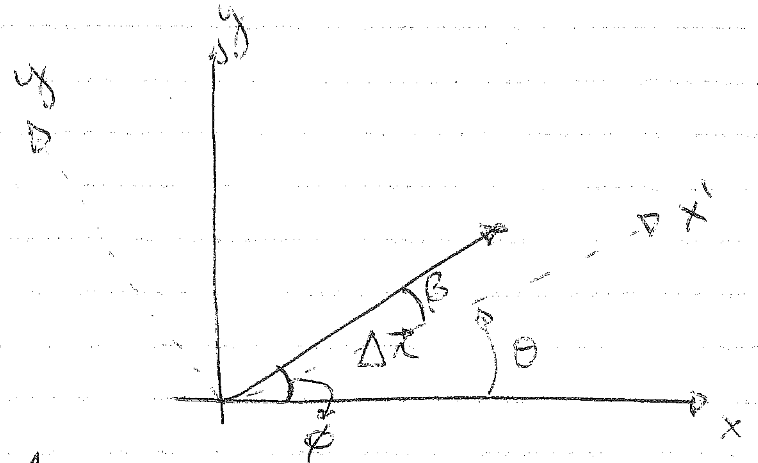
Preliminares Matemáticas

A linguagem do Eletromagnetismo é o cálculo vetorial. Vamos fazer uma rápida revisão dos conceitos básicos do cálculo vetorial.

- O que é um vetor?

Um vetor em 3 dimensões pode ser tomado como um conjunto de 3 números, por exemplo, (A_x, A_y, A_z) que se transformam sob uma mudança do sistema de coordenadas da mesma maneira que o <u>deslocamento</u>. Por exemplo, considere primeiramente o caso de 2 dimensões que é mais simples de desenhar:



As componentes de $\Delta\vec{r}$ no sistema de coordenadas XY são:

$$\Delta x = |\Delta\vec{r}|\cos\phi$$
$$\Delta y = |\Delta\vec{r}|\sin\phi$$

Já no sistema tracejado X'Y' acima, rodado de θ em relação ao XY, as componentes do mesmo vetor são:

$$\Delta x' = |\Delta\vec{r}|\cos\beta$$

$$\Delta y' = |\Delta\vec{r}|\sin\beta$$

Mas $\beta = \phi - \theta$, portanto:

$$\Delta x' = |\Delta \vec{r}| (\cos\phi \cos\theta + \sin\phi \sin\theta)$$

$$\boxed{\Delta x' = \Delta x \cos\theta + \Delta y \sin\theta} \qquad (1)$$

$$\Delta y' = |\Delta \vec{r}| (\sin\phi \cos\theta - \sin\theta \cos\phi)$$

$$\boxed{\Delta y' = -\Delta x \sin\theta + \Delta y \cos\theta} \qquad (2)$$

A lei de transformação das componentes de $\Delta\vec{r}$ pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

Em 3D, a mesma rotação pode ser escrita

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \qquad (3)$$

<u>Uma rotação qualquer</u> sempre pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \qquad (4)$$

ou, mais convenientemente,

$$\Delta r_i' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} \, \Delta r_j \qquad (5)$$

onde j ou $i = 1, 2, 3$ corresponde a x, y, z, respectivamente

Um vetor é então qualquer grupo de 3 quantidades (A_x, A_y, A_z) que se transformam com $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$:

$$A'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} A_j \qquad (6)$$

Sabemos que o produto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ é invariante sob rotações (essa é a definição de um escalar!). Portanto:

$$A'_x B'_x + A'_y B'_y + A'_z B'_z = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Mostre, usando (6) que R_{ij} deve satisfazer a condição de ortogonalidade:

$$\sum_{j=1}^{3} R_{ji} R_{jk} = \delta_{ik}$$ ou equivalentemente

$$\sum_{j=1}^{3} (R^T)_{ij} R_{jk} = \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} (R^T)_{jk}$$

onde R^T é a transposta de R. Ou seja $R^T = R^{-1}$.

Mostre que a matriz R em (3) satisfaz essa propriedade.

