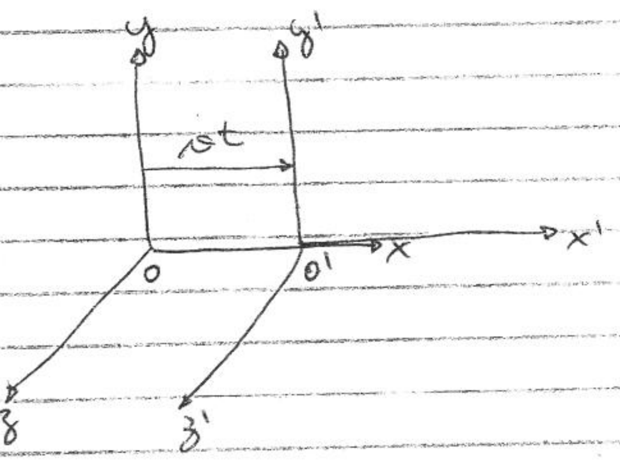
Relatividade Restrita

A mecânica clássica obedece o princípio da relatividade de Galileu, ou seja, os fenômenos físicos são invariantes se observados em referenciais inerciais que se movem com velocidade constante uns em relação aos outros.

Matematicamente, isso se exprime através do fato de que as eqs. de movimento de Newton têm a mesma forma em quaisquer referenciais inerciais (R. I.) se as coordenadas se transformam segundo as transformações de Galileu. Sejam dois referenciais K e K' que se movem um em relação ao outro. Suponha que K' se mova na direção x visto de K com velocidade v e que as origens O e O' coincidem em $t=0$. Então:

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$



De maneira geral, se K' se move com velocidade $\vec{v}$ qualquer:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$$
$$t' = t$$

Seja um sistema mecânico de N partículas interagindo segundo forças centrais deriváveis de um potencial $V(r)$. Então, em K'

$$m_i \frac{d^2\vec{x}_i'}{dt'^2} = -\vec{\nabla}_i' \sum_j V(|\vec{x}_i' - \vec{x}_j'|)$$

Usando a transformação de Galileu:

$$\frac{d\vec{x}_i'}{dt'} = \frac{d\vec{x}_i'}{dt} = \frac{d\vec{x}_i}{dt} - \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{x}_i'}{dt'^2} = \frac{d^2\vec{x}_i'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2}$$

$$V(|\vec{x}_i' - \vec{x}_j'|) = V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

$$\vec{\nabla}_i' V(|\vec{x}_i' - \vec{x}_j'|) = \vec{\nabla}_i V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

$$\Rightarrow m_i \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} = -\vec{\nabla}_i \sum_j V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

que tem a mesma forma (também se diz que as equações têm forma covariante).

A Eq. de onda é diferente. Ela não é invariante sob as transformações de Galileu. Com efeito, se em K':

$$\left(\vec{\nabla}'^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\psi = 0$$

da transformação inversa:

$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{v}t$$
$$t = t'$$

temos:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \vec{\nabla}' = \vec{\nabla}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}$$

Assim, em K:

$$\Rightarrow \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)^2\right]\psi(x,y,z,t) = 0$$

que tem forma diferente e, em particular, depende de $\vec{v}$. Isso não surpreende, pois em geral ondas mecânicas se propagam em meios materiais, sendo c sua velocidade em relação ao meio em questão. Se o meio se move com velocidade $\vec{v}$, a onda mecânica se propaga com velocidade que é a soma de $\vec{v}$ com a velocidade da onda em relação ao meio. Por exemplo, se $\vec{v} = v\hat{x}$

$$\Rightarrow \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]\psi = 0$$

$$\Rightarrow -k^2 - \frac{1}{c^2}\left(-i\omega + ik_x v\right)^2 = 0$$

$$k^2c^2 = (\omega - k_x v)^2 \Rightarrow \omega = k_x v + kc$$

$$\Rightarrow \omega = ck + \vec{v}\cdot\vec{k} = \underbrace{(c + v\cos\theta)}_{v_{ph}}k \quad \text{onde } \cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{vk}$$

Por muito tempo raciocinou-se por analogia e supôs-se que as ondas eletromagnéticas se movem com velocidade c em relação a um meio chamado "éter" que não têm densidade e não interage com a matéria. Dificuldades experimentais levaram Einstein a tomar uma atitude diferente. Ele propôs que não é necessário o conceito de "éter" e que são as leis da Mecânica Clássica e a transformação de Galileu que têm que ser modificadas. Sua teoria pôde ser resumida em 2 postulados:

1) Postulado da Relatividade

"Todas as leis físicas são as mesmas em quaisquer referenciais inerciais" (incluindo os fenômenos ondulatórios eletromagnéticos).

2) Postulado da constância da velocidade da luz

"A velocidade da luz é a mesma (c) independente do movimento de suas fontes".

Obviamente, do segundo postulado, vemos que as leis de transformação de Galileu têm que ser modificadas.

Uma abordagem alternativa é trocar o postulado (2) por outro que diz que existe uma velocidade limite c para entidades físicas (ver problema 11.1).

Como as leis de transformação de Galileu terão que ser descartadas, teremos que modificar as leis da mecânica clássica também. As Eqs. de Maxwell entretanto, não necessitarão nenhuma modificação

Transformações de Lorentz ("Boosts")

Suponha que uma onda esférica de luz de duração finita e certa é gerada na origem comum O, O' de K e K' em $t=t'=0$. A frente de onda será, em ambos os referenciais, uma casca esférica cujo raio se expande com velocidade $\underline{c}$ (pelo segundo postulado). Assim:

$$c^2t'^2 = R'^2 \qquad \text{(raios das cascas esféricas } R \text{ e } R'\text{)}$$
$$c^2t^2 = R^2$$

ou:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0$$

Argumentos de homogeneidade e isotropia do espaço tempo mostram que as transformações são lineares. Assim:

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \lambda^2\left[c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2\right]$$

onde $\lambda = \lambda(\vec{v})$ é um possível fator de escala da transformação. Como a transformação corresponde a uma velocidade relativa na direção x (ou x') é claro que ela envolverá apenas (t', x') e (x, t), por simetria. Chamemos a combinação ct de x^0 $(ct' = x^{0'})$. Então:

$$(x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 = \lambda^2\left[(x^0)^2 - (x^1)^2\right]$$

a forma invariante acima sugere que a transformação seja

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cosh \zeta & -\sinh \zeta \\ -\sinh \zeta & \cosh \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

já que:

$$(x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 = \lambda^2 \Big[c^2 x^{0^2} + s^2 x^{1^2} - 2sc\, x^0 x^1 -$$

$$- \left(s^2 x^{0^2} + c^2 x^{1^2} - 2sc\, x^0 x^1 \right) \Big]$$

$$= \lambda^2 \left[(x^0)^2 - (x^1)^2 \right] \quad \Rightarrow \begin{cases} c = \cosh \zeta \\ s = \sinh \zeta \end{cases}$$

independente do valor de ζ. A constante $\lambda = 1$ porque o problema é simétrico em relação ao outro $(K \rightleftarrows K')$. Se fizermos $x^{1'} = 0$, teremos $x = v t$, pois $x^{1'} = 0$ corresponde à origem do sistema K'

$$\Rightarrow \quad + \sinh \zeta \, x^0 = \cosh \zeta \, x^1$$

$$\Rightarrow \quad x = \tanh \zeta \cdot (ct) = vt$$

$$\Rightarrow \boxed{\tanh \zeta = \frac{v}{c} \equiv \beta} \qquad \boxed{\begin{matrix} 0 \leq \beta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq \infty \end{matrix}}$$

Segue que:

$$\cosh \zeta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \qquad \boxed{1 \leq \gamma \leq \infty}$$

$$\sinh \zeta = \cosh \zeta \tanh \zeta = \gamma \beta$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}}$$

$$x^{0'} = \gamma (x^0 - \beta x^1)$$
$$x^{1'} = \gamma (x^1 - \beta x^0)$$
$$x^{2'} = x^2$$
$$x^{3'} = x^3$$

A transformação inversa é obtida trocando $\beta \to -\beta$ e quantidades com linha por quantidades sem linha ($\zeta \to -\zeta$)

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & \sinh\zeta \\ \sinh\zeta & \cosh\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \end{pmatrix}$$

Alternativamente, podemos comprovar que:

$$\begin{pmatrix} c & s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mais adiante, vamos explorar melhor a estrutura de "rotação" do "boost" de Lorentz

. Contração de Lorentz: Lembramos que medir o comprimento de um objeto equivale a fazer a diferença das coordenadas dos extremos, tomados no mesmo instante de tempo. Assim, se em K'

$$\Delta x' = L'$$

em K, onde:

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - vt) \Rightarrow \Delta x^{1'} = L' = \gamma\,\Delta x = \gamma L$$

pois $\Delta t = 0$. Assim, o comprimento medido em K é menor:

$$L = \frac{L'}{\gamma} \Rightarrow L < L'$$

Relatividade da simultaneidade

Não é de se espantar que, se a luz propaga-se com a velocidade c em todos os SR inerciais, então profundas modificações têm que ocorrer em nossos conceitos de espaço e tempo. Um dos principais resultados dos postulados de Einstein é a "relatividade da simultaneidade", isto é, 2 eventos que são observados como sendo simultâneos em S, não o serão necessariamente quando observados de S'. Vejamos como isso segue naturalmente das transformações de Lorentz.

Sejam 2 eventos A e B simultâneos em S:

$$A: \ (x_A, y_A, z_A, t_A)$$

$$t_A = t_B$$

$$B: \ (x_B, y_B, z_B, t_B)$$

Os mesmos eventos, quando observados em S' terão as seguintes coordenadas temporais:

$$t'_A = \gamma \left(t_A - \frac{v}{c^2} x_A \right)$$

$$t'_B = \gamma \left(t_B - \frac{v}{c^2} x_B \right)$$

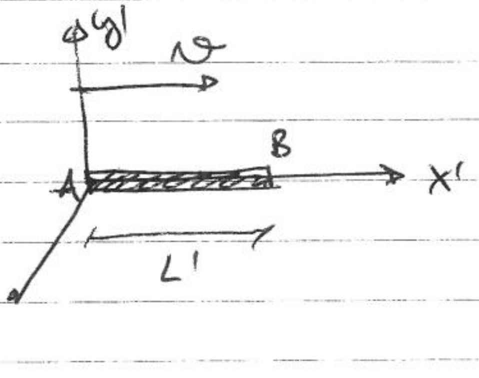
$$\Rightarrow \Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma \left[(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A) \right] = -\frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A)$$

Se $x_A \neq x_B$, então $\Delta t' = t'_B - t'_A \neq 0$ e os eventos não serão simultâneos em S'!
Note que se os eventos ocorrem no mesmo instante e no mesmo ponto do espaço, eles serão sempre simultâneos, não importa em que referencial. A ambigüidade no ordenamento temporal de 2 eventos só existe se eles ocorrem em 2 pontos espaciais distintos.

Note também que, se $x_B > x_A$ e $v > 0 \Rightarrow t'_B < t'_A$, ou seja, o evento que ocorre "mais à frente" na direção de movimento de S' é anterior ao que ocorre "menos à frente". Mas essa ordem pode ser invertida, invertendo o sinal de v. Portanto também a ordem dos eventos é relativa ao referencial em que se os observa.

A contração de Lorentz

Seja uma barra em repouso em relação a S'. Seu comprimento em S' é medido como sendo L'. Vamos supor que a barra tenha uma extremidade em O' e repousa sobre o eixo x', de tal forma que podemos descrever as coordenadas de suas extremidades como sendo



$A: (0, 0, 0, t'_A)$

$B: (L', 0, 0, t'_B)$

Devemos perceber que medir o comprimento da barra é achar a distância entre ~~seus~~ suas extremidades num mesmo instante.

