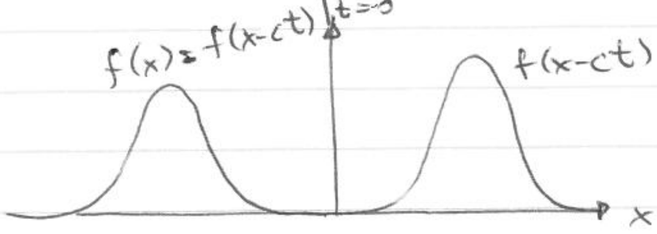
$$g_+(x,t) = f(x-ct)$$

$$g_-(x,t) = g(x+ct)$$

De fato, a solução geral da eq. de onda é:

$$g(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

A função $f(x-ct)$ representa um pacote de ondas que se move para a direita $(+x)$. De fato, em $t=0$ temos a função $f(x)$. Para $t>0$, $f(x-ct)$ é uma função que tem a mesma forma que $f(x)$, porém deslocada para a direita de ct



É evidente que o "pacote" $f(x)$ deslocou-se de ct num intervalo t. Portanto, a velocidade da onda é c.

Analogamente, $g(x+ct)$ ~~repres~~ representa um pacote que se move para $(-x)$ com velocidade $-c$. A solução geral é a superposição das duas ondas.

É fácil determinar as funções f e g a partir das condições iniciais:

$$q(x,0) = f(x) + g(x)$$

$$\dot{q}(x,0) = -cf'(x) + cg'(x)$$

Integrando a segunda equação em x:

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{c}\int_0^x \dot{q}(x,0)\,dx + A$$

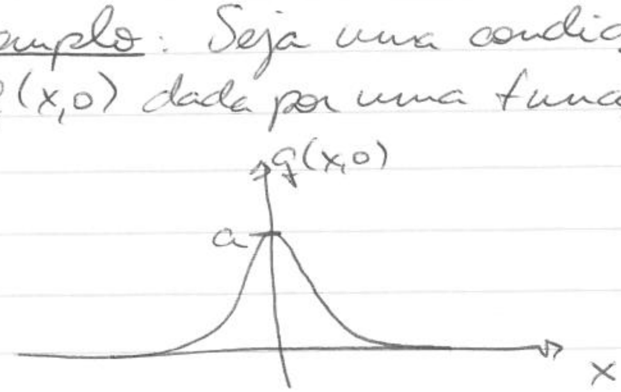
onde A é uma constante arbitrária. Subtraindo e somando:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[q(x,0) - \frac{1}{c}\int_0^x \dot{q}(x,0)\,dx - A\right]$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[q(x,0) + \frac{1}{c}\int_0^x \dot{q}(x,0)\,dx + A\right]$$

A constante $\underline{A}$ pode ser ignorada, já que a solução $f(x-ct) + g(x+ct)$ não a envolve.

<u>Exemplo</u>: Seja uma condição inicial $\dot{q}(x,0) = 0$ e $q(x,0)$ dada por uma função localizada qualquer.



Achar $q(x,t)$, para $t > 0$

Nesse caso:

$$f(x) = \frac{q(x,0)}{2} = g(x) = q_0(x)$$

$$\Rightarrow q(x,t) = \frac{1}{2}\left[q_0(x-ct) + q_0(x+ct)\right]$$

$$\Downarrow$$

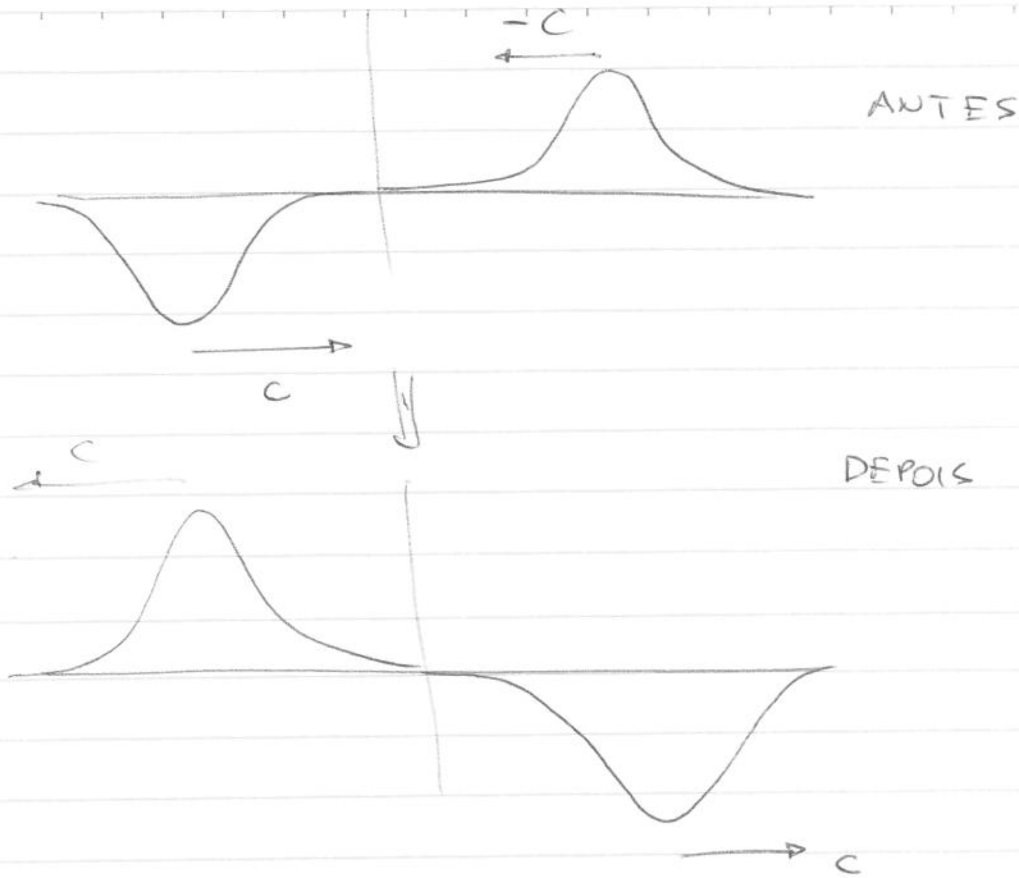
<u>Exemplo</u>: Uma corda cuja extremidade esquerda é fixa em $x=0$. Nesse caso

$$q(0,t) = f(-ct) + g(ct) = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow f(x) = -g(-x) \quad \begin{cases} \text{uma é a} \\ \text{inversão} \\ \text{pela origem} \\ \text{da outra} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q(x,t) = g(x+ct) - g(-x+ct)$$

Mas $-g(-x+ct)$ é uma onda que se propaga para a direita. Assim, precisamos considerar a solução acima em toda a reta real, embora apenas a região $x>0$ seja física.



O resultado líquido é que a onda se reflete em $x = 0$ e volta com inversão

Se quisermos agora encontrar a solução para a corda fixa nas extremidades $x=0$ e $x=L$, podemos retornar à forma separada. É melhor trabalhar diretamente com as soluções reais. Assim:

$$X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$\psi(x) = C\cos\frac{\omega}{c}x + D\sin\frac{\omega}{c}x$$

Impondo que $q(0,t) = q(L,t) = 0, \ \forall t$:

$$\Rightarrow \psi(0)X(t) = \psi(L)X(t) = 0 \Rightarrow \psi(0) = \psi(L) = 0$$

$$\Rightarrow \psi(0) = C = 0 \Rightarrow \psi(x) = D\sin\frac{\omega}{c}x$$

$$\psi(L) = D\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\omega_n L}{c} = n\pi \quad (n=1,2,\dots)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_n = c\frac{n\pi}{L} \quad (n=1,2,\dots)}$$