Gradiente

O gradiente de uma função escalar f de (x,y,z), ou seja, uma função da posição, é definido como a função vetorial:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

$\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ são os versores (vetores unitários) nas direções cartesianas (às vezes também chamados $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$). Note que o gradiente de uma função escalar é um vetor (não se esqueçam da seta acima do símbolo $\vec{\nabla}$, chamado de "nabla"). Por ser um vetor, $\vec{\nabla} f$ se transforma como um vetor sob rotações do sistema de coordenadas, como já vimos.

Há uma maneira simples de ver que $\vec{\nabla} f$ é um vetor. Considere a variação de $f(x,y,z)$ quando os seus argumentos variam de (x,y,z) para $(x+dx, y+dy, z+dz)$ (deslocamentos infinitesimais)

$$(x,y,z) \longrightarrow (x+dx, y+dy, z+dz)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y,z) \longrightarrow f(x+dx, y+dy, z+dy)$$

Expandindo em série de Taylor:

$$f(x+dx, y+dy, z+dz) = f(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

onde as derivadas parciais são todas calculadas no ponto (x,y,z). Assim

$$df \equiv f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \left(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}\right)$$
$$= \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

onde $d\vec{r}$ é o <u>vetor</u> deslocamento. Como a variação de f é um escalar, pois não depende do sistema de coordenadas, a ~~conta~~ combinação $\vec{\nabla}f \cdot d\vec{r}$ só pode ser escalar se $\vec{\nabla}f$ for um vetor.

Podemos construir com o "operador diferencial vetorial" nabla $\vec{\nabla}$ outras quantidades, como veremos a seguir

<u>Divergente</u>: Se $\vec{A}(x,y,z)$ é uma função <u>vetorial</u> da posição (x,y,z), ou seja, é formada por 3 funções componentes:

$$\left[A_x(x,y,z);\, A_y(x,y,z);\, A_z(x,y,z)\right] \Longleftrightarrow \vec{A}(x,y,z)$$

definimos o divergente de $\vec{A}$ como sendo a seguinte função escalar:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

que é como o produto escalar de $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} \Longleftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \text{ com } \vec{A} \Longleftrightarrow (A_x, A_y, A_z)$$

Como $\vec{\nabla}$ e $\vec{A}$ são vetores $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ é um escalar

<u>Observação</u>: Pode-se mostrar que $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ realmente se transforma como um vetor diretamente. Sabemos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underset{\approx}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ onde $\underline{R}$ é a matriz cujos componentes são R_{ij} [ver (4)]

ou $r'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} r_j \quad (7)$

Assim, $\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial z}$, etc...

ou:

$$\frac{\partial}{\partial r'_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial r_j}{\partial r'_i}\frac{\partial}{\partial r_j}$$

Mas, da inversa de (7)

$$r_i = \sum_{j=1}^{3} (R^{-1})_{ij} r'_j$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r_j}{\partial r'_i} = (R^{-1})_{ji} = (R^T)_{ji} = R_{ij}$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial r'_i} = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\frac{\partial}{\partial r_j}$$, que prova que $\vec{\nabla}$ é um vetor

(fim da observação).

<u>Rotacional</u>: Pode-se formar um outro vetor a partir de $\vec{\nabla}$ e $\vec{A}$, através do <u>produto vetorial</u>. Definimos o rotacional de $\vec{A}$ como:

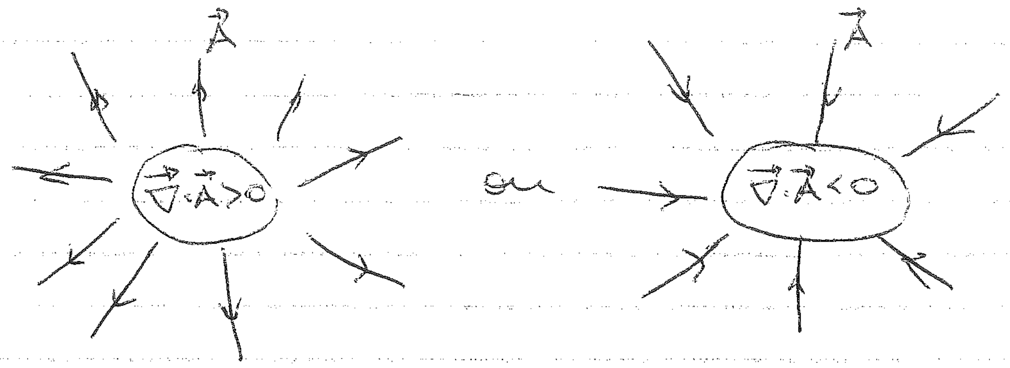
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