Em S':

$$x_A = \gamma(x'_A + v t'_A) = \gamma v t'_A$$
$$x_B = \gamma(x'_B + v t'_B) = \gamma(L' + v t'_B)$$
$$t_A = \gamma\left(t'_A + \frac{v}{c^2} x'_A\right) = \gamma t'_A$$

$$t_B = \gamma\left(t'_B + \frac{v}{c^2} x'_B\right) = \gamma\left(t'_B + \frac{v}{c^2} L'\right)$$

Se quisermos medir a barra em S, devemos fazer $t_A = t_B \Rightarrow t'_A = t'_B + \frac{v}{c^2} L' \Rightarrow t'_B - t'_A = -\frac{v}{c^2} L'$

Embora os eventos sejam simultâneos em S eles não o são em S'.

Portanto:

$$L = x_B - x_A = \gamma\left[L' + v(t_B' - t_A')\right]$$

$$= \gamma\left[L' + v \times \left(-\frac{v}{c^2}L'\right)\right]$$

$$= \frac{(1 - v^2/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, L' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, L'$$

ou $L = \dfrac{L'}{\gamma} < L'$

Note que as dimensões perpendiculares ao movimento são inalteradas.

Dilatação do tempo

Assim como medidas de comprimento são afetadas pelo movimento relativo do observador e do objeto, também as medidas de tempo são afetadas. Imagine um relógio em repouso em S' digamos posicionado na origem O'. Dois instantes diferentes observados nesse relógio correspondem a 2 eventos cujas coordenadas são:

$$(0,0,0,0) \quad e \quad (0,0,0,\Delta t') \quad \text{em } S'$$

Um intervalo correspondente será medido em S tal que:

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) = \gamma\, \Delta t'$$

Assim o intervalo medido em S será mais longo pelo fator γ ("dilatação do tempo"): relógios em movimento uniforme parecerão andar mais lentamente que relógios em repouso. Um intervalo medido num relógio em repouso, ou seja, medido num mesmo ponto no espaço é chamado de intervalo de "tempo próprio". O referencial em que um objeto está (mesmo que temporariamente) em repouso é o seu "referencial próprio".

A meia-vida do muon:

Múons são partículas muito parecidas com o elétron mas com uma massa umas 200 vezes maior. Múons são produzidos por colisões de raios cósmicos na atmosfera (partículas muito energéticas que alcançam a Terra e cuja origem ainda não é conhecida). A velocidade típica dos múons assim produzidos é de $v \cong 0.99c$. A meia-vida de um múon medida no laboratório com o múon em repouso é de:

$$\tau^0_\mu = 2.3 \times 10^{-6}\,s$$

A uma velocidade de 0.99c, essas partículas deveriam viajar em média uma distância de

$$\Delta x_0 = v\,\tau^0_\mu = 0.99 \times 3\times10^8 \frac{m}{s} \times 2.3\times10^{-6}\,s$$

$$\Delta x_0 \simeq 690\,m$$

Entretanto, essas partículas, quando produzidas por colisões de raios cósmicos chegam a viajar de 4.000 a 13.000 m antes de decaírem. A explicação para essa discrepância é a "dilatação" da meia-vida do múon quando em movimento. Para $v = 0.99c$, $\gamma \simeq 7$ e $\tau^{TERRA}_\mu = \gamma\,\tau^0_\mu \cong 16\times10^{-6}\,s$ levando a uma distância média percorrida de

$$\Delta x^{TERRA} = \gamma\,\Delta x_0 \simeq 4.900\,m$$

O sistema GPS

O GPS ("Global Positioning System") é um sistema de 24 satélites em órbita ao redor da Terra utilizado para determinar a posição de qualquer ponto na superfície da Terra com grande precisão: cerca de 5 a 10 metros para os aparelhos mais simples. O sistema consegue isso através de "triangulação": determina-se a distância de um receptor na superfície da Terra a cada um de pelo menos 4 satélites e utilizam-se essas distâncias para achar a posição absoluta do receptor. As distâncias, por sua vez, são determinadas pelo tempo de vôo de um sinal de rádio emitido do satélite até o receptor. Para isso cada satélite dispõe de um relógio atômico de alta precisão, cujo tempo próprio precisa ser conhecido com exatidão de 20-30 nanosegundos ($20\text{-}30 \times 10^{-9}$ s).

O movimento orbital dos satélites em relação a um observador parado no solo faz com que o tempo observado pelo último seja mais lento ("dilatado") que o tempo próprio do satélite. Ao final de um dia ($8{,}64 \times 10^4$ s) o efeito cumulativo dessa diferença pode ser considerável

$$\Delta t' = \gamma \, \Delta t$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \cong 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

$$\Delta t' \cong \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)\Delta t = \Delta t + \frac{v^2 \Delta t}{2c^2} = \Delta t + \delta t$$

$$\delta t_{DIA} \cong \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{\Delta t_{DIA}}{2} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 4.32 \times 10^4 s$$

A velocidade orbital é de cerca de:

$$v \cong 4 \times 10^3 \frac{m}{s}$$

$$\boxed{\delta t_{DIA} \simeq 7 \mu s}$$

que é muito maior que a tolerância permitida. Existe um efeito devido a correções de relatividade geral, que tende a "adiantar" o relógio atômico, cujo efeito cumulativo em um dia é da ordem de

$$\delta t_{DIA}^{GERAL} \simeq -45 \mu s$$

Ambos têm que ser corrigidos para que o sistema funcione com a precisão desejada

. Quadri-vetores. Existem quantidades físicas que se transformam como (x^0, x^1, x^2, x^3) sob boosts de Lorentz. São chamadas de quadri-vetores:

(A^0, A^1, A^2, A^3) é um quadri-vetor se:

$$\begin{cases} A^{0\prime} = \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A^{1\prime} = \gamma(A^1 - \beta A^0) \\ A^{2\prime} = A^2 \\ A^{3\prime} = A^3 \end{cases}$$

Assim como $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ é invariante sob boosts, também $(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$ o são, assim como a combinação:

$$A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

onde A^α e B^α são quadri-vetores. É usual separar a parte temporal A^0 do vetor espacial $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$. Assim:

$$A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

é análogo ao produto escalar de vetores e, como aquele, é invariante sob boosts.

