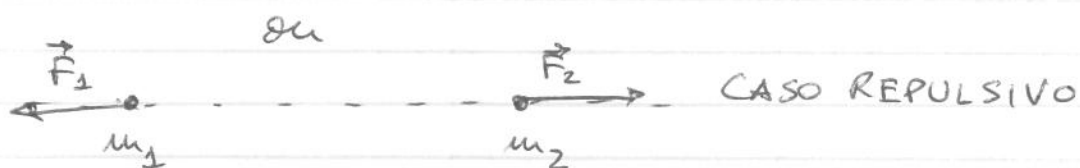
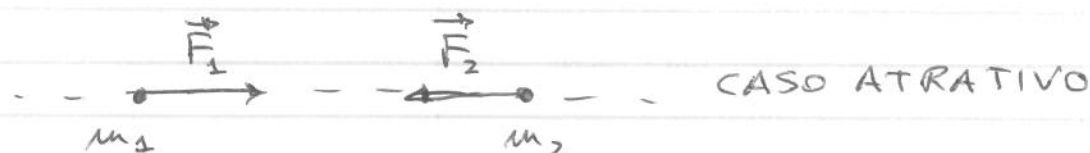


Forças centrais

Sejam 2 partículas de massas m_1 e m_2 , que interagem por uma força cuja direção é a linha que passa pelas 2 partículas



Forças desse tipo são chamadas FORÇAS CENTRAIS.
Sejam as posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 das partículas 1 e 2.
O vetor

$$\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \equiv \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|} \equiv \hat{r}_{12}$$

é o vetor unitário ao longo da reta que une 1 e 2 com sentido de 2 para 1:



Analogamente:

$$\hat{r}_{21} \equiv \frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|} \equiv \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = -\hat{r}_{12}$$

é o unitário ao longo da mesma linha, com sentido de 1 para 2. Logo:

$\vec{F}_1 = F_1 \hat{r}_{12}$ e $F_1 < 0$ no caso atrativo
 $F_1 > 0$ no caso repulsivo
e analogamente para \vec{F}_2 .

Vamos supor que a força central é conservativa, derivável de uma energia potencial U tal que:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

De fato, chamando $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ de $r \Rightarrow U = U(r)$.

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 U = -\left[\frac{\partial U}{\partial x_1} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y_1} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z_1} \hat{z} \right]$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{\nabla}_2 U = -\left[\frac{\partial U}{\partial x_2} \hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y_2} \hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z_2} \hat{z} \right]$$

Mas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= \frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \right] \\ &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \dots}} = \frac{x_1 - x_2}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Assim:

$$\vec{F}_1 = -\frac{dU}{dr} \left[\frac{(x_1 - x_2)}{r} \hat{x} + \frac{(y_1 - y_2)}{r} \hat{y} + \frac{(z_1 - z_2)}{r} \hat{z} \right] = -\frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\vec{F}_1 = -\frac{dU}{dr} \hat{r}_{12} \quad \text{que é realmente central}$$

$$\text{e analogamente: } \vec{F}_2 = -\frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = -\frac{dU}{dr} \hat{r}_{21}$$

A Lagrangiana do sistema é:

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{r}}_2|^2 - U(r)$$

$$L = \frac{m_1}{2} [(\dot{x}_1)^2 + (\dot{y}_1)^2 + (\dot{z}_1)^2] + \frac{m_2}{2} [(\dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_2)^2 + (\dot{z}_2)^2] - U(r)$$

É conveniente definir novas coordenadas:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{(m_1 + m_2)} \quad (\text{CENTRO DE MASSA})$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (\text{COORDENADA OU POSIÇÃO RELATIVA})$$

Inversamente:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}}$$

onde usamos $M = m_1 + m_2$. Logo:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{r}}_2|^2 = \\ &= \frac{m_1}{2} \left\{ |\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{m_2^2}{M^2} |\dot{\vec{r}}|^2 + \frac{2m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \right\} + \\ &+ \frac{m_2}{2} \left\{ |\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{m_1^2}{M^2} |\dot{\vec{r}}|^2 - \frac{2m_1}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \right\} = \\ &= \frac{M}{2} |\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{1}{2} \frac{(m_2 + m_1) m_1 m_2}{M^2} |\dot{\vec{r}}|^2 = \frac{M}{2} |\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{\mu}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 \end{aligned}$$

onde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ é a chamada MASSA REDUZIDA.

Finalmente:

$$L = \frac{M}{2} |\dot{\vec{R}}|^2 + \frac{\mu}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 - U(r)$$

Percebe-se que o centro de massa não aparece no potencial. Portanto, \vec{R} é uma variável cíclica

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (M \dot{\vec{R}}) = 0 \Rightarrow M \dot{\vec{R}} = \text{constante}$$

Essa equação expressa conservação do momento linear total:

$$\vec{P} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = M \left[\frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} \right] = M \dot{\vec{R}}$$

O movimento do centro de massa se desacopla do movimento relativo, descrito pela variável \vec{r} . É sempre possível escolher um sistema de referência no qual $\vec{R} = 0$ (referencial do centro de massa). Nesse caso:

$$L = \frac{\mu}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 - U(r)$$

e nesta análise o movimento relativo. Uma vez obtido \vec{r} , pode-se voltar e achar \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . Note que, se uma das massas é muito maior que a outra (p.ex., $m_2 \gg m_1$), então:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_1 \quad \text{e} \quad \vec{r}_1 = \vec{r} \quad \vec{r}_2 = \vec{R}$$

e é como se m_2 ficasse parada (no referencial do CM) e m_1 se move sob a ação de $U(r)$. Essa aproximação é adequada ao caso do movimento dos planetas em torno do Sol.