ou

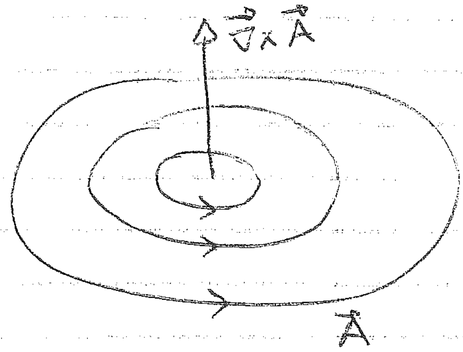
$$= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

O divergente e o rotacional tem os seguintes interpretações físicas

Se $\vec{A}(x,y,z)$ "emana" de um ponto ou "converge" para um ponto, o divergente de $\vec{A}$ é grande nesse ponto (positivo no primeiro caso e negativo no segundo)



Se $\vec{A}(x,y,z)$ "circula" em torno de um ponto seu rotacional é não-nulo nesse ponto e aponta na direção dada pela regra da mão direita.



Identidades importantes

(1) $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$

(2) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$

(3) $\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{B}$

(4) $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$

(5) $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{A}$

(6) $\vec{\nabla}\times(f\vec{A}) = f\,\vec{\nabla}\times\vec{A} + (\vec{\nabla}f)\times\vec{A}$ (note a ordem correta)

(7) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$ (note a ordem)

(8) $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

(* Atenção aqui!

$$(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \left(B_x\frac{\partial}{\partial x} + B_y\frac{\partial}{\partial y} + B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z})$$

$$= \left(B_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + B_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + B_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(B_x\frac{\partial A_y}{\partial x} + B_y\frac{\partial A_y}{\partial y} + B_z\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(B_x\frac{\partial A_z}{\partial x} + B_y\frac{\partial A_z}{\partial y} + B_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{z}$$

)

(9) $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

A prova é mais ou menos trivial a partir da definição, exceto as 2 últimas ((8) e (9)) que são mais chatos (nessas é mais fácil sair do lado direito e chegar ao esquerdo).

(10) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 f$

que é o chamado Laplaciano de f

(11) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} f) = 0$ (sempre)

(12) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$ (sempre)

(13) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

onde $\nabla^2\vec{A} = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\hat{z}$

Mais uma vez, as provas são simples.

Teoremas fundamentais do cálculo vetorial:

Com esses teoremas, é possível ir muito longe no entendimento do Eletromagnetismo:

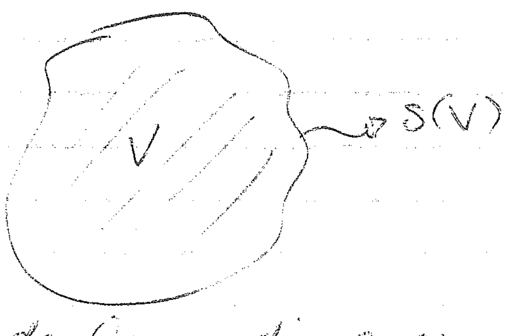
Teorema do gradiente:

$$\int_{\vec{r}_0,\,C}^{\vec{r}} (\vec{\nabla} f) \cdot d\vec{l} = f(\vec{r}) - f(\vec{r}_0)$$

O lado esquerdo é a Integral de linha de $\vec{\nabla} f$ ao longo do caminho C que vai de $\vec{r}_0$ até $\vec{r}$. Note que, apesar de termos especificado o caminho a ser usado (como sempre deve ser feito no caso de Integrais de linha), nesse caso particular o resultado só depende dos pontos inicial ($\vec{r}_0$) e final ($\vec{r}$), ou seja, não depende de qual caminho se toma para ir de $\vec{r}_0$ a $\vec{r}$.

Teorema de Gauss (do divergente)

Dada uma região compacta no espaço de V, cuja borda é a superfície fechada S(V)



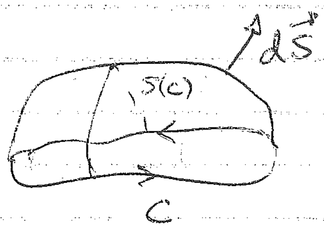
o teorema de Gauss diz que:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\, dV = \int_{S(V)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

onde o lado esquerdo é a <u>integral de volume em V</u> do divergente de $\vec{A}$ e o lado direito é a integral de superfície em $S(V)$ de $\vec{A}$. Note ~~de~~ que o elemento de superfície $d\vec{S}$ em cada ponto de $S(V)$ deve sempre apontar para fora da região.

