Problemas 3, 8, 10, 11, 13, 16, 21, 26, 35, 38

Capítulo 4: Sistemas de partículas

Vamos começar a considerar agora o movimento de um sistema com muitas partículas. Vamos supor que as partículas estão sob a ação de forças externas, originadas fora do sistema e de forças internas de interação mútua entre as partículas. A 2ª lei de Newton, aplicada à partícula **k** fica então:

$$m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k + \vec{f}_k \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

onde $\vec{r}_k$ e m_k são a posição e a massa da partícula **k**, $\vec{F}_k$ é a força externa sobre ela e $\vec{f}_k$ a força interna devida às outras partículas.

Esse é um problema muito difícil e, exceto quando $N=2$, não conseguiremos resolvê-lo em detalhes para quase nenhuma situação. Entretanto, é possível dizer coisas mais globais sobre o movimento do sistema. Por exemplo, se somarmos a equação acima sobre **k**:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k m_k \vec{v}_k\right) = \sum_k \vec{F}_k + \sum_k \vec{f}_k$$

A soma sobre os momentos lineares individuais acima será definida como o momento linear total:

$$\vec{P} = \sum_k \vec{p}_k = \sum_k m_k \vec{v}_k$$

e a força externa total $\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$

Agora, da 3ª lei de Newton, se as forças internas ocorrem sempre entre pares de partículas, temos que:

$$\vec{f}_k = \sum_{j \neq k} \vec{f}_{j \to k}$$

onde $\vec{f}_{j\to k}$ é a força que a partícula j exerce sobre a partícula k e:

$$\vec{f}_{j \to k} = - \vec{f}_{k \to j}$$

$$\Rightarrow \sum_k \vec{f}_k = \vec{f}_{2\to 1} + \vec{f}_{3 \to 1} + \cdots \vec{f}_{N \to 1}$$

$$+ \vec{f}_{1\to 2} + \vec{f}_{3\to 2} + \cdots \vec{f}_{N\to 2} + \cdots$$

$$\cdots \vec{f}_{1 \to N} + \vec{f}_{2\to N} + \cdots \vec{f}_{N-1 \to N}$$

$$= \vec{0}$$

pois elas se cancelam em pares. Portanto:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

Se $\vec{F} = \vec{0}$ (como, por exemplo, no caso em que não há forças externas) o momento linear total é conservado.

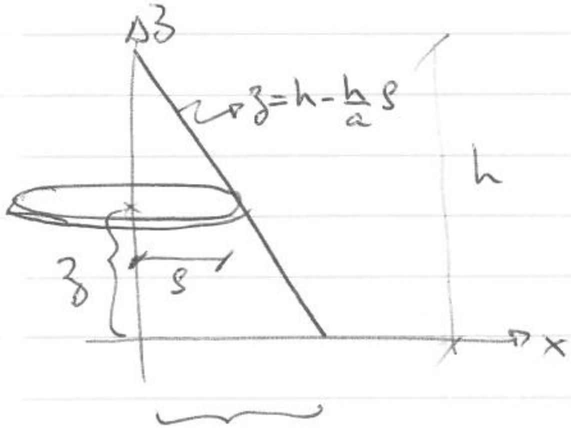
A equação acima relembra a equação da 2ª lei de Newton. Essa analogia pode ser levada mais adiante se definirmos o vetor:

$$M\vec{R} = \sum_k m_k \vec{r}_k \quad \text{onde } M = \sum_k m_k = \text{massa total}$$

que dá a posição do centro de massa do sistema. Segue que:

$$M\dot{\vec{R}} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k = \sum_k m_k \vec{v}_k = \vec{P}$$

Problema 9.2) Calcular a posição do CM de um cone de altura $\underline{h}$ e raio da base $\underline{a}$:



Por simetria:

$$x_{cm} = y_{cm} = 0$$

Tomando o disco de raio $\underline{\rho}$ e altura dz como elemento de massa:

$$dV = (\pi \rho^2)\, dz \qquad \frac{\rho}{a} = \frac{h-z}{z}$$

$$\rho^2 = \frac{a^2}{h^2}(h-z)^2 = a^2\left(1 - \frac{z}{h}\right)^2$$

$$z_{cm} = \frac{\rho_0 \int z\, dV}{\rho_0 \int dV} = \frac{\cancel{\pi a^2} \int_0^h z(1-z/h)^2\, dz}{\cancel{\pi a^2} \int_0^h (1-z/h)^2\, dz}$$

Denominador: $h \int_0^1 (1-x)^2 dx = h \int_0^1 (1 - 2x + x^2)\, dx$

$$= h(1 - 1 + 1/3) = h/3$$

Numerador: $h^2 \int_0^1 x(1-x)^2 dx = h^2 \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\, dx$

$$= h^2(1/2 - 2/3 + 1/4) = \frac{h^2}{12} \Rightarrow z_{cm} = \frac{3}{12} h = \frac{h}{4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}}$$

ou seja, o sistema se move como se toda a sua massa estivesse concentrada no seu centro de massa e estivesse sob a ação da força externa total.

