

Equações de Laplace

Vimos que o potencial $V(\vec{r})$ satisfaz de maneira geral, a equação de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

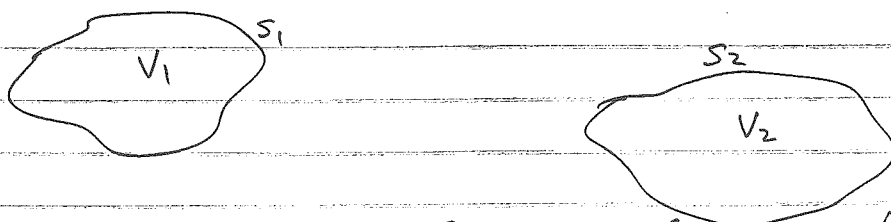
Nas regiões onde não há cargas, $V(\vec{r})$ satisfaz a equação de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

Como em vários problemas (como no caso de condutores) a densidade de carga é nula em grandes regiões do espaço, é útil considerarmos soluções da equação de Laplace

$$\nabla^2 V = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = 0$$

Note que a E.L. (Equação de Laplace) é uma equação diferencial parcial, ou seja, ela envolve derivadas parciais. Além disso, usualmente, teremos que resolver a para dados valores de $V(\vec{r})$ em superfícies especificadas no espaço. Isso ocorre, tipicamente, em situações em que há condutores mantidos (através de baterias, por exemplo) a potenciais constantes dados.



Nesse caso, queremos achar a solução da E.L. que se reduz a V_1, V_2, \dots nas superfícies S_1, S_2, \dots dos condutores dados, respectivamente. Esse tipo de problema é chamado de PROBLEMA DE VALORES DE CONTORNO.

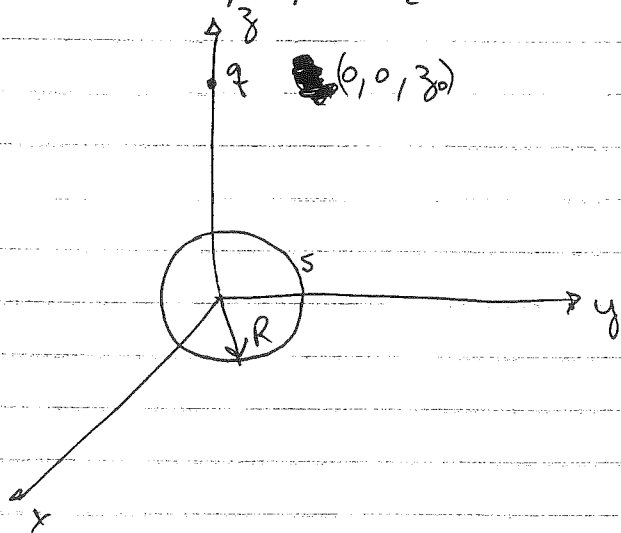
Um teorema muito importante que vamos provar diz respeito à unicidade das soluções de Laplace. Para isso, vamos primeiro mostrar um lema:

LEMA: Dada uma esfera qualquer de raio R , sem nenhuma carga dentro segue que o valor de $V(\vec{r})$ no seu centro é igual à média de $V(\vec{r})$ na superfície da esfera:

$$V(\vec{0}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S V \, ds$$

S = ESFERA DE
RAIO R CENTRADA
EM $\vec{0}$

Vamos provar esse teorema primeiro para uma carga pontual exterior à esfera e a prova geral segue do princípio de superposição:



O potencial ϕ de q é:

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - z_0\hat{z}|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z_0^2 - 2z_0r \cos\theta}} \right]$$

Integrando $V(\vec{r})$ sobre a esfera:

$$\int_S V(\vec{r}) \, ds = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi}{\sqrt{R^2 + z_0^2 - 2z_0R \cos\theta}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} R^2 (2\pi) \int_0^\pi \frac{\sin\theta \, d\theta}{\sqrt{R^2 + z_0^2 - 2z_0R \cos\theta}}$$

$$= \frac{qR^2}{2\epsilon_0} \frac{\sqrt{R^2 + z_0^2 - 2z_0R \cos\theta}}{z_0R} \Big|_0^\pi = \frac{qR}{2z_0\epsilon_0} [(R+z_0) - |R-z_0|] =$$

$$= \frac{qR}{2z_0\epsilon_0} [R + z_0 - (z_0 - R)] = \frac{qR^2}{z_0\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi R^2} \int_S V(\vec{r}) dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z_0} = V(0,0,0)$$

como queríamos demonstrar.

Um corolário desse lema é que as soluções da E.L. não pode ter mínimos ou máximos locais e os valores extremos de $V(\vec{r})$ têm que ocorrer nas superfícies. Isso é verdade, porque se \vec{r}_0 fosse um ponto de máximo (mínimo), então poderíamos integrar sobre uma esfera de raio bem pequeno em torno de \vec{r}_0 e obteríamos um valor menor (maior) que $V(\vec{r}_0)$, o que contradiz o lema acima.

Podemos agora formular o (primeiro) teorema de unicidade.

1º Teorema de unicidade: Dado um volume V cercado por condutores (superfícies) mantidas a potenciais constantes dados, a solução da E.L. em V é única.

Prova: Suponha que V_1 e V_2 são duas soluções da E.L. satisfazendo as mesmas condições de contorno. Seja: $V_3 = V_1 - V_2$. Obviamente:

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0$$

ou seja, V_3 também satisfaz a E.L. Além disso, nas superfícies $V_3 = 0$ pois, por exemplo em S_1 :

$$V_3 = V_1 - V_2 = 0$$

Portanto, V_3 satisfaz a E.L. ~~em~~ em V e é zero na(s) superfície(s). Como as soluções da E.L. só admitem máximos e mínimos (nô) superficiais, segue que

$$V_3 = 0 \text{ em } V$$

$\Rightarrow V_1 = V_2 \Rightarrow$ a solução é única.

Outra prova: Considere a seguinte identidade:

$$\vec{\nabla} \cdot [V \vec{\nabla} V] = (\vec{\nabla} V) \cdot (\vec{\nabla} V) + V \nabla^2 V$$

Integrando os dois lados em V e usando o teorema de Gauss:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot [V \vec{\nabla} V] dV = \int_S V \vec{\nabla} V \cdot d\vec{S} = \int_V |\vec{\nabla} V|^2 dV + \int_V V \nabla^2 V dV$$

Particularizando para V_3 acima:

$$\int_S V_3 \vec{\nabla} V_3 \cdot d\vec{S} = \int_V |\vec{\nabla} V_3|^2 dV + \int_V V_3 \nabla^2 V_3 dV$$

O lado esquerdo é zero porque $V_3 = 0$ em S . O segundo termo do lado direito é zero porque $\nabla^2 V_3 = 0$ em V .