<u>Teorema de Stokes (do rotacional)</u>

Esse teorema requer muito cuidado, pois é preciso fixar uma "orientação" para uma superfície aberta.



Seja uma superfície aberta $S(C)$, como ao lado, cuja ~~[illegible]~~ borda é a curva <u>C</u>. Podemos dar uma direção de circulação para <u>C</u> e uma direção <u>correspondente</u> para o elemento de área $d\vec{S}$ usando a regra da mão direita (ver figura). Note que a orientação é arbitrária: se invertermos o sentido de circulação de C, basta inverter a direção de $d\vec{S}$. Mas deve-se escolher uma orientação bem definida para ambas e trabalhar consistentemente dentro dela.

O teorema de Stokes diz então:

$$\int_{S(c)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{C} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

O lado esquerdo é a integral de superfície sobre $S(c)$ do rotacional de $\vec{A}$ e o lado direito é a integral de linha de $\vec{A}$ ao longo do circuito fechado C (também chamada de "circulação" de $\vec{A}$)

Coordenadas curvilíneas:

Vários problemas de Eletromagnetismo (e da Física em geral) são muito mais simples se expressos num sistema de coordenadas que reflita a simetria do problema. Dois sistemas serão particularmente importantes: coordenadas esféricas e cilíndricas.

Coordenadas esféricas: Um ponto (x, y, z) no espaço pode ser localizado através de sua distância à origem e 2 ângulos: (r, θ, φ) (ver figura). Nesse caso:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Também é conveniente definir versores $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ como na figura. Note que a direção de cada versor é a direção de deslocamento infinitesimal do ponto no espaço quando apenas uma das coordenadas (r, θ, φ) cresce e as outras são mantidas constantes. Os versores acima podem ser decompostos nos versores cartesianos:

$$\begin{cases} \hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z} = \dfrac{\vec{r}}{r} \\ \hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y} \end{cases}$$

Note que os versores $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ não são constantes e variam com a posição no espaço (dependem de θ e ϕ). Portanto, cuidado ao tomar derivadas de $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ pois elas não são necessariamente nulas. O mesmo vale para integrais.

O elemento de volume em coordenadas esféricas é:

$$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

Se uma função f é dada em função de (r,θ,ϕ) é conveniente calcular seu gradiente diretamente:

$$\vec{\nabla} f(r,\theta,\phi) = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

Se uma função vetorial $\vec{A}$ for dada em termos de (r,θ,ϕ) e decomposta nos versores $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi})$

$$\vec{A} = A_r(r,\theta,\phi)\hat{r} + A_\theta(r,\theta,\phi)\hat{\theta} + A_\phi(r,\theta,\phi)\hat{\phi}$$

então:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

<u>Coordenadas curvilíneas</u>: Estas são (ρ, ϕ, z) como na figura (o livro usa s ao invés de ρ mas ρ é mais usual). As transformações são

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$$

Os versores são:

$$\hat{\rho} = \cos\phi\, \vec{x} + \sin\phi\, \hat{y}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\, \hat{x} + \cos\phi\, \hat{y}$$

$$\hat{z} = \hat{z}$$

O elemento de volume é:

$$dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

e a aplicação do operador $\vec{\nabla}$ nos dá:
$(\vec{A} = A_\rho(\rho,\phi,z)\,\hat{\rho} + A_\phi(\rho,\phi,z)\,\hat{\phi} + A_z(\rho,\phi,z)\,\hat{z})$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right]\hat{\rho} + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]\hat{z}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Função Delta de Dirac

O campo elétrico de uma carga pontual localizada na origem é:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Vamos calcular a divergência de $\vec{E}$. Usando coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \times \frac{1}{r^2}\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (1)}{\partial r} = 0$$

Entretanto, a lei de Gauss nos dá:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

e deveríamos achar uma ~~cod~~ carga pontual na origem e não zero para $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. A resolução desse aparente paradoxo está em que a expressão de $\vec{E}$ explode quando $\vec{r} \Rightarrow \vec{0}$:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \xrightarrow[\vec{r} \to \vec{0}]{} \infty \,!$$