Assim: $q_n(x,t) = \sin\left[\frac{n\pi x}{L}\right](A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)$

e a solução geral é obtida por superposição linear:

$$\boxed{q(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)}$$

que foi obtido anteriormente a partir do caso discreto

ENERGIA DA ONDA

Podemos achar uma expressão para a energia cinética T e energia potencial U da corda no caso contínuo. Isso pode ser feito a partir, por exemplo, das expressões discretas.

$$T = \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{d}\right)\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j^2\, d \xrightarrow[\substack{d\to 0\\ n\to\infty\\ m\to 0}]{} \frac{\rho}{2}\int \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$U = \frac{\tau}{2d}\sum_{j}^{n} (q_j - q_{j-1})^2 = \frac{\tau}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{q_j - q_{j-1}}{d}\right)^2 d \xrightarrow[\substack{d\to 0\\ n\to\infty}]{} \frac{\tau}{2}\int\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\int\left[\rho\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

$$E = \frac{1}{2}\int\left[\rho\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 + \tau\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

Mas: $q(x,t) = \sum_{r=0}^{\infty} \eta_r(t)\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)$

onde $\eta_r(t) = A_r \cos\overbrace{\left(\frac{r\pi c t}{L}\right)}^{\omega_r t} + B_r \sin\overbrace{\left(\frac{r\pi c t}{L}\right)}^{\omega_r t}$

Logo: $T = \frac{\rho}{2}\int_0^L \sum_{r,s} \dot{\eta}_r(t)\dot{\eta}_s(t)\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right)dx$

Mas:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{r,s}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{\rho L}{4} \sum_r \dot{\eta}_r^2(t)}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \sum_{r=\phi}^{\infty} \left(\frac{r\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \eta_r(t)$$

$$\Rightarrow U = \frac{\tau}{2} \int_0^L dx \sum_{r,s} \left(\frac{r\pi}{L}\right)\left(\frac{s\pi}{L}\right) \eta_r(t) \eta_s(t) \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{s\pi x}{L}\right)$$

Mas: $\displaystyle\int_0^L \cos\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{rs}$

$$U = \frac{\tau L}{4} \sum_r \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 \eta_r^2(t) = \frac{L}{4} \frac{\tau}{c^2} \sum_r \omega_r^2 \eta_r^2(t)$$

onde usamos que $\omega_r = \frac{r\pi c}{L}$. Mas $c^2 = \frac{\tau}{\rho}$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{\rho L}{4} \sum_r \omega_r^2 \eta_r^2(t)}$$

A energia total é:

$$\boxed{E = T + U = \frac{\rho L}{4} \sum_r \left(\dot{\eta}_r^2 + \omega_r^2 \eta_r^2\right)}$$

$$\dot{\eta}_r(t) = \omega_r(-A_r \sin \omega_r t + B_r \cos \omega_r t)$$

$$\dot{\eta}_r^2 + \omega_r^2 \eta_r^2 = \omega_r^2 \left[(-A_r s + B_r c)^2 + (A_r c + B_r s)^2 \right]$$

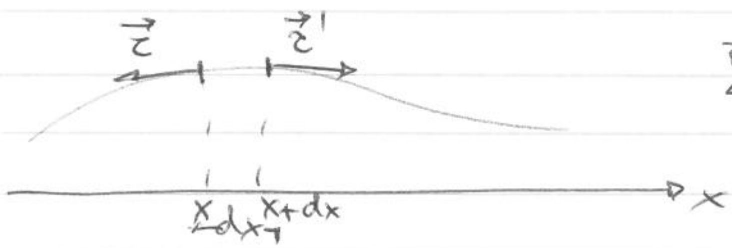
$$= \omega_r^2 \left[A_r^2 + B_r^2 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho L}{4} \sum_r (A_r^2 + B_r^2)\,\omega_r^2}$$

A energia é uma constante do movimento (sistema conservativo) e depende dos quadrados das amplitudes dos modos A_r^2 e B_r^2.