Além do quadri-vetor x^μ, diferenças de coordenadas do espaço-tempo também são quadri-vetores, devido à natureza linear das transformações de Lorentz. Diferenças infinitesimais são quadri-vetores também (dx^μ).

Intervalo invariante

Um conceito importante é o de intervalo invariante entre dois eventos cujas coordenadas espaço-temporais diferem de Δx^{μ}

$$\Delta S^2 = (\text{intervalo invariante})^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2$$

$$= (\Delta x^0)^2 - (\Delta \vec{x})^2$$

Podemos dividir os intervalos em 3 tipos:

(a) Se $\Delta s^2 > 0$, o intervalo é dito "tipo-tempo". Nesse caso, é possível achar um referencial onde $\Delta \vec{x}' = 0$

$$\Delta s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2 = c^2 (\Delta t')^2 > 0$$

Em K', os eventos ocorrem no mesmo ponto espacial. Com efeito, se em K $\Delta \vec{x} = \Delta x\, \hat{x}$, então em K'

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - c\beta \Delta t) = 0$$

$$\Rightarrow c\beta = \frac{\Delta x}{\Delta t} < c \quad \text{já que } |\Delta x| < c|\Delta t|$$

Portanto, um boost de $\beta = \frac{1}{c} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ faz $\Delta x' = 0$.

(b) Se $\Delta s^2 < 0$, o intervalo é "tipo-espaço". Nesse caso, é possível achar um referencial onde $\Delta t' = 0$ pois:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{\beta}{c} \Delta x\right) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{c \Delta t}{\Delta x} < 1$$

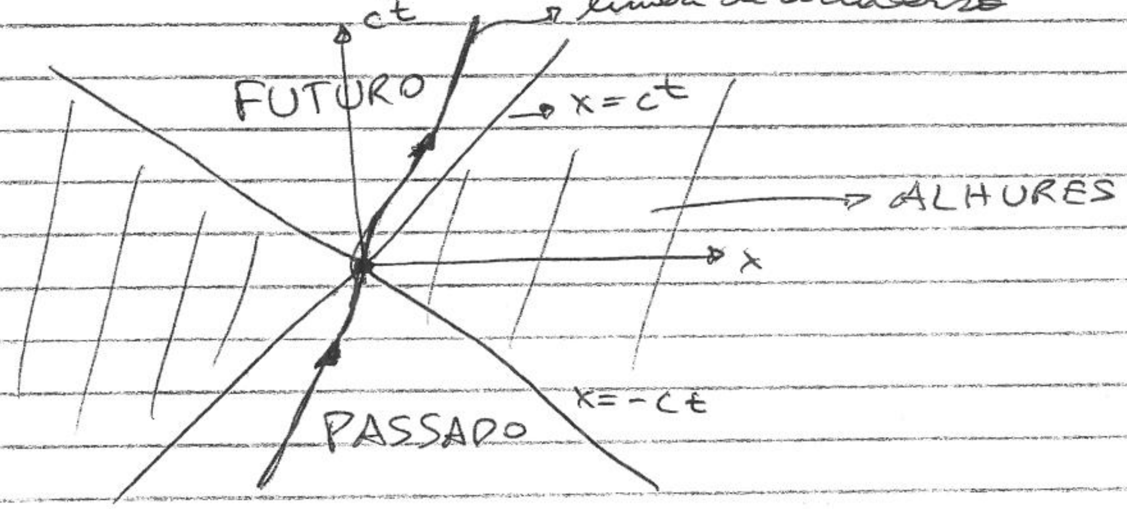
já que $c\Delta t < \Delta x$.

(c) Se $\Delta s^2 = 0$ o intervalo é "tipo-luz" e corresponde a um sinal que se propaga com a velocidade da luz.

Como Δs^2 é invariante, a classificação acima é independente do referencial.

É evidente que 2 eventos separados por um intervalo do tipo-espaço não podem ser ligados causalmente, pois seria necessário um sinal com velocidade de propagação maior que c para ligá-los. Apenas eventos com separação tipo-tempo podem estar causalmente ligados. Eventos com separação tipo-luz podem ser ligados por um sinal luminoso.

Essas conclusões podem ser postas em forma de diagrama (Minkowski)



Uma partícula material se move com $|\vec{v}| < c$ e portanto traça uma linha cuja derivada é sempre maior que um no diagrama acima e está sempre contida dentro do "cone de luz". A região hachurada contém eventos causalmente desconectados da partícula ("alhures").

. *Tempo próprio*

Considere uma partícula cuja velocidade instantânea é $\vec{u}$. No período dt sua posição muda de $d\vec{x}$. O intervalo invariante é:

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2dt^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) = (1-\beta_u^2)c^2dt^2$$

já que $d\vec{x} = \vec{u}\,dt$. Se em K' a partícula está instantaneamente em repouso

$$ds^2 = c^2dt'^2 \quad \text{pois } d\vec{x}' = 0$$

Chamamos o tempo medido no referencial onde a partícula está em repouso de "tempo próprio" e chamamo-lo de $d\tau = dt'$. Assim, em termos do tempo medido em qualquer outro referencial:

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2(1-\beta_u^2) \Rightarrow \boxed{d\tau = \frac{dt}{\gamma_u(t)}}$$

Como: $ds^2 = \dfrac{c^2dt^2}{\gamma_u^2(t)}$ = invariante, costuma-se dizer que o tempo próprio é um invariante de Lorentz. (Embora isso seja estritamente incorreto já que $d\tau$ só é definido num referencial. O correto é dizer que a combinação $\dfrac{dt}{\gamma_u(t)}$ é um invariante)

Assim, integrando no tempo:

$$t_2 - t_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta_u^2(\tau)}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_u(\tau_1)\,d\tau \geq \Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$$

que é a dilatação temporal novamente.