Além disso, se calcularmos o fluxo de $\vec{E}$ através de uma superfície esférica de raio R centrada na origem:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right)\Bigg|_{R=r} \cdot (R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi)\, \hat{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

como já havíamos visto. Entretanto, o teorema de Gauss nos dá:

$$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV$$ que seria zero se usássemos $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{0}$ no volume $\underline{V}$

Note que o fluxo de $\vec{E}$ é $\frac{q}{\varepsilon_0}$ independente do raio $\underline{R}$.

Isso significa que teríamos $\frac{q}{\varepsilon_0}$ não importa quão pequena a esfera em torno da origem. Isso porque a origem do problema está justamente na presença da carga pontual na origem.

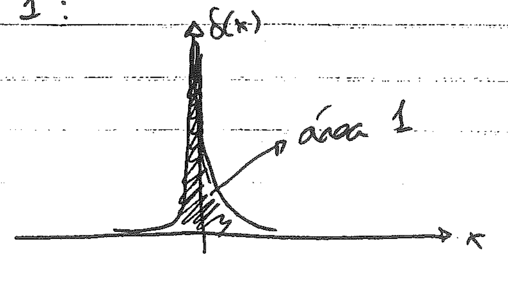
Uma carga pontual é algo que, imaginamos, concentra em um ponto espacial sem volume uma quantidade finita de carga q. Logo, ela deve corresponder a uma <u>densidade</u> de carga ρ infinita no ponto onde está situada a carga pontual.

Esse comportamento altamente singular é expresso matematicamente através da <u>função delta de Dirac</u>

Em uma dimensão a função Delta é definida como um objeto tal que:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

ou, pictoriamente, algo extremamente concentrado na origem com área 1:



Obviamente, a definição acima não faz sentido rigoroso em matemática. Na verdade, a função delta só tem utilidade operacional quando aparece sob um sinal de integração. Por exemplo, seja $f(x)$ uma função qualquer contínua:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(x)\,dx = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx = f(0)$$

já que $\delta(x)=0$ para qualquer $x\neq 0$

Esse resultado é compatível com nossa idéia intuitiva de uma função $\delta(x)$ que é um enorme pico em $x=0$ com área 1. Mais rigorosamente, definimos:

$$I = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta_n(x)$$

onde $\delta_n(x)$ é uma seqüência de funções tal que

$$I \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$$

$\forall\, f(x)$ que seja contínua em $x=0$. Vários exemplos de seqüências úteis são:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n & |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2n} \end{cases} \quad ; \quad \delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\exp(-n^2x^2)$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\,\frac{1}{1+n^2x^2} \quad ; \quad \delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$$

Note que $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_n(x)=1$, para todo n. Embora o limite $\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)$ não defina uma função, debaixo do sinal de integração o limite faz sentido.