Dissipação e força externa

Uma corda ~~...~~ vibrante está sujeita a dissipação. Podemos analisar o efeito que a dissipação introduz na equação de onda. Dado um elemento de comprimento $\underline{dx}$ da corda, podemos escrever as forças verticais que agem sobre ele da seguinte forma



A força à direita tem módulo τ e é tangente à corda em $x+dx$. Portanto:

$$\tan\theta_1 = \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x+dx} \simeq \sin\theta_1$$

$$\Rightarrow \quad F_y^{\tau}(x+dx) = \tau \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x+dx}$$

$$\Rightarrow \quad F_y^{\tau}(x) = -\tau \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x}$$

i.e. o sinal é devido ao fato de $\vec{\tau}$ apontar na ~~direção~~ sentido oposto à tangente

$$\Rightarrow dF_y^{\tau} = F_y(x+dx) + F_y(x) = \tau\left[\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x}\right] = \tau \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\,dx$$

Se a força dissipativa for do tipo viscoso, proporcional à velocidade:

$$dF_y^D \propto -\frac{\partial q}{\partial t}\,dx$$

$$\Rightarrow dF_y^D = -D\,\frac{\partial q}{\partial t}\,dx$$

pois ela é certamente proporcional ao tamanho do segmento dx. Finalmente, se houver uma força externa $F(x,t)$ por unidade de comprimento da corda, a força total será:

$$dF_y^T = \left[\tau\,\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - D\,\frac{\partial q}{\partial t} + F(x,t)\right]dx = dm\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$$

onde $dm = \rho\,dx$ e:

$$\boxed{\rho\,\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + D\,\frac{\partial q}{\partial t} - \tau\,\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = F(x,t)}$$

que é a equação de onda com dissipação viscosa e força externa. Vamos resolvê-la por modos normais. Escrevendo:

$$q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

e levando na equação acima:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho\,\ddot{\eta}_n + D\,\dot{\eta}_n + \frac{n^2\pi^2\tau}{L^2}\,\eta_n\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = F(x,t)$$

Multiplicando os 2 lados por

$\sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right)$ e integrando $\int_0^L dx$

e usando: $\int_0^L \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}\delta_{r,s}$

$$\boxed{\rho\,\ddot{\eta}_s + D\,\dot{\eta}_s + \left(\frac{s^2\pi^2}{L^2}\tau\right)\eta_s = \frac{2f_s(t)}{L}}$$

onde $f_s(t)$ é a componente de Fourier espacial de $F(x,t)$:

$$f_s(t) = \int_0^L dx \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right)F(x,t)$$

Vejam que a equação acima é a equação do oscilador harmônico amortecido e forçado, já resolvida, através, por exemplo, de transformação de Fourier no tempo. (Cap 3 do Marion).

/ /

Exemplo: Uma corda forçada no centro ($x = L/2$) com freqüência ω.

$$F(x,t) = F_0 \cos\omega t \; \delta(x - \tfrac{L}{2})$$

As componentes de Fourier espaciais são:

$$f_s(t) = \int_0^L F_0 \cos\omega t \; \delta(x - \tfrac{L}{2}) \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx$$

$$= F_0 \cos\omega t \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)$$

Note que $f_s(t) = 0$ se $s =$ par, por razões já discutidas anteriormente. Assim:

$$\rho \ddot{\eta}_s + D\dot{\eta}_s + \left(\frac{s^2\pi^2 \tau}{L^2}\right)\eta_s = \frac{2}{L} F_0 \cos\omega t \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)$$

A solução agora prossegue por transformação de Fourier no tempo. A eq. acima pode ser vista como a parte real de:

$$\rho \ddot{\eta}_s + D\dot{\eta}_s + \left(\frac{s^2\pi^2 \tau}{L^2}\right)\eta_s = \frac{2F_0}{L} \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) e^{i\omega t}$$