Composição de velocidades

Como a luz se propaga com velocidade c em todos os SR inerciais, é evidente que a lei de adição de velocidades

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

tem que ser modificada. Mais precisamente, se um corpo tem velocidade $\vec{u}'(u'_x, u'_y, u'_z)$ medida por um observador em S' e S' se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{x}$ em relação a S, qual é a velocidade $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ medida por um observador em S?

Das transformações de Lorentz inversas temos:

$$dx = \gamma(dx' + v\,dt')$$

$$dy = dy'$$
$$dz = dz'$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)$$

Logo:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{\frac{v}{c^2}dx' + dt'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$

Note que, se o observador em S' medir a velocidade de um sinal luminoso ao longo de x', ele obterá $u'_x = c$. Já o observador em S obterá:

$$u_x = \frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}} = c$$

compatível com o segundo postulado.

Para as componentes transversais ao movimento teremos:

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1+\frac{v u'_x}{c^2}\right)}$$

Veja que as equações de transformação de u'_y e u'_z também envolvem u'_x. Note também que a adição habitual de velocidades é obtida no limite não-relativístico. As transformadas inversas, como sempre, são obtidas trocando $\underline{v}$ por $\underline{-v}$ e as quantidades com linha pelas quantidades sem linha.

A transformação da velocidade de um referencial para outro não parece ter a forma simples de um quadri-vetor. Entretanto, é possível definir um quadri-vetor relacionado à velocidade. Como vimos, a quantidade:

$$\frac{dt}{\gamma_u} \equiv d\tau \quad \text{é invariante sob transformações de Lorentz}$$

Como dx^μ forma um quadrivetor, definimos a quadri-velocidade:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\gamma_u dx^\mu}{dt} \Rightarrow u^0 = \gamma_u c \quad \text{e} \quad \vec{u} = \gamma_u \vec{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{u^\mu = (\gamma_u c, \gamma_u \vec{u})} \quad \text{onde } \gamma_u = \left[1 - u^2/c^2\right]^{-1/2} \Rightarrow \text{Note a definição}$$

Sua lei de transformação é:

$$u^0 = \gamma_v (u^{0'} + \beta_v u^{3'}) \qquad u^1 = u^{1'}$$
$$u^3 = \gamma_v (u^{3'} + \beta_v u^{0'}) \qquad u^2 = u^{2'}$$

onde explicitamos o sub-índice v em γ e β para não haver confusão com os γ_u e $\gamma_{u'}$ da quadri--velocidade. Assim, simplificando:

$$\gamma_u c = \gamma_v \left(\gamma_{u'} c + \frac{v}{c} \gamma_{u'} u'_z\right) \quad (1)$$

$$\gamma_u u_z = \gamma_v \left(\gamma_{u'} u'_z + \frac{v}{c} \gamma_{u'} c\right) \quad (2)$$

$$\gamma_u u_x = \gamma_{u'} u'_x \quad (3)$$

$$\gamma_u u_y = \gamma_{u'} u'_y \quad (4)$$

A eq. (1) fica:

$$\gamma_u = \gamma_v \gamma_{u'} \left(1 + \frac{v u'_z}{c^2}\right) = \gamma_v \gamma_{u'} \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2}\right) \quad (1')$$

que pode ser provada diretamente.

(2) nos dá, ao usarmos (1'):

$$u_z = \frac{\gamma_v \gamma_{u'}}{\gamma_u} (u'_z + v) = \frac{u'_z + v}{1 + \frac{v u'_z}{c^2}}$$ que é a lei de

transformação de u_z. Finalmente, usando (1'), (3) e (4) nos dão:

$$u_x = \frac{\gamma_{u'}}{\gamma_u} u'_x = \frac{u'_x}{\gamma_v \left(1 + \frac{v u'_z}{c^2}\right)}$$ e

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma_v \left(1 + \frac{v u'_z}{c^2}\right)}$$

Efeito Doppler relativístico

Queremos encontrar a lei de transformação para ω, $\vec{k}$ de uma onda plana. A fase da onda plana:

$$\phi = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}$$

é um invariante de Lorentz, pois ela determina os máximos e mínimos da onda plana e conseqüentemente os períodos da frente de onda. Essa quantidade discreta vem de um processo de contagem e não pode variar de um referencial a outro. Segue que:

$$\phi = \frac{\omega}{c}x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}$$

é um escalar se $\frac{\omega}{c} = k^0$ e $\vec{k}$ formarem um quadri-vetor $(k^0, \vec{k})$ que, portanto, se transforma segundo:

$$\left.\begin{aligned} k^{0'} &= \gamma(k^0 - \beta k^1) \\ k^{1'} &= \gamma(k^1 - \beta k^0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \omega' &= \gamma(\omega - v k^1) \\ k^{1'} &= \gamma\left(k^1 - \frac{v\omega}{c^2}\right) \end{aligned}$$
$$k^{2'} = k^2$$
$$k^{3'} = k^3$$

Se θ e θ' são os ângulos que $\vec{k}$ e $\vec{k}'$ fazem com a direção de $\vec{v}$ ($\hat{x}$ no caso acima) segue que, usando $\omega = c|\vec{k}|$,

$$\omega' = \gamma(\omega - vk\cos\theta) = \gamma\left(\omega - \frac{v\omega}{c}\cos\theta\right) = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega' = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta)}$$

No limite relativístico, por outro lado, temos,

$$\theta = 0: \quad \nu' = \nu \frac{(1-v/c)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \nu = \nu' \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} > \nu$$

$$\theta = \pi: \quad \nu' = \nu \frac{(1+v/c)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \nu = \nu' \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} < \nu$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}: \quad \nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \nu = \sqrt{1-v^2/c^2}\, \nu' < \nu$$

Esses resultados foram testados e comprovados experimentalmente pela primeira vez em 1938. É interessante notar que há um efeito Doppler transversal relativístico ($\theta = \pi/2$). Ele é uma conseqüência da dilatação temporal: se T' é o período da onda em S', seu período em S é maior

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T} = \sqrt{1-v^2/c^2}\, \nu'$$