Conservação do momento angular

O vetor momento angular de uma partícula em relação a uma origem dada O é:

$$\vec{L}_k = \vec{r}_k \times \vec{p}_k = m_k \vec{r}_k \times \vec{v}_k$$

Se a origem O agora é tomada como um ponto qualquer Q, NÃO NECESSARIAMENTE FIXO NO ESPAÇO, escreveremos o momento angular em relação a Q como:

$$\vec{L}_k^Q = m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\vec{v}_k - \vec{v}_Q)$$

onde $\vec{v}_Q = \dot{\vec{r}}_Q$ é a velocidade do ponto Q. A taxa de variação de $\vec{L}_k^Q$ é:

$$\dot{\vec{L}}_k^Q = m_k (\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{r}}_Q) \times (\vec{v}_k - \vec{v}_Q) + m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times (\ddot{\vec{r}}_k - \ddot{\vec{r}}_Q$$

$$\dot{\vec{L}}_k^Q = m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_k - m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \ddot{\vec{r}}_Q$$

Como: $m_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k + \vec{f}_k$:

$$\vec{L}_k^Q = (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_k + (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times \vec{f}_k - m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_Q) \times$$

Definindo agora o momento angular total:

$$\vec{L}^Q = \sum_k \vec{L}_k^Q$$

e o torque externo total:

$$\vec{N}^{a}_{e} = \sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_a) \times \vec{F}_k$$

teremos:

$$\vec{\tau}^{a} = \vec{N}^{a} + \sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_a) \times \vec{f}_k - \sum_k m_k (\vec{r}_k - \vec{r}_a) \times \ddot{\vec{r}}_a$$

Como: $\sum_k m_k \vec{r}_k = M\vec{R}$ e $\sum_k m_k = M$

$$\vec{\tau}^{a} = \vec{N}^{a} + \sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_a) \times \vec{f}_k - M(\vec{R} - \vec{r}_a) \times \ddot{\vec{r}}_a$$

O último termo acima se anula em duas situações importantes:

(i) $\ddot{\vec{r}}_a = 0 \Rightarrow$ Ponto a está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme

(ii) $\vec{r}_a = \vec{R} \Rightarrow$ O ponto a é tomado como o CM, podendo estar acelerado ou não.

Como esses são os dois únicos casos de interesse vamos supor que (i) ou (ii) são válidos. Resta analisar o termo:

$$\sum_k (\vec{r}_k - \vec{r}_a) \times \vec{f}_k = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{f}_k$$

pois $\sum_k \vec{f}_k = 0$ (pela 3ª lei de Newton como já visto)
Se $\vec{f}_k = \sum_{j\neq k} \vec{f}_{j\to k}$ como antes:

$$\sum_k \vec{r}_k \times \vec{f}_k = \sum_{k,\,j\neq k} \vec{r}_k \times \vec{f}_{j\to k}$$

~~A soma~~ $\cancel{\sum_{k,\,j\neq k}}$ ~~já contém termos onde cada termo é~~

~~associado a um par de partículas~~

A soma $\sum_k \sum_{j\neq k}$ é tal que pode ser substituída por uma soma sobre <u>pares de partículas</u> onde, para cada par (k,j) teremos:

$$\vec{r}_k \times \vec{f}_{j\to k} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{k\to j} = (\vec{r}_k - \vec{r}_j)\times \vec{f}_{j\to k}$$

pela 3ª lei de Newton. Se agora supusermos que $\vec{f}_{j\to k}$ é direcionada ao longo da linha que une j e k ou seja paralela ou anti-paralela a $(\vec{r}_k - \vec{r}_j)$

$$\Rightarrow (\vec{r}_k - \vec{r}_j)\times \vec{f}_{j\to k} = \vec{0}$$

A suposição acima é às vezes chamada de "3ª lei de Newton na forma forte", e sendo a formulação tradicional da 3ª lei chamada de "forma fraca". Se a 3ª lei na forma forte é válida, então

$$\frac{d\vec{L}^{o}}{dt} = \vec{N}^{o}$$

e se $\vec{N}^{o} = 0 \Rightarrow \vec{L}^{o} = \text{const}$ e o momento angular total é conservado.

Note que as forças magnéticas entre cargas não obedecem à 3ª lei de Newton na forma forte pois

$$\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$$

e a força é determinada pela velocidade ~~p~~ da partícula e não por sua posição.

<u>Conservação da energia</u>

Se $\vec{F}_k = \vec{F}_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_N)$, função apenas da posição das partículas, então o conceito de energia potencial e energia mecânica total passa a ser uma possibilidade. Nesse caso, se houver uma função $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_N)$ tal que:

$$\vec{F}_k = -\vec{\nabla}_k V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y_k}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z_k}\hat{z}\right)$$

poderemos derivar a lei de conservação de $E = T + V$. (Obs.: Não vamos nos preocupar com achar a condição necessária e suficiente para a existência de V, pois ela é muito complicada e saberemos como achar V nos casos mais importantes). De:

$$m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \vec{F}_k = -\vec{\nabla}_k V$$

podemos multiplicar por $\vec{v}_k$ (produto escalar) e somar sobre k para achar

$$\sum_k m_k \vec{v}_k \cdot \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2\right) = \sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k = -\sum_k \vec{v}_k \cdot \vec{\nabla}_k V$$

$$= -\sum_k\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_k}\frac{dz_k}{dt}\right)$$