A solução geral é a solução geral da homogênea + uma solução particular da não-homogênea. É fácil ver que a última pode ser buscada na forma:

$$\eta_s(t) = A\, e^{i\omega t}$$

/ /

$$\left[-\omega^2\rho + i\omega D + \underbrace{\left(\frac{s^2\pi^2\tau}{L^2}\right)}_{T^2}\right]A = \frac{2F_0}{L}\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \qquad \to \omega_s^2\rho$$

$$A = \frac{2F_0}{L}\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{-\omega^2\rho + i\omega D + T^2}\right) \qquad \to \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\delta}$$

$$\cancel{A = \frac{2F_0}{L}\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\left(\frac{T^2-\omega^2\rho - i\omega D}{\omega^2 D^2 + (T^2-\omega^2\rho)^2}\right)}$$

$$\eta_s(t) = \mathrm{Re}\left[A\, e^{i\omega t}\right] =$$

$$= \frac{2F_0}{L}\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\mathrm{Re}\left[\frac{1}{z}e^{i\omega t}\right]$$

$$\eta_s(t) = \frac{2F_0}{L}\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\frac{\cos(\omega t - \delta)}{|z|}$$

$$|z| = \left[\omega^2 D^2 + (T^2 - \omega^2\rho)^2\right]^{1/2}$$

$$\delta = \arctan\left[\frac{\omega D}{T^2 - \omega^2\rho}\right]$$

Para dissipação fraca há ressonância em

$$\omega^2 = \frac{T^2}{\rho} = \frac{s^2\pi^2\tau}{L^2\rho} = \frac{s^2\pi^2c^2}{L^2}$$

$\Rightarrow \omega = \dfrac{s\pi c}{L} = \omega_s$ que é a freqüência normal do modo $\underline{s}$

REFLEXÃO E TRANSMISSÃO

Considere uma corda cuja densidade é ρ_1 para $x<0$ e ρ_2 para $x>0$. Uma onda é incidente pela esquerda. Encontre a razão das amplitudes refletida e transmitida.

A onda incidente é: $A\, e^{i(k_1 x-\omega_1 t)}$ onde

$$\omega_1 = c_1 k_1 \qquad c_1 = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_1}}$$

A onda refletida é $\quad B\, e^{i(k_1' x \mp \omega_1' t)} \qquad \omega_1' = c_1 k_1'$

A onda transmitida é: $C\, e^{i(k_2 x-\omega_2 t)} \qquad \omega_2 = c_2 k_2$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_2}}$$

As condições de contorno na junção em $x=0$ são:

$$q(x=0^-,t) = q(x=0^+,t) \quad \forall t \qquad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}(x=0^-,t) = \frac{\partial q}{\partial x}(x=0^+,t) \quad \forall t \qquad (2)$$

A primeira é óbvia: a corda é contínua. A segunda decorre do fato de que a força em um ponto x_0 exercida pela parte da direita na parte da esquerda é:

$$F_y(D\to E) = \tau \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x_0^+}$$

e $$F_y(E\to D) = -\tau \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x_0^-}$$

Pela 3ª lei de Newton

~~Como o ponto não tem massa~~

$$F_y(D \to E) + F_y(E \to D) = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} \text{ é contínua}$$

De (1):

$$A e^{-i\omega_1 t} + B e^{-i\omega_1' t} = C e^{-i\omega_2 t} \quad \forall t$$

De (2):

$$k_1 A e^{-i\omega_1 t} - k_1' B e^{-i\omega_1' t} = k_2 C e^{-i\omega_2 t} \quad \forall t$$

Como exponenciais com freqüências diferentes são LI, a menos que $\omega_1 = \omega_1' = \omega_2$, todos os coeficientes seriam nulos e não haveria solução não trivial. Assim:

$$A + B = C$$

$$k_1(A - B) = k_2 C$$

já que $k_1' = \frac{\omega_1'}{c_1} = \frac{\omega_1}{c_1} = k_1$. Além disso:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

Portanto: $A = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) C \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$

$B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) C \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{B}{C} \times \frac{C}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$

ou $$\frac{C}{A} = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}$$

Os coeficientes de reflexão e transmissão são :

