

Dieletricos

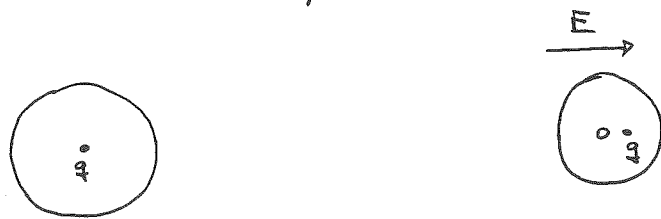
Até agora estudamos sistemas de cargas pontuais, distribuições de cargas volumétricas, superficiais e lineares e condutores. Entretanto, vários sistemas na natureza são isolantes, isto é, não contém cargas livres. O comportamento eletrostático desses sistemas é o nosso próximo tema de estudo. Eles são também chamados DIELETRICOS

Microscopicamente, as cargas negativas (elétrons) não estão livres para percorrer grandes distâncias em dielétricos. Elas estão fortemente ligadas aos núcleos positivos dos átomos. Entretanto, pequenas modificações nas posições dessas cargas são responsáveis por efeitos elétricos importantes.

Exemplos de polarização de meios:

Um modelo simples (e razoável) de um átomo é o de um núcleo positivo (de carga q) cercado de uma nuvem negativa de densidade uniforme $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$, onde a é o raio da nuvem.

Ao aplicarmos um campo elétrico \vec{E} , é razoável supor que o núcleo se desloque e não mais se localize no centro da esfera negativa:



Se o deslocamento for d , a situação corresponderá a um dipolo de momento de dipolo:

$$P = qd \quad (\text{note que a carga total do átomo é } q_{\text{net}})$$

Na posição deslocada, o núcleo está sujeito ao campo externo \vec{E} e ao campo devido à nuvem de carga. Se $S = \text{const.}$, vemos que:

$$\vec{E}_{\text{in}} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} \hat{r}$$

Na posição de equilíbrio, $r = d$, $\vec{E} = -\vec{E}_{\text{in}}$:

$$\Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{a^3} = E \Rightarrow p = qd = 4\pi\epsilon_0 a^3 E$$

Assim, vemos que o momento de dipolo é PROPORCIONAL A \vec{E} . A constante de proporcionalidade é chamada de polarizabilidade do átomo α . Ela é:

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$$

$$\boxed{\vec{p} = \alpha \vec{E}}$$

neste modelo simples.

Num sistema composto de vários átomos, os dipolos induzidos vão gerar campos internos adicionais nos outros dipolos e a ~~o~~ o efeito do campo externo é mais complicado. Entretanto, em muitos compostos (sólidos, líquidos ou gases), PARA CAMPOS ELÉTRICOS NÃO MUITO FORTES, a densidade de dipolos

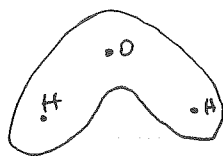
$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{\Delta V} = \text{MOMENTO DE DIPOLO POR UNIDADE DE VOLUME}$$

é TAMBÉM PROPORCIONAL AO CAMPO APLICADO:

$$\vec{P} \propto \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}}$$

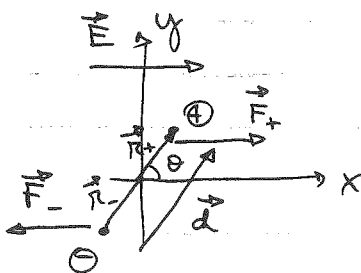
\vec{P} é chamada de polarização do meio e χ_e é a SUSCEPTIBILIDADE ELÉTRICA DO MEIO.

Em outros sistemas, como a água ou a amônia (NH_3), as moléculas já possuem momento de dipolo mesmo na ausência de campo aplicado. Isso se deve à geometria das moléculas e as diferentes ELETRONEGATIVIDADES dos átomos que as compõem. Os centros de carga negativa e positiva são deslocados um em relação ao outro.



O oxigênio é mais eletronegativo que o hidrogênio

Nesse caso, a aplicação de um campo elétrico é responsável por um torque que tende a alinhar o dipolo permanente da molécula com o campo externo:



$$\vec{N} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \text{---}$$

$$= q (\vec{r}_+ \times \vec{E} - \vec{r}_- \times \vec{E})$$

$$= q \left(\frac{\vec{d}}{2} \times \vec{E} - \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \times \vec{E} \right) = q \vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

Por exemplo, no caso do diagrama acima:

$$|\vec{N}| = pE \sin \theta \Rightarrow I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -pE \sin \theta$$

O torque é nulo quando $\theta = 0$. O dipolo tende a oscilar em torno de $\theta = 0$ e a se alinhar ao campo aplicado ao perder energia (por dissipação). Essa tendência ao alinhamento compete com as flutuações térmicas que tendem a tornar a orientação dos dipolos completamente aleatória.

Num gás de moléculas polares, teremos novamente:

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

onde χ_e dependerá fortemente da temperatura.