Assim, reduzimos o problema de 2 partículas ao problema de 1 partícula de massa μ movendo-se sob a ação de uma força central derivada de $U(r)$.

Esse sistema tem uma quantidade ~~que~~ que é conservada porque a força é central (ou, equivalentemente, U é função apenas de r):

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

De fato:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \mu \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu [\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}] \\ &= \mu \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \end{aligned}$$

Mas da 2ª lei de Newton:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} = - \frac{dU}{dr} \hat{r}$$

Assim:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(- \frac{dU}{dr} \right) \hat{r} = 0$$

\vec{L} é o momento angular de 1 relativo a 2 ou momento angular interno do sistema. De fato, pode-se mostrar que o momento angular total do sistema de 2 partículas:

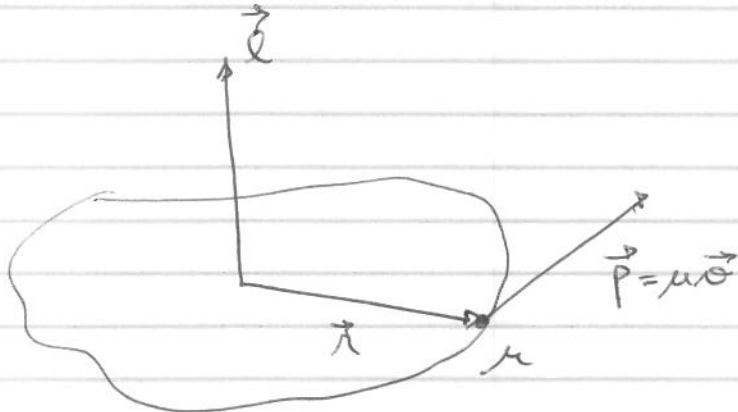
$$\begin{aligned} \vec{L} &= m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = \\ &= M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L}_{CM} + \vec{L} \end{aligned}$$

onde \vec{L}_{CM} é o momento angular associado ao movimento do CM (que também é conservado).

Como:

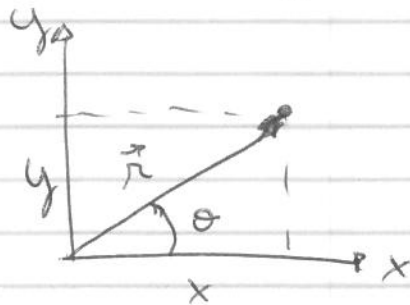
$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{\dot{\theta}} = \text{constante}$$

segue que o movimento se dá sempre num plano perpendicular a \vec{L} :



Assim, podemos por simplicidade escolher o plano xy como contendo o movimento.

É conveniente trabalhar com coordenadas polares no plano xy



$$\begin{cases} r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Nesse caso: $\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{L = L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)}$$

As equações de Euler-Lagrange são:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right] - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d(\mu \dot{r})}{dt} - \mu r \ddot{\theta}^2 + \frac{dU}{dr} = 0$$

$$\Rightarrow \mu(\dot{r} - r \ddot{\theta}^2) = -\frac{dU}{dr}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d[\mu r^2 \dot{\theta}]}{dt} = 0 \Rightarrow \mu r^2 \dot{\theta} = p_{\theta} = \text{const.}$$

Como a Lagrangiana não depende de θ , o momento generalizado $p_{\theta} = \mu r^2 \dot{\theta}$ é conservado. Essa é justamente a componente \hat{z} do momento angular

$$\vec{L} = L_z \hat{z} = \text{constante}$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \mu \vec{r} \times \vec{v} = \mu (r \hat{r}) \times (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}) \\ &= \mu r^2 \dot{\theta} \hat{r} \times \hat{\theta} = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{z} \end{aligned}$$

que como já vimos é de fato conservado Assim:

$$p_{\theta} = L_z \equiv L = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.}$$

A chamada 2ª lei de Kepler é consequência direta dessa constante de movimento pois a área varrida quando a partícula se desloca de $d\vec{r}$ é

$$A = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \text{metade da área do paralelogramo de lados } \vec{r} \text{ e } d\vec{r} \text{ (ver figura)}$$



$$\text{Como } d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \times d\vec{r} &= r \hat{r} \times (dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}) \\ &= r^2 d\theta \hat{z} \end{aligned}$$

A área varrida por unidade de tempo é:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\frac{1}{2} r^2 d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2\mu} = \text{constante}$$

que é a 2ª lei de Kepler. Note que ela é válida para qualquer força central, não apenas para a força gravitacional.