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}\right)^2$$

$$T = 1 - R = 1 - \left[\frac{\rho_1+\rho_2-2\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1+\rho_2+2\sqrt{\rho_1\rho_2}}\right] = \frac{4\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}}{(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})^2}$$

$$\cancel{= \frac{4\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\rho_1+\rho_2+2\sqrt{\rho_1\rho_2}} = \left(\frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}\right)^2}$$

$$\cancel{= (\sqrt{\rho_2})^2\left|\frac{C}{A}\right|^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\,\frac{4\rho_1}{(\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2})^2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{k_2}{k_1}\left|\frac{C}{A}\right|^2$$

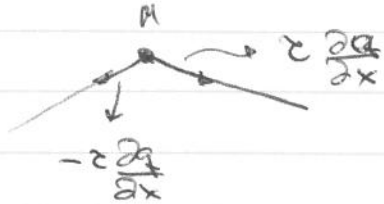
$$\rightarrow F_{E\to D} = -\tau\frac{\partial q}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial q}{\partial t}$$

$$P_{E\to D} = -\tau\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial t}$$

$$q = |A|\cos k(x-ct) \Rightarrow P_{E\to D} = +\tau|A|^2 k\,\omega \sin^2(\ )$$

$$\langle P_{E\to D}\rangle = \frac{1}{2}\tau\omega k|A|^2 \Rightarrow \frac{\langle P_T\rangle}{\langle P_I\rangle} = \frac{k_2|C|^2}{k_1|A|^2}$$

13.20)



$$\Rightarrow M \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \tau \left[\frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{0^+} - \frac{\partial q}{\partial x}\Big|_{0^-} \right]$$

$$q(x) = \begin{cases} A e^{i(kx-\omega t)} + B e^{-i(kx+\omega t)} & x<0 \\ C e^{i(kx-\omega t)} & x>0 \end{cases} \qquad \omega = ck$$

$$A + B = C \qquad (q(0^-) = q(0^+))$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\omega^2 q \Rightarrow -\omega^2 M \underset{\substack{\text{ou} \\ C}}{(A+B)} = \tau i k \left[C - (A-B) \right]$$

$$-M\omega^2 (A+B) = i \tau k [2B] = 2 i \tau k B$$

$$+ i \tan\theta (A+B) = B \Rightarrow (1 - i\tan\theta) B = + i \tan\theta\, A$$

$$\tan\theta = \frac{M\omega^2}{2\tau k} \qquad \frac{B}{A} = + \frac{i\tan\theta}{1 - i\tan\theta} = \frac{i \sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \sin^2\theta \qquad C = A + B \Rightarrow \frac{C}{A} = 1 + \frac{i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \cos^2\theta$$

$$\frac{B}{A} = i\sin\theta\, e^{i\theta} = \sin\theta\, e^{i(\theta + \pi/2)}$$

$$\theta_R = \theta + \frac{\pi}{2} \qquad \frac{C}{A} = \cos\theta\, e^{i\theta}$$

$$\theta_T = \theta$$

Velocidade de grupo e de fase

Uma onda monocromática

$$e^{i\left(\frac{\omega}{c}x-\omega t\right)} \equiv e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{onde } \omega = ck$$

se propaga de tal forma que sua fase

$$\phi = kx - \omega t$$

é constante em x_0 e t_0 tais que:

$$kx_0 - \omega t_0 = \phi_0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\omega}{k} t_0 + \phi_0 \equiv v_p t_0 + \phi_0$$

Portanto, os pontos de fase constante, como os vales e cristas da onda se propagam com velocidade de fase