Assim, vemos que tanto quando há INDUÇÃO DE DIPOLOS EM MOLÉCULAS APOLARES QUANTO QUANDO HÁ ALINHAMENTO DE MOLÉCULAS POLARES TEMOS:

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

Existem exceções a essa lei, que não os casos de meios não lineares, em que a relação entre \vec{P} e \vec{E} é não linear:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \left[\chi_e \vec{E} + \chi_e^{(3)} (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \dots \right]$$

Além disso, em cristais não-cúbicos a relação entre \vec{P} e \vec{E} pode não ser tão simples. Eles podem não ter a mesma direção mesmo que a relação seja linear:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \vec{\chi}_e \vec{E} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, em sistemas FERROELÉTRICOS (como o $BaTiO_3$) pode haver polarização mesmo na ausência de campo aplicado. (POLARIZAÇÃO PERMANENTE).

Nosso estudo se concentrará em sistemas dielétricos linear isotrópicos em que: $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$

Cargas ligadas

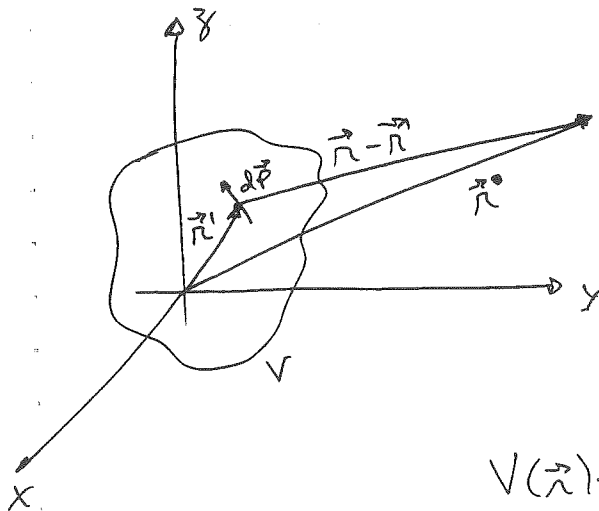
Vamos imaginar agora que um meio dielétrico tenha polarização \vec{P} , não interessa como ela foi criada. Em princípio, por exemplo, \vec{P} pode depender de \vec{r} (num meio linear isotrópico, $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ e \vec{E} pode depender do ponto espacial \vec{r} , por exemplo). Qual é o potencial (e o campo) criado por esse meio polarizado?

O potencial de um dipolo (puro) é:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

onde generalizamos a forma particular do dipolo na origem:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}$$



Se o meio tem polarização $\vec{P}(\vec{r}')$, o elemento de dipolo num volume dV' é:

$$d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r}') dV'$$

Logo:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Se usarmos que: ($\vec{\nabla}'$ atua sobre \vec{r}')

$$\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

(Para ver isso basta lembrar que:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\text{e } \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$$

teremos:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) dV'$$

Usando que: $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla}f)$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) - \frac{[\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')] }{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] dV'$$

Usando o teorema de Gauss:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \int_V \frac{[-\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')] }{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \right]$$

Esse é o potencial criado por uma distribuição superficial de carga:

$$\sigma_B(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n}^*$$

* Importante: \hat{n} é dirigida sempre PARA FORA DA REGIÃO DIELETRICA

e uma distribuição volumétrica de carga:

$$\rho_B(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})$$

Assim, em termos eletrostáticas, podemos substituir o meio polarizado por essas 2 distribuições de carga equivalentes.

Exemplo: Esfera uniformemente polarizada (ver figura)

Escolhendo \hat{z} ao longo de \vec{P} temos:

$$\rho_B = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

$$\sigma_B = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{r} = P \hat{z} \cdot \hat{r} = P \cos \theta$$

onde θ é o ângulo de coordenadas esféricas. Nesse caso, temos uma densidade superficial de carga

$$\sigma_B = \sigma_B(\theta) = P \cos \theta$$

De acordo com o exemplo 3.3 do livro

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (r \leq R)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad (r \geq R)$$

onde $A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l+1}} \int_0^\pi \sigma_B(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ e

$$B_l = \frac{R^{l+2}}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \sigma_B(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

Como $P_1(\cos \theta) = \cos \theta \Rightarrow \sigma_B(\theta) = P P_1(\cos \theta)$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{P}{2\epsilon_0} \times \frac{2}{3} = \frac{P}{3\epsilon_0} \quad ; \quad B_1 = \frac{PR^3}{3\epsilon_0} \quad \text{e} \quad A_l = B_l = 0 \quad \text{se} \quad l \neq 1$$

Logo:

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta = \frac{Pz}{3\epsilon_0} & (r \leq R) \\ \frac{P}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta = \frac{PR^3}{3\epsilon_0} \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2} & (r \geq R) \end{cases}$$

