

# Eletromagnetismo I

No estudo de Mecânica, lidamos muitas vezes com vários tipos de forças:

- . Força de contato entre sólidos.
- . Força de atrito quando duas superfícies que se tocam têm um movimento relativo.
- . Força de tensão numa corda.
- . Força elástica numa mola.
- . A pressão que um fluido exerce sobre uma superfície sólida ou líquida.
- . A força viscosa entre camadas de um fluido que movem uma em relação à outra.

Embora essas forças sejam todas aparentemente diferentes, todas têm origem elétrica (ou magnética). Na verdade, acredita-se, ou melhor, conhecem-se apenas quatro tipos de interações fundamentais (ou seja, qualquer interação entre pedaços de matéria pode ser entendida com base nessas quatro forças):

## 1. Força gravitacional:

- . Força entre massas
- . Lei da gravitação de Newton
- . Para velocidades muito grandes ou massas muito grandes → teoria da relatividade geral de Einstein (1915)
- . Muito fraca, mas o efeito é cumulativo (é uma "carga")

## 2. Força eletromagnética

- . Forças entre cargas e correntes.
- . Equações de Maxwell (1888)
- . Unificou fenômenos elétricos e magnéticos completamente

- Pode haver repulsão e atração (dois tipos de cargas)
- Aproximadamente  $10^{42}$  vezes mais forte que a força gravitacional (se tomarmos dois elétrons, p. ex.)
- Esclareceu a natureza da luz (radiação eletromagnética)

### 3. Força forte:

- Força entre prótons e nêutrons (fundamentalmente entre quarks e glúons)
- Da ordem de  $10^2 - 10^3$  vezes mais forte que a força eletromagnética (~ força entre núcleons)
- Alcance curto ( $\sim 10^{-15}$  m) enquanto a força elétrica não tem "alcance" ( $\sim \frac{1}{r^2}$ )
- Cromodinâmica quântica (QCD) (~1970) (é preciso usar mecânica quântica)
- 3 tipos de cargas (R, G, B)

### 4. Força fraca

- Responsável pelo decaimento  $\beta$  e outros processos  
p. ex.:  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$
- Cerca de  $10^4$  vezes mais fraca que as forças eletromagnéticas
- Teoria eletro-fraca (1961-1968)
- Outros tipos de cargas (que são ligadas à carga elétrica)
- Alcance ~~curto~~ curto ( $\sim 10^{-18}$  m)
- Foi "unificada" com as interações eletromagnéticas numa só teoria

A gravitação de Newton foi estudada em Mecânica (por razões históricas). Nesse curso, estudaremos as interações eletromagnéticas.

Você pode se perguntar por que a gravitação requereu um estudo rápido (um capítulo do curso de Mecânica) enquanto o eletromagnetismo exige dois semestres de curso.

Uma resposta parcial consiste na constatação que no EM, as forças eletromagnéticas adquirem uma "dinâmica própria". Enquanto que a força gravitacional pode ser estudada (pelo menos para velocidades baixas comparadas com a vel. da luz) como sendo instantânea, as forças elétrica e magnética, em algumas situações, não podem. Em particular, as ondas eletromagnéticas são mais facilmente estudadas/entendidas como "oscilações do campo eletromagnético".

Portanto no estudo do EM, os campos elétricos  $\vec{E}$  e magnéticos  $\vec{B}$ , adquirem vida própria. O estudo do EM é, em larga medida, o estudo da dinâmica de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ .

$\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são chamados de "campos" por serem funções da posição  $\vec{r}$ :

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$$

ou seja, em cada ponto do espaço,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  adquirem um valor. Portanto, o EM é o estudo da dinâmica de "campos" e por isso é também chamado de uma "Teoria de Campos".

Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são criados por cargas e/ou correntes, sendo que correntes são cargas em movimento. ~~Por sua vez,~~ Por sua vez, as cargas referem a ação dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Uma carga  $q$  no ponto  $\vec{r}$  com velocidade  $\vec{v}$  sofrerá uma força dada por:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{"Força de Lorentz"}$$

O estudo do EM se ocupava primordialmente de estudar como cargas e correntes criam  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e como  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  evoluem no tempo e no espaço. O efeito dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  nas partículas materiais é objeto de estudo da Mecânica.

Finalmente, sabemos que a mecânica Newtoniana tem que ser modificada quando lidamos com sistemas muito pequenos (da ordem do tamanho dos átomos  $\sim 10^{-10} \text{ m}$ ). É preciso usar então a Mecânica quântica. Igualmente, quando lidamos com eventos que envolvam distâncias atômicas, mesmo a teoria EM de Maxwell tem que ser modificada a fim de incorporar efeitos quânticos.

E na generalização é chamada de "Eletrodinâmica quântica" ( $\sim 1950$ ) e é uma das teorias mais bem sucedidas já descobertas. Ela retém várias características da teoria clássica, daí a importância do entendimento completo da teoria de Maxwell.



Capítulo 1 - Revisão de aspectos matemáticos  
 Secções (1.1 a 1.4) → Ler e estudar  
 Problemas 1.53 e 1.54

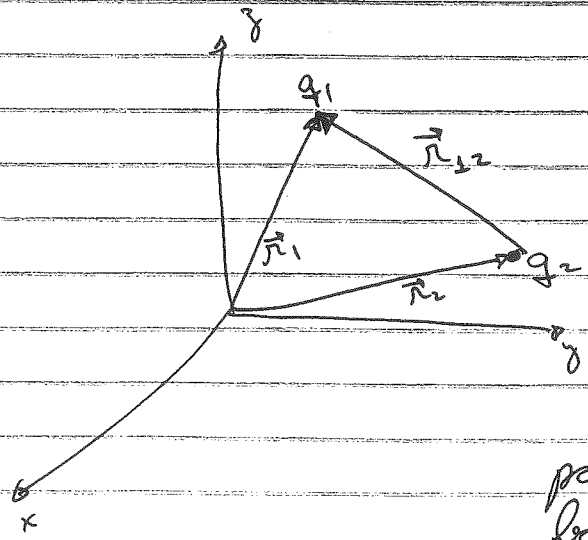
Capítulo 2: Eletrostática

O estudo da eletrostática ataca o problema da distribuição de campos elétricos estáticos produzidos por cargas estáticas. Antes de atacarmos o problema, vamos fazer algumas definições.

• Lei de Coulombe: A força entre duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  é proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional à distância entre elas. A força atua na linha que liga uma carga à outra e é atrativa para cargas ~~de sinais~~ opostas e repulsiva para cargas de mesmo sinal.

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\vec{F}_{21}$$

onde  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  e  $\vec{F}_1$  é a força sobre 1 e  $\vec{F}_2$  sobre 2



Note que as forças satisfazem a 3ª lei de Newton. A constante  $\epsilon_0$  tem o valor tal que:  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

O fator  $4\pi$  é conveniente para simplificar equações mais básicas.

Dada uma carga padrão qualquer, a lei de Coulomb pode ser usada para se medir qualquer outra carga desconhecida em termos da carga padrão.

Na natureza, a carga é quantizada, ou seja, ela vem apenas em múltiplos de uma quantidade mínima, que é a carga do elétron:

$$Q_e = -e \approx -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Na verdade, ~~em~~ a Mecânica Quântica descreve os núcleos, como compostos de partículas mais elementares, os quarks, que têm carga

$$\pm \frac{1}{3} e \quad \text{ou} \quad \pm \frac{2}{3} e$$

Entretanto, os quarks não são observáveis em estado livre. Apenas seus estados ligados (como moléculas) são observáveis, esses têm carga  $0, \pm e, \pm 2e$ , etc.

Princípio de superposição: Se há várias cargas estáticas, a força em uma delas é a soma vetorial ("superposição") das forças individuais devidas a cada uma das outras partículas:

$$\vec{F}_1 = \sum_{i=2}^{N_0} \frac{q_1 q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{1i}^2} \vec{r}_{1i} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^{N_0} \frac{q_i}{r_{1i}^3} \vec{r}_{1i}$$

A lei de Coulomb adicionada ao princípio de superposição resolve, em princípio, qualquer problema de eletrostática, ou seja, qualquer pergunta do tipo: "qual o campo elétrico criado por uma dada configuração estática de cargas?"

Campo elétrico: O campo elétrico num ponto  $\vec{r}$  é definido como sendo a força por unidade de carga sentida por uma carga de prova colocada no ponto  $\vec{r}$ :

$$\Rightarrow \text{Se } \vec{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{Nq} q_i \frac{\vec{r}_{1i}}{r_{1i}^3} \text{ então}$$

$$\vec{E}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{Nq} q_i \frac{\vec{r}_{1i}}{r_{1i}^3}$$

Note como agora  $\vec{E}$  é função da posição (um campo) e é uma "consequência" de uma dada distribuição de cargas  $q_2, q_3, \dots$  em  $\vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots$ . De certa forma o conceito de campo elétrico, nesse ponto, não é essencial (poderíamos, talvez, continuar falando apenas de forças). Mas, como já foi dito, mais adiante ele será imprescindível (quando falarmos de radiação eletromagnética, quando os campos "adquirirão vida própria").

Obviamente, parte da força de Lorentz decorre da definição de campo:

$$\vec{F}_q = q \vec{E}(\vec{r})$$

se  $q$  é colocada em  $\vec{r}$ .