$$v_p = \frac{\omega}{k} = c$$

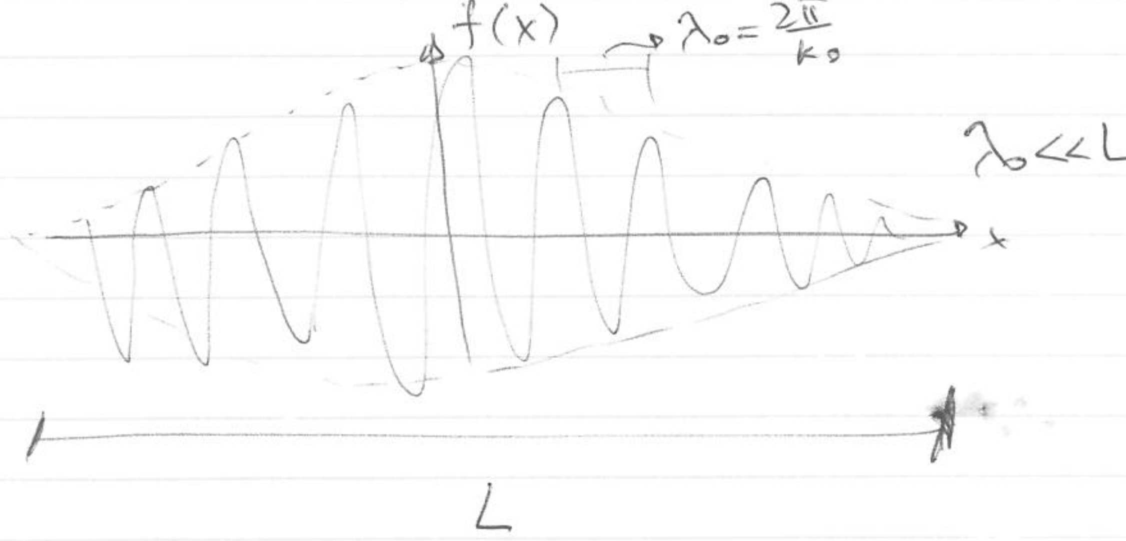
Entretanto, em algumas situações, a relação entre $\underline{\omega}$ e $\underline{k}$ não é linear e ω é uma função de k:

$$\omega(k)$$

Nesses casos, dizemos que há dispersão e a velocidade de fase depende do comprimento de onda (ou vetor de onda k).

Assim diferentes comprimentos de onda se propagam com diferentes velocidades. O que acontece então com a propagação de um pacote de ondas, que têm vários comprimentos de onda? Bom, primeiro, a onda <u>não</u> se propaga mantendo sua forma. Segundo, veremos que o pacote como um todo se propaga com velocidade diferente de v_f.

Tomemos um pacote de ondas em $t=0$ dado por uma onda de vetor de onda k_0, cuja amplitude é modulada por uma função suave na escala de $\frac{1}{k_0}$.



A função $f(x)$ pode ser escrita como:

$$f(x) = e^{ik_0 x} A(x)$$ → portadora

onde $A(x) = \int dk \, a(k) \, e^{ikx}$ tal que, pelas propriedades da transformada de Fourier,

$a(k)$ só tem valores apreciáveis para

$$|k| << k_0 \qquad |k| \lesssim \frac{1}{L} << \frac{1}{\lambda_0} \simeq k_0$$

Portanto,

$$g(x,0) = f(x) = \int dk\, a(k)\, e^{i(k+k_0)x}$$

Para $t>0$, devemos fazer para cada onda:

$$\underset{(t=0)}{e^{i\tilde{k}x}} \longrightarrow \underset{(t\neq 0)}{e^{i(\tilde{k}x-\omega(\tilde{k})t)}}$$

$$\Rightarrow g(x,t) = \int dk\, a(k)\, e^{i[(k+k_0)x-\omega(k+k_0)t]}$$

Como $k << k_0$, podemos expandir:

$$\omega(k_0+k) \cong \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0} (k) + O(k^2)$$

$$\equiv \omega_0 + v_g k$$

$$\Rightarrow g(x,t) = \int dk\, a(k)\, e^{i[(k+k_0)x-\omega_0 t - v_g k t]}$$

$$= e^{i(k_0x-\omega_0 t)} \int dk\, a(k)\, e^{ik(x-v_g t)}$$

$$g(x,t) = e^{i(k_0x-\omega_0 t)}\, A(x-v_g t)$$

Assim, vemos que o envelope $A(x)$ viaja com velocidade

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}$$

que é chamada de velocidade de grupo. Enquanto isso, a "portadora" continua viajando com velocidade de fase $v_p = \frac{\omega_0}{k_0}$.