O campo \vec{E} pode ser achado por diferenciação

$$\vec{E} = \begin{cases} -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{z} & (r \leq R) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}] & (r > R) \end{cases}$$

CAMPO DE UM DIPOLO \vec{p}

onde $\vec{p} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{P}$

Note que \vec{E} é OPOSTO A \vec{P} dentro da esfera

Exemplo (Problema 4.11) Eletreto: Cilindro de raio a e comprimento L . (ver figuras)

Deslocamento Elétrico

Uma enorme simplificação dos problemas que envolvem dielétricos vem de usarmos a expressão para a densidade de carga ligada. Suponhamos que num dado problema que envolva cargas e dielétricos, a densidade total de carga seja dada por:

$$\rho = \rho_B + \rho_F$$

onde ρ_F é a densidade de carga LIVRE, ou seja, toda carga que não é carga LIGADA (ou de polarização). A lei de Gauss é:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_F + \rho_B}{\epsilon_0} = \frac{\rho_F}{\epsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

Podemos escrever:

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_F$$

ou

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\vec{D}) = \rho_F}$$

onde $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ é o chamado deslocamento elétrico. A lei de Gauss em dielétricos é modificada através da introdução de \vec{D} e a lei final só envolve a CARGA LIVRE! Em particular:

$$\boxed{\int_{S(V)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_F(\text{dentro de } V)}$$

As equações da eletrostática quando há meios dielétricos são então:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

Note que, para que a formulação seja completa, é preciso que seja dada a relação entre \vec{D} e \vec{E} . Isso pode ser feito de 2 maneiras (em geral)

(i) \vec{P} é dado e $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

ou

(ii) $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ (meio linear isotrópico) e temos:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$$

ϵ é chamada de permissividade elétrica do meio
A razão:

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = (1 + \chi_e) \text{ é um número puro e é chamada de permissividade relativa.}$$

Exemplo: Uma esfera condutora carregada, ^{carga Q , raio a} cercada por uma camada de material dielétrico de $r=a$ até $r=b$ com permissividade ϵ .

A carga Q é a única "CARGA LIVRE" DO problema. Por simetria, e pela lei de Gauss:

$$D \times 4\pi r^2 = Q \quad a < r$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (a < r)$$

(Obviamente, dentro do condutor $\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0$)
Dentro do dielétrico $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ e fora ($r > b$) $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r} & (a < r < b) \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} & (r > b) \end{cases}$$

Dentro do dielétrico: $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$

$$\vec{P} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r} \quad (a < r < b)$$

A carga ligada é:

$$\rho_B = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) (r^2 P_r) = 0 \quad (a < r < b)$$

$$e: \sigma_B = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Em $r=a \Rightarrow \hat{n} = -\hat{r}$ (SEMPRE PRA FORA DA REGIÃO DIELETRICA)

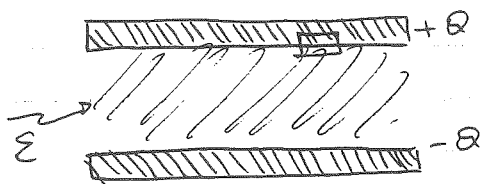
$$\Rightarrow \sigma_B \Big|_{r=a} = - \vec{P} \cdot \hat{n} \Big|_{r=a} = - \frac{(\epsilon - \epsilon_0) Q}{4\pi\epsilon a^2}$$

$$\text{Em } r=b \Rightarrow \hat{n} = \hat{r} \Rightarrow \sigma_B \Big|_{r=b} = \vec{P} \cdot \hat{n} \Big|_{r=b} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) Q}{4\pi\epsilon b^2}$$

$$\sigma_B = \begin{cases} -\frac{(\epsilon - \epsilon_0) Q}{4\pi\epsilon a^2} & \text{em } r=a \\ \frac{(\epsilon - \epsilon_0) Q}{4\pi\epsilon b^2} & \text{em } r=b \end{cases}$$

Note que a carga de polarização induzida na INTERFACÇA ENTRE O DIELETRICO E O CONDUTOR ~~tem~~ tem sinal oposto a carga na esfera condutora.

Exemplo: Capacitor de placas paralelas com um dielétrico entre as placas.



Para lei de Gauss ("caixa de Minúscula")

$$D \cdot A = \sigma_F A \Rightarrow D = \sigma_F = \frac{Q}{A}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A}$$

$$V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon A} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon A}{d} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} C_{VAC}$$

A capacitância é aumentada por uma razão que é a permissividade relativa do dielétrico.

Problemas de valor de contorno na presença de dielétricos

Em dielétricos lineares homogêneos onde:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

a solução de problemas elétricos é muito similar ao equivalente no vácuo.