Mas o termo entre parênteses não é nada mais do que a derivada de V em relação ao tempo t.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2\right) = \frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{d(T+V)}{dt} = 0$$

onde $T = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2$ é a energia cinética total. Segue que $E = T + V$ é conservada:

$$E = T + V = \text{const.}$$

Um caso especial importante ocorre quando as forças internas são forças entre pares de partículas e são elas mesmas derivadas de uma energia potencial:

$$\vec{f}_{j \to k} = \vec{f}_{j \to k}(\vec{r}_k - \vec{r}_j) = -\vec{\nabla}_k V_{jk}(\vec{r}_k - \vec{r}_j)$$

onde:

$$V_{jk}(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_s}^{\vec{r}} \vec{f}_{j \to k}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Note que a 3ª lei de Newton é garantida pois:

$$\vec{f}_{k \to j} = -\vec{\nabla}_j V_{jk}(\vec{r}_k - \vec{r}_j) = +\vec{\nabla}_k V_{jk}(\vec{r}_k - \vec{r}_j) = -\vec{f}_{j \to k}$$

Nesse caso, a energia potencial total é a soma sobre a energia potencial de pares:

$$v(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{k-1}}_{\text{Soma sobre todos os pares}} V_{jk}(\vec{r}_k - \vec{r}_j)$$

Se as forças externas também forem deriváveis de uma energia potencial a energia potencial total será a soma das duas.

Momento angular e energia cinética de um sistema de partículas

O momento angular e a energia cinética totais de um sistema de partículas têm uma expressão simples e muito útil. Se $\vec{R}$ é a posição do CM e $\vec{r}\,'_k$ é a posição da k-ésima partícula em relação ao CM temos:

$$\vec{r}_k = \vec{R} + \vec{r}\,'_k$$

O mom. angular total é:

$$\vec{L} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{p}_k = \sum_k m_k \vec{r}_k \times \dot{\vec{r}}_k$$

Mas:

$$\dot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}\,'_k$$

e

$$\vec{L} = \sum_k m_k (\vec{R} + \vec{r}\,'_k) \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}\,'_k)$$

$$= \left(\sum_k m_k\right) \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \left(\sum_k m_k \vec{r}\,'_k\right) \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \left(\sum_k m_k \dot{\vec{r}}\,'_k\right)$$

$$+ \sum_k m_k \vec{r}\,'_k \times \dot{\vec{r}}\,'_k$$

Usando: $\sum_k m_k = M$; $\sum_k m_k \vec{r}\,'_k = M\vec{R}\,' = 0$ (pois a posição do CM em relação ao CM é $\vec{R} - \vec{R} = \vec{0}$) e $\sum_k m_k \dot{\vec{r}}\,'_k = 0$ (pela mesma razão)

Para a energia cinética total

$$T = \sum_k \frac{m_k}{2} |\vec{v}_k|^2$$

$$|\vec{v}_k|^2 = |\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_k|^2 = |\dot{\vec{R}}|^2 + |\dot{\vec{r}}'_k|^2 + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}'_k$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\sum_k m_k\right)|\dot{\vec{R}}|^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \left(\sum_k m_k \dot{\vec{r}}'_k\right) + \frac{1}{2}\sum_k m_k |\dot{\vec{r}}'_k|^2$$

$$T = \frac{M}{2}|\dot{\vec{R}}|^2 + \sum_k \frac{m_k}{2}|\dot{\vec{r}}'_k|^2$$

Assim, vemos que tanto $\vec{L}$ quanto T assumem uma forma em que há uma contribuição do movimento global, associado ao CM, e uma contribuição interna, relativa ao CM:

$$\vec{L} = M\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_k m_k \vec{r}'_k \times \dot{\vec{r}}'_k$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \sum_k \vec{r}'_k \times \vec{p}'_k$$

$$T = \frac{M}{2}|\dot{\vec{R}}|^2 + \sum_k \frac{m_k}{2}|\dot{\vec{r}}'_k|^2$$

Colisões elásticas de 2 partículas

Vamos analisar o caso importante de colisões entre 2 partículas. Em particular, primeiramente consideraremos o caso de colisões elásticas, ou seja, aquelas em que não há mudança da energia interna das partículas de tal forma que, bem antes e bem depois da colisão, quando as partículas estão muito afastadas uma da outra e a energia potencial de interação é zero ou desprezível e só resta energia cinética, essa é a mesma antes e depois da colisão.

Como vimos, a análise do problema de 2 corpos é consideravelmente mais simples no sistema de referência do CM. Entretanto, a situação usualmente encontrada no laboratório é que o sistema de referência não é o do CM. Por isso, é importante saber traduzir um caso para o outro. Vamos assumir que no sistema do laboratório (LAB), a partícula de $\underline{m_1}$ incide com velocidade inicial $\vec{u}_1$ na partícula de massa $\underline{m_2}$ inicialmente em repouso ($\vec{u}_2=0$). Após a colisão, a primeira partícula terá velocidade $\vec{v}_1$ e a segunda terá velocidade $\vec{v}_2$.