A outra quantidade conservada importante é a energia E , cuja conservação decorre da independência de L em relação ao tempo:

$$E = p_{\theta} \dot{\theta} + p_r \dot{r} - L = \text{constante}$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \quad p_{\theta} = \mu r^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow E = \mu \dot{r}^2 + \mu r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r)$$

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) = \text{constante}$$

Usando $l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{constante}$ podemos eliminar a dependência em $\dot{\theta}$ de E :

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r) = \text{const.}$$

O problema agora fica "reduzido a uma quadratura" (ou seja, uma integração simples):

$$\dot{r} = \pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U(r)) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \right]^{1/2}$$

Deve-se agora integrar em r

$$t = \int_{r(0)}^r \frac{dr}{\dot{r}} = \pm \int_{r(0)}^r \frac{dr}{\left[\frac{2}{\mu} (E - U(r)) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \right]^{1/2}}$$

Isso nos dá $\dot{\theta}(t)$, que pode ser invertida para dar $\theta(t)$. Então, podemos obter $\theta(t)$ através de:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{l}{\mu r^2(t)} \Rightarrow \theta(t) - \theta(0) = \int_0^t \frac{l}{\mu r^2(t)} dt$$

Note que há 4 constantes arbitrárias, $E, l, r(0)$ e $\theta(0)$ que podem ser obtidas das condições iniciais no plano xy :

$$x(0), y(0), \dot{x}(0), \dot{y}(0)$$

É importante também perceber que a combinação

$$U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = V(r)$$

é um potencial efetivo para o movimento ~~em~~ amr , pois a equação de r :

$$\mu \ddot{r} = - \left[\frac{dU}{dr} - \frac{l^2}{\mu r^3} \right] = - \frac{dV(r)}{dr}$$

que é equivalente a um movimento unidimensional sob uma energia potencial $V(r)$ (mas note que r é ~~sempre~~ sempre positivo).

Trajelórias possíveis:

O movimento radial é determinado pelo potencial efetivo:

$$V(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \text{ e pela condição } V(r) < E$$

A partícula terá pontos de retorno r_1 e r_2 nos pontos r_i :

$$V(r_i) = U(r_i) + \frac{l^2}{2\mu r_i^2} = E$$

O movimento pode ser restrito a uma região finita ou ilimitado no espaço. Na figura 8.6 do livro, E_1 corresponde a um movimento aberto (ilimitado) e E_2 e E_3 a um movimento ~~ilimitado~~ compacto (restrito a uma região compacta).

À medida que a partícula se movimenta radialmente, ela também se movimenta angularmente, desde que $l \neq 0$:

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$$

$$\text{Defato: } \frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{l}{\mu r^2 \dot{r}} = \pm \frac{l/r^2}{[2\mu(E-U(r)) - \frac{l^2}{r^2}]^{1/2}}$$

Se a partícula oscila radialmente de r_{\min} a r_{\max} (r_2 e r_4 para E_2 na fig. 8.6 p. ex.) e depois volta a r_{\min} :

$$\Delta\theta = \pm 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{l/r^2}{[2\mu(E-U(r)) - \frac{l^2}{r^2}]^{1/2}} dr$$

Se $\Delta\theta = 2\pi \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, a órbita se fecha após q oscilações. Do contrário, a trajetória é ~~ilimitada~~ aberta.

1 / 1

Podem-se provar que para potenciais do tipo

$$U(r) \sim -\frac{1}{r^n}$$

apenas os casos $n=1$ (potencial gravitacional) ou $n=-2$ (oscilador harmônico 3D) levam a órbitas fechadas. (As exceções a isso são ^{alguns} valores racionais de n e órbitas que passam pela origem). Isso é conhecido como teorema de Bertrand (ver Goldstein, 2ª Ed., Sec. 3.6).

Equação da trajetória

FORMA IMPLÍCITA (PARAMÉTRICA): $r(t), \theta(t)$

FORMA EXPLÍCITA:

$$r(\theta)$$

A maneira mais fácil é através da equação de movimento de r :

$$\mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{dU}{dr} \equiv F(r)$$

É conveniente fazer a troca de variáveis:

$$u = \frac{1}{r}$$

Assim:

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}$$

$$\text{Mas } \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{\mu \dot{r}}{l}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{l} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = -\frac{\mu}{l} \frac{d\dot{r}}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{\mu}{l} \frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{\mu^2}{l^2} r^2 \ddot{r}$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{l^2}{\mu r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{l^2}{\mu} u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) = F\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)}$$

Problema de Kepler :

O movimento sob a ação da força gravitacional é conhecido como problema de Kepler:

$$F = - \frac{GMm}{r^2} = - \frac{k}{r^2}$$

A energia potencial correspondente é:

$$U(r) = - \frac{k}{r}$$

o que dá:

$$V(r) = - \frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Da análise do movimento radial nesse potencial efetivo, é óbvio que (figuras 8-5 e 8-6 do livro):

Se $E < 0 \Rightarrow$ movimento é limitado a uma região compacta

Se $E \geq 0 \Rightarrow$ movimento não é compacto.

/ /

Equação da órbita:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{l^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\mu}{l^2 u^2} (-k u^2) = \frac{\mu k}{l^2}$$

que é a equação de um oscilador harmônico forçado com termo forçante constante $\left(\frac{\mu k}{l^2}\right)$. A solução geral pode ser escrita como:

$$u = \frac{1}{r} = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mu k}{l^2}$$

onde A e θ_0 são constantes arbitrárias determinadas pelas condições iniciais. Vamos tomar $\theta_0 = 0$ e $A > 0$, que apenas orienta a trajetória de forma que r é mínimo se $\theta = 0$, sem perda de generalidade. Assim, podemos escrever, com novos parâmetros:

$$r = \frac{x}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

onde $x = \frac{l^2}{\mu k}$. Essa é a equação geral de uma

curva cônica com foco na origem: elipse, parábola ou hipérbole. O parâmetro ϵ é a excentricidade da curva cônica.