Logo:

$$\int_V |\vec{\nabla} V_3|^2 dV = 0$$

Como $|\vec{\nabla} V_3|^2$ é estritamente não-negativo, segue que ele é zero em todo V :

$$\vec{\nabla} V_3 = \vec{0} \Rightarrow V_3 = \text{const. em } V$$

Como $V_3 = 0$ em $S \Rightarrow V_3 = 0$ em $V \Rightarrow V_1 = V_2$ em V como queríamos demonstrar.

O resultado acima pode ser generalizado se incluirmos cargas em posições especificadas em V ou seja, se o potencial $V(\vec{r})$ satisfizer a equação de Poisson em V dado $\rho(\vec{r})$. A generalização é óbvia já que

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \text{ em } V$$

e $V_3 = 0$ em S como antes e o resto do teorema é idêntico.

Resumo: O potencial $V(\vec{r})$ em V é único se especificarmos:

(i) $\rho(\vec{r})$ em V

(ii) $V(\vec{r})$ em S

As vezes não são especificados os potenciais nas superfícies. Para condutores fixos, pode ser que tudo que sabemos seja a carga total distribuída nas superfícies. Ou seja, para uma superfície S_1 , pode ser que tenhamos dado apenas:

$$Q_1 = \int_{S_1} \sigma_1 dS = \int_{S_1} \epsilon_0 \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} ; Q_2 = \epsilon_0 \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}, \text{ etc.}$$

É intuitivo que, mesmo nesse caso, a solução da E.L. em V seja única. Isso realmente é verdade:

2º Teorema de unicidade: Dado um volume V cercado por superfícies S_1, S_2, \dots sobre as quais a carga total (como acima) é especificada:

$$Q_1 = \epsilon_0 \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} ; Q_2 = \epsilon_0 \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} ; \text{ etc.}$$

Então, a solução da E.L. em V é única (a menos de uma constante aditiva) e o campo elétrico correspondente $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ é único.

Prova: Como antes, sejam V_1 e V_2 duas soluções em V da E.L. que satisfaçam as condições de contorno acima em $S_1, S_2, \text{ etc.}$ Seja $V_3 = V_1 - V_2$

Segue que:

$$\nabla^2 V_3 = 0 \text{ em } V$$

e, usando que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$:

$$\int_{S_1} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} - \int_{S_1} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} - \frac{Q_1}{\epsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{S_1} \vec{\nabla} V_3 \cdot d\vec{S} = 0 \text{ e analogamente em } S_2, \text{ etc.}$$

Da segunda prova do 1º teorema de unicidade:

$$\int_S V_3 \vec{\nabla} V_3 \cdot d\vec{S} = \int_V |\vec{\nabla} V_3|^2 dV + \int_V V_3 \nabla^2 V_3 dV$$

O segundo termo do lado direito é zero. O primeiro termo pode ser calculado lembrando-se que V_3 é constante ($= V_1 - V_2$) nas superfícies condutoras e pode ser retirado para fora da integral de superfície

$$\int_S V_3 \vec{\nabla} V_3 \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \left[V_3(S_i) \int_{S_i} \vec{\nabla} V_3 \cdot d\vec{S} \right] = 0$$

Logo:

$$\int_V |\vec{\nabla} V_3|^2 dV = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = \text{const.}$$

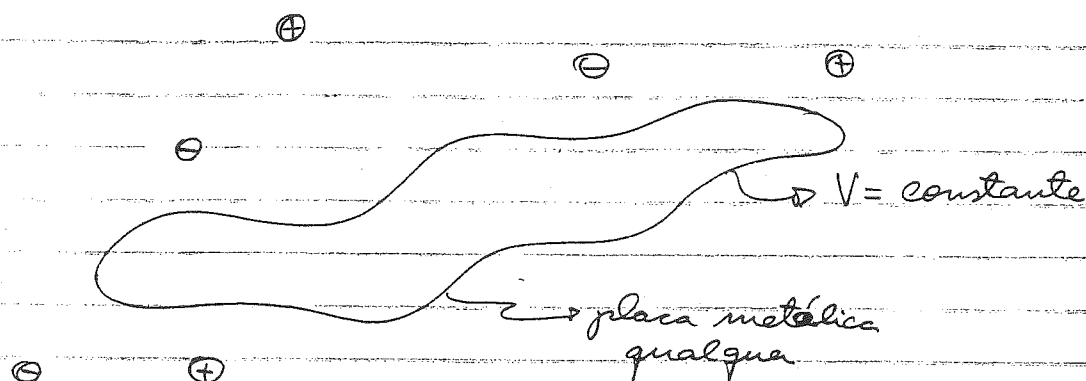
$$\Rightarrow V_1 = V_2 + \text{const.} \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

como queríamos demonstrar.

Método de imagens

O método de imagens é um método de solução de problemas eletrostáticos na presença de condutores que é muito poderoso. Ele não pode ser aplicado universalmente. E ele é uma aplicação importante dos teoremas de unicidade.

Nós já vimos que um condutor é uma região de potencial constante. Em particular, uma superfície condutora qualquer (ou seja, uma placa metálica fina) é uma superfície equipotencial, NÃO IMPORTA QUAL A FORMA DA PLACA NEM A CONFIGURAÇÃO DE CARGAS À SUA VOLTA.



Isso acontece porque, como vimos, o campo elétrico na placa (na sua superfície) tem que ser normal a ela (do contrário, se houvesse uma componente paralela à superfície, os elétrons do metal iriam se mover até que ela se anulasse). As superfícies equipotenciais são sempre normais ao campo elétrico, pois esse é o gradiente do potencial.

Considere agora como exemplo uma configuração de duas cargas opostas (ver figura 6-8 do Feynman). As linhas contínuas são linhas de campo elétrico (sempre tangentes a \vec{E}) e as linhas tracejadas são equipotenciais. Considere a equipotencial A da figura. Por definição, o campo elétrico \vec{E} é sempre normal a ela. O potencial tem um valor bem definido que chamaremos de V_A (que é facilmente calculável).

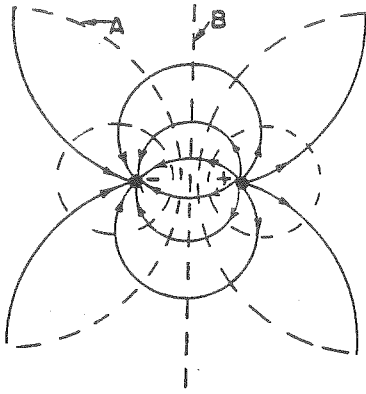


Fig. 6-8. The field lines and equipotentials for two point charges.