No sistema do CM, as quantidades acima ganham uma linha.

$$\vec{u}_1', \vec{u}_2', \vec{v}_1', \vec{v}_2'$$

É claro que, se $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ é a velocidade do CM em relação LAB:

$$\vec{u}_1 = \vec{V} + \vec{u}_1' \qquad \vec{u}_2 = \vec{V} + \vec{u}_2'$$

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{v}_1' \qquad \vec{v}_2 = \vec{V} + \vec{v}_2'$$

Lembre-se de que a velocidade do CM não muda com a colisão (cons. de mom. linear).

Vamos agora definir os ângulos $\underline{\psi}$ e $\underline{\zeta}$ que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ fazem com a direção da velocidade inicial $\vec{u}_1$ no LAB. No CM, os ângulos análogos são $\underline{\theta}$ e $\varphi = \pi - \theta$. Note que, no CM, as velocidades de 1 e 2 são sempre opostas e por isso $\theta + \varphi = \pi$ (ver figuras)

Referindo agora à Fig. 9.11 a, vemos que:

$$v_1 \cos\psi = V + v_1' \cos\theta$$

$$v_1 \sin\psi = v_1' \sin\theta$$

Dividindo temos:

$$\boxed{\tan\psi = \frac{v_1' \sin\theta}{v_1' \cos\theta + V} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + (V/v_1')}}$$

Analogamente:

$$v_2 \sin \zeta = v_2' \sin\theta$$

$$v_2 \cos \zeta = V - v_2' \cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \zeta = \frac{\sin\theta}{(V/v_2') - \cos\theta}}$$

Vamos agora deduzir algumas equações que nos darão (V/v_1') e (V/v_2'). Primeiramente, como a partícula 2 está inicialmente em repouso no LAB:

$$\vec{u}_2' = -\vec{V} \Rightarrow u_2' = V \quad (1)$$

No CM, a velocidade do CM é nula, portanto:

$$m_1 \vec{u}_1' + m_2 \vec{u}_2' = 0 \Rightarrow m_1 u_1' = m_2 u_2' \quad (2)$$

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = 0 \Rightarrow m_1 v_1' = m_2 v_2' \quad (3)$$

Como a colisão é elástica, as energias cinéticas totais final e inicial são iguais. No CM:

$$\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Cancelando os fatores de (1/2) e eliminando u_2' e v_2' através de (2) e (3):

$$m_1 u_1'^2 + \frac{m_1^2}{m_2} u_1'^2 = m_1 v_1'^2 + \frac{m_1^2}{m_2} v_1'^2$$

$$\Rightarrow u_1'^2 = v_1'^2 \Rightarrow u_1' = v_1' \quad (4)$$

Da mesma forma, podemos ~~de~~ dividir (2) por (3):

$$\frac{u_1'}{v_1'} = \frac{u_2'}{v_2'} = 1 \Rightarrow u_2' = v_2' \quad (5)$$

Note que (4) e (5) implicam que os módulos das velocidades não mudam com a colisão no CM!

Finalmente, de (1), (2) e (4):

$$v_1' = u_1' = \frac{m_2}{m_1} u_2' = \frac{m_2}{m_1} V \Rightarrow \boxed{\frac{V}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2}}$$

e de (5) e (1):

$$v_2' = u_2' = V \Rightarrow \boxed{\frac{V}{v_2'} = 1}$$

donde: $\boxed{\tan \psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + m_1/m_2}}$ e

$$\boxed{\tan \zeta = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\theta/2 \cos\theta/2}{2 \sin^2\theta/2} = \cot\mathrm{an}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

A última relação nos dá:

$$\tan \zeta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \boxed{2\zeta = \pi - \theta = \phi}$$

ou seja, o ângulo entre $\vec{v}_2$ e a direção de $\vec{V}$ é a metade do ângulo entre $\vec{v}_2'$ e $\vec{V}$.

Um caso especial importante é o de massas iguais: $m_1 = m_2$.

$$\tan \psi = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} = \frac{2 \sin\theta/2 \cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2} = \tan\theta/2$$

$$\Rightarrow 2\psi = \theta$$

Usando $2\zeta = \pi - \theta \Rightarrow \boxed{\psi + \zeta = \pi/2 \text{ se } m_1 = m_2}$

ou seja, as velocidades finais no LAB formam um ângulo de 90°! Além disso, como o valor máximo de θ é π, o valor máximo de ψ é $\pi/2$.

Outro limite importante ocorre quando a partícula incidente é bem mais leve que a partícula alvo $m_1 \ll m_2$. Nosso caso:

$$\tan \psi \cong \tan \theta \Rightarrow \psi \cong \theta$$

e a partícula alvo é pouco afetada pela partícula incidente.