A excentricidade ϵ pode ser relacionada à energia total. A equação:

$$V(r_0) = E \Rightarrow -\frac{k}{r_0} + \frac{l^2}{2\mu r_0^2} = -k u_0 + \frac{l^2}{2\mu} u_0^2 = E$$

nos dá o ponto de aproximação máxima ao
 foco (PERICENTRO) r_{\min} e de máximo afastamento
 (APOCENTRO) r_{\max} , quando esse existe ($E < 0$)
 Assim:

$$\frac{l^2}{2\mu} \left(u_0^2 - \frac{2\mu k u_0}{l^2} \right) = E$$

$$\Rightarrow u_0^2 - \frac{2}{\alpha} u_0 - \frac{2\mu E}{l^2} = 0$$

$$u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2\mu E}{l^2}} = \frac{1}{\alpha} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\mu \alpha^2 E}{l^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\mu k^2}} \right]$$

Comparando com $u(\theta=0) = \frac{1}{\alpha} (1 + E)$, temos:

$$E = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{\mu k^2}}$$

O menor valor de E é o mínimo de $V(r)$

$$\frac{dV(r)}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{l^2}{2\mu r^3} = 0 \Rightarrow r = \frac{l^2}{\mu k} = \alpha$$

$$V(r=\alpha) = -k \left(\frac{\mu k}{l^2} \right) + \frac{l^2}{2\mu} \frac{\mu^2 k^2}{l^4} = -\frac{\mu k^2}{2l^2} = V_{\min}$$

Assim:

$E = V_{\min} \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow$ CÍRCULO (CASO ESPECIAL DE UMA ELIPSE)

$V_{\min} < E < 0 \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow$ ELIPSE

$E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1 \Rightarrow$ PARÁBOLA

$E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1 \Rightarrow$ HIPÉRBOLE

No caso da elipse, o semi-eixo maior a é tal que:

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} + \frac{\alpha}{1 - \varepsilon} = \frac{2\alpha}{1 - \varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon^2}$$

Além disso, como a distância do centro a um dos focos da elipse é $c = \varepsilon a$ (ver figura)

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + \varepsilon^2 a^2$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{1 - \varepsilon^2} a = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

/ /

Dos valores já encontrados de α e ε .

$$1 - \varepsilon^2 = -\frac{2\ell^2 E}{\mu k^2} = \frac{2\ell^2 |E|}{\mu k^2} \quad \text{já que } E < 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\alpha}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\ell^2}{\mu k} \frac{\mu k^2}{2\ell^2 |E|} = \frac{k}{2|E|}$$

ℓ

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{\ell^2}{\mu k} \frac{\sqrt{\mu} k}{\ell \sqrt{2|E|}} = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

Note que a independe de ℓ .

É claro que o caso de órbitas compactas ($E < 0$), que são sempre elipses prova a 1ª lei de Kepler

3ª lei de Kepler

A 3ª lei de Kepler pode ser deduzida da seguinte maneira. Vimos que, da 2ª lei de Kepler:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$$

A área total varrida em uma revolução elíptica completa é:

$$A = \int dA = \pi ab = \text{área de uma elipse de semi-eixos } a \text{ e } b$$

Mas:

$$A = \int \frac{dA}{dt} dt = \frac{l}{2\mu} \int dt = \frac{l}{2\mu} T$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi ab \mu}{l} = \frac{2\pi \mu}{l} a^2 \sqrt{1-\epsilon^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Mas: } a^2 \sqrt{1-\epsilon^2} &= ab = \frac{kl}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{(2|\epsilon|)^{3/2}} = \frac{l}{\sqrt{\mu k}} \left(\frac{k}{2|\epsilon|} \right)^{3/2} \\ &= \frac{l}{\sqrt{\mu k}} a^{3/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} a^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \mu}{k}$$

Caso: $k = G M_{\text{sol}} m$, onde m é a massa do planeta e M_{sol} é a massa do Sol.

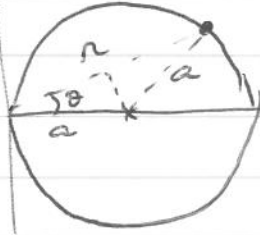
$$\frac{\mu}{k} = \frac{M_{\text{sol}} m}{M_{\text{sol}} + m} \frac{1}{G M_{\text{sol}} m} = \frac{1}{G} \frac{1}{M_{\text{sol}} + m} \approx \frac{1}{G M_{\text{sol}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G M_{\text{sol}}}}$$
 que independe, ou é uma aproximação das massas dos planetas.

Note que a 3ª lei depende da forma da força gravitacional.