Dinâmica Relativística

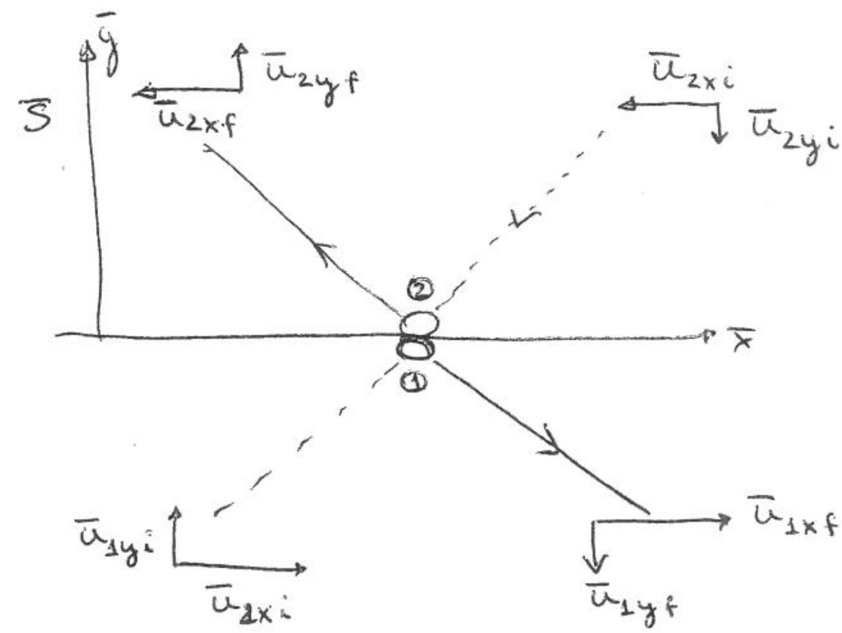
Já vimos que a mecânica newtoniana é invariante por transformações de Galileu. Porém, os dois postulados de Einstein nos levaram a descartar as transformações de Galileu em favor das de Lorentz. Para que a mecânica permaneça invariante por transformações de Lorentz, como exigido pelo primeiro postulado (princípio da relatividade), precisamos agora modificar as leis da mecânica de Newton.

Nosso caminho será o de supor a lei de conservação do momento linear em todos os referenciais. Veremos que para isso é necessário modificar a forma da expressão do momento linear:

$$\vec{p} = m\vec{v} \Longrightarrow \vec{p} = f(v)\, m\, \vec{v}$$

onde $f(v)$ é uma função do módulo da velocidade da partícula. Algumas referências antigas costumam definir a combinação $m\,f(v)$ como uma "massa dependente da velocidade" $m(v)$. Entretanto, esse procedimento é antiquado e preferiremos usar uma outra terminologia. Nosso objetivo será, portanto, achar a função $f(v)$. Vamos usar o caso particular de uma determinada colisão elástica, mas o resultado que obteremos pode ser mostrado como sendo o mais geral possível.

Seja uma colisão perfeitamente elástica de duas massas idênticas. Vamos escolher uma situação bastante simétrica:

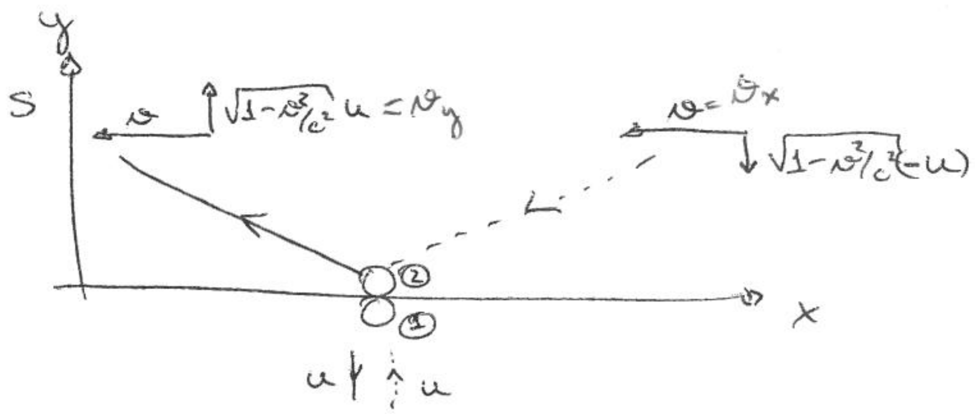


onde as componentes das velocidades inicial e final das partículas 1 e 2 satisfazem (ver figura):

$$
\begin{cases}
\bar{u}_{1xi} = \bar{u}_{1xf} \\
\bar{u}_{1yi} = -\bar{u}_{1yf} \\
\bar{u}_{2xi} = \bar{u}_{2xf} = -\bar{u}_{1xi} \\
\bar{u}_{2yi} = -\bar{u}_{2yf} = \bar{u}_{1yf}
\end{cases}
$$

e usamos a barra em cima das componentes para mostrar que a situação se refere ao SR simétrico que chamaremos de $\bar{S}$. Note que as escolhas acima garantem a conservação do momento linear em $\bar{S}$, qualquer que seja $f(v)$. $[f(\bar{u}_{1i}) = f(\bar{u}_{1f}) = f(\bar{u}_{2i}) = f(\bar{u}_{2f}$

A mesma situação pode ser analisada num outro SR $\underline{\underline{S}}$ que se move com velocidade $\bar{u}_{1xi} = \bar{u}_{1xf}$ em relação a $\bar{S}$. Em $\underline{\underline{S}}$, a partícula $\underline{1}$ tem um movimento puramente vertical:



$$u_{1xi} = u_{1xf} = 0$$

$$u_{1yi} = -u_{1yf} \equiv u$$

onde chamamos de $\underline{u}$ o módulo da velocidade vertical de 1. A velocidade horizontal de $\underline{2}$ não muda na colisão e nós a chamaremos de $\underline{v}$:

$$u_{2xi} = u_{2xf} = -v$$

Está claro, pela simetria da colisão, que, num SR $\underline{\underline{S}}'$ em que a partícula 2 tenha velocidade horizontal nula, sua velocidade vertical será também $\underline{u}$ em módulo. Além disso, esse sistema S' move-se com velocidade $(-v)$ em relação a S (na direção x de S ou x' de S').