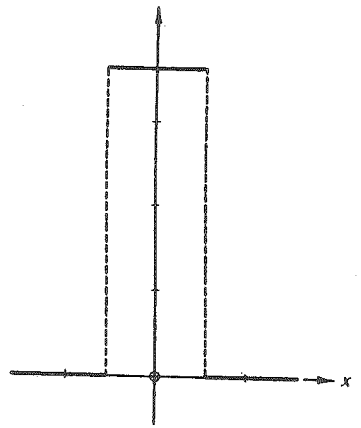


FIG. 8.5 δ-sequence function

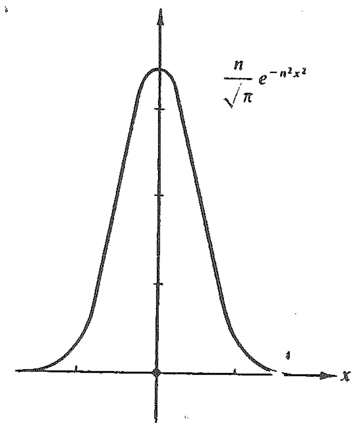


FIG. 8.6 δ-sequence function

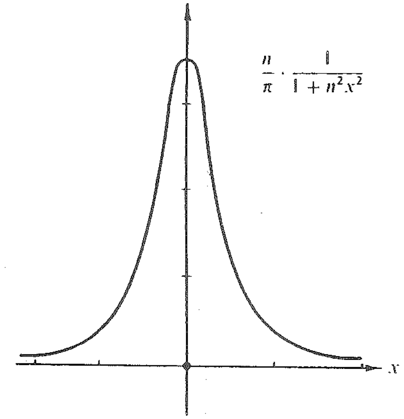


FIG. 8.7 δ-sequence function

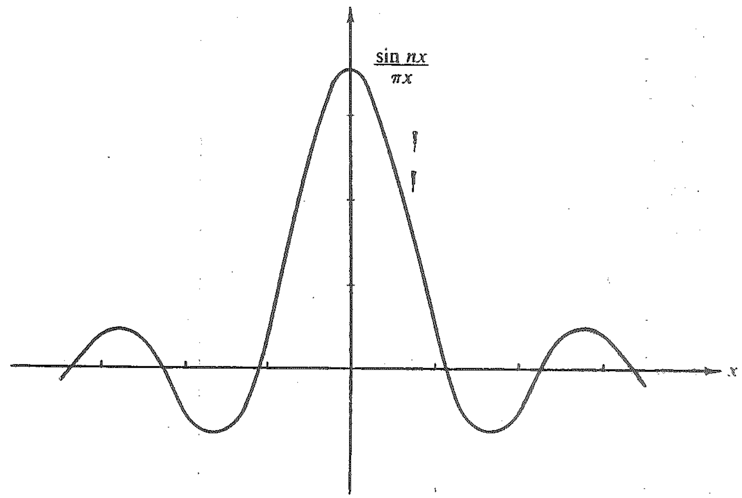


FIG. 8.8 δ-sequence function

Algumas propriedades importantes da função delta são:

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0) \quad \text{(óbvia)}$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(kx)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{1}{|k|}\,\delta(x)\,dx = \frac{f(0)}{|k|}$$

Em particular, a função delta é par $\delta(-x)=\delta(x)$. A prova está no exemplo 1.15 do livro.

$$(iii) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x)\,dx = f(x)\,\delta(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\delta(x)\,dx = -f'(0)$$

onde a "linha" significa a primeira derivada e utilizamos integração por partes:

(iv) Se $\theta(x)$ é a função degrau:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$$

então $\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$. Isso porque: $\frac{d\theta}{dx}=0$ se $x\neq 0$ e:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{d\theta}{dx}\,dx = f(x)\,\theta(x)\Big|_{x=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\theta(x)\,dx$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[f(A) - \int_0^A f'(x)\,dx\right] = \lim_{A\to\infty}\left[f(A) - [f(A)-f(0)]\right] = f(0)$$

Podemos agora generalizar para dimensões superiores. Escrevemos:

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

onde $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Desse modo:

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = 0 \quad \text{se } \vec{r} \neq \vec{0}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \delta^{(3)}(\vec{r}) = \int_{\substack{\text{TODO}\\ \text{O}\\ \text{ESPAÇO}}} \delta^{(3)}(\vec{r})\, dV = 1$$

e:

$$\int f(\vec{r})\,\delta^{(3)}(\vec{r})\,dV = f(\vec{0})$$

Assim, podemos escrever:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r})}$$

Intuitivamente, isso nos dá uma carga que é zero em todos os pontos exceto a origem e infinita em $\vec{r}=\vec{0}$. Além disso, o fator 4π garante a validade do teorema de Gauss, mesmo no caso da carga pontual.

$$\int_{\substack{\text{ESFERA}\\ \text{DE}\\ \text{RAIO } R}} \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) dV = \int_{S(R)} \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot d\vec{S} = \int \frac{1}{R^2}\, R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = 4\pi =$$

$$= 4\pi \int \delta^{(3)}(\vec{r})\, dV$$

Além disso, a lei de Gauss fica preservada:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta^{(3)}(\vec{r}) \Longleftarrow \boxed{\rho(\vec{r}) = q\,\delta^{(3)}(\vec{r})}$$

Se a carga não está na origem:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) = 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$$

pois a diferenciação de $\vec{\nabla}$ atua apenas em $\vec{r}$ (com $\vec{r}'$ mantido constante)

Finalmente, temos que:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

o que nos dá:

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\Rightarrow \nabla^2\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

que é a versão da equação de Poisson para uma carga pontual.