8.11)

$$r = 2a \cos \theta$$



$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2a \cos \theta}$$

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{2a} \frac{-\sin \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2a} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{\cos \theta} + \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} \right]$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{2a} \left[\frac{2}{\cos \theta} + \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} \right] = \frac{1}{a \cos \theta} \left(\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right)$$

$$= \frac{1}{a \cos^3 \theta} = \frac{8a^2}{r^3}$$

$$\text{Mas: } \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{e^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\mu r^2}{e^2} F(r)$$

$$\Rightarrow \boxed{F(r) = -\frac{8e a^2}{\mu r^5}}$$

/ /

$$\text{Symon - 3.52) } h_p = 227 \text{ km}$$

$$R_{\min} = R_T + h_p = 6.400 + 227 \text{ km} \\ = 6.627 \text{ km}$$

$$v_p = 28.710 \text{ km/h} = 7.975 \text{ m/s}$$

$$R_{\max} = ? \quad T = ?$$

$$2a = R_{\min} + R_{\max} = \frac{R}{|E|} = \frac{GM_T m}{|E|}$$

$$E = \frac{m v_p^2}{2} - \frac{GM_T m}{R_{\min}}$$

$$\frac{|E|}{GM_T m} = \frac{1}{R_{\min}} - \frac{v_p^2}{2GM_T}$$

$$\frac{R_{\min}}{2a} = \frac{R_{\min} |E|}{GM_T m} = 1 - \frac{v_p^2 R_{\min}}{2GM_T}$$

$$\text{Para a Terra } GM_T = 3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

$$\frac{R_{\min}}{2a} = 0,471 \Rightarrow a = 7.035 \text{ km}$$

$$R_{\max} = 2a - R_{\min} = R_{\min} \left(\frac{2a}{R_{\min}} - 1 \right) = R_{\min} \left(\frac{1}{0,471} - 1 \right)$$

$$= 1,123 R_{\min} = 7.443 \text{ km}$$

$$h_a = R_{\max} - R = 1.043 \text{ km}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_T} \Rightarrow T = 5872s \approx 98 \text{ min} \approx 1h 38 \text{ min}$$

Symon-3.53) $h_p = 360 \text{ km} \Rightarrow R_{min} = 6760 \text{ km}$
 $h_a = 2549 \text{ km} \Rightarrow R_{max} = 8949 \text{ km}$

$r(90^\circ) = \alpha$

Mas: $R_{min} = \frac{\alpha}{1 + \epsilon}$ e $R_{max} = \frac{\alpha}{1 - \epsilon}$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{R_{min}} = 1 + \epsilon$ e $\frac{\alpha}{R_{max}} = 1 - \epsilon$

$\Rightarrow 2 = \frac{\alpha}{R_{min}} + \frac{\alpha}{R_{max}} = \alpha \left(\frac{1}{R_{min}} + \frac{1}{R_{max}} \right)$

$\Rightarrow \alpha = 7700 \text{ km} \Rightarrow h_\alpha = 1.300 \text{ km}$

Transferência de Hohmann (TH)

A transferência de Hohmann é uma manobra de dinâmica orbital na qual se move de uma órbita elíptica a outra órbita elíptica com o mínimo gasto de energia. Vamos analisar uma TH para uma mudança entre duas órbitas circulares co-planares (entre a Terra e Marte, por exemplo).

A figura 8-10 do livro, ilustra os aspectos básicos da TH. A trajetória intermediária da ~~o~~ espaçonave é chamada de ELIPSE DE TRANSFERÊNCIA. A manobra é composta de duas acelerações rápidas Δv_1 e Δv_2 , co-lineares com as velocidades das órbitas circulares, no periélio e no afélio da elipse de transferência, ~~o~~ respectivamente. Vamos calcular agora Δv_1 e Δv_2 .

Para ~~as~~ as duas órbitas circulares de Marte e da Terra temos que:

$$a = r_i = -\frac{k}{2E_i} \text{ onde } i = (1, 2) \text{ (Terra e Marte)}$$

$$E_i = T_i + U_i = \frac{m v_i^2}{2} - \frac{k}{r_i} = -\frac{k}{2a_i}$$

$$\Rightarrow \frac{m v_i^2}{2} = \frac{k}{2r_i} \Rightarrow \boxed{v_i = \sqrt{\frac{k}{m r_i}}}$$

/ /

A energia da órbita elíptica é,
usando que $2a = r_1 + r_2$:

$$E_t = -\frac{k}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} m v_{ti}^2 - \frac{k}{r_i}$$

onde v_{ti} é a velocidade na órbita elíptica em r_i . Assim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_{ti}^2 &= k \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right) \\ &= k \frac{(r_1 + r_2 - r_i)}{r_i (r_1 + r_2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_{ti} = \sqrt{\frac{2k}{m} \frac{(r_1 + r_2 - r_i)}{r_i (r_1 + r_2)}}$$

Explicitamente:

$$v_{t1} = \sqrt{\frac{2k}{m} \frac{r_2}{r_1 (r_1 + r_2)}} \quad \text{e} \quad v_{t2} = \sqrt{\frac{2k}{m} \frac{r_1}{r_2 (r_1 + r_2)}}$$

Assim:

$$\Delta v_1 = v_{t1} - v_1$$

$$\Delta v_2 = v_2 - v_{t2}$$

O tempo total da TH é a metade do período da elipse:

$$T_t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} a^{3/2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^{3/2}$$