Portanto, podemos usar a fórmula de transformação da velocidade para acharmos a componente vertical da velocidade de 2 em S:

$$u_{2yf} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}\; u'_y}{1 \mp \frac{v u'_x}{c^2}} = \sqrt{1-v^2/c^2}\; u = -u_{2yi}$$

(Note que usamos as transformações de S' para S com velocidade relativa $(-v)$).

As componentes y dos momentos lineares antes e depois da colisão devem ser as mesmas em S, portanto:

$$P_{yi} = m f(u) u - m f\left[\sqrt{v^2+u^2(1-v^2/c^2)}\right] u\sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$P_{yf} = - m f(u) u + m f\left[\sqrt{v^2+u^2(1-v^2/c^2)}\right] u\sqrt{1-v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow P_{yi} = P_{yf} \Rightarrow u f(u) = u\sqrt{1-v^2/c^2}\, f\left[\sqrt{v^2+u^2(1-v^2/c^2)}\right]$$

$$\Rightarrow f(u) = \sqrt{1-v^2/c^2}\, f\left[\sqrt{v^2+u^2(1-v^2/c^2)}\right]$$

Quando o argumento de $f(x)$ tende a zero devemos ter $f(0)=1$ a fim de recuperarmos o limite não-relativístico da expressão do momento linear. Logo, fazendo $u \to 0$ acima:

$$f(0) = 1 = \sqrt{1-v^2/c^2}\, f(v) \Rightarrow f(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma$$

Segue que a expressão relativística procurada para $\vec{p}$ é:

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Se assumirmos agora a 2ª lei de Newton modificada como sendo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]$$

garantimos a lei de conservação do momento relativístico (na ausência de forças externas e assumindo o cancelamento das forças internas) e obtemos a 2ª lei de Newton habitual ~~no~~ no limite não-relativístico $v \ll c$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cong \frac{d}{dt}[m\vec{v}] = m\vec{a}.$$

A partir da nova lei da dinâmica dada acima podemos derivar um teorema de energia-trabalho relativístico. Para um movimento em uma dimensão:

$$\Delta T = \int_0^{x_f} F\,dx = \int_0^{t_f} F\frac{dx}{dt}\,dt = \int_0^{t_f} F v\,dt$$

$$= \int_0^{t_f} \frac{d}{dt}(\gamma m v)\,v\,dt = \int_0^{t_f} v\,d(\gamma m v)$$

Integrando por partes:

$$\Delta T = \int_0^{t_f} v\, d(\gamma m v) = \gamma m v^2 \Big|_0^{t_f} - \int_0^{t_f} m \gamma v\, dv$$

$$I = m\int_0^{t_f} \frac{\gamma}{2}\, d(v^2) = \frac{m}{2}\int_0^{t_f} \frac{d(v^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = -\frac{m}{2} \times 2\sqrt{1-v^2/c^2}\,(c^2)$$

$$= -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}\,\Big|_0^{t_f}$$

$$T = \left[\frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}\right]_0^{v_f}$$

onde assumimos que o corpo saia do repouso.

$$T = mc^2\left[\frac{v^2/c^2 + (1-v^2/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]_0^{v_f} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v_f^2/c^2}} - mc^2$$

Assim:

$$T(v) = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right]$$

Quando $v \ll c$, recuperamos a expressão habitual:

$$T(v) \simeq mc^2\left[1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1\right] = \frac{mv^2}{2}$$

$$\Delta T = \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^t \vec{F}\cdot\vec{u}\,dt$$

$$= \int_0^t \frac{d(\gamma m\vec{u})}{dt}\cdot\vec{u}\,dt$$

$$= \int_0^{\vec{u}} d(\gamma m\vec{u})\cdot\vec{u}$$

$$= \int_0^{\vec{u}} \left[d(\gamma m\,\vec{u}\cdot\vec{u}) - \gamma m\,\vec{u}\cdot d\vec{u}\right]$$

$$= \gamma m u^2 \Big|_0^{\vec{u}} - m\int_0^u \frac{\gamma}{2}\,d(u^2)$$

$$= \gamma m u^2 - \frac{m}{2}\int_0^u \frac{d(u^2)}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$= \gamma m u^2 - \frac{m}{\cancel{2}}(-c^2)\sqrt{1-u^2/c^2}\,\Big|_0^u$$

$$= \underbrace{\gamma m u^2 + mc^2\Big[\sqrt{1-u^2/c^2}} - 1\Big]$$

$$mc^2\left[\gamma\frac{u^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma}\right] = \gamma mc^2\left[\frac{u^2}{c^2} + 1 - \frac{u^2}{c^2}\right] = \gamma mc^2$$

$$\Delta T = T(t) = \gamma mc^2 - mc^2$$

A expressão da energia cinética sugere que escrevamos para a <u>energia total relativística</u> de uma partícula

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma mc^2$$

de tal forma que, se $v=0$:

$$E(v=0) = mc^2$$

chamada de energia de repouso da partícula e

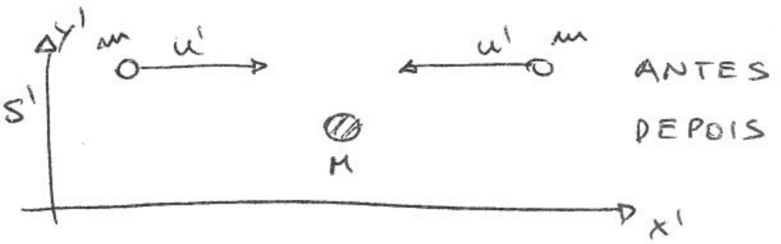
$$T = E - E(v=0) = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma-1)mc^2$$

Até aqui isso é apenas uma definição. Entretanto, pode-se mostrar, e os experimentos confirmam, que essa nova forma de energia total é tal que a energia total relativística de um sistema de partículas é conservada

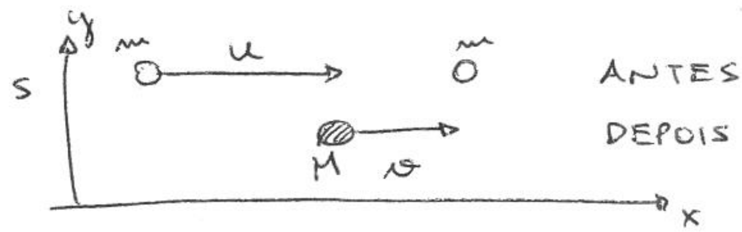
$$E_T = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i m_i c^2 = \text{conserva-se}$$

Há processos em que a massa de repouso final não é igual à massa de repouso inicial mas a diferença é compensada por uma variação de sinal trocado da energia cinética total de tal forma que a energia total relativística seja conservada.