Distribuições contínuas de carga. Até agora, vimos assumindo que as cargas são pontuais, ou seja, elas se localizam em um ponto "matemático"  $\vec{r}$  no espaço  $\mathbb{R}^3$ , na verdade, é correto se pensarmos em elétrons e quarks. Mas em vários problemas "macroscópicos", a "granularidade" (o caráter discreto, quantizado) não é perceptível e podemos falar de uma distribuição contínua de cargas. Isso é análogo ao fato de que podemos tratar um fluido ou um sólido como distribuições contínuas de massa, muito embora o caráter atômico da matéria seja evidente em escalas da ordem de  $10^{-10}$  m.

Uma distribuição contínua <sup>(estática)</sup> de cargas é caracterizada completamente por sua densidade de carga volumétrica, ou seja, a carga por unidade de volume:

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta Q}{\Delta V} \right)_{\vec{r} \in \Delta V}$$

Dessa forma, podemos escrever para um elemento infinitesimal de volume:

$$dq = \rho(\vec{r}) dV$$

Note que  $\rho(\vec{r})$  é também um campo, porém um campo escalar, enquanto  $\vec{E}(\vec{r})$  é um campo vetorial.

Usando a fórmula do campo de uma distribuição de cargas estáticas:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N dq_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \xrightarrow{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

onde usamos  $\vec{r}'$  ao invés de  $\vec{r}_i$  depois de tomado o limite.  
 $V =$  volume ocupado pela distribuição

- 5 -

Note, com cuidado, que se trata de 3 integrais  
uma para cada componente de  $\vec{E}$ :

$$E_x(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dV', \text{ etc.}$$

Se a distribuição de carga ocupa uma  
superfície  $S$ , é mais conveniente definir uma  
densidade superficial de cargas:

$$\sigma(\vec{r}) = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \vec{r} \in \Delta S}} \left( \frac{\Delta Q}{\Delta S} \right) \Rightarrow dq = \sigma(\vec{r}) dS$$

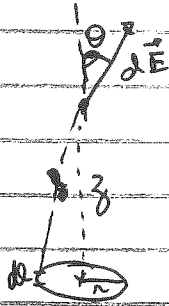
$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

Analogamente, se a distribuição é ao longo de uma  
linha:

$$\lambda(\vec{r}) = \lim_{\substack{\Delta l \rightarrow 0 \\ \vec{r} \in \Delta l}} \left( \frac{\Delta Q}{\Delta l} \right) \Rightarrow dq = \lambda(\vec{r}) dl$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl'$$

Problema 2.5. Achar o campo de um ~~barro~~ barro circular de raio  $r$ , densidade linear de carga  $\lambda$ , a uma distância  $z$  acima do centro do anel



Por simetria, <sup>componente do</sup> o campo que sobrevive à integração é apenas na direção  $\hat{z}$  (as outras são canceladas pela contribuição do elemento do diametralmente oposto)

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl \cos\theta}{(\sqrt{z^2+r^2})^2}$$

~~o~~

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}$$

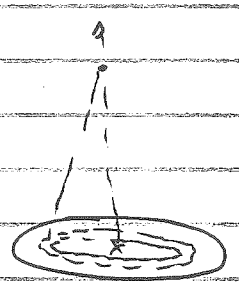
$$E_z = \int dE_z = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda dl \frac{z}{(\sqrt{z^2+r^2})^2} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{zr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

pois  $\int dl = 2\pi r$ . Note que, ao integrarmos sobre

dl,  $z$  e  $r$  permanecem constantes e saem da integral

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{zr}{(z^2+r^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Problema 2.6: Ache o campo elétrico de um disco de raio  $R$ , densidade superficial de carga  $\sigma$  a uma distância  $z$  acima do centro:



Divida o disco em anéis infinitesimais de raio  $r$  e espessura  $dr$

Podemos agora usar o resultado do problema anterior. Para isso, precisamos de  $\lambda$  para o anel:

$$\lambda = \frac{\sigma \times (\text{Área do anel})}{(\text{Perímetro do anel})} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{2\pi r} = \sigma \cdot dr$$

$$E_z = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma \cdot dr \cdot z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right] \Big|_{r=0}^{r=R}$$

(note que  $z$  é constante na integração)

$$= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \frac{-1}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{1}{z} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$$

Quando  $z \rightarrow \infty$ :  $(R^2 + z^2)^{-1/2} = z^{-1} \left( 1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-1/2} = z^{-1} \left( 1 - \frac{R^2}{2z^2} + o\left(\frac{R^4}{z^4}\right) \right)$

$$E_z \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{R^2}{2z^2} \right) \right] = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z^2} = \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi \epsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 z^2}$$

que é o esperado, pois a grandes distâncias, o disco se comporta como uma carga pontual  $Q = \pi R^2 \sigma$ .

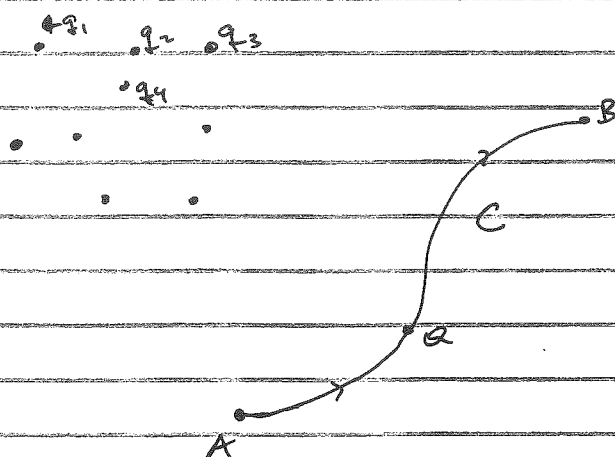
Se  $R \rightarrow \infty$ :  $(R^2 + z^2)^{-1/2} = R^{-1} \left( 1 + \frac{z^2}{R^2} \right)^{-1/2} \approx R^{-1} \left( 1 - \frac{z^2}{2R^2} \right)$

$E_z \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{R} \right] \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \Rightarrow$  campo elétrico constante de uma placa carregada com densidade superficial  $\sigma$ .



## Potencial Elétrico

A idéia de potencial elétrico advém de considerarmos o trabalho realizado contra a força elétrica ao movermos uma carga de prova de um ponto  $A$  a um ponto  $B$ , numa região em que haja uma configuração estática de cargas.



A força sobre  $Q$  é

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico criado pelas cargas  $q_1, q_2, \dots$ .  
A força feita contra o  $\vec{F}_c$ :

$$\vec{F}_c = -\vec{F} = -Q\vec{E}$$

o o trabalho:

$$W_c = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -Q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

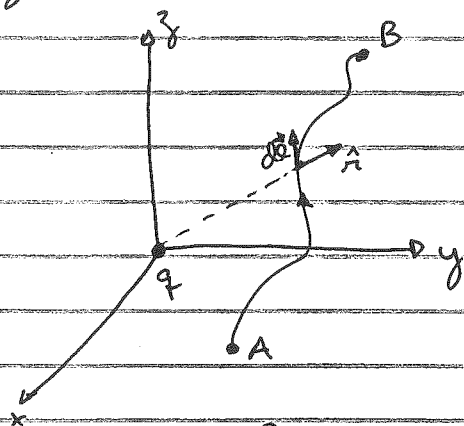
onde a integral acima é uma integral de linha de  $A$  até  $B$  ao longo da curva  $C$ .

É conveniente trabalharmos com o trabalho  $V_0$  por unidade de carga:  $\Delta V = \frac{W_c}{Q}$

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

De maneira geral, a integral de linha depende do caminho  $C$  entre  $A$  e  $B$ . Para o caso de campos elétricos estáticos, entretanto,  $\Delta V$  não depende de  $C$  mas apenas dos pontos extremos  $A$  e  $B$ .

Para provar isso, calcularemos primeiramente  $\Delta V$  para o campo criado por uma carga pontual na origem:



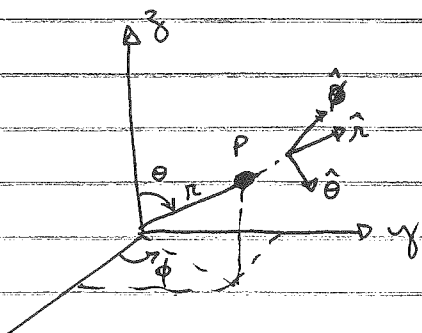
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

onde  $\hat{r}$  é o unitário na direção radial.

Devido à simetria do problema, é mais conveniente trabalhar com coordenadas esféricas:

$$(r, \theta, \varphi) \text{ onde } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Para isso, precisamos expressar  $d\vec{l}$ , o elemento de curva, em coordenadas esféricas. Isso significa que devemos usar  $(r, \theta, \varphi)$  além dos unitários  $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ :



$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\varphi \hat{\varphi}$$

onde  $dr$ ,  $r d\theta$  e  $r \sin\theta d\varphi$  são os deslocamentos ao longo das direções dos unitários.

Ao longo de  $\hat{r}$ , o deslocamento é dado por:

$$dl_r = dr$$

Ao longo de  $\hat{\theta}$ , percorre-se um arco de  $d\theta$  a um raio  $r$

$$dl_\theta = r d\theta$$

Ao longo de  $\hat{\phi}$ , o arco é de  $d\phi$  e o raio correspondente é a projeção de  $\underline{r}$  no plano que contém o ponto  $P$  e é paralelo ao plano  $xy$  (note como  $\hat{\phi}$  é sempre paralelo ao plano  $xy$ ). Essa projeção é  $r \sin\theta$

$$dl_\phi = r \sin\theta d\phi$$

$$\Rightarrow d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}$$

(Obs.: Tente calcular  $d\vec{l}$  para coordenadas cilíndricas).