Efeito estilingue

Esse efeito consiste em utilizar a atração gravitacional de um planeta ou outro astro para ganhar uma velocidade orbital adicional. O efeito é muito simples se analisarmos o movimento hiperbólico (órbita não compacta) sob a ação da gravidade de um astro B em 2 referenciais (ver figuras 8-12 e 8-13)

i) Num referencial em que B está parado (podemos supor que $m_B \gg$ massa da espaçonave)

ii) Num referencial em que B tem sua velocidade orbital (por exemplo, no referencial preso ao Sol)

⇒ i) Nesse caso os módulos das velocidades inicial e final são iguais e há apenas uma mudança de direção (\vec{v}_i' e \vec{v}_f')

⇒ ii) No referencial do Sol, devemos adicionar a velocidade do astro \vec{v}_B a \vec{v}_i' e \vec{v}_f' para obtermos as velocidades inicial e final da espaçonave em relação ao Sol (\vec{v}_i e \vec{v}_f)

Se a espaçonave passa para trás do astro B:

$|\vec{v}_f| > |\vec{v}_i|$ e há ganho de velocidade

A precessão do perihélio

Uma das mais espetaculares previsões da teoria da relatividade geral é a lenta precessão da elipse dos planetas, principalmente a de Mercúrio, que é a mais pronunciada. Em outras palavras, a órbita não seria fechada. Esse é um efeito muito pequeno (cerca de $43''$ de ângulo por século) e pode ser analisado como uma pequena correção à teoria de gravitação newtoniana. Tudo se passa como se a força gravitacional newtoniana adquirisse uma pequena correção $\sim \frac{1}{r^3}$: (supondo $m \ll M$)

$$F(r) \approx - \frac{GMm}{r^2} \left[1 + \frac{3\ell^2}{m^2 c^2 r^2} \right]$$

Note que a correção é de fato pequena:

$$\ell \sim m v r \Rightarrow \frac{\ell^2}{m^2 c^2 r^2} \sim \frac{v^2}{c^2} \sim 10^{-8}$$

para Mercúrio.

Podemos calcular a precessão da seguinte maneira. A equação da órbita é:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u &= - \frac{m}{\ell^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = + \frac{m}{\ell^2 u^2} GMm u^2 \left[1 + \frac{3\ell^2 u^2}{m^2 c^2} \right] \\ &= \frac{GMm^2}{\ell^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2 \equiv \frac{1}{\alpha} + \delta u^2 \end{aligned}$$

/ /

onde $\frac{1}{\alpha} = \frac{GMm^2}{e^2} \left(\approx \frac{k\mu}{e^2} \right) e$

$$\delta = \frac{3GM}{c^2} \quad [\delta] = L$$

Como o termo δu^2 é apenas uma pequena correção, vamos procurar uma solução aproximada da forma:

$$u = u_1 + u_2$$

onde $u_1(\theta)$ é a solução newtoniana:

$$u_1(\theta) = \frac{1}{\alpha} (1 + \epsilon \cos \theta)$$

e $u_2(\theta)$ é uma pequena correção: $u_2 \ll u_1$.

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{d^2 u_1}{d\theta^2} + u_1 + \frac{d^2 u_2}{d\theta^2} + u_2 = \frac{1}{\alpha} + \delta (u_1 + u_2)^2$$

Mas $\frac{d^2 u_1}{d\theta^2} + u_1 = \frac{1}{\alpha}$, logo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_2}{d\theta^2} + u_2 &= \delta (u_1 + u_2)^2 \approx \delta u_1^2 = \frac{\delta}{\alpha^2} (1 + \epsilon \cos \theta)^2 \\ &= \frac{\delta}{\alpha^2} (1 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2 \cos^2 \theta) = \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 u_2}{d\theta^2} + u_2 = \frac{\delta}{\alpha^2} (1 + \epsilon^2/2 + 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2/2 \cos 2\theta)$$

(1 / 1)

Podemos verificar facilmente que uma solução particular é:

$$u_2(\theta) = \frac{\delta}{\alpha^2} \left[\left(\frac{1 + \varepsilon^2}{2} \right) + \varepsilon \theta \sin \theta - \frac{\varepsilon^2}{6} \cos 2\theta \right]$$

E ficamos com:

$$u(\theta) \cong u_1(\theta) + u_2(\theta) = \frac{1}{\alpha} (1 + \varepsilon \cos \theta) + \frac{\delta}{\alpha^2} \varepsilon \theta \sin \theta + \frac{\delta}{\alpha^2} \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{2} \right) - \frac{\delta \varepsilon^2}{6 \alpha^2} \cos 2\theta$$

O terceiro e o quarto termos não são acumulativos após várias rotações ($\theta = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$). Apenas o segundo termo representa um efeito acumulativo. Focando os 2 primeiros termos:

$$u_3(\theta) = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \varepsilon \cos \theta + \frac{\delta \varepsilon \theta \sin \theta}{\alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left[1 + \varepsilon \left(\cos \theta + \eta \sin \theta \right) \right] \quad \eta \equiv \frac{\delta \theta}{\alpha} \ll \theta$$

(para uma rotação)

Mas: $\cos \theta + \eta \sin \theta \cong \cos(\theta - \eta)$ ($\eta \ll \theta$)

$$\Rightarrow u_3(\theta) \cong \frac{1}{\alpha} \left[1 + \varepsilon \cos \left(\theta - \frac{\delta \theta}{\alpha} \right) \right]$$