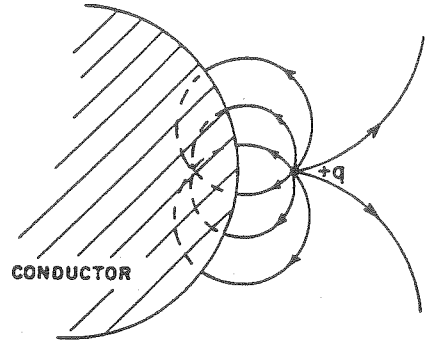


Fig. 6-9. The field outside a conductor shaped like the equipotential A of Fig. 6-8.

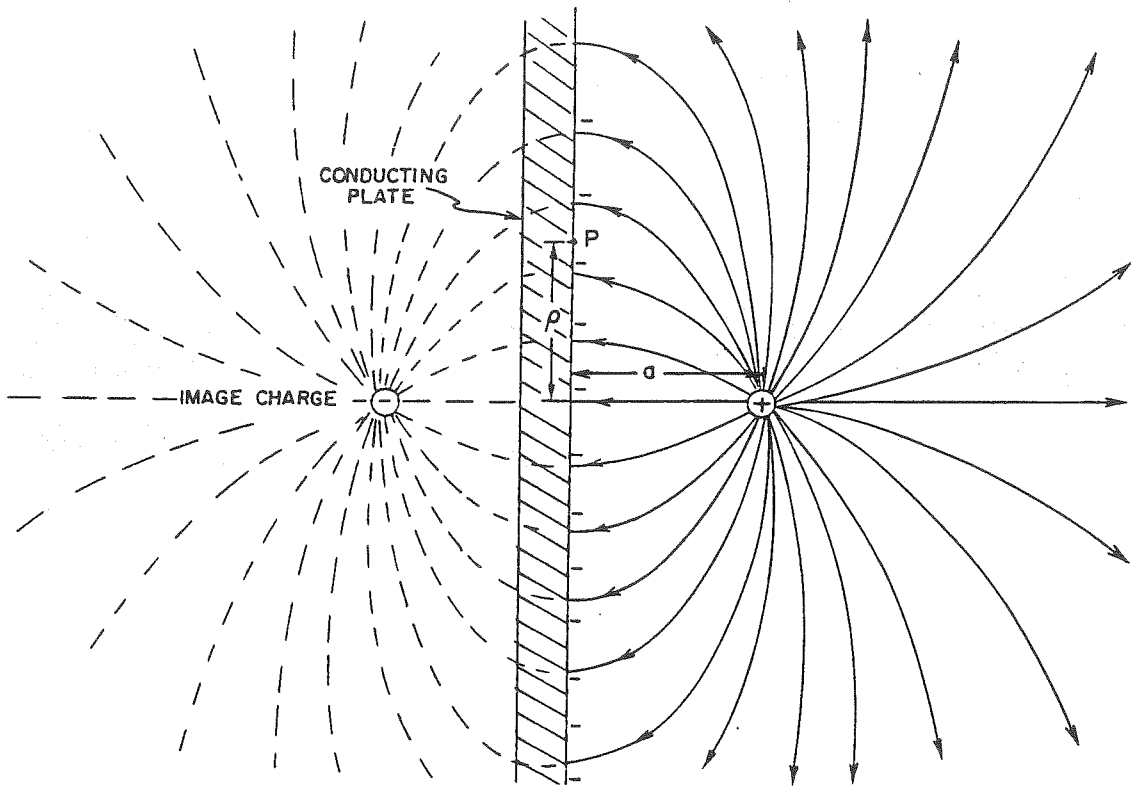


Fig. 6-10. The field of a charge near a plane conducting surface, found by the method of images.

Imagine agora que ponho uma placa metálica bem fina exatamente em A . Como \vec{E} é normal a A nada aconteceria! Cargas não se moveriam na placa, não haveria cargas induzidas, σ seria zero em toda a extensão de A e o campo \vec{E} não seria modificado.

~~Então~~

Agora considere uma outra situação diferente. Imagine que só temos a carga positiva da direita e a folha metálica em A (retiramos a carga negativa) MAS LIGAMOS a folha em A a uma bateria (ligada ao zero infinito) que mantém A num potencial (constante) V_A . A pergunta é:

Qual o campo dessa configuração?

A princípio, o problema parece complicado porque a presença da carga pontual VAI INDUZIR UMA DISTRIBUIÇÃO NÃO UNIFORME EM A (que não sabemos qual é) e o campo será criado por todas as cargas (a pontual e a induzida).

É aí que o teorema de unicidade vem nos ajudar. A situação anterior nos dá, PARA PONTOS FORA DE A , uma solução da ~~equação~~ equação de Poisson, (onde $\rho(\vec{r})$ é dada pela carga pontual positiva) tal que $V = V_A$ na superfície A . Agora queremos resolver o mesmo problema. Mas o teorema de unicidade nos garante que a solução é única. Logo o problema já foi resolvido!

Solução: Para ~~campos~~ pontos fora de A , o segundo problema (placa em A com V_A mais carga positiva) tem como solução o campo elétrico que duas cargas, uma positiva e outra negativa, como no primeiro problema.
(Ver figura 6-9 do Feynman)

Note que, de certa forma, nós trabalhamos de maneira inversa. Nós achamos a superfície (A) tal que uma chapa condutora de mesma forma teria solução simples. Na prática, calculamos equipotenciais para diversas situações simples, tabelamos e procuramos aquelas que nos interessam.

A própria figura sugere uma outra equipotencial mais útil: a superfície B que é um plano infinito a meio caminho entre as duas cargas. Essa equipotencial tem $V_B = 0$ (por quê?)

Se usarmos B, podemos achar o campo elétrico de uma carga q na vizinhança de uma placa infinita condutora, NA REGIÃO À DIREITA DA PLACA, ou seja, no lado da placa em que está q . Se q dista de d da placa infinita o campo nessa região ($z > 0$) será derivado do potencial: (ver figura 6-10 do Feynman)

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] \quad (z > 0)$$

POTENCIAL DA CARGA q NA VIZINHANÇA DA PLACA A UMA DISTÂNCIA d DA MESMA	POTENCIAL DA "CARGA IMAGEM" $-q$ DO OUTRO LADO DA PLACA A UMA DISTÂNCIA d DELA
---	--

Note que:

- (i) A solução acima só vale para ($z > 0$). Para ($z < 0$) $V = 0$ e $\vec{E} = \vec{0}$ (por quê?)
- (ii) Na região da placa ($z = 0$), o potencial é nulo $V = 0$ como queríamos
- (iii) A "carga imagem" é fictícia (não está lá) mas serve para criar o potencial procurado para ($z > 0$). Ela tem valor $-q$ e dista de d da placa, do outro lado dela.