Logo:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

Esse resultado expressa matematicamente o fato de que só há trabalho realizado quando  $\underline{r}$  varia. Se  $\underline{r}$  é mantido constante e  $\theta$  e  $\phi$  variam,  $d\vec{l}$  é sempre perpendicular a  $\vec{E}$  e o trabalho é zero. Assim:

$$\Delta V = - \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right);$$

não importa como se vai de  $A$  a  $B$ , o trabalho por unidade de carga só depende de  $A$  ( $r_A$ ) e  $B$  ( $r_B$ )

Como o trabalho realizado contra o campo de várias cargas se soma (pois os campos elétricos se somam: "princípio de superposição"):

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N) \cdot d\vec{\ell} =$$

$$= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots + \Delta V_N$$

segue que o trabalho só depende dos pontos final e inicial no caso geral de uma distribuição qualquer de cargas.

A consequência disso é que podemos definir uma função escalar da posição  $\vec{r}$  (ou seja, um campo escalar) se tomarmos um ponto fixo de referência:

$$V(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \iff \boxed{\begin{array}{l} \text{Potencial} \\ \text{Elétrico } V(\vec{r}) \end{array}}$$

Assim, o trabalho realizado contra a força elétrica (por unidade de carga) para irmos de A a B pode ser escrito como:

$$\Delta V = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\vec{r}_A}^0 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_0^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{\vec{r}_A} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_0^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\boxed{\Delta V = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)}$$

Se tomarmos 0 no infinito, para uma carga na origem

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \xrightarrow{r_0 \rightarrow \infty} \boxed{V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}}$$

Como o campo  $\vec{E}$  obedece ao princípio de superposição segue da definição de  $V$  que o potencial elétrico também obedece. Portanto, para uma configuração de  $N$  cargas:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

e para uma distribuição contínua de carga:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad \text{ou} \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA', \text{ etc.}$$

Se tomarmos  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$  muito próximos:

$$d\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\Delta V = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = V(\vec{r}_A + d\vec{r}) - V(\vec{r}_A) \approx (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{r}$$

onde  $\vec{\nabla} V$  é o gradiente de  $V(\vec{r})$ :

$$\vec{\nabla} V = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) \hat{z}$$

$$(\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{r} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

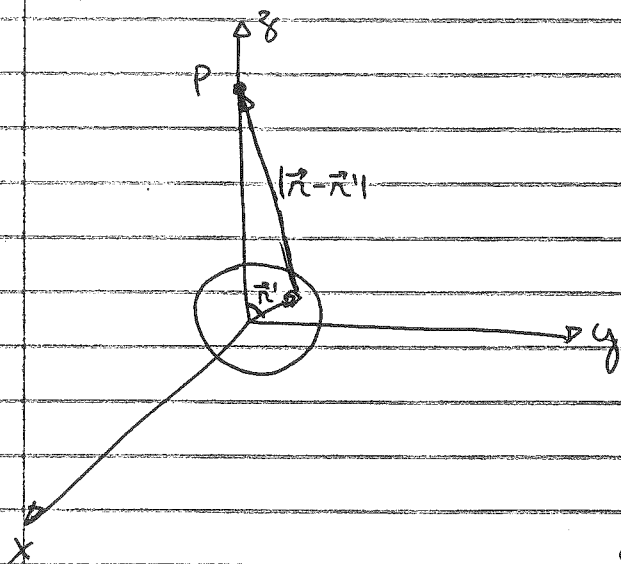
$$\text{Além disso: } - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_A + d\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{e} \approx - \vec{E}(\vec{r}_A) \cdot \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_A + d\vec{r}} d\vec{e} = - \vec{E}(\vec{r}_A) \cdot d\vec{r}$$

Segue que:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})}$$

Portanto, se acharmos  $V(\vec{r})$  (p. ex., através de  $\int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ ), podemos tomar o gradiente para obtermos  $\vec{E}$ . Isso é extremamente mais econômico porque  $V(\vec{r})$  é um escalar e exige fazermos apenas uma integral, enquanto que  $\vec{E}(\vec{r})$  tem 3 componentes e precisamos fazer 3 integrais (geralmente mais chatas ~~que~~ cada uma)

Exemplo: Potencial elétrico de uma ~~casca~~ casca esférica de raio  $R$ , dentro e fora.



Tomemos o ponto  $P$  no eixo  $z$  (por simetria,  $V(\vec{r})$  só ~~de~~ dependerá de  $z$  e poderemos generalizar depois para qualquer ponto fazendo  $z \rightarrow r$ )

A distância  $|\vec{r}-\vec{r}'|$ , de um elemento  $dA'$  na superfície da esfera é dada pela lei dos cossenos:

$$\vec{r}-\vec{r}' = z\hat{z} - \vec{r}' \quad (z \geq 0)$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = |z\hat{z} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + R^2 - 2z\hat{z} \cdot \vec{r}'} = \sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta'}$$

$$V(\vec{r}) = V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dA'}{\sqrt{z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta'}}$$

Note que na integração, apenas  $\theta$  varia. O elemento de área em coordenadas esféricas ( $\vec{r}' = R, \theta', \phi'$ ) é

$$R^2 \sin^2\theta' d\theta' d\phi'$$

$$V = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad \text{onde } \underline{Q} \text{ é a carga total da casca}$$

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{R^2+z^2-2zR\cos\theta'}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{2}\right) \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{R^2+z^2-2zR\cos\theta'}} \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left. \frac{\sqrt{R^2+z^2-2zR\cos\theta'}}{zR} \right|_0^\pi \\ &= \frac{Q}{8\pi z R \epsilon_0} \left\{ \sqrt{R^2+z^2+2zR} - \sqrt{R^2+z^2-2zR} \right\} \\ &= \frac{Q}{8\pi z R \epsilon_0} \left\{ |R+z| - |R-z| \right\} = \frac{Q}{8\pi z R \epsilon_0} \left\{ z+R - |R-z| \right\} \end{aligned}$$

Se  $z < R$  (dentro da esfera),  $|R-z| = R-z$

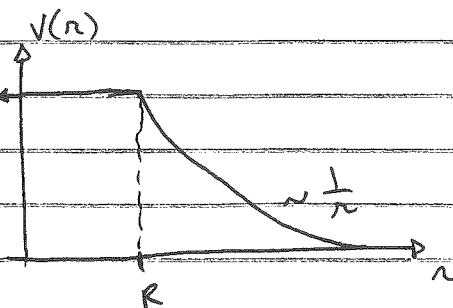
$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (z < R)$$

Se  $z > R$  (fora da esfera),  $|R-z| = z-R$

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z} \quad (z > R)$$

De maneira geral:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} \frac{1}{R} & r < R \\ \frac{1}{r} & r \geq R \end{cases} \Rightarrow$$





Para pontos fora da esfera, o potencial é o mesmo que se obteria se toda a carga da casca estivesse concentrada no centro. Como consequência, o potencial de uma esfera de carga sólida fora da esfera

também é o mesmo que se obteria se toda a carga estivesse no centro (mesmo que a distribuição não seja uniforme, desde que ela seja esfericamente simétrica, ou seja, só depende de  $r$  e não dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ ).

O campo elétrico pode ser agora obtido a partir do potencial:

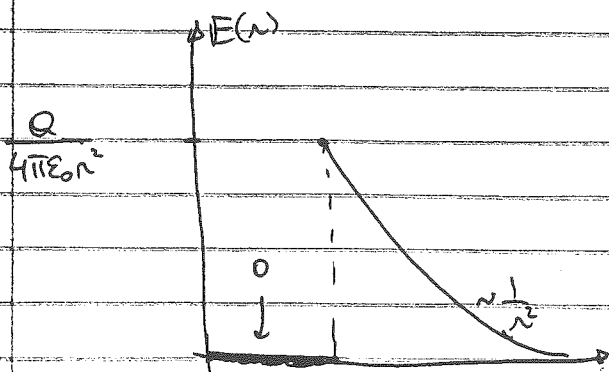
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}\right)$$

Como  $V(\vec{r}) = V(r)$  (não há dependência de  $\theta$  ou  $\phi$ )

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{se } r < R \\ \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{se } r > R \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r} \text{ onde}$$



Note que o campo  $\vec{E}$ , que é sempre radial, é zero dentro da casca e tem uma descontinuidade na superfície da casca. Isso sempre acontece com o campo ~~no~~ ao atravessar densidades superficiais de carga (mais detalhes adiante).

Nós mostramos que o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r})$  é tal que

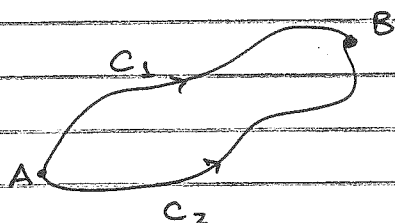
$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

independe do caminho que se toma entre os pontos A e B (só depende dos pontos extremos A e B). Nós provamos isso diretamente, mostrando que a integral dá, para o campo de uma carga pontual na origem:

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Mas há uma outra maneira de provar isso.