As condições de contorno têm que ser modificadas, no entanto. Isso porque elas vêm de:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Da segunda equação temos que a componente longitudinal de \vec{E} é contínua:

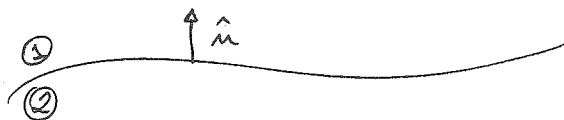
$$\vec{E}_{\parallel}(1) = \vec{E}_{\parallel}(2) \Rightarrow \vec{D}_{\parallel}(1) - \vec{P}_{\parallel}(1) = \vec{D}_{\parallel}(2) - \vec{P}_{\parallel}(2)$$

na interface de 2 meios (1) e (2), mesmo que haja cargas superficiais, ligadas ou não. Além disso, da lei de Gauss modificada temos:

$$\vec{D}_{\perp}(1) - \vec{D}_{\perp}(2) = \sigma_f$$

ou

$$\vec{D}_1 \cdot \hat{n} - \vec{D}_2 \cdot \hat{n} = \sigma_f \quad \text{onde } \hat{n} \text{ aponta de (1) para (2)}$$



Como antes, o potencial $V(\vec{r})$ é contínuo na interface:

$$V(1) = V(2)$$

Além disso, dentro dos dielétricos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_F$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_F}{\epsilon}$$

Como: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} V$ (já que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$):

$$\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho_F}{\epsilon}$$

Na ausência de cargas livres, V satisfaz a eq. de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

Portanto, as soluções cartesianas e esféricas já estudadas podem ser usadas. Mas atenção; as condições de contorno agora são diferentes!

Exemplo 4.7: Esfera dielétrica na presença de um campo externo uniforme

Seja o campo externo:

$$\vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$$

Nesse caso, não há carga livre em lugar nenhum (exceto no infinito, é claro, mas fontes do campo \vec{E}_0). As condições de contorno serão: (esfera de raio R e ϵ)

(i) $V_D = V_F$ em $r=R$

(ii) $V_F \rightarrow -E_0 r \cos \theta$; $r \gg R$

(iii) $D_{\perp D} = D_{\perp F}$ em $r=R \Rightarrow \epsilon \left. \frac{\partial V_D}{\partial r} \right|_{r=R} = \epsilon_0 \left. \frac{\partial V_F}{\partial r} \right|_{r=R}$

Dentro da esfera, temos:

$$V_D(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (r \leq R)$$

(os termos em $\frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}}$ explodem na origem)

Fora da esfera:

$$V_F(r, \theta) = A'_0 - E_0 r \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (r \geq R)$$

(reveja a solução do problema análogo da esfera condutora para entender porque A'_0 e $-E_0 r \cos \theta$ sobrevivem fora da esfera).

Restam as condições (i) e (iii). A condição

(i) nos dá:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} R^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) = A'_0 - E_0 R \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

Podemos equacionar os coeficientes de cada um dos polinômios de Legendre dos dois lados da equação acima porque a expansão é única:

$$A_0 = A'_0 + \frac{B_0}{R},$$

$$A_1 R = -E_0 R + \frac{B_1}{R^2} \Rightarrow A_1 = -E_0 + \frac{B_1}{R^3}$$

ℓ

$$A_\ell R^\ell = \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} \quad (\ell \geq 2)$$

A condição (iii) nos dá:

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell A_\ell R^{\ell-1} P_\ell(\cos\theta) = -E_0 \cos\theta = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \frac{B_\ell}{R^{\ell+2}} P_\ell(\cos\theta)$$

onde usamos que o termo (ℓ=0) do lado esquerdo é constante e desaparece ao tomarmos a derivada. Assim:

$$B_0 = 0$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) A_1 = -E_0 - 2 \frac{B_1}{R^3}$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) \ell A_\ell R^{\ell-1} = -(\ell+1) \frac{B_\ell}{R^{\ell+2}} \quad (\ell \geq 2)$$

É fácil ver que $A_\ell = B_\ell = 0$ para $\ell \geq 2$. Além disso:

$A_0 = A'_0 ; B_0 = 0$

 ℓ

$\left(2 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) A_1 = -3E_0 \Rightarrow A_1 = -\frac{3}{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} + 2} E_0$

$$B_1 = R^3 (A_1 + E_0) = R^3 E_0 \left[1 - \frac{3}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right] = \boxed{R^3 E_0 \left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) = B_1}$$

Logo:

$$V_D(r, \theta) = A_0 - \frac{3E_0}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} r \cos \theta = A_0 - \frac{3E_0}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} r \quad (r \leq R)$$

e

$$V_F(r, \theta) = A_0 - E_0 r \cos \theta + \left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) E_0 \frac{R^3}{r} \cos \theta \quad (r \geq R)$$

O campo elétrico dentro da esfera é uniforme:

$$\vec{E}_D = -\vec{\nabla} V_D = \frac{3E_0}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \hat{z} = \frac{3}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \vec{E}_0 \quad (r \leq R)$$