Carga induzida e força sobre a carga q :

Agora que resolvemos esse problema complicado analisamos como vêm outras informações. Por exemplo, podemos calcular como se distribui a carga induzida na placa! Basta usar:

$$\vec{E}_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

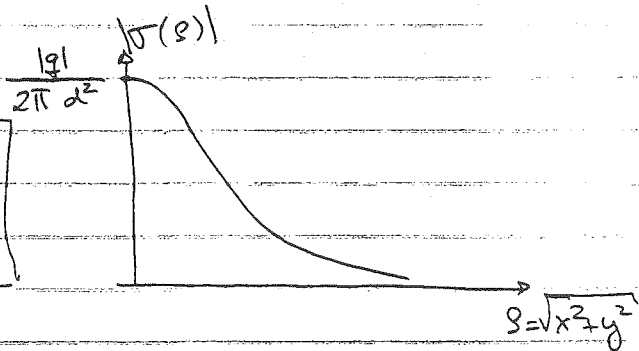
onde \vec{E}_n é a componente normal à placa condutora (a tangencial é nula, como vimos). No nosso caso:

$$\vec{E}_n = \vec{E} = E_z \Big|_{z=0} \hat{z} \quad e$$

$$E_z \Big|_{z=0} = - \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(z-d)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{(z+d)}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} \right] \Big|_{z=0}$$

$$E_z \Big|_{z=0} = \frac{-qd}{2\pi\epsilon_0(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\sigma = \epsilon_0 E_z \Big|_{z=0} = \frac{-qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$$



Note que:

(i) Se $q > 0$, $\sigma < 0$: a carga induzida tem sinal oposto à carga pontual

(ii) A densidade de carga induzida decai rapidamente com a distância.

(iii) A carga total induzida q_{ind} é achada por integração:

$$q_{ind} = \frac{-qd}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} = -qd \int_0^{\infty} \frac{s ds}{(s^2+d^2)^{3/2}} = \frac{-qd}{(s^2+d^2)^{1/2}} \Big|_0^{\infty} = -q$$

Porque a carga induzida é $-q$?

Outro resultado que podemos obter é a força sobre q . A carga induzida tem sinal oposto a q e irá exercer uma atração sobre q : qual o valor dessa atração?

Uma maneira de resolver esse problema é calcular a força de cada elemento superficial de carga $\sigma(x,y)dxdy$ sobre q e integrar sobre todo o plano (x,y) . Esse NÃO É O MÉTODO MAIS INTELIGENTE. Se lembrarmos que o potencial que a carga induzida cria na posição de q é IGUAL ao da "carga imagem", é fácil achar a força como sendo a força coulombiana que a carga imagem $-q$ exerce sobre q :

$$\vec{F} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} \hat{z}$$

(Ade também o resultado por integração e verifique que é o mesmo).

Finalmente, qual é a energia da configuração? Você poderia pensar que seria a mesma do sistema CARGA + CARGA-IMAGEM, mas isto é errado porque ao trazer as duas cargas ao mesmo tempo, precisamos realizar trabalho EM AMBAS. No sistema PLACA + CARGA só se realiza trabalho sobre a carga, já que a carga induzida é movida ao potencial zero (\Rightarrow energia zero).

O trabalho realizado sobre a carga pontual pode ser facilmente calculado:

$$W = -q \int_{\infty}^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^d \vec{F} \cdot d\vec{l} = q^2 \int_{\infty}^d \frac{dz}{(2z)^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{4z} \right) \Big|_{\infty}^d$$

$$W = - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4d}$$

Compare com a energia do sistema CARGA + CARGA-IMAGEM:

$$W' = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2d} = 2W \quad \hookrightarrow \text{trabalho dobrado}$$

Outra maneira de calcular a energia do sistema CARGA + PLACA é através da fórmula que envolve o campo elétrico:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

É preciso lembrar que $\vec{E} \neq \vec{0}$ apenas na região ($z > 0$) logo:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} dz E^2$$

Mas isso é metade do resultado do sistema CARGA + CARGA IMAGEM, pois no último, a integração se estende à região ($z < 0$) e, por simetria, o valor da integral nessa região é o mesmo. Daí:

$$\begin{array}{ccc}
 W' = 2W & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{CARGA +} & & \text{CARGA +} \\
 \text{CARGA IMAGEM} & & \text{PLACA}
 \end{array}$$

CARGA PRÓXIMA A ESFERA CONDUTORA COM $V=0$:

Outro exemplo interessante de aplicação do método de imagens é o de uma esfera condutora com $V=0$ com uma carga pontual nas imediações (ver figura). A questão é encontrar $V(\vec{r})$ [e $\vec{E}(\vec{r})$] fora da esfera (criado pela carga pontual e pela carga induzida). Note que $\vec{E}=\vec{0}$ ($V=0$) no interior da esfera. A intuição sugere que se examinarmos o potencial criado pela carga pontual MAIS UMA CARGA-IMAGEM DENTRO DA ESFERA, talvez seja possível fazer com que $V(|\vec{r}|=R)=0$. Isso é verdade.

Se pusermos uma carga

$$q' = -\frac{R}{a} q$$

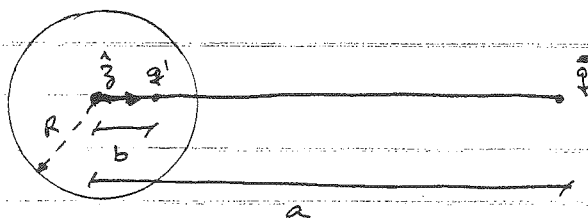
a uma distância:

$$b = \frac{R^2}{a}$$

do centro da esfera na linha que vai do centro até q (ver figura), então $V(|\vec{r}|=R)=0$. Acima, a esfera tem raio R e a carga q está a uma distância $a > R$ do centro da esfera. O potencial total é:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{|\vec{r} - a\hat{z}|} + \frac{q'}{|\vec{r} - b\hat{z}|} \right]$$

onde tomamos o eixo \hat{z} na direção da linha que une o centro da esfera e as duas cargas



A prova de que $V(|\vec{r}|=R)=0$ é deixada como exercício (3.7)