Outras fórmulas úteis:

De (7): $\sin \zeta = \left(\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} \right) \sin \psi$

Mas: $m_1 v_1 = \sqrt{2 m_1 T_1}$ e $m_2 v_2 = \sqrt{2 m_2 T_2}$

$$\Rightarrow \boxed{\sin \zeta = \sqrt{\frac{m_1 T_1}{m_2 T_2}} \sin \psi}$$

Como $2\zeta = \pi - \theta \Rightarrow$ $\sin 2\zeta = \sin(\pi - \theta) = \sin \theta$

$\cos 2\zeta = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$

Logo:

$$\boxed{\tan \psi = \frac{\sin 2\zeta}{(m_1/m_2) - \cos 2\zeta}}$$

No LAB, as leis de conservação de momento linear e energia são:

$$P_x: \quad m_1 u_1 = m_1 v_1 \cos\psi + m_2 v_2 \cos\zeta \qquad (6)$$

$$P_y: \quad 0 = m_1 v_1 \sin\psi - m_2 v_2 \sin\zeta \qquad (7)$$

$$T: \quad \frac{m_1}{2} u_1^2 = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 \qquad (8)$$

De (6):

$$m_2^2 v_2^2 \cos^2\zeta = (m_1 u_1 - m_1 v_1 \cos\psi)^2$$

e de (7)

$$m_2^2 v_2^2 \sin^2\zeta = m_1^2 v_1^2 \sin^2\psi$$

Somando essas duas últimas equações

$$m_2^2 v_2^2 = m_1^2 u_1^2 + m_1^2 v_1^2 - 2 m_1^2 u_1 v_1 \cos\psi \qquad (9)$$

Definindo $s \equiv m_2/m_1$, $T_0 = \frac{m_1}{2} u_1^2$ e $T_1 = \frac{m_1}{2} v_1^2$

e levando (9) em (8):

$$T_0 = T_1 + \frac{1}{s} T_0 + \frac{1}{s} T_1 - \frac{1}{s} \sqrt{2T_0}\sqrt{2T_1} \cos\psi$$

$$\Rightarrow (s-1) T_0 = (s+1) T_1 - 2\sqrt{T_0 T_1} \cos\psi$$

Se $\frac{T_1}{T_0} \equiv y^2$:

$$(1+s)y^2 - 2y\cos\psi + 1 - s = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{\cos\psi \pm \sqrt{\cos^2\psi - (1-s^2)}}{1+s}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} = \frac{1}{1+s}\left[\cos\psi \pm \sqrt{s^2 - \sin^2\psi}\right]$$

$$\boxed{\frac{T_1}{T_0} = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\left[\cos\psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\psi}\right]^2}$$

Evidentemente: $T_0 = T_1 + T_2$ onde $T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2}$

e $\frac{T_2}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0}$. ~~[illegible]~~

Note que se $m_1 < m_2$ deve-se tomar o valor (+) na fórmula. Se $m_1 > m_2$, há 2 valores de T_1 (ou v_1) para um dado ângulo ψ. Nesse caso, o valor máximo de ψ é ψ_{max} tal que:

$$\sin\psi_{max} = \frac{m_2}{m_1}$$

Semelhantemente podemos obter uma fórmula que envolve o ângulo ζ apenas. De (6) e (7):

$$m_1 u_1 - m_2 v_2 \cos\zeta = m_1 v_1 \cos\psi$$

$$m_2 v_2 \sin\zeta = m_1 v_1 \sin\psi$$

Elevando ao quadrado e somando:

$$m_1^2 u_1^2 + m_2^2 v_2^2 - 2 m_1 m_2 u_1 v_2 \cos\zeta = m_1^2 v_1^2$$

De (8), o lado direito da última equação fica:

$$m_1^2 v_1^2 = m_1^2\left[u_1^2 - \frac{m_2}{m_1} v_2^2\right] = m_1^2 u_1^2 - m_1 m_2 v_2^2$$

o que simplifica para:

$$m_2 (m_2 + m_1) v_2^2 = 2 m_1 m_2 u_1 v_2 \cos\zeta$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{u_1} = \left(\frac{2 m_2}{m_1 + m_2}\right) \cos\zeta$$

Mas $\dfrac{v_2}{u_1} = \dfrac{\sqrt{2 m_2 T_2}}{\sqrt{2 m_1 T_0}} = \sqrt{\dfrac{m_2 T_2}{m_1 T_0}}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T_2}{T_0} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2\zeta}$$

Colisões inelásticas

Às vezes, energia é convertida de interna para mecânica ou vice-versa numa colisão. Nesse caso, a lei de conservação deve ser modificada:

$$T_i + Q = T_f$$

onde $T_{i,f}$ é a energia cinética inicial/final e Q é a energia interna liberada na colisão. Se:

$Q > 0$ ∴ ⇒ colisão exoenergética (como em explosões)

$Q < 0$ ⇒ colisão endoenergética (perdas por dissipação)

É importante frisar que a conservação de momento linear continua sem modificação.