Note que, como $\epsilon > \epsilon_0$, $\vec{E}_D < \vec{E}_0$ (as cargas de polarização ligadas agem de maneira a diminuir \vec{E}). Dentro da esfera:

$$\vec{P}_D = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_D = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_D = \frac{3(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \vec{E}_0 \quad (r \leq R)$$

e

$$\vec{D}_D = \epsilon \vec{E}_D = \frac{3\epsilon}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \vec{E}_0 \quad (r \leq R)$$

Fora da esfera: $\vec{P}_F = 0$ e $\vec{E}_D = -\vec{\nabla} V_F = \frac{\vec{D}_D}{\epsilon_0}$

Note que de $V_F(r, \theta)$ achamos o momento de dipolo da esfera:

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) E_0 R^3 \hat{z} \text{ que é igual a } \frac{4\pi R^3}{3} \vec{P}_D$$

Veja também que, se tomamos $\epsilon \rightarrow \infty$, recuperamos o resultado da ESFERA CONDUTORA!

($r \leq R$):

$$V_D(r, \theta) = A_0 \quad ; \quad \vec{E}_D = \vec{0} \quad (\text{não funciona para } \vec{P} \text{ e } \vec{D})$$

($r > R$):

$$V_F(r, \theta) = A_0 - E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{R^3}{r} \cos \theta$$

Como achado anteriormente.

Exemplo 4.8: Carga pontual próxima a meio infinito dielétrico

O dielétrico ocupa o semi-espaço $z \leq 0$ e a carga está localizada em $(0, 0, d)$. Esse problema pode ser resolvido pelo método de imagens, mas a solução não é muito óbvia. Por isso, o melhor método de resolvê-lo é outro.

Vamos primeiramente determinar onde estão as cargas ligadas. No dielétrico (com perm. ϵ):

$$\rho_B = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}] = -\vec{\nabla} \cdot \left[\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \vec{D} \right] =$$

$$= - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \rho_F$$

Ou seja, a carga volumétrica ligada é proporcional à carga livre, que nesse caso é NULA. Logo:

$$\rho_B = 0$$

A carga superficial ligada é:

$$\sigma_B = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{z} = P_z = \epsilon_0 \chi_e E_z \Big|_{z=0} = (\epsilon - \epsilon_0) E_z \Big|_{z=0}$$

E_z aqui é calculado na interface ($z=0$) do lado do dielétrico ($z \rightarrow 0^-$).

Concluímos, portanto, que as cargas do problema são, q em $(0, 0, d)$ e $\sigma_B(x, y)$ em $z=0$. NOTE QUE $\sigma_B(x, y)$ DEPENDE DA POSIÇÃO NO PLANO $z=0$ (É NÃO-UNIFORME). Todo o campo produzido no problema é devido a q e $\sigma_B(x, y)$.

Em particular, o campo:

$$E_z^D|_{z=0}$$

tem contribuições de q e de $\sigma_B(x, y)$:

$$E_z^D|_{z=0} = E_z^q|_{z=0} + E_z^{\sigma_B}|_{z=0^-}$$

$$\vec{E}^q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - d\hat{z}}{|\vec{r} - d\hat{z}|^3} \Rightarrow E_z^q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-d}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow E_z^q|_{z=0} = -\frac{qd}{4\pi\epsilon_0 [x^2 + y^2 + d^2]^{3/2}}$$

O campo devido a σ_B é facilmente relacionado a σ_B :

$$E_z^{\sigma_B}|_{z=0^-} = \frac{-\sigma_B}{2\epsilon_0}$$

Assim:

$$E_z^D|_{z=0} = \frac{\sigma_B}{\epsilon - \epsilon_0} = -\frac{qd}{4\pi\epsilon_0 [x^2 + y^2 + d^2]^{3/2}} - \frac{\sigma_B}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \sigma_B \left(\frac{1}{\epsilon - \epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon_0} \right) = \frac{\epsilon + \epsilon_0}{2\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)} \sigma_B = -\frac{qd}{4\pi\epsilon_0 [x^2 + y^2 + d^2]^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \sigma_B(x, y) = \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \right) \frac{(-qd)}{2\pi [x^2 + y^2 + d^2]^{3/2}}$$

Note que a DEPENDÊNCIA COM (x, y) é a mesma que no caso do plano condutor a $V=0$. Logo:

$$Q_B = \int \sigma_B(x, y) dS = \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \right) (-q)$$

Voltando agora à expressão do campo elétrico no dielétrico a $z=0$: ($s^2 \equiv x^2 + y^2$)

$$E_z^D|_{z=0} = \frac{-qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[s^2+d^2]^{3/2}} + \left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+\epsilon_0}\right) \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[s^2+d^2]^{3/2}}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+\epsilon_0}\right)\right] \frac{-qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(s^2+d^2)^{3/2}}$$