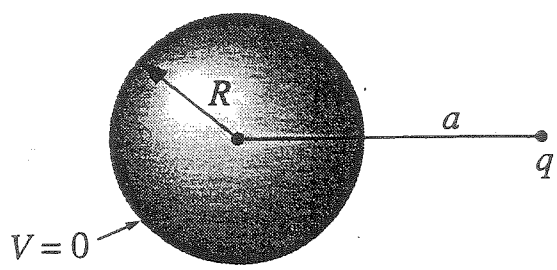


Figure 3.12

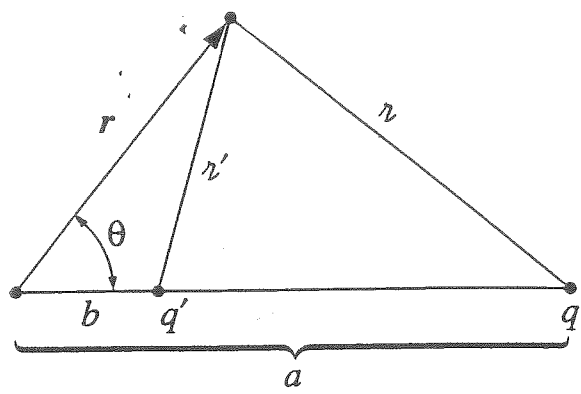
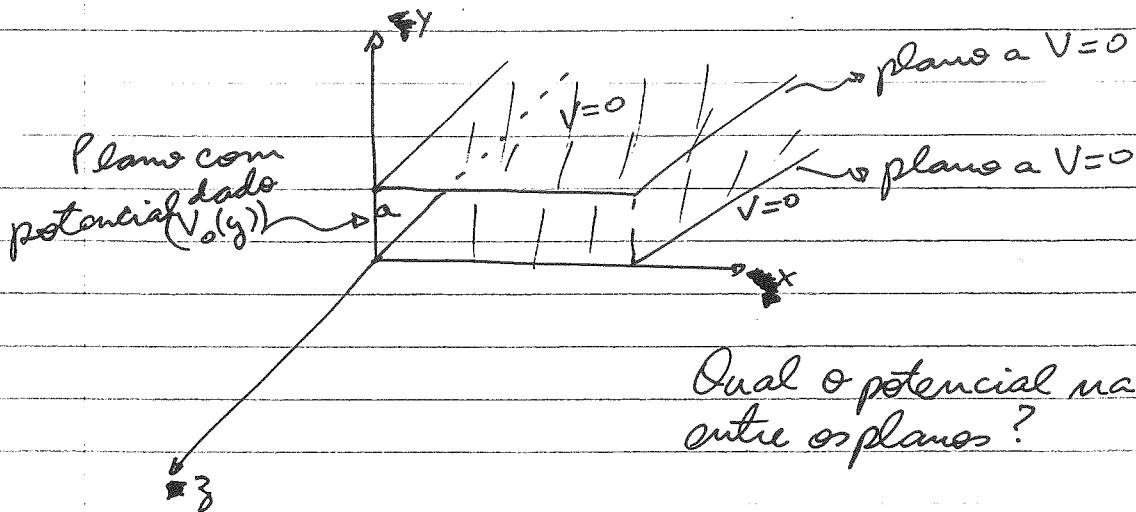


Figure 3.13

Soluções da Equação de Laplace por Separação de variáveis

O método de imagens que estudamos é restrito a situações de alta simetria. Um método mais geral é obtido através da técnica de separação de variáveis. O método é muito comum em Física e deve ser aprendido com atenção.

Exemplo 3.3



O método consiste de várias observações. A primeira é:

(i) Determine a simetria apropriada do problema e escreva a equação de Laplace nas coordenadas correspondentes.

É claro que o problema acima tem algum tipo de simetria cartesiana (certamente não tem simetria cilíndrica ou esférica)
Portanto:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

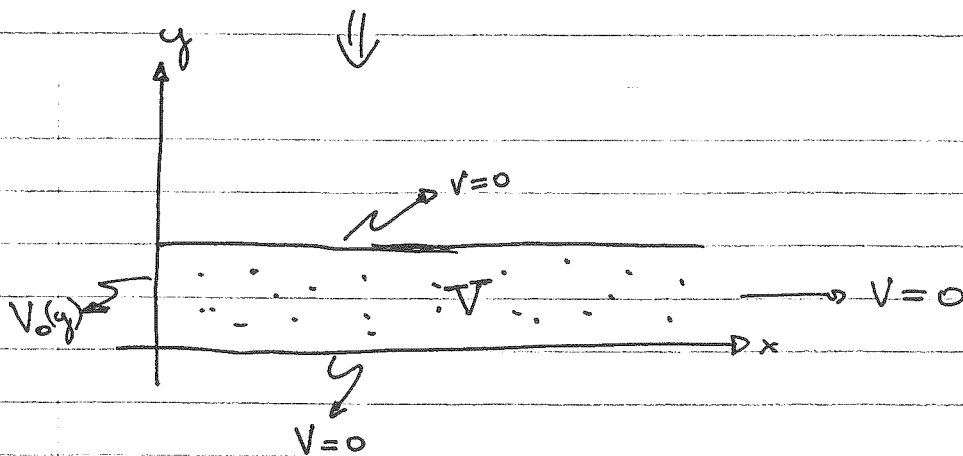
Na verdade, como os planos dados se estendem por todo z , a solução do problema independe de z . Em outras palavras, qualquer seção reta paralela ao plano xy tem o mesmo perfil de potencial. Segue que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \implies V = V(x, y)$$

Temos um problema efetivamente bi-dimensional:

Além disso, as condições de contorno são especificadas no problema como um dado:

- (i) $V=0$ em $y=0$ e $y=a$
- (ii) $V=V_0(y)$ em $x=0$
- (iii) $V=0$ em $x \rightarrow \infty$



(ii) O método agora consiste em procurar todas as soluções que podem ser escritas como:

$$V(x, y) = X(x)Y(y)$$

Note que isso NÃO QUER DIZER QUE A SOLUÇÃO PROCURADA é dessa forma. Isso é um passo intermediário. Veja mais adiante como faremos.

Segue que:

$$Y(y) \frac{d^2 X}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0$$

Dividindo por $X(x)Y(y)$:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = - \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2}$$

Do lado esquerdo temos um função de x apenas e do lado direito uma função apenas de y. Ora, uma função de x só pode ser igual a uma função de y se ambas forem iguais a uma constante, pois x e y são variáveis independentes. Vamos tomar a constante como sendo ^{positiva} ~~negativa~~ $\Rightarrow +k^2$ (veremos abaixo que o caso negativo não satisfaz as condições de contorno)

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X \quad \text{e} \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y$$

As soluções gerais são conhecidas:

$$X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$$

$$Y(y) = C \sin ky + D \cos ky$$

$$\Rightarrow V(x,y) = (A e^{kx} + B e^{-kx}) (C \sin ky + D \cos ky)$$

(iii) Vamos agora impor as condições de contorno

De $V(x, y) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \infty$ temos que $A=0$

$$\Rightarrow V(x, y) = e^{-kx} (C \sin ky + D \cos ky)$$

onde absorvemos B nas constantes C e D.