Vamos trabalhar novamente com o campo de uma carga pontual na origem. Vamos tomar 2 curvas quaisquer diferentes,  $C_1$  e  $C_2$ , que vão de A a B:



Chamemos os trabalhos realizados contra a força elétrica, por unidade de carga, de  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$ , respectivamente:

$$\Delta V_1 = - \int_{(C_1)}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{e} \quad \Delta V_2 = - \int_{(C_2)}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

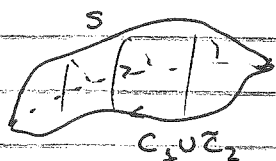
Se ~~invertermos~~ invertermos a direção em  $C_2$ , trocamos o sinal da integral. Chamando a curva  $C_2$  percorrida na direção oposta de  $\tilde{C}_2$ :

$$\Delta V_2 = + \int_{(C_2)}^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Portanto:

$$\Delta V_1 - \Delta V_2 = - \int_{(c_1)}^B \vec{E} \cdot d\vec{e} - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \oint_{(c_1 \cup \tilde{c}_2)} \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

onde a última integral é tomada ao longo da curva fechada  $c_1 \cup \tilde{c}_2$ . Pelo teorema de Stokes, podemos relacionar a integral de linha ao longo de uma curva fechada à integral ~~de~~ sobre a superfície  $S$  cuja fronteira é a curva fechada:



$$\Delta V_1 - \Delta V_2 = - \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

onde  $d\vec{S}$  é o elemento de área perpendicular à superfície (Lembrete:  $|d\vec{S}| = dS$ , área do elemento infinitesimal). A direção de  $d\vec{S}$  é dada pela regra da mão direita (no caso da superfície  $S$  acima,  $d\vec{S}$  aponta para baixo).

Nesse resultado, portanto, relaciona a diferença entre os trabalhos das duas curvas à integral do rotacional de  $\vec{E}$ . Vamos agora calcular  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \Rightarrow E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ e } E_\theta = E_\phi = 0$$

Utilizamos o rotacional em coordenadas esféricas: (pag. 42 do Griffiths)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \hat{\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \hat{\phi} = \vec{0}!$$

$$\text{Logo: } \Delta V_1 = \Delta V_2 !$$

Como o resultado vale para curvas quaisquer, segue que  $\Delta V_1 = \Delta V_2$  para quaisquer curvas entre A e B.

Pelo princípio de superposição, o resultado é válido para qualquer configuração estática de cargas. De quebra, ainda conseguimos provar um ~~se~~ resultado importante:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{para cargas elétricas estáticas})$$

$\Updownarrow$   $\rightarrow$  um implica o outro.

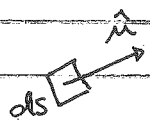
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

(Note que  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$  é trivial, porque o rotacional do gradiente é sempre zero).

Fluxo de  $\vec{E}$ : Vamos calcular agora o fluxo de  $\vec{E}$  através de uma superfície. O fluxo é definido como a integral de superfície:

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

onde  $d\vec{S}$  é um <sup>vetor de</sup> elemento infinitesimal de área, cujo módulo é a área  $dS$  e a direção é normal ao elemento.



$$d\vec{S} = dS \hat{n}$$

Vamos proceder como antes e calcular primeiro para uma carga na origem. Vamos proceder por partes. Primeiramente, tome uma superfície como na figura: (4-5 do livro do Feynman). Como  $\vec{E}$  é perpendicular às faces  $a$  e  $b$ :

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} \Big|_a = -E_a dS_a \quad \text{e} \quad \vec{E} \cdot d\vec{S} \Big|_b = E_b dS_b$$

Além disso, nas outras faces  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$  ( $\vec{E} \perp \hat{n}$ ). Agora

$$\int_{\text{Face } b} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Face } b} E_b dS_b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dS_b}{r_b^2}$$

$$\int_{\text{Face } a} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_{\text{Face } a} E_a dS_a = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dS_a}{r_a^2}$$

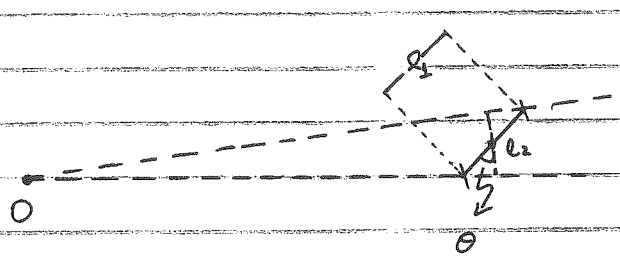
Mas  $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \equiv r^2 d\Omega$ , onde  $d\Omega$  é o ângulo sólido infinitesimal, que é o mesmo para as duas superfícies (por exemplo, em  $\phi$  coordenadas esféricas  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ ). Portanto:

$$\int \frac{dS_a}{r_a^2} - \int \frac{dS_b}{r_b^2} = \int \frac{dS_b}{r_b^2} \Rightarrow \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Fluxo} \\ \text{total} \\ \text{zero} \end{array}$$

Tome agora a Fig. 4-6 do Feynman. As faces que antes eram perpendiculares ao campo agora fazem um ângulo  $\theta$  entre  $\hat{n}$  e  $\vec{E}$ . Nesse caso, para a face mais distante:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS' \cos \theta \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{onde } dS' \text{ é o elemento de área} \\ \text{quando o lado não é } \perp \text{ ao} \\ \text{campo e } dS \text{ quando é } \perp \text{ ao campo} \end{array} \right.$$

Mas  $dS'$  agora é maior do que antes. Se tomarmos uma vista lateral:



A área é proporcional ao lado  $l$  da figura. Mas:

$$l \cos \theta = l_2$$

onde  $l_2$  é o lado de  $dS$  no caso perpendicular (ou seja, quando  $\theta = 0$ ). Segue que:

$$\frac{dS'}{\cos \theta} = dS$$

$$\Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \text{ como no caso em que a face é } \perp \text{ ao campo.}$$

Logo, como antes, as integrais das duas faces se anulam e:

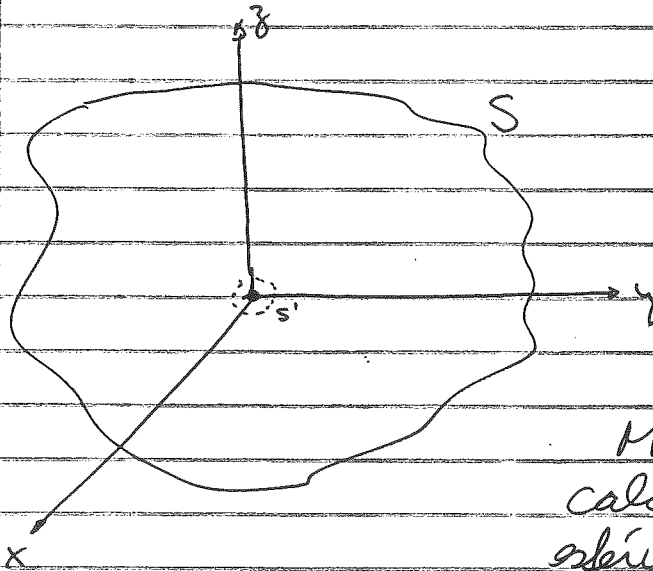
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \text{Fluxo total zero}$$

Se agora tomarmos uma superfície qualquer (Fig. 4-7 do Feynman), podemos calcular o fluxo total somando sobre pequenos prismas infinitesimais. Como o fluxo é zero para cada prisma:

$$\int_V \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{para uma carga} \\ \text{externa a } S \end{array} \right)$$

Pelo princípio de superposição, o fluxo será sempre zero quando todas as cargas estiverem fora da superfície. E se uma carga estiver dentro da superfície?

Tomemos uma carga na origem e uma superfície  $S$  que contenha a carga. Nosso raciocínio anterior sugere que o fluxo não será zero, pois não haverá cancelamento entre faces opostas, já que  $\vec{E}$ , em geral, ~~na~~ terá componentes positivos em  $\hat{n}$  (ver fig. 4-8 do Feynman). Vamos usar um truque. Tome a superfície como sendo a união de  $S$  acima com  $S'$ , uma pequena esfera em torno da origem:



Como a carga está fora de  $S \cup S'$ :

$$\Phi_S + \Phi_{S'} = 0$$

$$\Rightarrow \Phi_S = -\Phi_{S'}$$

Mas o fluxo  $\Phi_{S'}$  é fácil de calcular, pois a superfície é esférica. Lembrando que em  $S'$

$\hat{n} = -\hat{r}$  (lembre-se de que  $\hat{n}$  deve ser exterior ao volume envolto por  $S \cup S'$ )

$$\begin{aligned} \Phi_{S'} &= \int_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\hat{r} \cdot (-\hat{r})}{r^2} dS = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{r^2 d\Omega}{r^2} \\ &= -\frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{que independe do raio de } S'!! \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi_S = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad \text{qualquer que seja } S, \text{ desde que } q \text{ esteja dentro de } S$$



Pelo princípio de superposição, se todas as cargas estiverem dentro de S

$$\Phi_S = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ou seja, o fluxo de } S \\ \text{"conta" a carga total dentro} \\ \text{de } S. \end{array} \right.$$

Essa é a <sup>Lei</sup> ~~teorema~~ de Gauss. Note que ele depende fortemente do fato de que o campo de uma carga cai com o quadrado da distância, pois a integral do fluxo, como vimos, é independente do raio porque há um cancelamento do r<sup>2</sup> na integral.

A lei de Gauss pode ser escrita em forma ~~de~~ diferencial usando-se o teorema de Gauss:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV \quad \text{onde } V \text{ é o volume envolto por } S.$$

Se tivermos uma distribuição contínua de cargas, podemos escrever a carga total em V como:

$$\text{Carga total em } V = \int_V \rho dV$$

$$\Rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

Como o volume V é qualquer  $\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \text{Lei de Gauss}}$

Aplicações da lei de Gauss: (Fazer ~~o~~ Estudou)

\* Exemplo 2.2 do Griffiths: Campo elétrico de uma esfera uniformemente carregada de raio R

\* Exemplo 2.3 do Griffiths:  $\vec{E}$  para um cilindro infinito com densidade  $\rho = ks$ ,  $s$  = distância ao eixo

\* Exemplo 2.4: Plano infinito uniformemente carregado

\* Exemplo 2.5: Dois planos carregados infinitos de cargas opostas  $\pm\sigma$ .