Já o campo imediatamente fora do dielétrico ($z \rightarrow 0^+$) é:

$$E_z^F|_{z=0} = E_z^q|_{z=0} + E_z^{\sigma_B}|_{z=0^+} = E_z^q|_{z=0} + \frac{\sigma_B(x,y)}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_z^F|_{z=0} = \left[1 + \left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+\epsilon_0}\right)\right] \frac{-qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(s^2+d^2)^{3/2}}$$

Note como a expressão de $E_z^F|_{z=0}$ corresponde ao campo

criado por q MAIS O CAMPO DE UMA CARGA FICTÍCIA (IMAGEM) LOCALIZADA EM $(0,0,-d)$ e IGUAL A Q_B :

$$Q_B = -\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon+\epsilon_0}\right)q$$

O campo que q em $(0,0,d)$ e Q_B em $(0,0,-d)$ criam para $z > 0$ é tal que o potencial satisfaz à Equação de Poisson e à condição de contorno de \vec{E} especificado na superfície ($z=0$). Portanto, é a solução única do problema em $z > 0$.

Além disso, a expressão de $E_z^D|_{z=0}$ corresponde ao campo de q em $(0,0,d)$ e ao CAMPO DE UMA OUTRA CARGA IMAGEM Q_B ~~em~~ NO MESMO PONTO $(0,0,d)$.

O campo gerado por $(q+Q_B)$ em $(0,0,d)$ NA REGIÃO DO DIELETRICO ($z < 0$) satisfaz à eq. de Laplace e à condição de contorno de \vec{E} em ($z=0$). Logo, é a

solução única do problema para $z < 0$

Resumindo:

Seja $Q_B = -\left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}\right)q$. O problema da carga q

distante de d de um dielétrico infinito de constante ϵ e ϵ' :

(i) REGIÃO FORA DO DIELETRICO ($z > 0$):

Equivalente ao potencial/campo de

- q em $(0, 0, d)$
- Q_B em $(0, 0, -d)$

(ii) REGIÃO DENTRO DO DIELETRICO ($z < 0$)

Equivalente ao potencial/campo de:

- $(q + Q_B)$ em $(0, 0, d)$

Note como a carga imagem NUNCA PERTENCE A REGIÃO ONDE SE QUER O POTENCIAL/CAMPO.

Energia eletrostática na presença de dielétricos

Para derivarmos a energia eletrostática na presença de dielétricos devemos primeiramente nos lembrar da definição de ENERGIA ELETROSTÁTICA DE UM SISTEMA:

"É a energia gasta (ou ganha) ao CRIARMOS a configuração dada"

ou

"É o trabalho feito CONTRA AS FORÇAS ELÉTRICAS para trazerem os cargas da configuração do infinito até a situação dada"

Agora é imprescindível notar que NA MAIORIA DAS (SENÃO TODAS) AS SITUAÇÕES SÓ REALIZAMOS TRABALHO CONTRA AS FORÇAS ELÉTRICAS QUE ATUAM SOBRE AS CARGAS LIVRES. Ou seja, trazemos do infinito as cargas livres (cargas pontuais, condutores carregados, etc.) enquanto que os meios dielétricos que porventura existam POLARIZAM-SE NATURALMENTE RESPONDENDO ÀS MUDANÇAS DO CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDAS. Em outras palavras, não devemos computar o trabalho realizado para estabelecer as polarizações dos meios dielétricos, ou ainda, para estabelecer as configurações dadas das CARGAS LIGADAS (σ_B e ρ_B).

Tendo isto em mente podemos calcular a energia eletrostática na presença de dielétricos. Se variarmos a CARGA LIVRE q_f um pouquinho (δq_f), a variação de energia ou o trabalho realizado será:

$$\delta W = \int_{\text{(TODO O ESPAÇO)}} \delta q_f \vec{r} \cdot \vec{E} dV$$

onde $V(\vec{r})$ é o potencial já existente.

Da equação da lei de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \Rightarrow \delta \rho_f = \delta (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D})$$

(Lembre-se de que $\delta \vec{D} = \vec{D} - \vec{D}_0$ e $\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_0 = \delta (\vec{\nabla} \cdot \vec{D})$)

Assim:

$$\delta W = \int \delta \rho_f(\vec{r}) V(\vec{r}) dV = \int V(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}) dV$$

$$\text{Usando } \vec{\nabla} \cdot (V \delta \vec{D}) = \delta \vec{D} \cdot (\vec{\nabla} V) + V (\vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}))$$

$$\delta W = \underbrace{\int \vec{\nabla} \cdot (V \delta \vec{D}) dV}_{\downarrow \text{Teo. de Gauss}} - \int \delta \vec{D} \cdot (\vec{\nabla} V) dV$$

$$= \int_{\text{no infinito}} V \delta \vec{D} dV + \int \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV$$

onde usamos que $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. Para uma distribuição localizada de carga, no infinito:

$$V(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r}$$

$$\delta \vec{D}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2}$$

e a integral de superfície se anula no infinito. Logo:

$$\delta W = \int \vec{E} \cdot \delta \vec{D} dV$$

Se agora fizermos a suposição de que o meio é linear

$$\vec{E} \cdot \delta \vec{D} = \epsilon \vec{E} \cdot \delta \vec{E} = \frac{\epsilon}{2} \delta (\vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2} \delta (\vec{D} \cdot \vec{E})$$

$$\Rightarrow \delta W = \frac{1}{2} \int \delta (\vec{D} \cdot \vec{E}) dV = \delta \left(\frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dV \right)$$