De $V(x, y) = 0$ quando $y = 0$, temos:

$$V(x, y=0) = D e^{-kx} = 0 \text{ para todo } x > 0. \text{ Isso só}$$

é possível se $D=0$.

$$\Rightarrow V(x, y) = C e^{-kx} \sin ky$$

Finalmente, de $V(x, y) = 0$ se $y = a$:

$$V(x, y=a) = C e^{-kx} \sin ka = 0 \text{ para todo } x > 0.$$

Isso só é possível se:

$$\sin(ka) = 0 \Rightarrow ka = m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Rightarrow V_m(x, y) = C_m e^{-k_m x} \sin(k_m y) \text{ onde } k_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Note que $m=0$ dá $V_0(x, y) = 0$ que não nos interessa (a menos que $V_0(y) = 0$ e o problema é trivial). Além disso, para m negativo, a exponencial é crescente e a solução não decai a zero quando $x \rightarrow \infty$. Portanto, ficamos com:

$$m = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Falta agora satisfazer $V(x, y) = V_0(y)$ ~~em~~ $x=0$
Mas:

$$V(x=0, y) = C_m \sin k_m y = C_m \sin \left(\frac{m\pi y}{a} \right) \quad m=1, 2, 3, \dots$$

De modo geral, isso não será igual a um dado $V_0(y)$ qual quer. É aqui que vem o passo (iv)

(iv) Note que a redução acima a $x=0$ corresponde a um número infinito de reduções para os vários (infinitos) valores de ~~m~~ m (1, 2, 3, ...), NENHUMA DAS QUAIS É IGUAL AO $V_0(y)$ GENÉRICO.

Porém, a equação de Laplace é LINEAR, ou seja,
se:

$V_1(x, y)$ é redução da E.L.

e

$V_2(x, y)$ também é redução da E.L.

ENTÃO $V(x, y) = V_1(x, y) + V_2(x, y)$ também é redução.
Além disso, se cada uma das reduções acima satisfaz as condições de contorno:

(a) $V(x, y=0) = 0$

(b) $V(x, y=a) = 0$

(c) $V(x \rightarrow \infty, y) = 0$

requer que a soma delas também satisfazas mesmas condições de contorno.

CONCLUSÃO: Podemos somar um número qualquer (finito ou infinito) de reduções $V_n(x, y)$ que ainda teremos uma redução da E.L. que satisfaz as condições de contorno (a), (b) e (c) acima

Matematicamente, temos:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x} \sin(k_n y); \quad k_n = \frac{n\pi}{a}$$

A questão mais importante é se podemos determinar C_n ($C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$) tais que:

$$V(x=0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n y) = V_0(y)$$

A resposta é SIM. Isso é um teorema matemático, das séries de Fourier, que garante que isso é possível desde que $V_0(y)$ seja contínua por partes. Para achar os C_n 's usamos o seguinte truque: Multiplique a última equação acima por $\sin(k_2 y)$ e integre de 0 a a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a dy \sin(k_2 y) \sin(k_n y) = \int_0^a dy \sin(k_2 y) V_0(y)$$

A integral do lado esquerdo é:

$$I_{l,m} = \int_0^a \sin\left(\frac{l\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a \left[\cos\left(\frac{(l-m)\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{(l+m)\pi y}{a}\right) \right] dy$$

$$\text{Se } l \neq m: \int_0^a \cos\left[\frac{p\pi y}{a}\right] dy = \frac{a}{p\pi} \sin\left[\frac{p\pi y}{a}\right] \Big|_0^a = \frac{a}{p\pi} [\sin(p\pi) - 0]$$

$$= 0 \text{ pois } p = l \pm m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Se $l=m$:

$$I_{l,l} = \frac{1}{2} \int_0^a \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi l y}{a}\right) \right] dy = \frac{1}{2} \left[a - \frac{a}{2\pi l} \sin\left(\frac{2\pi l y}{a}\right) \Big|_0^a \right]$$

$$= \frac{a}{2}$$

Logo:
$$I_{l,m} = \begin{cases} 0 & \text{re } l \neq m \\ \frac{a}{2} & \text{re } l = m \end{cases}$$

Assim, a soma do lado esquerdo se simplifica, pois apenas o termo $m=l$ sobrevive:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a dy \sin(k_n y) \sin(k_n y) = C_2 \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{2}{a} \int_0^a dy \sin\left(\frac{l\pi y}{a}\right) V_0(y) \quad l=1,2,3,\dots$$

que é uma fórmula para C_n ($n=1,2,3,\dots$) (lembre-se de que o índice l acima é mudo). Isso resolve o nosso problema: dado $V_0(y)$, calculamos os coeficientes C_n através da fórmula acima.

Por exemplo, suponhamos que $V_0(y) = V_0 = \text{constante}$

$$C_2 = \frac{2V_0}{a} \int_0^a dy \sin\left(\frac{l\pi y}{a}\right) = \frac{2V_0}{a} \left(\frac{a}{l\pi}\right) \left[-\cos\left(\frac{l\pi y}{a}\right)\right]_0^a =$$

$$C_l = -\frac{2V_0}{2\pi} [\cos(2\pi) - 1]$$

quando l é ímpar ($l = 1, 3, 5, 7, \dots$) $\cos(2\pi) = -1$

$$C_l = -\frac{2V_0}{2\pi} [-2] = \frac{4V_0}{2\pi} \quad (l \text{ ímpar})$$

e quando l é par ($l = 2, 4, 6, 8, \dots$) $\cos(2\pi) = 1$

e $C_l = 0$ (l par).

Finalmente:

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left[-\frac{n\pi x}{a}\right] \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

que é a solução final (única) do problema que satisfaz todas as condições de contorno.

É interessante observar como a série acima se aproxima da função solução (ver figuras 3.18 e 3.19 do livro)