Problema 2.15 <sup>modificado</sup>: Casca esférica de raio interno  $a$  e raio externo  $b$ , com densidade uniforme de carga  $\rho$ :

Solução: O campo elétrico é radial ( $\parallel$  a  $\hat{r}$ ) por simetria. Tomando superfícies gaussianas esféricas concêntricas à casca:

(a)  $r < a$ :  $\int \vec{E} \cdot d\vec{Q} = E(4\pi r^2) = 0$  (ausência de carga)  
 $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}} \quad (r < a)$

(b)  $a < r < b$ :  $\int \vec{E} \cdot d\vec{Q} = E(4\pi r^2)$

$Q = \rho \int dV = \rho \frac{4\pi}{3}(r^3 - a^3)$

$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3}(r^3 - a^3) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \hat{r}} \quad (a < r < b)$

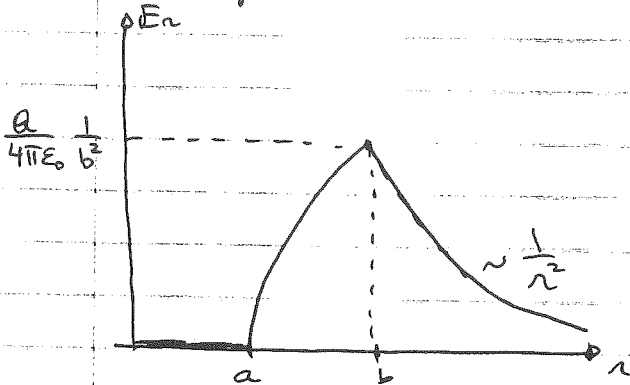
A carga total da casca é  $Q = \rho \frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3)$

$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (b^3 - a^3)} \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \hat{r}} \quad (a < r < b)$

$$(c) r > b : \int \vec{E} \cdot d\vec{Q} = E(4\pi r^2)$$

$$Q = \int \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{(b^3 - a^3)}{r^2} \hat{r} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}} \quad (r > b)$$

Note que:



O campo cresce, entre  $a$  e  $b$ , de zero até seu valor (máximo) na superfície.

Se fizermos  $b \rightarrow a$  (limite da casca esférica infinitamente fina) recuperamos o resultado anterior, com uma descontinuidade do campo elétrico, quando se passa por uma região onde há uma distribuição superficial de cargas. Entretanto, o campo é sempre contínuo quando há apenas densidades volumétricas de carga.

Pelos exemplos acima, vê-se que em situações onde há grande simetria (esférica, cilíndrica) pode-se usar a lei de Gauss para calcular o campo elétrico de maneira muito eficiente. Assim, nesses casos, vale a pena achar o campo elétrico primeiro e, se necessário, o potencial elétrico depois:

▷ NOTA IMPORTANTE

Nós agora temos as duas equações necessárias para resolvermos quaisquer problemas de eletrostática:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{lei de Gauss}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (\vec{E} \text{ é conservativo} \rightarrow \text{o trabalho da} \\ \text{força elétrica independe do caminho}) \end{array} \right.$$

A lei (1) acima depende fortemente do fato de que a força coulombiana decai com o inverso do quadrado da distância. A lei (2) só depende do fato da força ser radial (direção do unitário  $\hat{r}$ ).

De (2):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Levando em (1):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

"Equação de Poisson"

onde  $\nabla^2 V = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)$  é o "Laplaciano" de  $V(\vec{r})$ .

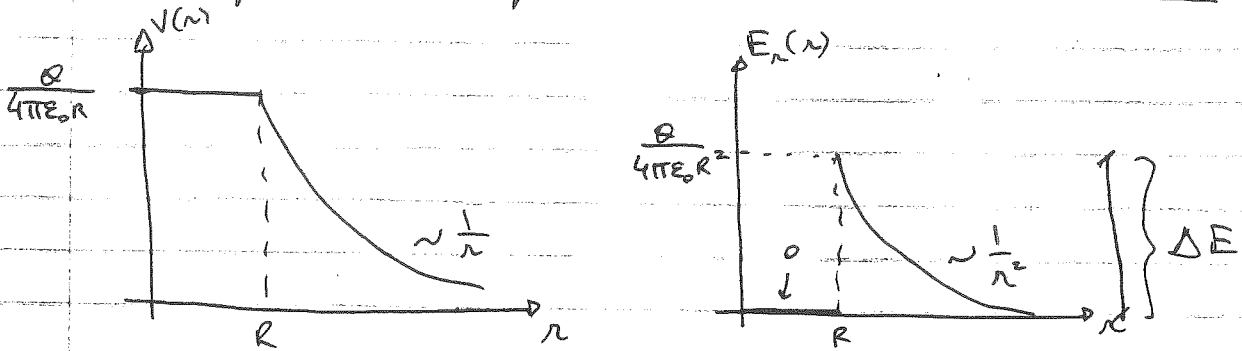
Se  $\rho(\vec{r})$  é zero numa região do espaço:

$$\nabla^2 V = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{"Equação de Laplace"}$$

Voltamos a discutir essas equações mais adiante. Elas nos dão a descrição da eletrostática em termos do potencial elétrico  $V(\vec{r})$ . Obviamente, é importante saber que  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$  que decorre de  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$

Condições de contorno

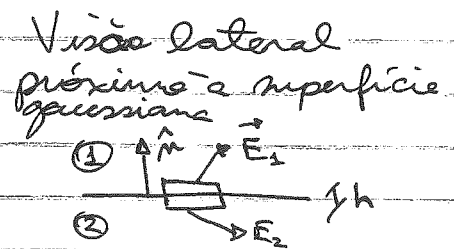
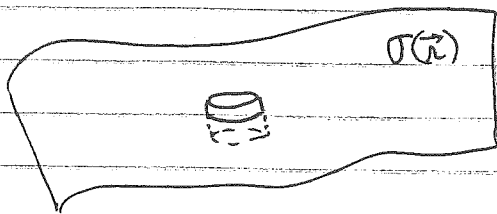
Nós vimos que o campo elétrico de uma casca esférica carregada uniformemente é descontínuo na superfície e o potencial elétrico é contínuo



O "pulso" do campo elétrico na superfície é:

$$\Delta E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{(Q/4\pi R^2)}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Na verdade, esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira. Considere uma carga superficial qualquer:



Vamos reparar o espaço em regiões ① e ② em relação à superfície. O campo elétrico logo "acima" é  $\vec{E}_1$  e o logo "abaixo" é  $\vec{E}_2$  (obviamente, "acima" e "abaixo" dependem de como você "olha", por isso, prefiro usar 1 e 2). Note que, de maneira geral,  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$  NÃO SÃO NORMAIS À SUPERFÍCIE. No exemplo da casca des eram normais mas não de modo geral.

Aplicando a lei de Gauss a sup. gaussiana acima; teremos contribuições das bases da superfície e das paredes laterais. No limite em que a caixa é feita infinitamente fina, a contribuição das paredes laterais vai a zero; porque a área vai a zero.

$$\int_{\text{Paredes laterais}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{\text{(ver figura)}} 0$$

Se definirmos a normal à superfície como apontando do lado 2 para o lado 1 (ver figura)

$$\int_{\text{BASES}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{1n}A - E_{2n}A = (E_{1n} - E_{2n})A$$

onde  $E_{1n} = \vec{E}_1 \cdot \hat{n}$  e  $E_{2n} = \vec{E}_2 \cdot \hat{n}$  são as componentes de  $\vec{E}$  ao longo da normal imediatamente acima da superfície e imediatamente abaixo (como fazemos uma caixa muito pequena  $\vec{E}_1$  e  $\vec{E}_2$  não variam muito na região das bases e podem ser tomadas como constantes). Como a carga dentro da caixa é:

$$Q = \sigma \cdot A$$

Lei de Gauss  $\Rightarrow$

$$\boxed{E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

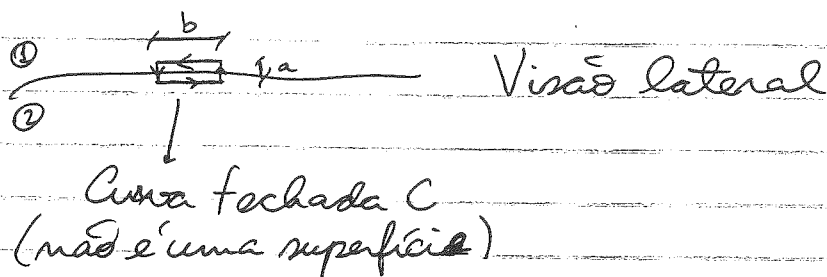
que é a generalização procurada. Assim, sempre que houver uma carga superficial, a componente normal à superfície sofre uma descontinuidade que é dada por  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

$\vec{E}$  é o que acontece com a componente paralela à superfície?