Newton estudou o caso de colisões frontais e percebeu que poderia descrever o caráter inelástico de colisões entre 2 corpos macroscópicos por um número chamado COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO. É definido como a razão entre as velocidades relativas antes e depois da colisão:

$$\varepsilon = \frac{|v_2 - v_1|}{|u_2 - u_1|}$$

No caso elástico, $\varepsilon = 1$ pois:

CONS. MOM. LINEAR: $m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$ (1)

" EN. CINÉTICA: $m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$ (2)

Rearranjando (2): $m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2)$

$$\Rightarrow m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) = m_2(v_2 - u_2)(v_2 + u_2) \quad (3)$$

Usando (1) em (3):

$$\hookrightarrow m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2)$$

$$\Rightarrow u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \Rightarrow u_1 - u_2 = v_2 - v_1$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 1 \quad \text{(C.Q.D.)}$$

Outra maneira é perceber que $u_1' = v_1'$ e $u_2' = v_2'$ no CM e as velocidades relativas não mudam c/ o referencial

Quando as partículas se grudam, $\varepsilon = 0$, e esse é o outro extremo, chamado de colisão TOTALMENTE INELÁSTICA. Portanto:

$$\boxed{0 < \varepsilon < 1}$$

Quando a colisão não é frontal, pode-se utilizar o coeficiente de restituição para a direção <u>normal</u> ao plano de contato. Na direção do plano de contato, ~~o momento~~ as velocidades não mudam

Symon 4-20) $m_1 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2$

$$Q + \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$e = \frac{|v_2 - v_1|}{u_1} = \frac{v_2 - v_1}{u_1}$$

$$-Q = \frac{1}{2}\left[m_1 u_1^2 - m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[m_1 u_1^2 - m_1 v_1^2 - \cancel{m_2} \times \frac{m_1^2}{m_2^{\cancel{2}}}(u_1 - v_1)^2\right]$$

$$u_1 e = \left|\frac{m_1}{m_2}(u_1 - v_1) - v_1\right| = \left|\frac{m_1}{m_2} u_1 - \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_1\right|$$

$$e = \left|\frac{m_1}{m_2} - \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\frac{v_1}{u_1}\right| = \frac{m_1}{m_2} - \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\frac{v_1}{u_1}$$

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{m_1/m_2 - e}{m_1/m_1 + 1} \qquad \frac{m_1}{m_2} = r$$

$$-Q = \frac{u_1^2}{2}\left[m_1 \left(1 - \frac{v_1^2}{u_1^2}\right) - \frac{m_1^2}{m_2}\left(1 - \frac{v_1}{u_1}\right)^2\right]$$

$$= \frac{m_1 u_1^2}{2}\left[1 - \frac{v_1^2}{u_1^2} - \frac{m_1}{m_2}\left(1 - \frac{v_1}{u_1}\right)^2\right]$$

$$= T_0\left[1 - \left(\frac{r-e}{r+1}\right)^2 - r\left(\frac{1+e}{1+r}\right)^2\right]$$

$$= T_0\left[\frac{1 + 2r + \cancel{r^2} - \cancel{r^2} - e^2 + \cancel{2er} - r(1 + e^2 + \cancel{2e})}{(1+r)^2}\right] =$$

$$-Q = T_0 \left[\frac{1 + r - e^2(1+r)}{(1+r)^2} \right] = T_0 \left[\frac{1 - e^2}{1 + r} \right]$$

$$\boxed{\frac{-Q}{T_0} = \frac{1 - e^2}{1 + m_1/m_2}}$$

Seção de choque

A quantidade que mede a "quantidade" de espalhamento numa determinada direção é a SEÇÃO DE CHOQUE DIFERENCIAL DE ESPALHAMENTO $\sigma(\theta)$. Para defini-la é bom pensarmos um pouco. Queremos medir a quantidade de partículas de um feixe incidente que são deflexionadas de um ângulo θ. É claro que um detetor em θ mede um número de partículas por unidade de tempo que é proporcional a:

- número de partículas por unidade de área por unidade de tempo no feixe incidente. Essa é a intensidade de fluxo do feixe $\underline{I}$

Definimos a seção de choque $\sigma(\theta)$ como a razão entre o número dN de partículas espalhadas por partícula alvo num ângulo sólido elementar infinitesimal $d\Omega'$ dividido por $\underline{I}$:

$$\sigma(\theta)\, d\Omega' = \frac{dN}{I} \qquad d\Omega' = 2\pi \sin\theta\, d\theta$$

Note que $[\sigma(\theta)] = \text{área} = L^2$

Conforme é fácil ver na figura 9-21 do livro para cada partícula alvo, o número de partículas com parâmetro de impacto entre b e $b+db$ é:

$$I\,(2\pi b)\,db$$

Todas essas partículas sofrerão uma deflexão entre θ e $\theta + d\theta$

$$\Rightarrow dN' = I\,\sigma(\theta)\,2\pi \sin\theta\, d\theta$$

Logo: (lembre-se que db e $d\theta$ têm sinais contrários)

$$2\pi b\, db = -\sigma(\theta)\, 2\pi \sin\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|}$$ (Centro de massa)

Portanto, basta saber a deflexão em função do parâmetro de impacto para obter $\sigma(\theta)$