13.52)

$$\Psi(x,0) = B\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(k-k_0)^2} e^{-ikx}\,dk$$

$$= B e^{-ik_0x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma(k-k_0)^2} e^{-i(k-k_0)x}\,dk$$

$$= B e^{-ik_0x}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma k^2} e^{-ikx}\,dk}_{I(\sigma,x)}$$

$$\sigma k^2 + ikx = \sigma\left(k + \frac{ix}{2\sigma}\right)^2 + \frac{x^2}{4\sigma}$$

$$I(\sigma,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(k+i\frac{x}{2\sigma})^2} e^{-x^2/4\sigma}\,dk = e^{-\frac{x^2}{4\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma k^2}\,dk = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\, e^{-x^2/4\sigma}$$

$$\boxed{\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\, B\, e^{-ik_0x}\, e^{-x^2/4\sigma}}$$

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}(k-k_0) \equiv \omega_0 + \omega_0'(k-k_0)$$

$$kx \to kx - \omega(k)t = kx - \omega_0 t - \omega_0' t(k-k_0)$$

$$\Psi^{(1)}(x,t) = B\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(k-k_0)^2} e^{-i[kx-\omega_0 t-\omega_0' t(k-k_0)]}\,dk$$

$$= B e^{-i(k_0x-\omega_0t)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(k-k_0)^2} e^{-i[(k-k_0)x-\omega_0't(k-k_0)]}\,dk$$

$$= B e^{-i(k_0x-\omega_0t)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma k^2} e^{-ik(x-\omega_0't)}\,dk$$

$$= B e^{-i(k_0x-\omega_0t)}\, I(\sigma, x-\omega_0't)$$

$$\Rightarrow \Psi^{(1)}(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\, B\, e^{-i(k_0x-\omega_0t)}\, e^{-(x-\omega_0't)^2/4\sigma}$$

$\Rightarrow$ envelope gaussiano se move com $v = \omega_0' = v_g$

Agora: $\omega(k) \cong \omega_0 + \omega_0'(k-k_0) + \frac{\omega_0''}{2}(k-k_0)^2$

$$\Rightarrow \Psi^{(2)}(x,t) = B e^{-i(k_0x-\omega_0t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(k-k_0)^2}\, e^{-i\left[(k-k_0)(x-\omega_0't) - \frac{\omega_0''t}{2}(k-k_0)^2\right]}\, dk$$

$$= B e^{-i(k_0x-\omega_0t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma - i\frac{\omega_0''t}{2})(k)^2}\, e^{-ik(x-\omega_0't)}\, dk}_{I(\sigma - i\frac{\omega_0''t}{2},\, x-\omega_0't)}$$

$$\Psi^{(2)}(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\, B\, e^{-i(k_0x-\omega_0t)} \exp\left[\frac{(x-\omega_0't)^2}{4(\sigma - i\frac{\omega_0't}{2})}\right]$$

Seja $\frac{\omega_0'}{2\sigma} \equiv \gamma \Rightarrow \frac{1}{\sigma - i\omega_0't/2} = \frac{1}{\sigma}\,\frac{1}{1-i\gamma t} = \frac{1+i\gamma t}{\sigma(1+\gamma^2t^2)}$

$$\Psi^{(2)}(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\, B\, e^{-i(k_0x-\omega_0t)} \exp\left[\frac{(x-\omega_0't)^2}{4\sigma(1+\gamma^2t^2)}\right] \exp\left[\frac{i\gamma(x-\omega_0't)^2t}{4\sigma(1+\gamma^2t^2)}\right]$$

$$|\Psi^{(2)}(x,t)| = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}\, |B| \exp\left[\frac{(x-\omega_0't)^2}{4\sigma(1+\gamma^2t^2)}\right] \Rightarrow \text{Largura} = \sqrt{\sigma}\sqrt{1+\gamma^2t^2}$$

O pacote se alarga $\propto \sqrt{1+\gamma^2t^2}$