Para isso, usamos a outra lei da eletrostática

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \text{ (Teorema de Stokes)}$$

Tomamos então uma curva fechada  $C$  infinitesimal



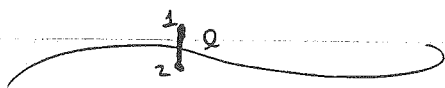
No limite em que  $a \rightarrow 0$  a contribuição ao longo do lado menor vai a zero. As contribuições ao longo do lado  $b$  dão:

$$(E_{1||} - E_{2||})b = 0 \Rightarrow \boxed{E_{1||} = E_{2||}}$$

Portanto, a componente de  $\vec{E}$  paralela à superfície é contínua, mesmo que haja uma carga superficial.

Finalmente, o potencial acima e abaixo da superfície pode ser achado usando:

$$V_1 - V_2 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \boxed{V_1 = V_2}$$



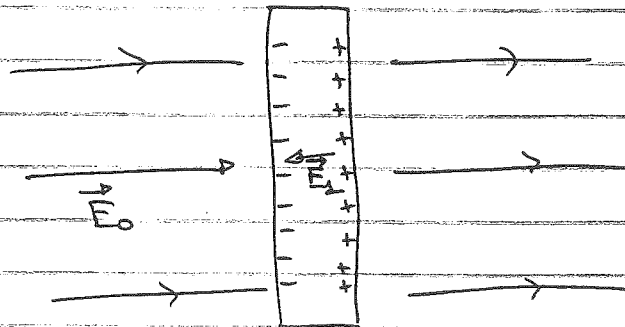
O potencial é sempre contínuo, embora sua derivada (que dá o campo elétrico) não seja (na direção normal à superfície)



Condutores: Condutores são materiais que contêm cargas que podem se mover livremente através do corpo do material. O exemplo mais comum é o de um metal. Vamos listar as principais propriedades eletrostáticas dos condutores:

(i)  $\vec{E} = \vec{0}$  no interior de um condutor:

Basicamente o que acontece é que, se você coloca um condutor numa região onde há um campo elétrico (criado por outras cargas fixas), as cargas livres irão se mover até cancelar o campo externo dentro do condutor. Se o campo não for zero exatamente as cargas irão se mover até o cancelamento completo: Por exemplo:



No caso acima, as cargas negativas movem-se para a esquerda e as positivas para a direita. Essas cargas são chamadas de cargas induzidas. Elas produzem o campo  $\vec{E}_1$  acima, que cancela exatamente  $\vec{E}_0$  DENTRO do condutor, e as cargas não mais se movem. O campo fora, no entanto, não é zero. Isso se dá num intervalo muito pequeno de tempo (mais adiante estudaremos quanto tempo).

(ii)  $\rho = 0$  no interior do condutor:

$$\text{Como } \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$$

(iii) Toda a carga líquida vai para a superfície.

Se a carga total é não muda e ela não pode ficar no interior ela só pode ir para a superfície. Isso porque ela não consegue escapar do condutor (se os campos ou cargas não foram muito altos). Na prática, a carga se acumula nas primeiras camadas atômicas na superfície de um metal.

(iv) Todos os pontos de um condutor têm o mesmo potencial

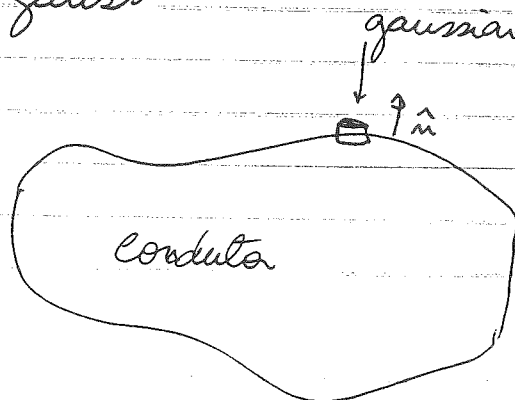
Como  $V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{x}$  e como  $\vec{E} = 0$  no interior

$\Rightarrow V(\vec{r}_A) = V(\vec{r}_B)$  para quaisquer dois pontos num condutor.

(v)  $\vec{E}$  é normal à superfície do condutor (imediatamente fora dele)

Se houver uma componente tangencial, as cargas se moverão paralelamente à superfície, de modo a finalmente cancelar a componente tangencial como no item (i). A componente normal pode existir, porque os elétrons não podem deixar o condutor (devido a outras forças internas exercidas pela matriz cristalina positiva de íons).

Podemos calcular o campo elétrico na região imediatamente exterior a um condutor usando a lei de Gauss.



Para a velha "caixinha" gaussiana infinitesimal ao lado

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = EA$$

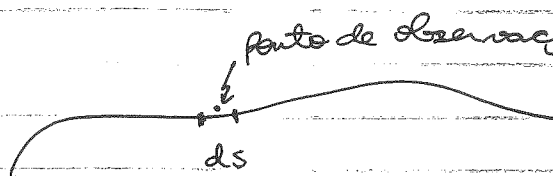
porque o campo é zero dentro.

$$Q = \sigma A \Rightarrow$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

"Relação entre o campo elétrico exterior a um condutor com a densidade superficial de carga"

Note algo interessante. Se tomarmos um pequeno elemento de superfície do condutor ele agirá como um "plano infinito" para um ponto muito próximo da superfície e próximo a centro do elemento



Lembre-se de que o que importa é a razão entre a distância do ponto à superfície e a dimensão linear do elemento que pode ser feita arbitrariamente pequena para qualquer elemento  $ds$  dado (ver problema 2.6 resolvido em sala)

Como  $ds$  age como um "plano infinito", ele gera um campo

$$E_{ds} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

dos dois lados de  $ds$ , em direções opostas. Como o campo total é

$$E = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} & \text{(imediatamente fora)} \\ 0 & \text{(imediatamente dentro)} \end{cases}$$

segue que o ~~resto~~ resto da carga superficial do condutor gera um campo igual a  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  (para fora) na região

de  $ds$ , cancelando o campo de  $ds$  no lado de dentro e somando a  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  de  $ds$  do lado de fora de modo a dar  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

Como o campo "do resto" é  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  (para fora),

a força no elemento  $ds$  é:

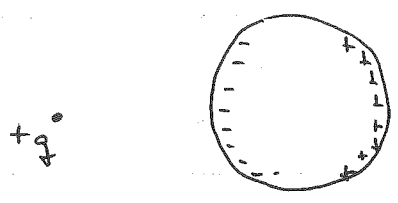
$$\vec{F} = \underbrace{(\sigma ds)}_{\substack{\text{carga do} \\ \text{elemento } ds}} \left( \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \hat{n} \quad \text{onde } \hat{n} \text{ aponta para fora} \\ \text{do condutor.}$$

A força por unidade de área, ou pressão eletrostática, é

$$\frac{F}{ds} = P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

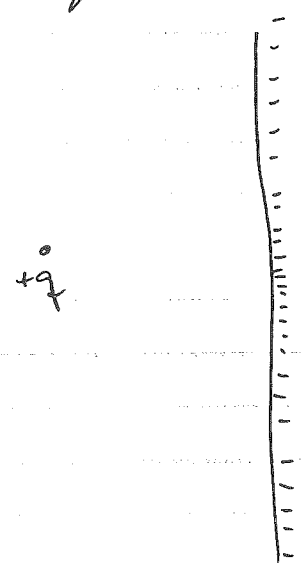
### Cargas induzidas em condutores:

Em uma situação eletrostática, sabemos que  $\vec{E}$ ,  $V$  e  $\rho$  têm que satisfazer todas as condições já vistas nos condutores presentes. Isso quer dizer que as cargas livres têm que se rearranjar de modo a cancelar  $\vec{E}$  no interior dos condutores. Por exemplo, se trouxermos uma carga pontual nas proximidades de uma esfera condutora:



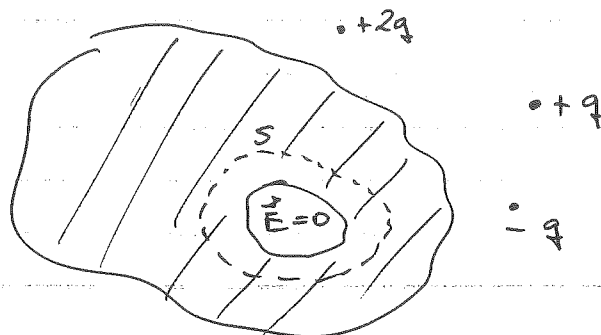
Serão induzidas cargas negativas no lado em que está a carga (suposta, aqui, positiva) e, conseqüentemente, cargas positivas do outro lado.

Como as cargas negativas estão mais próximas que as positivas, haverá uma força líquida de atração entre a esfera e a carga pontual. O mesmo acontece com a carga nas proximidades de um plano infinito.



→ as cargas negativas são "traçadas" do infinito (ou seja, em algum lugar onde começa o plano, cargas positivas se acumulam)

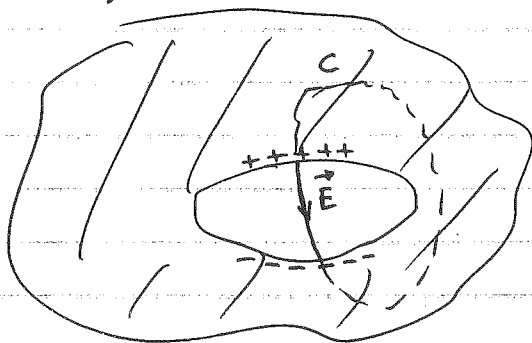
Se um condutor tem um "buraco" de forma arbitrária no seu interior:



O campo  $\vec{E}$  no "buraco" é nulo NÃO IMPORTA QUAL A CONFIGURAÇÃO DE CARGAS FORA (OU NO) CONDUTOR. Isso pode ser visto se usarmos a superfície gaussiana  $S$  acima que contém o buraco mas está inteiramente contida na região onde há material condutor.