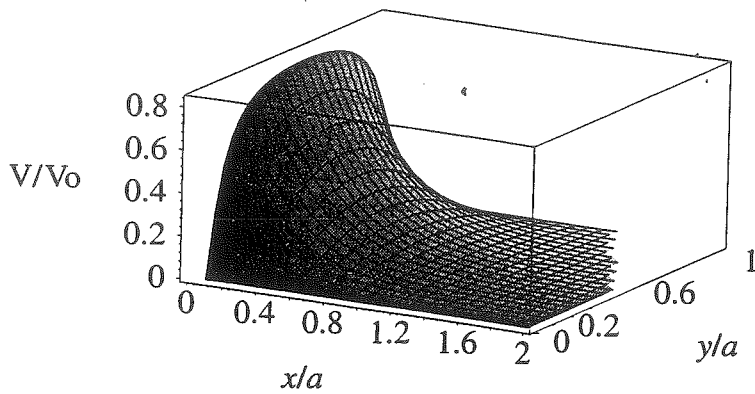


Figure 3.18

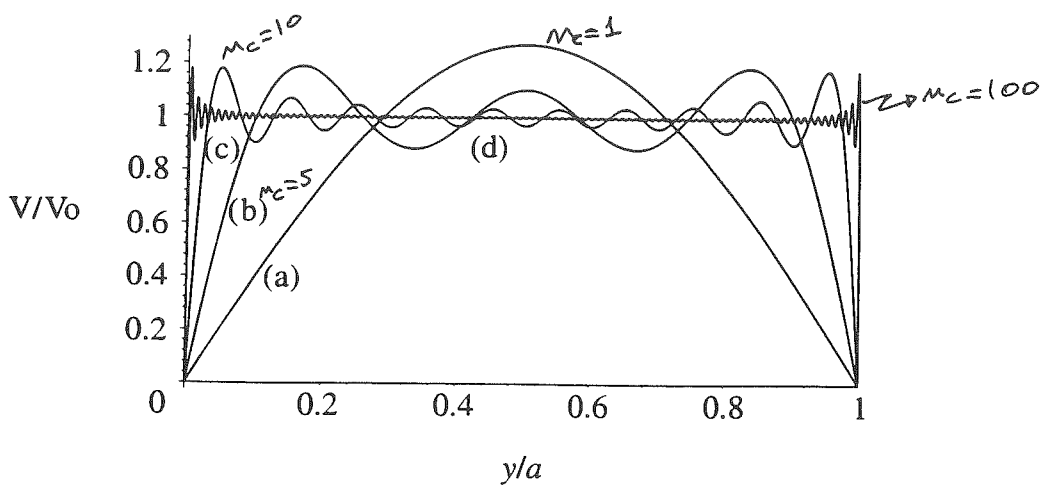


Figure 3.19

Coordenadas esféricas:

Em problemas que envolvem esferas, cones, etc. é mais conveniente é usar COORDENADAS ESFÉRICAS.

A equação de Laplace nessas coordenadas é:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Vamos nos concentrar apenas em problemas com simetria azimutal, ou seja, onde não há dependência de ϕ . Nesse caso, $V(r, \theta) \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$ e:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

Usando o método de separação de variáveis:

$$V(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0$$

Cada parcela da soma acima é função apenas de r ou apenas de θ . Portanto, ambas são iguais a uma constante:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = kR \quad \text{e} \quad \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -k \sin \theta \Theta$$

A equação radial pode ser escrita:

$$r^2 R'' + 2rR' - kR = 0$$

Vamos tentar uma lei de potência:

$$R(r) = A r^\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha-1)A r^\alpha + 2\alpha A r^\alpha - kA r^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha-1) + 2\alpha = k \Rightarrow \boxed{k = \alpha(\alpha+1)}$$

que tem duas soluções:

$$\alpha_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4k}}{2}$$

Do estudo da equação para $\Theta(\theta)$ vemos que apenas os casos em que α é inteiro são aceitáveis fisicamente. Para que α_{\pm} sejam inteiros é necessário que $\sqrt{1+4k}$ seja inteiro. Além disso,

$$-1 \pm \sqrt{1+4k} \text{ tem que ser par}$$

ou seja,

$$\sqrt{1+4k} \text{ tem que ser ímpar}$$

Logo:

$$\sqrt{1+4k} = (2m+1) \Rightarrow 4k+1 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{k = m^2 + m = m(m+1) \text{ onde } m \text{ é inteiro}}$$

Nesse caso, obtemos:

$$\alpha_+ = \frac{-1 + (2m+1)}{2} = m \quad e$$

$$\alpha_- = \frac{-1 - (2m+1)}{2} = -m-1$$

As duas soluções nos dão a solução geral

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad \text{onde } k = l(l+1)$$

Agora examinamos a equação para $\Theta(\theta)$:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \sin\theta \Theta$$

ou

$$\sin\theta \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cos\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + l(l+1) \sin\theta \Theta = 0$$

Se definirmos uma nova variável $x \in [-1, 1]$

$$x = \cos\theta$$

tal que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} &= \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx} & \text{e} & \frac{d^2}{d\theta^2} = -\cos\theta \frac{d}{dx} - \sin\theta \frac{dx}{d\theta} \frac{d^2}{dx^2} \\ & & & = -\cos\theta \frac{d}{dx} + \sin^2\theta \frac{d^2}{dx^2} \end{aligned}$$

Ficamos com: $\Theta(\cos\theta) \equiv \Theta(x)$

$$(1-x^2)\Theta'' - 2x\Theta' + l(l+1)\Theta = 0$$

Para $l = \text{inteiro}$, uma solução da equação acima são os chamados **POLINÔMIOS DE LEGENDRE**:

$$P_l(x)$$

que são polinômios de ordem l .

Existe uma fórmula geral para elas que é a chamada FÓRMULA DE RODRIGUES:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$$

Os primeiros polinômios de Legendre são:

$$P_0(x) = 1 ; P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) ; P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

Algumas propriedades importantes dos polinômios de Legendre são:

(a) $P_l(1) = 1$ para todo l

(b) $P_l(x)$ é $\left\{ \begin{array}{l} \text{par se } l \text{ é par} \\ \text{ímpar se } l \text{ é ímpar} \end{array} \right.$ $(P_{2l}(-x) = P_{2l}(x))$
 $(P_{2l+1}(-x) = -P_{2l+1}(x))$

(c) Ortogonalidade:

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1} & \text{se } l = l' \end{cases}$$

(d) $P_l(-1) = (-1)^l$

(e) $|P_l(x)| \leq 1$

(f) Se $f(x)$ é contínua por partes no intervalo $[-1, 1]$ então, podemos expandi-la em polinômios de Legendre

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x) \quad x \in [-1, 1]$$

onde:

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(x) f(x) dx$$

A outra solução, linearmente independente da equação de $\Theta(\theta)$ é singular em $\theta=0$ ($x=1$) ou $\theta=\pi$ ($x=-1$). Na maioria dos casos que vamos tratar isso é fisicamente inaceitável.

Portanto, a solução geral que obtemos é:

$$V_l(r, \theta) = \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

Usando agora a LINEARIDADE DA EQUAÇÃO DE LAPLACE, podemos superpor todas as soluções desse tipo, para obter UMA SOLUÇÃO GERAL EM COORDENADAS CILÍNDRICAS:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

Exemplo 3.8: Uma esfera neutra^{condutora} de raio R é posta numa região onde existe um campo elétrico uniforme:

$$\vec{E} = E_0 \hat{z}$$

Achar o potencial fora da esfera

Solução: Fisicamente, esperamos que carga positiva seja induzida no hemisfério superior e carga negativa no inferior (veja figura 3.24). Além disso, o potencial na superfície da esfera deve ser constante (suponhamos V_0) e deve tender a

$$V(x, y, z) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -E_0 z + \text{const.} = -E_0 r \cos \theta + \text{const.}$$

quando r tende a infinito.