Assim resumamos (integrarmos) os incrementos de CARGA LIVRE desde 0 até a configuração final:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV$$

"Energia eletrostática na presença de dielétricos"

Note que a fórmula é diferente daquela usada anteriormente:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \, dV$$

porque esta última INCLUI O TRABALHO REALIZADO PARA ESTABELECEER A CONFIGURAÇÃO DE CARGAS LIGADAS. (ver discussão no livro (pgs. 192 e 193)).

Exemplo: Um capacitor de placas paralelas.

Vimos que, nesse caso, $D = \frac{Q}{A} = \epsilon E$ e $C = \frac{\epsilon A}{d}$

Assim:

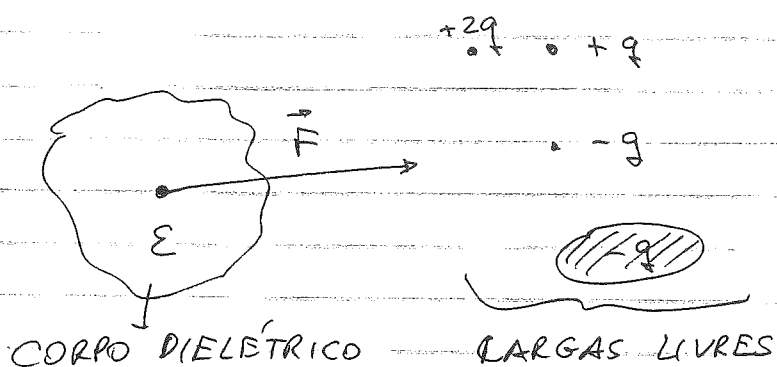
$$W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \, dV = \frac{1}{2\epsilon} D^2 (Ad) = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{Q^2}{A^2} \right) (Ad) = \frac{Q^2}{2} \frac{d}{\epsilon A} = \frac{Q^2}{2C}$$

ou $W = \frac{1}{2} CV^2$

que é a expressão usual, desde que usemos a capacitância modificada pelo dielétrico.

A energia eletrostática na presença de dielétricos fornece uma maneira bastante econômica de se calcular a força sobre corpos dielétricos na presença de cargas livres. Usa-se o chamado método do trabalho virtual.

Se um corpo dielétrico está em uma região onde há campo elétrico produzido por CARGAS LIVRES FIXAS, esse corpo sofrerá uma força elétrica que tende a puxá-lo NA DIREÇÃO DO CAMPO.



Se imaginarmos que o corpo faz um DESLOCAMENTO VIRTUAL de $\delta \vec{x}$ (deslocamento virtual significa que você considera todas as forças que estão agindo no corpo e imagina que ele se move de $\delta \vec{x}$ SEM QUE AS FORÇAS MUDEM), a força elétrica \vec{F} realizará um TRABALHO VIRTUAL δW_{el}

$$\delta W_{el} = \vec{F} \cdot \delta \vec{x}$$

A energia eletrostática da configuração irá diminuir desse valor :

$$\delta W = -\delta W_{el} = -\vec{F} \cdot \delta \vec{x}$$

(Lembre-se: Se você "solta" as cargas elas se movem de forma a diminuir a energia eletrostática). Assim:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} W \quad \text{ou} \quad F_x = -\frac{\delta W}{\delta x}, \quad F_y = -\frac{\delta W}{\delta y}, \quad \text{etc.}$$

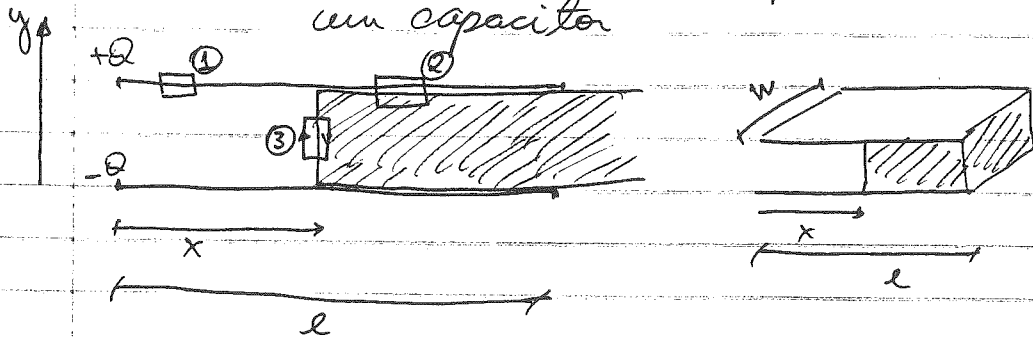
Assim, podemos calcular a força através do cálculo da variação da energia quando o corpo se move de δx , δy , etc. Analogamente, poderíamos calcular o torque:

$$\tau = -\frac{\delta W}{\delta \theta}$$

Mas note que estamos supondo que as cargas livres não se movem. Se elas se moverem, a energia variará também por causa da mudança da configuração de CARGAS LIVRES e NÃO SERÁ IGUAL ^{CHENOS A} À FORÇA SOBRE O DIELÉTRICO VEZES O DESLOCAMENTO! Portanto, para nos lembrarmos disso, escrevemos:

$$F_x = \left(-\frac{\partial W}{\partial x} \right)_q \rightarrow \text{indica que as CARGAS LIVRES SÃO MANTIDAS FIXAS}$$

Exemplo: Força sobre um capacitor dielétrico dentro de um capacitor



O capacitor acima está carregado com carga Q e tem um dielétrico inserido parcialmente em seu interior. O dielétrico sofrerá uma força que tenderá a "puxá-lo" para dentro do capacitor, que queremos calcular. Note que a força, nesse caso, é devida aos "campos de borda" que existem FORA DA REGIÃO DAS PLACAS e que usualmente são desprezados. Aqui eles são responsáveis pela Física (confira a discussão no livro). Entretanto, podemos calcular a força, pelo método dos deslocamentos virtuais,

MESMO SEM SABER A FORMA DOS CAMPOS DE BORDA (que são muito difíceis de calcular). Mais adiante, entenderemos por quê.

Primeiramente, vamos achar os campos quando o dielétrico está inserido de x no capacitor (ver diagrama acima). Bem dentro do capacitor, por simetria, os campos são paralelos às placas (direção y no diagrama). Só existem cargas livres nas placas do capacitor. Aplicando a lei de Gauss às superfícies das "caixas de Minâmcora" ① e ② da figura:

$$\sigma_F^E = D^E \quad \text{e} \quad \sigma_F^D = D^D$$

onde os superscritos "E" e "D" se referem às regiões da esquerda (onde não há dielétricos) e da direita (onde há), respectivamente. Os campos elétricos E^D e E^E são iguais, como pode ser deduzido da equação

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

aplicada ao circuito ③ do diagrama:

$$E^D = E^E = E$$

Segue que: $\sigma_F^E = D^E = \epsilon_0 E$ e $\sigma_F^D = D^D = \epsilon E$

A diferença de potencial é: $V = Ed$. A carga total em uma placa é:

$$Q = [\sigma_F^E \times W + \sigma_F^D (l-x)W] = EW [\epsilon_0 x + \epsilon (l-x)] = \frac{VW}{d} [\epsilon_0 x + \epsilon (l-x)]$$

Logo, a capacitância é: $C = \frac{Q}{V} = \frac{W}{d} [\epsilon_0 x + \epsilon (l-x)]$

A energia armazenada é:

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \int_{\text{REGIÃO ENTRE AS PLACAS}} \vec{E} \cdot \vec{D} dV + \frac{1}{2} \int_{\text{REGIÃO FORA DAS PLACAS}} \vec{E} \cdot \vec{D} dV = W_0 + W_F$$

Note agora que, se o dielétrico se estende até bem longe das placas, W_F não muda quando variamos x , pois os campos e cargas de polarização decaem rapidamente com a distância do capacitor. Assim, para calcularmos a variação de W com x , podemos nos concentrar apenas em W_0 :

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_{\text{REGIÃO ENTRE AS PLACAS: } R_0} \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_{R_0} \epsilon(x) E^2 dV$$

onde ~~le~~ levamos em conta a variação de ϵ com x na região entre as placas. Como E é constante em R_0 :

$$W_0 = \frac{E^2}{2} \int \epsilon(x) dV = \frac{E^2}{2} W_d [\epsilon_0 x + \epsilon(l-x)]$$

$$= \frac{W_d}{2} E^2 \frac{Q^2}{\epsilon^2 W^2} = \frac{d}{2} \frac{EQ}{W} = \frac{d}{2} \frac{Q^2}{W[\epsilon_0 x + \epsilon(l-x)]} = \frac{Q^2}{2C(x)}$$

que é a expressão usual, mas enfatizamos a dependência da capacitância com x . Mantendo Q constante:

$$F = - \left(\frac{\partial W_0}{\partial x} \right)_Q = - \frac{Q^2}{2} \left(- \frac{1}{C^2} \right) \frac{dC}{dx} = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dx}$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{W}{d} (\epsilon_0 - \epsilon) = - \frac{W}{d} (\epsilon - \epsilon_0) < 0 \Rightarrow F = - \frac{V^2 W}{2d} (\epsilon - \epsilon_0)$$

O sinal negativo mostra que a força é na direção $(-x)$.