Como  $\vec{E}=0 \Rightarrow \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow$  carga total em  $S$  é zero.

Note que a carga não pode se distribuir na superfície interna do condutor (na parede do buraco) de modo a concentrar um pouco de carga positiva de um lado e ~~a mesma~~ a mesma quantidade negativa de outro. Como na figura:



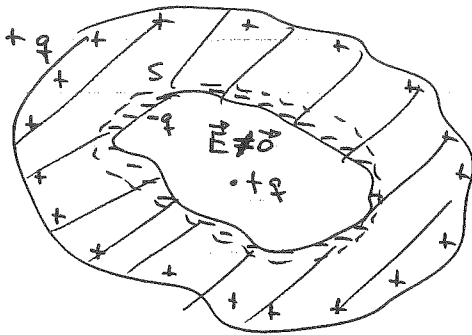
Isso não é proibido pela lei de Gauss mas é proibido pela outra equação da eletrostática

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Pois, se houvesse a configuração de cargas acima, haveria campo  $\vec{E}$  começando nas cargas positivas e terminando nas negativas. Se tomássemos a curva  $C$  da figura a circulação de  $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$  não seria zero, pois a contribuição de dentro do buraco não seria cancelada dentro do condutor (pois  $\vec{E}=0$  no condutor).

Esse é o princípio da blindagem elétrica, pois quaisquer cargas exteriores não afetam a região interior a uma casca condutora e o campo  $\vec{E} = \vec{0}$  lá dentro.

Se colocarmos uma carga  $+q$  no buraco:



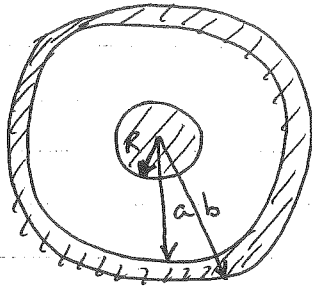
O teorema de Gauss aplicado a  $S$  nos garante que exatamente  $-q$  é induzida na parede do buraco.

Se o condutor era inicialmente neutro,  $+q$  é induzido na superfície externa do condutor.

Exemplo 2-9 (ver livro)

Problema 2-35:

A esfera central tem carga  $q$  e a casca é descarregada.



(a) Em  $r=R$ :

$$V_R = \frac{q}{4\pi R^2}$$

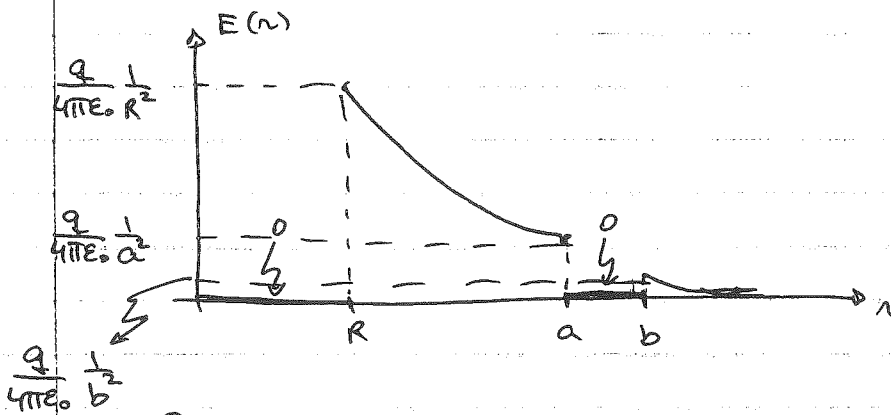
Em  $r=a$ :

$$V_a = \frac{-q}{4\pi a^2}$$

Em  $r=b$ :

$$V_b = \frac{+q}{4\pi b^2}$$

(b) O campo elétrico (radial) é:  $\vec{E} = E(r) \hat{r}$



Para acharmos o potencial em  $r=0$  (que é o mesmo em  $r=R$ ) basta integrarmos:

$$V(0) = V(R) = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{e} = - \int_{\infty}^R E(r) dr = - \int_{\infty}^b \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} - \int_a^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

$$V(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)$$



(c) Se aterrarmos em  $r=b$  (fazemos  $V(b)=0$ ), cargas serão trazidas do infinito de modo a fazer o potencial nulo. Como  $V(b)=V(\infty)=0$ , isso quer dizer que não se realiza trabalho ao levar uma carga de prova de  $b$  até o infinito. Isso só é possível se  $\vec{E}=0$  fora das esferas ( $r>b$ ).

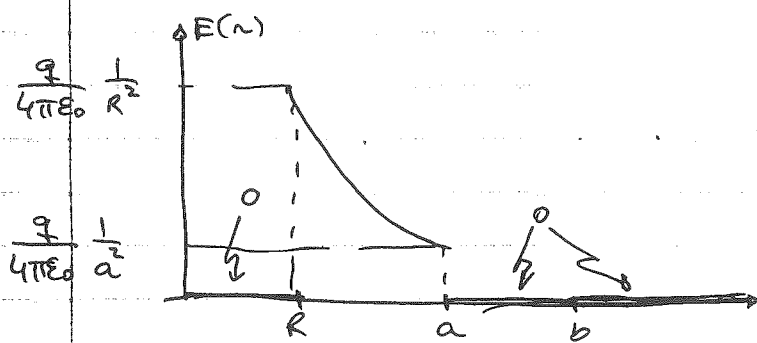
Outra coisa, ao aterrarmos o potencial em  $r=b$ , cancelamos a carga  $+q$  na superfície  $r=b$ . Em outras palavras, carga  $-q$  é trazida do infinito para cancelar  $+q$ . Portanto teremos:

$$\text{Em } r=R : \quad \sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

$$\text{Em } r=a : \quad \sigma = \frac{-q}{4\pi a^2} \quad (\text{para cancelar } \vec{E} \text{ entre } \underline{a} \text{ e } \underline{b})$$

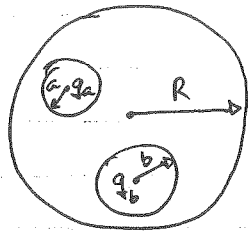
$$\text{Em } r=b : \quad \sigma = 0$$

Portanto:



$$V(0) = - \int_{\infty}^R E(r) dr = - \int_a^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)$$

Problema 2.36 :



$$(a) \sigma_a = -\frac{q_a}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_b = -\frac{q_b}{4\pi b^2}$$

$$\sigma_R = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$$

} todas uniformes  
(de modo a cancelar  
o campo no condutor)

(b) Fora do condutor, o campo é só devido à carga  $+(q_a + q_b)$  na superfície em  $r = R$

$$\vec{E} = \frac{(q_a + q_b)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

onde tomamos a origem no centro da esfera maior

(c) Em cada cavidade o campo é aquele criado pela carga no seu centro, pois os outros todos cancelam:

$$\text{Em } a: |\vec{E}| = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_a^2} \quad (r_a = \text{distância até } a)$$

e ele é radial a partir de  $q_a$

$$\text{Em } b: |\vec{E}| = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_b^2} \quad (r_b = \text{distância até } b \text{ carga } q_b)$$

e radial a partir de  $q_b$

(d) A força é zero, pois o campo das outras cargas é zero

(e) Se  $q_c$  é colocada perto do condutor, apenas mudaria a carga superficial em  $r = R$  e o campo  $\vec{E}$  fora do condutor. Todas as propriedades ~~fora~~ dentro do condutor não seriam afetadas (blindagem). A superfície de  $r = R$  teria uma carga total  $(q_a + q_b)$  como antes, mas a distribuição não seria uniforme pois haveria indução de cargas na superfície devido à presença de  $q_c$ . A ~~densidade~~ densidade de carga seria aquela induzida por  $q_c$

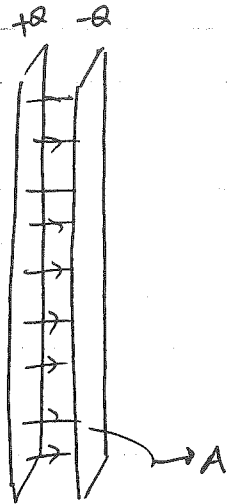
na esfera NA AUSÊNCIA DE  $q_a$  E  $q_b$  mais a densidade uniforme  $\sigma_k = \frac{q_a + q_b}{4\pi R^2}$ . Esse resultado é obtido por

superposição das soluções (com  $q_c$  e sem  $q_a$  e  $q_b$  e sem  $q_c$  e com  $q_a$  e  $q_b$ ) anteriores. Como a solução é única esta é a solução. Para achar a distribuição não-uniforme (problema com  $q_c$  mas sem  $q_a$  e  $q_b$ ) ver mais adiante no método de imagens.

11.6

## Capacitores

Suponhamos que temos duas placas condutoras grandes de área  $A$ , dispostas paralelamente e separadas por uma distância  $d$  ( $d \ll \sqrt{A}$ ). Se carregarmos uma das placas com uma carga  $+Q$  e a outra com  $-Q$  teremos:



O campo elétrico entre elas é (esquecendo efeitos de borda)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

A diferença de potencial elétrico entre elas é:

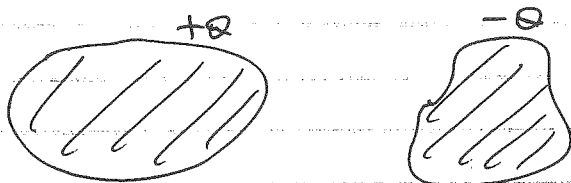
$$V_+ - V_- = \Delta V = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = Ed = \frac{Qd}{A\epsilon_0}$$

Vemos, portanto, que  $\Delta V \propto Q$ . A constante de proporcionalidade é o inverso da capacitância do arranjo:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{A\epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \text{ "Placas paralelas"}$$

A capacitância só depende da forma das placas e da distância entre elas.