Por exemplo, no caso do espalhamento de Rutherford, vimos que:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{k}{\mu b\, \cancel{u_1}^2} = \frac{k}{\mu b\, u_1^2} = \frac{k}{\mu b\, \cancel{u}^2_{rel}}$$

onde "traduzimos" as quantidades anteriores para a notação atual. Vemos que:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{k}{\mu u_1^2}\left(\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}\right) \\ \frac{db(\theta)}{d\theta} &= \frac{k}{\mu u_1^2}\left(-\frac{1/2}{\sin^2\theta/2}\right) \end{aligned}\right\} \; b\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{k^2}{2\mu^2 u_1^4}\,\frac{\cos\theta/2}{\sin^3\theta/2}$$

$$\sigma(\theta) = \frac{k^2}{2\mu^2 u_1^4}\,\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta\,\sin^3\theta/2} = \frac{k^2}{4\mu^2 u_1^4}\,\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2\,\cos\theta/2\,\sin^3\theta/2}$$

$$\boxed{\sigma(\theta) = \frac{k^2}{4\mu^2 u_1^4} \frac{1}{\sin^4 \theta/2}}$$

O que se mede no LAB é o ângulo ψ e é interessante achar a secção de choque no LAB. Para isso é importante perceber que a relação entre θ e ψ é um para um e partículas espalhadas no ângulo sólido infinitesimal

$$d\Omega' = 2\pi \sin\theta \, d\theta$$

atingem o ângulo sólido infinitesimal correspondente no LAB:

$$d\Omega = 2\pi \sin\psi \, d\psi$$

e $$\sigma(\theta)\, 2\pi \sin\theta \, d\theta = \sigma(\psi)\, 2\pi \sin\psi \, d\psi$$

$$\boxed{\sigma(\psi) = \sigma(\theta) \frac{\sin\theta}{\sin\psi} \frac{d\theta}{d\psi}}$$

As fórmulas para conversão $\theta \to \psi$ são complicadas no caso geral. No caso particular $m_1 = m_2$:

$$\psi = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\sin\psi} \frac{d\theta}{d\psi} = \frac{2\sin\psi\cos\psi}{\sin\psi} \times 2$$
$$= 4\cos\psi$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(\psi) = \sigma(\theta = 2\psi) \times 4\cos\psi \quad (m_1 = m_2)}$$

Obviamente, quando $m_1 << m_2$ e o alvo pode ser tomado como aproximadamente estacionário:

$$\boxed{\sigma(\psi) \simeq \sigma(\theta = \psi) \qquad (m_1 << m_2)}$$

No caso do espalhamento de Rutherford para $m_1 = m_2$: $\mu = m/2$

$$\sigma(\psi) = \frac{k^2}{m^2 u_1^4} \frac{4\cos\psi}{\sin^4\psi}$$

$$\boxed{\sigma(\psi) = \frac{k^2}{T_0^2} \frac{\cos\psi}{\sin^4\psi}}$$

Finalmente, define-se a seção de choque total como:

$$\sigma = \int \sigma(\theta)\, 2\pi \sin\theta\, d\theta = \int \sigma(\psi)\, 2\pi \sin\psi\, d\psi$$

Expressão genérica para $b(\theta)$ para um potencial central

É interessante escrever uma expressão fechada (a menos de uma quadratura) para $b(\theta)$ de tal forma que se possa relacionar diretamente a dinâmica, $U(r)$, à seção de choque $\sigma(\theta)$.

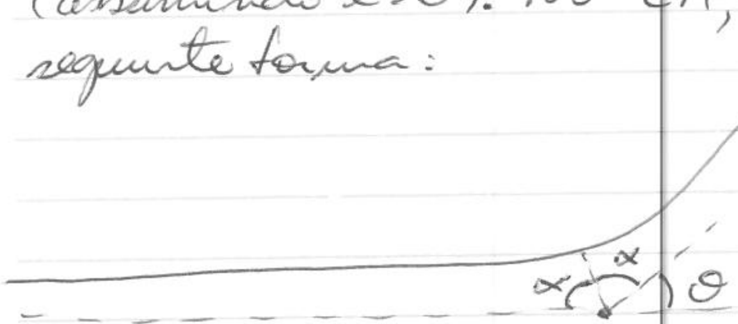
De:

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} \quad \text{e} \quad \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 = E - V(r) \quad \text{onde } V(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

obtivemos a equação da trajetória:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - V(r)\right]}} = \frac{\pm\, l/r^2}{\sqrt{2\mu\left[E - V(r)\right]}}$$

onde o sinal $(\pm)$ deve ser usado quando $\left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{r}}\right)\left(\substack{>0\\<0}\right)$ (assumindo $l>0$). No CM, a trajetória tem a seguinte forma:



Note que os 2 ângulos marcados com α são iguais por simetria. Logo:

$$\theta = \pi - 2\alpha$$

O ângulo α pode ser obtido, por exemplo, da primeira metade da trajetória:

$$r_i = \infty \qquad \theta_i = \pi$$

$$r_f = r_{min} \qquad \theta_f = \pi - \alpha \qquad \text{e} \quad \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} > 0$$

$$\Rightarrow \theta_f - \theta_i = \int_{r_i}^{r_f} \frac{l/r^2}{\sqrt{2\mu[E-V(r)]}}\,dr$$

$$\Rightarrow -\alpha = \int_{\infty}^{r_{min}} \frac{l/r^2}{\sqrt{\quad}}\,dr \Rightarrow \alpha = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{l/r^2}{\sqrt{2\mu[E-V(r)]}}\,dr$$