O ~~pericélio~~ pericélio ocorre toda vez que o argumento do cosseno = $0, 2\pi, 4\pi, \dots$

$$\Rightarrow \theta_1 = 0$$

$$\theta_2 - \frac{\delta}{\alpha} \theta_2 = 2\pi \Rightarrow \theta_2 = \frac{2\pi}{1 - \delta/\alpha} \approx 2\pi \left(1 + \frac{\delta}{\alpha} \right)$$

θ que representa um avanço de

$$\Delta \approx 2\pi \frac{\delta}{\alpha} = 6\pi \left(\frac{GMm}{c^2 \ell} \right)^2$$

ou, usando que $\ell^2 = \mu k \alpha = \mu k a (1 - \epsilon^2) = GMm^2 a (1 - \epsilon^2)$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{6\pi GM}{ac^2(1 - \epsilon^2)}$$

que dá cerca de $43''$ para Mercúrio, em excelente acordo com a observação.

Pequenos desvios de órbitas circulares

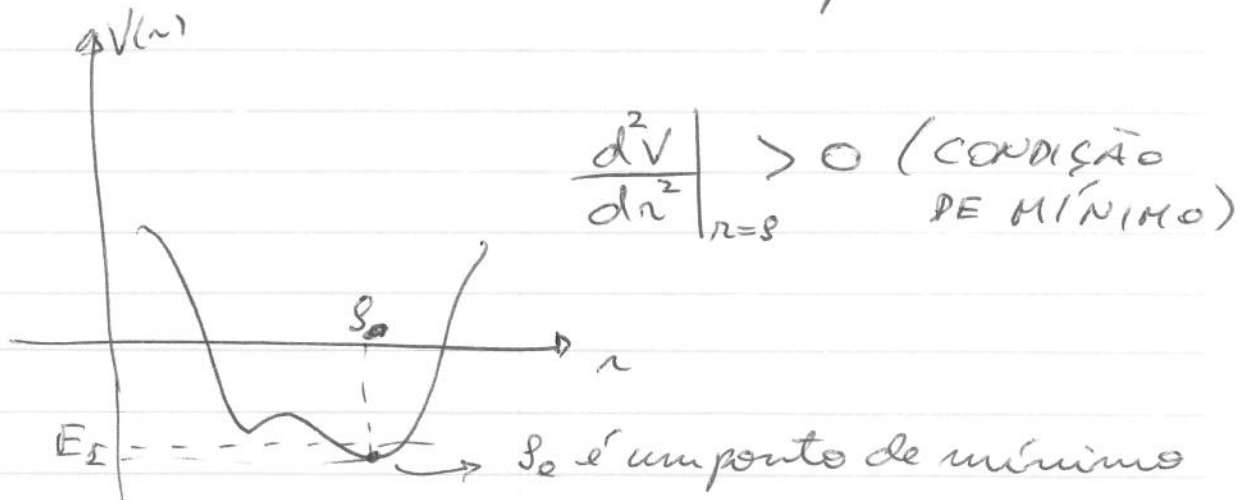
Para um potencial $U(r)$ qualquer, órbitas circulares são possíveis nos pontos de derivada primeira nula do potencial efetivo:

$$V(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \Rightarrow \left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r} = 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow ÓRBITA CIRCULAR COM $r = r$. De fato:

$$\mu \ddot{r} = - \frac{dV}{dr}$$

e se $r(0) = r$, $\dot{r}(0) = 0 \Rightarrow \ddot{r}(0) = 0$ e o corpo permanecerá em $r = r$. Entretanto, o movimento só é estável, ou melhor, a órbita circular só é estável se $r = r$ for um ponto de MÍNIMO de $V(r)$ (lembre-se do movimento unidimensional equivalente:



O corpo oscilará radialmente em torno de $r = r_0$ se $E = E_1$ como na figura, além de seu movimento

/ /

angular de revolução. De fato, podemos expandir em torno de $r = s_0$:

$$r \cong s_0 + x$$

$$V(r) \cong V(s_0) + \frac{1}{2} V''(s_0) (r - s_0)^2 = V(s_0) + \frac{V''(s_0)}{2} x^2$$

$$\ddot{r} = \ddot{x}$$

$$\frac{dV}{dr} = V''(s_0) x$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{x} = -V''(s_0) x \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{V''(s_0)}{\mu}}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

É interessante notar que a órbita apenas será fechada se a frequência de oscilações radiais:

$$\frac{\omega_0}{\dot{\theta}}$$

dividida pela frequência de oscilações angulares

$$\dot{\theta} = \frac{l^2}{\mu r^2} \cong \frac{l}{\mu s^2}$$

for um número racional: $\frac{\omega_0 \mu s^2}{l} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$

Exemplo:

Análise as órbitas aproximadamente circulares para um potencial do tipo lei de potência

$$V(r) = -\frac{k}{r^m}$$

Para órbitas circulares em $r = \rho$:

$$\left. \frac{dV}{dr} \right|_{\rho} = \frac{mk}{\rho^{(m+1)}} - \frac{l^2}{\mu \rho^3} = 0 \Rightarrow \rho^{(m-2)} = \frac{mk\mu}{l^2} \quad (1)$$