A conservação da energia total relativística pode ser comprovada numa análise de uma colisão completamente inelástica. Nesse caso, num SR S', as partículas idênticas de massa m colidem frontalmente com velocidade inicial u', formando depois uma partícula composta de massa M estacionária em S':



Se observarmos a mesma colisão do referencial S que se move com velocidade $+v = -u'$ em relação à S' veremos:



A velocidade $\underline{u}$ da partícula incidente em S antes da colisão é obtida facilmente:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}} = \frac{2u'}{1 + u'^2/c^2} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$$

Da conservação do momento linear em S

$$\frac{m u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{M v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (*)$$

Mas:

$$1-\frac{u^2}{c^2} = 1 - \frac{4v^2/c^2}{(1+v^2/c^2)^2} = \frac{(1-v^2/c^2)^2}{(1+v^2/c^2)^2}$$

Assim:

$$\frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2mv}{\cancel{1+v^2/c^2}}\,\frac{\cancel{1+v^2/c^2}}{1-v^2/c^2} = \frac{2mv}{1-v^2/c^2}$$

Levando em (*):

$$\frac{2mv}{1-v^2/c^2} = \frac{Mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \boxed{M = \frac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Assim vemos que a massa de repouso da partícula composta <u>não é</u> $2m$ mas é <u>maior</u> que $2m$ pelo fator γ. A diferença vem da energia cinética perdida. Com efeito, no sistema de referência S', a energia cinética inicial é:

$$2T(u') = 2mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} - 1\right]$$

e a energia cinética final é nula. A perda é de

$$\Delta T = -2mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right]$$

que deve ser comparada com a variação da energia de repouso:

$$\Delta E_0 = \frac{2mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 2mc^2 = 2mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right]$$

Como $E = E_0 + T \Rightarrow \Delta E = \Delta E_0 + \Delta T = 0$, como havíamos mencionado.

É interessante obter uma fórmula que relacione a energia total relativística de uma partícula com seu momento linear. Com efeito:

$$E^2 - m^2c^4 = (\gamma^2 - 1)m^2c^4 = \left[\frac{1}{1-v^2/c^2} - 1\right]m^2c^4$$

$$= \left(\frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2}\right)m^2c^4 = \gamma^2 m^2 v^2 c^2 = p^2c^2$$

Assim:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad \text{ou} \quad E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

É interessante observar que, se tomarmos $m = 0$:

$$m = 0 \Rightarrow E = pc$$

uma fórmula que é válida até classicamente para uma onda eletromagnética.

Quadri-momento

A quadri-velocidade:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = (c\gamma, \gamma\vec{v})$$

sugere a generalização do momento linear de uma partícula de massa m:

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = m u^\mu = (mc\gamma, m\gamma\vec{v})$$

chamada de quadrimomento. A componente espacial:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \xrightarrow[|\vec{v}|<<c]{} m\vec{v}$$

é a generalização relativística do momento linear newtoniano. O componente temporal (vezes c)

$$cp^0 = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \xrightarrow[|\vec{v}|<<c]{} mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

nos dá, quando $|\vec{v}|<<c$, a energia cinética newtoniana mais uma constante mc^2, chamada a ~~en~~ energia de repouso. Essa é a generalização relativística da energia.

As quantidades p^0 e $\vec{p}$, quando somadas sobre todas as partículas, são conservadas em colisões (na ausência de campos) sendo essa a generalização relativística das leis de conservação da energia e do momento. Observe que, nesse caso, não podemos desprezar a ~~massa~~ energia de repouso.

A energia cinética relativística é definida como a diferença entre a energia total e a de repouso:

$$T = E - mc^2 = mc^2\left[\gamma - 1\right] \xrightarrow[v \ll c]{} \frac{1}{2}mv^2$$

Como p^μ é um quadri-vetor, seu módulo é um invariante:

$$(p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2c^2\gamma^2 - m^2\gamma^2 v^2$$

$$= m^2c^2\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2c^2$$

Assim:

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2 + \vec{p}^{\,2} \quad \text{ou} \quad \boxed{E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2}}$$

que é a relação entre a energia e o momento de uma partícula relativística de massa m.

A Lagrangiana relativística de uma partícula.

Gostaríamos de obter a equação da dinâmica relativística de uma partícula na formulação Lagrangiana. Como no caso não-relativístico é interessante definir L tal que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = p_y \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = p_z$$

onde:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{u} \qquad \vec{u} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

A seguinte escolha satisfaz essa condição:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} = -mc^2\sqrt{1-u^2/c^2}$$

De fato, lembrando que $u^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -mc^2\left(1-u^2/c^2\right)^{-1/2} \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{2\dot{x}}{c^2}\right)$$

$$= \frac{m\dot{x}}{\left(1-u^2/c^2\right)^{1/2}} = p_x$$

e semelhantemente para $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ e $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$

Assim, se $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ onde $U(x,y,z)$ é função apenas das coordenadas, a Lagrangiana

/ /

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} - U$$

é tal que as eqs de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

levam a

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla} U$$

É interessante notar que a ação livre

$$S = \int L\, dt = \int -\frac{mc^2}{\gamma} dt = -mc^2 \int d\tau$$

é invariante de Lorentz.