Usando que:

$$l = \mu b v_{rel0} = \mu b u_1 = b\sqrt{2\mu T_0'}$$

$$E = \frac{\mu}{2} v_{rel0}^2 = \frac{\mu}{2} u_1^2 = T_0'$$

onde usamos que a velocidade relativa inicial é a mesma da do LAB (pois v_{rel} independe do referencial) e que $V(r \to \infty) = 0$. Além disso, a T inicial no CM é:

$$T_0' = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{m_2}{2} u_2'^2 = \frac{1}{2}\left[m_1\left(u_1^2 + \frac{m_1^2}{M^2}u_1^2 - 2\frac{m_1}{M}u_1^2\right) + m_2\frac{m_1^2}{M^2}u_1^2\right] = \frac{m_1}{2}u_1^2\left[1 + \frac{m_1^2}{M^2} - \frac{2m_1}{M} + \frac{m_1 m_2}{M^2}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= u_1 - V \\ u_2' &= -V \\ V &= \frac{m_1 u_1}{m_1+m_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad = \frac{m_1}{2}u_1^2\left[\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\right] = \frac{\mu}{2}u_1^2$$

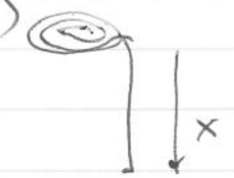
$$\alpha = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\left(\ell/\sqrt{2\mu}\right)/r^2}{\sqrt{E - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - U(r)}}\, dr = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\sqrt{T_0'}\, b/r^2}{\sqrt{T_0' - \frac{b^2 T_0'}{r^2} - U(r)}}\, dr$$

$$\boxed{\alpha = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b/r^2}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{U(r)}{T_0'}}}\, dr = \frac{\pi - \theta}{2}}$$

o que nos dá $b(\theta)$, depois de uma inversão.

Se ainda $r = \frac{1}{u} \Rightarrow dr = -\frac{du}{u^2}$

$$\boxed{\frac{\pi - \theta}{2} = \int_{0}^{1/r_{min}} \frac{b}{\sqrt{1 - bu^2 - \frac{U(1/u)}{T_0'}}}\, du}$$

9-15) 

$\lambda = \frac{m}{L}$ = densidade linear de massa

Massa variável:

$$F = mg = \frac{dp}{dt} = v\dot{m} + m\dot{v}$$

$$\Rightarrow g = v\left(\frac{\dot{m}}{m}\right) + \dot{v} \quad ; \text{ mas } m = \lambda x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{m}}{m} = \frac{\dot{x}}{x} \Rightarrow g = v\left(\frac{\dot{x}}{x}\right) + \dot{v} \Rightarrow gx = v\dot{x} + x\dot{v}$$

$$gx = \frac{d}{dt}(xv) = \frac{d(x\dot{x})}{dt}$$

$$\Rightarrow gx = \frac{d^2(x^2/2)}{dt^2} \Rightarrow 2gx = \frac{d^2(x^2)}{dt^2}$$

Definindo $y = x^2$; $x = \sqrt{y} \Rightarrow \boxed{2g\sqrt{y} = \frac{d^2y}{dt^2}}$

Note que a condição inicial é $x = y = 0$ em $t = 0$. Vamos tentar uma lei de potência, compatível com a condição inicial:

$$y = at^n \Rightarrow \ddot{y} = an(n-1)t^{(n-2)}$$

$$\Rightarrow an(n-1)t^{(n-2)} = 2g\sqrt{a}\, t^{n/2}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} = n - 2 \Rightarrow n = 4$$

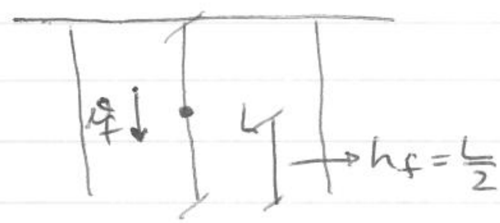
$$\Rightarrow 12a = 2g\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{g}{6} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{g^2}{36}t^4 \\ x = \frac{g}{6}t^2 \end{cases}$$

$$v = \dot{x} = \frac{g}{3}t \Rightarrow \boxed{a = \frac{g}{3}}$$

A energia perdida é a diferença entre a inicial e a final. Ao final:

$$x(t_f) = L \Rightarrow L = \frac{g}{6}t_f^2 \Rightarrow t_f^2 = \frac{6L}{g}$$

$$E_i = mgL$$



$$E_f = \frac{m}{2}v_f^2 + mg\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$v_f = \frac{g}{3}t_f \Rightarrow E_f = \frac{m}{2}\frac{g^2}{9}\frac{6L}{g} + \frac{mgL}{2} = \frac{5}{6}mgL$$

$$\Rightarrow |\Delta E| = mgL - \frac{5}{6}mgL = \boxed{\frac{mgL}{6}}$$

$$v = \dot{x} = \frac{g}{3}t = \frac{g}{3}\sqrt{\frac{6x}{g}} = \sqrt{\frac{2}{3}gx}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{2}{3}gx}$$