Para órbitas circulares estáveis:

$$\left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{\rho} = -\frac{m(m+1)k}{\rho^{(m+2)}} + \frac{3l^2}{\mu \rho^4} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{m(m+1)k}{\rho^{(m-2)}} < \frac{3l^2}{\mu} \quad (2)$$

Usando (1) em (2): $\frac{m+1}{\mu} < \frac{3}{\mu} \Rightarrow \boxed{\mu < 2}$

A frequência de pequenas oscilações radiais é:

$$\omega_0^2 = \frac{V''(\rho)}{\mu} = \left(-\frac{(m+1)l^2}{\mu^2} + \frac{3l^2}{\mu^2} \right) \frac{1}{\rho^4}$$

$$\omega_0^2 = \frac{(2-m)l^2}{\mu^2 \rho^4} \Rightarrow \omega_0 = \frac{l}{\mu \rho^2} \sqrt{2-m}$$

/ /

Comparando com a frequência de revoluções:

$$\dot{\vartheta} = \frac{L}{\mu r^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{2-n} = \frac{\omega_0}{\dot{\vartheta}}}$$

Se essa razão for um número racional, a órbita será fechada:

$$\sqrt{2-n} = \frac{p}{q} \Rightarrow \begin{aligned} n &= 1 \text{ (gravitacional)} \\ n &= -2 \text{ (Lei de Hooke)} \\ n &= -7 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Analisando-se termos de ordem superior na expansão em torno de $r = \rho$ (teorema de Bertrand), podem-se excluir todas as soluções que não $n = 1$ e $n = -2$.

Potencial $1/r$ repulsivo:

O problema do movimento sob a ação de uma força repulsiva que depende do inverso do quadrado da distância tem grande importância para partículas carregadas com cargas de mesmo sinal

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{k}{r^2} \quad k > 0 \text{ se } q_1 q_2 > 0$$

O potencial correspondente

$$U(r) = \frac{k}{r} \quad (k > 0)$$

é parecido com o caso gravitacional, apenas o sinal é trocado. Se analisarmos a equação da órbita como fizemos no caso gravitacional teremos:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu k}{l^2} \quad (\text{note o sinal trocado})$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{r} = A \cos(\theta - \theta_0) - \frac{\mu k}{l^2}$$

Como antes, podemos tomar a orientação conveniente ~~para~~ para a qual $\theta_0 = 0$ e $A > 0$

$$u = \frac{1}{r} = A \cos \theta - \frac{\mu k}{l^2}$$

/ /

Como r não pode ser negativo, devemos ter:

$$A > \frac{\mu k}{e^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{A \cos \theta - \frac{\mu k}{e^2}} = \frac{\alpha}{\varepsilon \cos \theta - 1}$$

onde, como antes: $\alpha^{-1} = \frac{\mu k}{e^2}$ e

$$\varepsilon = \frac{A}{\mu k / e^2} = \alpha A > 1$$

Essa é a equação do ramo de uma hipérbole tal que a origem é "externa" a ela (ver figura). O ramo que tem a origem "interna" corresponde ao caso atrativo já analisado.

Note que a hipérbole tem assíntotas, correspondentes a $r \rightarrow \infty$, nos ângulos onde

$$\varepsilon \cos \theta_0 - 1 = 0 \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{1}{\varepsilon}$$

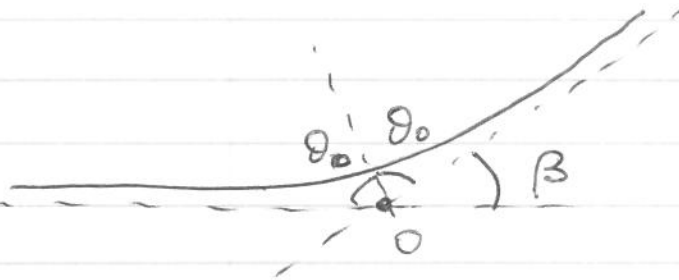
Note que, um cálculo semelhante ao já feito antes, podemos relacionar a excentricidade ε à energia:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Q^2 E}{\mu k^2}} \quad \text{onde } E > 0^*$$

* Da análise qualitativa baseada em $V(r)$ vemos que $E > 0$

(/ /)

O espalhamento de Rutherford corresponde ao espalhamento de partículas alfa ($q_1 = 2e$) por núcleos de átomos pesados (no caso do ouro $q_2 = Ze$, $Z = 79$). Como a região de interação é muito pequena, tudo que se mede é a deflexão total da partícula incidente:



$$\Rightarrow \beta = \pi - 2\theta_0 \Rightarrow \tan \frac{\beta}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) = \cotan \theta_0$$

$$\text{Como } \cos \theta_0 = \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \tan^2 \theta_0 = \sec^2 \theta_0 - 1 = \epsilon^2 - 1$$

$$\Rightarrow \cotan \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} = \sqrt{\frac{\mu \alpha^2 Z^2}{2q^2 E}}$$

Se a partícula incide com parâmetro de impacto b :



/ /

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} E &= \frac{\mu \omega_i^2}{2} \\ \mathcal{L} &= \mu \omega_i b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\mu k^2}{2 \mathcal{L}^2 E} = \frac{k^2}{\omega_i^2} \frac{1}{\mu^2 b^2 \omega_i^2} = \frac{k^2}{\mu^2 b^2 \omega_i^4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{k}{\mu b \omega_i^2}}$$