A solução geral é:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

Em $r=R$:

$$V(R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\left(A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right)}_{a_l} P_l(\cos \theta) = V_0$$

Ou seja, queremos expandir a função $f(\cos \theta) = V_0$ em polinômios de Legendre no intervalo $\cos \theta \in [-1, 1]$

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} V_0 P_l(x) dx$$

$$a_l = \frac{2l+1}{2} V_0 \int_{-1}^{+1} P_l(x) P_l(x) dx$$

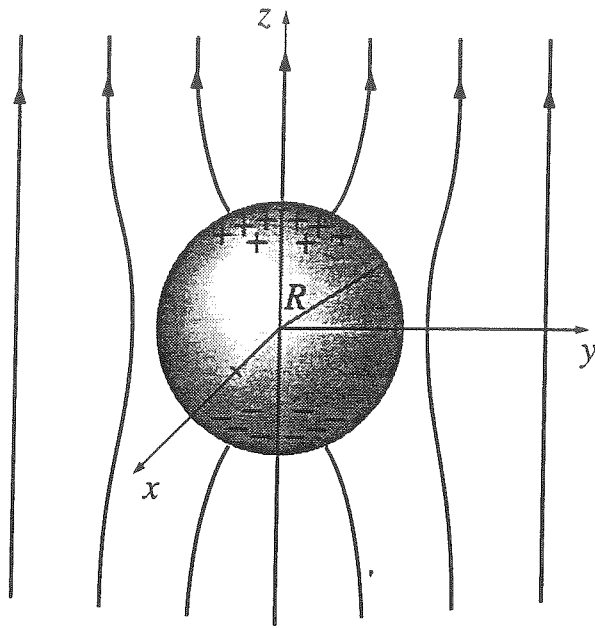


Figure 3.24

onde usamos que $P_0(x) = 1$. Pela propriedade de ortogonalidade, apenas $l=0$ sobrevive.

$$a_l = \begin{cases} 0 & \text{re } l \neq 0 \\ V_0 & \text{re } l = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 & \text{re } l \neq 0 \\ A_0 + \frac{B_0}{R} = V_0 & \text{re } l = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_l = -A_l R^{2l+1} & \text{re } l \neq 0 \\ B_0 = -R(A_0 - V_0) & \text{re } l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= A_0 \frac{R(A_0 - V_0)}{r} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \\ &= A_0 \left(1 - \frac{R}{r} \right) + \frac{V_0 R}{r} + \sum_{l=1}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

Ocaso $r \rightarrow \infty$, esse potencial tende a:

$$V(r, \theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A_0 + \sum_{l=1}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta + \text{const.}$$

Lembrando que o termo ($l=1$) é $A_1 r \cos \theta$, segue que

$$\boxed{A_l = 0 \quad l = 2, 3, 4, \dots} \quad \text{e } A_1 = -E_0 \text{ e const.} = +$$

Ficamos com:

$$V(r, \theta) = A_0 \left(1 - \frac{R}{r} \right) + \frac{V_0 R}{r} - E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

Expansão Multipolar

O campo ou potencial em uma região afastada de uma distribuição LOCALIZADA de cargas é:

$$\vec{E} \cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad V \cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

onde Q = carga total da configuração (imaginamos que a distribuição de carga está próxima da origem). Se a carga total da distribuição for zero ($Q=0$), qual é a PRÓXIMA APROXIMAÇÃO PARA O CAMPO DA DISTRIBUIÇÃO?

O potencial da distribuição $\rho(\vec{r}')$ é dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Se $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + r'^2 - 2r r' \cos\theta']^{1/2} = r \left[1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos\theta' \right]^{1/2}$$

onde θ' é o ângulo entre \vec{r} e \vec{r}' . Usando a expansão binomial

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cong \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right) \cos\theta' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \frac{3\cos^2\theta' - 1}{2} + O\left(\frac{r'}{r}\right)^3 \right]$$

Assim:

$$V(\vec{r}) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') dV' + \frac{1}{r^2} \int r' \cos\theta' \rho(\vec{r}') dV' + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{1}{r^2} \int r' \cos\theta' \rho(\vec{r}') dV' + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \right]$$

já que $\int \rho(\vec{r}') dV' = Q = \text{carga total}$. Assim, se $Q=0$, o próximo termo da expansão é:

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int r' \cos\theta' \rho(\vec{r}') dV'$$

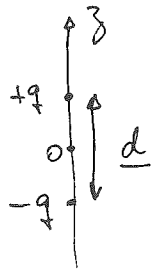
Usando que $r' \cos\theta' = \hat{r} \cdot \vec{r}'$:

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Note que esse termo cai com $\frac{1}{r^2}$ ao invés de $\frac{1}{r}$. O vetor

$$\vec{P} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'$$

é o momento de dipolo da distribuição e é responsável pelo potencial quando ($Q=0$) a grandes distâncias. O caso mais simples ocorre quando temos 2 cargas de mesmo módulo e sinais opostos:



$$\begin{aligned} \vec{P} &= \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' = \sum_i q_i \vec{r}_i \\ &= q \frac{d}{2} \hat{z} - q \left(\frac{d}{2}\right) \hat{z} = qd \hat{z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{\text{dip}}(\vec{r}) \cong \frac{qd \hat{z} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qd \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

O campo elétrico devido ao termo do dipolo pode ser calculado através do gradiente em coordenadas esféricas.

Se $\vec{P} = P \hat{z}$:

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{P \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E_{\text{dip}r} = -\frac{\partial V_{\text{dip}}}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad ; \quad E_{\text{dip}\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_{\text{dip}}}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad ; \quad E_{\phi} = 0$$

$$\vec{E}_{\text{dip}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

Podemos reorganizar essa expressão:

$$2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} = 3 \cos \theta \hat{r} - \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} = 3 \cos \theta \hat{r} - \hat{z}$$

onde usamos que $\sin \theta \hat{\theta} - \cos \theta \hat{r} = \hat{z}$

Assim:

$$\vec{E}_{\text{dip}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos \theta \hat{r} - \hat{z}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

que é independente da direção de \vec{p} (invariante)

De maneira geral, para uma distribuição de cargas pontuais:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Note que podemos realizar a soma sobre as cargas por partes.

$$\vec{p} = \sum_{i \in A} q_i \vec{r}_i + \sum_{i \in B} q_i \vec{r}_i = \vec{p}_A + \vec{p}_B$$

onde A e B são dois sub-conjuntos das cargas tais que $A \cup B$ dá o conjunto total de cargas. Logo, os dipolos se somam como vetores quaisquer.

Se agora $\vec{p} = \vec{0}$, podemos prosseguir com a expansão. Para isso, é interessante notar que há um teorema que dá:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta')$$

onde $P_n(x)$ são os polinômios de Legendre! Assim:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} + \frac{1}{r^3} \int (r')^2 \left(\frac{3\cos^2\theta' - 1}{2} \right) \rho(\vec{r}') dV' + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \sum_{n=3}^{\infty} \int (r')^n P_n(\cos\theta') \rho(\vec{r}') dV' \right]$$

Os termos após o termo dipolo são chamados de "quadripolo", "octupolo", etc. A expansão acima é chamada de expansão em multipolos.