Isso tudo se generaliza para um par qualquer de condutores:



Como o potencial é constante em cada condutor, podemos falar da diferença de potencial entre eles:  $\Delta V = V_+ - V_-$ .

$$\Delta V = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

O campo elétrico na região entre eles é proporcional à carga  $Q$ . Isso porque, se dobrarmos  $Q$  o campo  $\vec{E}$  dobra (Imagine superpor duas configurações idênticas de condutores de carga  $+Q$  e  $-Q$  e use o princípio de superposição). A capacitância é então definida como:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

e só depende da forma e tamanho dos condutores e da disposição espacial dos mesmos.

Às vezes falamos da capacitância de um condutor apenas. Nesse caso, temos em mente a diferença de potencial entre ele e o infinito. É como se o condutor com a carga negativa ( $-Q$ ) ficasse no infinito.

No sistema SI, capacitância tem unidades de  $\frac{C}{V}$ , que é chamada de Farad.

Exemplo 2.11: Capacitância de duas esferas concêntricas de raio  $a$  e  $b$

## Energia eletrostática

Vimos que o potencial elétrico é definido como o trabalho por unidade de carga que se faz contra a força elétrica de uma dada distribuição estática de cargas. Como o campo elétrico é conservativo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

podemos definir uma função  $V(\vec{r})$  (campo escalar)

$$V(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

onde  $0$  é um ponto de referência arbitrário (geralmente o infinito).

Como esse trabalho é feito contra forças conservativas, podemos "recuperá-lo" completamente. Ou seja, se temos que aplicar uma força externa e realizar trabalho positivo para trazer duas cargas positivas, uma perto da outra, esse trabalho será reconvertido em energia cinética quando liberarmos as cargas.

Em outras palavras, suponhamos que haja uma carga  $Q$  na origem de coordenadas. O potencial que ela cria é:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{tomando } 0 \rightarrow \infty)$$

O trabalho realizado para trazer uma carga de prova  $q$  do infinito até um ponto  $\vec{r}$  é:

$$W = q V(\vec{r}_0) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

Ao liberarmos  $q$  do repouso (mantendo  $Q$  fixa) sua energia mecânica total  $E$  será conservada:

$$E = T + W = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{const}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 energia              energia  
 cinética              potencial  
                                  elétrica

onde  $m$  é a massa da carga  $q$ . No instante inicial  $v=0$ , logo:

$$E = 0 + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

No infinito, depois de liberarmos a carga:

$$\left( \frac{1}{2} m v^2 + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Big|_{\text{infinito}} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_{\infty}^2 = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r_0} \rightarrow \text{(toda a energia elétrica inicial é convertida em energia cinética)}$$

Tudo isso só é válido porque  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow$  existe  $V(\vec{r}) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Ou seja, porque o campo / a força elétrica é conservativa.

Podemos generalizar esse ~~o~~ resultado para  $N$  cargas. A energia potencial elétrica é o trabalho total realizado contra as forças elétricas para estabelecer uma determinada configuração de cargas.

Para duas cargas, como vimos:

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

onde  $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$  é a distância (escalar) entre as duas cargas (antes, uma delas estava na origem; agora generalizamos para posições quaisquer).

Se quisermos agora trazer uma terceira carga do infinito teremos de realizar trabalhos adicionais:

$$W_3 = W_2 + \Delta W = W_2 + q_3 V(\vec{r}_3)$$

onde  $q_3$  é a nova carga, trazida para a posição  $\vec{r}_3$ . O ~~potencial~~ potencial em  $\vec{r}_3$  é aquele criado pelas cargas  $q_1$  e  $q_2$  já existentes. Portanto:

$$W_3 = W_2 + q_3 \left[ \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right]$$

onde  $r_{13} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|$  e  $r_{23} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|$ . Logo:

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right]$$



Podemos agora generalizar para  $N$  cargas:

$$W_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N \left[ \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right]$$

Note que a soma acima é sobre todos os pares possíveis de cargas. Para  $N$  cargas, há  $\frac{N(N-1)}{2}$  termos na soma.

Outra maneira conveniente para a expressão acima é:

$$W_N = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^N \left[ \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right]$$

O fator de  $\left(\frac{1}{2}\right)$  é necessário porque, ao relaxarmos a condição  $(j > i)$ , acabamos por contar 2 vezes cada par de cargas possível. Entretanto, contamos a ordem  $(i=j)$  pois uma carga não "sente" o potencial/campo que ela própria cria.

Agora:

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i)$$

onde usamos a expressão para o potencial em  $\vec{r}_i$ .

Essa expressão pode ser generalizada para uma distribuição contínua de cargas:

$$W = \frac{1}{2} \int V(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV$$

e o análogo para  $\sigma(\vec{r})$  e  $\lambda(\vec{r})$ .

Essa última expressão pode ser ainda manipulada, usando-se a lei de Gauss

$$\rho(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \int V(\vec{r}) (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV$$

Note que a integração pode ser feita em todo o espaço, pois, onde  $\rho(\vec{r}) = 0$  não há contribuição para  $W$ .

Usando agora a identidade:

$$\vec{\nabla} \cdot [V(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})] = \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V + V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int \vec{\nabla} \cdot (V \vec{E}) dV - \int \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V dV \right]$$

Usando o teorema de Gauss:

$$\int \vec{\nabla} \cdot (V \vec{E}) dV = \int_S V(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

Onde  $S$  é uma superfície no infinito. (por exemplo, uma esfera de raio  $R$  tal que  $R \rightarrow \infty$ ) Para uma distribuição localizada de carga (ou seja, não vale para o plano infinito, cilindro infinito, linha infinita)

$$\boxed{\text{quando } r \rightarrow \infty} \left\{ \begin{array}{l} V(r) \sim \frac{1}{r} \\ E(r) \sim \frac{1}{r^2} \end{array} \right.$$

Veja os exemplos da carga pontual, casca esférica, esfera sólida, etc.

$$\text{Logo: } V(r)E(r) \sim \frac{1}{r^3} \text{ (qdo } r \rightarrow \infty)$$

Como a superfície no infinito tem área  $\propto r^2$ , a integral de superfície  $q$  decai com  $\frac{1}{r}$ :

$$\int_S V(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \sim \frac{1}{R} \times R^2 \sim \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Finalmente:

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{\nabla} V dV = \boxed{\frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV}$$

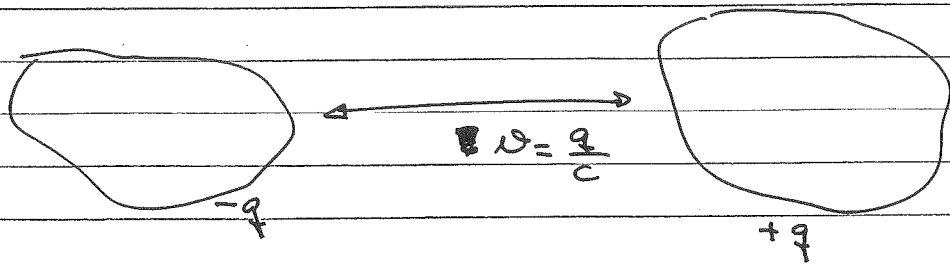
onde usamos que  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$  e  $E^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ . Veja como podemos expressar a energia como estando toda "contida" no campo elétrico. A densidade de energia é o integrando:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \text{ (densidade de energia eletrostática).}$$

→ La comentários sobre a energia eletrostática na seção 2.4.4

## Energia armazenada num capacitor

Vamos calcular a energia total armazenada num capacitor de capacitância  $C$  e carga total  $Q$ . Suponhamos que, no processo de carregamento do capacitor, em um determinado estágio, o capacitor tenha carga  $q$  ( $q < Q$ ) e potencial  $v = \frac{q}{C}$ .



Quando agora uma pequena carga  $dq$  do condutor negativo ao positivo, realizamos um trabalho

$$dW = v dq = \frac{q}{C} dq$$

Somando desde a carga inicial ( $q=0$ ) até a carga final ( $q=Q$ ) temos o trabalho total:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

"energia armazenada em um capacitor carregado"

Exemplo 2.8:

Tomemos como exemplo uma casca esférica de raio  $R$  e carga total  $q$ . Qual a energia desta configuração.

Vamos calcular de 3 maneiras diferentes:

$$(a) W = \frac{1}{2} \int \sigma(\vec{r}) V(\vec{r}) dS$$

Vimos que  $\sigma(r) = \sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$ . Além disso:

$$V(|\vec{r}| = R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \text{ Logo:}$$

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{q}{4\pi R^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} dS = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^3} \times 4\pi R^2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$(b) W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

$\vec{E}$  é nulo dentro da casca e tal que  $|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  fora dela.

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4} dV = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \int_R^\infty \frac{1}{r^4} \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dV} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right) \Big|_{r=R}^{r=\infty} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

(c) Finalmente, podemos imaginar a casca esférica como a carga na superfície de um condutor de raio  $R$ . Como já visto (Exemplo 2.11, com  $b \rightarrow \infty$ ), a capacitância da esfera é  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ . Usando  $W = \frac{q^2}{2C}$  temos

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$