Magnetostática

As forças magnéticas são conhecidas desde a Antigüidade e são experimentadas por todos nós em nosso dia-a-dia através de ímãs permanentes. Durante muito tempo, o estudo do magnetismo trascorreu independentemen do estudo da eletricidade. Entretanto, quando Oersted demonstrou em 1820 que uma corrente elétrica em um fio é capaz de defletir uma bússola, os dois ramos da Física se misturaram. A unificação final entre eles, entretanto, teve que esperar pelo trabalho de Maxwell.

O estudo da magnetostática guarda grande analogia com o estudo da eletrostática. A magnetostática, como o nome indica, lida com campos magnéticos constantes. Campos magnéticos são criados por cargas em movimentos (ou pelos momentos de dipolo magnético das partículas elementares, mas não vamos nos concentrar nesses, por enquanto). A maneira mais simples de obtermos cargas em movimento é através de correntes em condutores. Dentro desses, os elétrons se movem enquanto os íons positivos permanecem (aproximadamente) imóveis em uma rede cristalin. Nosso estudo, portanto, irá se basear largamente em correntes como fontes de campo magnético.

Observa-se empiricamente que correntes estacionárias (que não mudam com o tempo) criam campos magnéticos estáticos. Como vamos, primeiramen estudar campos magnéticos estáticos, vamos nos concentrar em correntes estacionárias.

Na eletrostática, começamos nosso estudo estabelecendo a lei de Coulomb de interação entre duas cargas estáticas. Se quisermos analogia completa entre eletrostática e magnetostática, deveríamos estabelecer a força entre duas correntes estacionárias. Realmente, se tivermos dois fios longos PARALELOS, eles se atrairão se as correntes forem paralelas e se repelirão se forem anti-paralelas. Entretanto, essa não é a forma mais simples de estabelecer as leis da ~~eletro~~ magnetostática. Por isso, vamos usar diretamente os conceitos de campo como no caso elétrico.

Força magnética

Vimos que se há um campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ em um ponto $\vec{r}$ no espaço onde colocamos uma carga q, esta sofrerá uma força:

$$\vec{F}_e = q\,\vec{E}(\vec{r})$$

Forças magnéticas só atuam em cargas EM MOVIMENTO. Além disso, se há um CAMPO MAGNÉTICO $B(\vec{r})$ num ponto $\vec{r}$, a força magnética será perpendicular a $\vec{B}(\vec{r})$ e à velocidade da partícula. Podemos escrever

$$\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

onde "x" significa o produto vetorial de $\vec{v}$ e $\vec{B}$.
A força total sobre a carga é a soma vetorial de $\vec{F}_e$ e $\vec{F}_m$

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad \text{"Força de Lorentz"}}$$

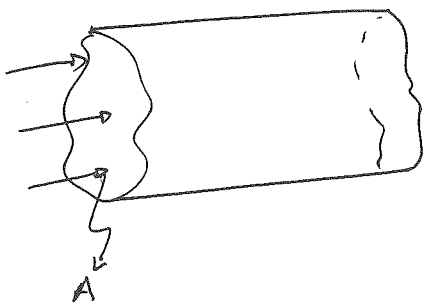
Uma primeira conseqüência importante da força de Lorentz é que as forças magnéticas NÃO REALIZAM TRABALHO porque:

$$dW_m = \vec{F}_m \cdot d\vec{x} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = q\,(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}\, dt = 0$$

porque $(\vec{v} \times \vec{B})$ é normal a $\vec{v}$. (ver exemplo 5.3 sobre como às vezes é difícil mostrar ou convencer-se de que as forças magnéticas não realizam trabalho

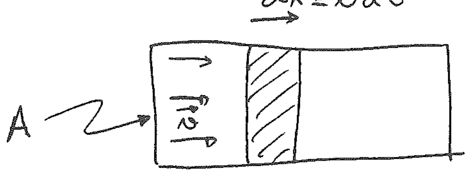
Forças sobre correntes:

Como já dissemos, a maneira mais fácil de obtermos cargas em movimento é através de correntes. Por isso, gostaríamos de saber qual a força devido a $\vec{B}$ em um fio que carrega uma corrente I. Primeiro, definamos a corrente I. Dado um fio de secção reta com área A, a corrente é a quantidade de carga que atravessa A por unidade de tempo:



$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Em termos da velocidade das cargas $\vec{v}$, podemos achar a corrente I. Durante um intervalo dt, as cargas se movem de $\vec{v}\, dt$. Se a velocidade for normal a A:



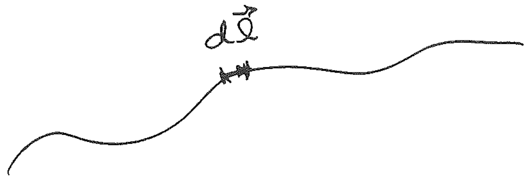
O volume varrido pelas cargas é:

$$dV = A v\, dt$$

Se a densidade de carga que se move for ρ (note que ρ não é a densidade total, normalmente, pois sempre há um "fundo" de carga de sinal oposto que garante que a carga líquida é zero), a quantidade de carga que passa por A em dt é aquela contida no volume dV:

$$dQ = \rho A v \, dt \Rightarrow I = \frac{dQ}{dt} = \rho A v$$

Se tivermos um elemento infinitesimal de fio de comprimento $d\vec{l}$ (note que ele tem direção)



a carga total (em movimento) dentro do elemento é:

$$dq = A \rho \, dl$$

e a velocidade será: $v\left(\frac{d\vec{l}}{dl}\right)$ onde $\frac{d\vec{l}}{dl}$ é um VERSOR na direção de $d\vec{l}$. Logo, a força sobre o elemento num ponto onde o campo magnético é $\vec{B}$ é:

$$d\vec{F}_m = (dq)(\vec{v} \times \vec{B}) = (A \rho \, dl)\left[\frac{v}{dl} \, d\vec{l} \times \vec{B}\right]$$

$$= \rho A v \, d\vec{l} \times \vec{B} = I \, d\vec{l} \times \vec{B}$$

ou $d\vec{F}_m = \vec{I} \times \vec{B} \, dl$, onde "transferimos" o caráter vetorial para a corrente $\vec{I}$

A força total sobre o fio é dada por integração:

$$\vec{F}_m = \int I \, d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

onde a integral de caminho é feita sobre todo o fio. Frequentemente, a corrente é uniforme ao longo do fio e:

$$\vec{F}_m = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

As considerações acima são importantes se temos fios finos. Às vezes temos correntes em superfícies estendidas ou correntes em volumes. Nesse caso, o cálculo da força magnética parte de elementos de área ou de volume. Por exemplo, se a superfície tem uma corrente de carga devido ao movimento de uma densidade superficial de carga $\underline{\underline{\sigma}}$:

$$dq = \sigma \, d\ell_\perp \, d\ell$$

onde $d\ell_\perp$ é a largura de uma "faixa" de corrente infinitesimal (ver Fig. 5.13) e a velocidade continua sendo:

$$\vec{v} \left(\frac{d\vec{\ell}}{d\ell} \right)$$

então:

$$d\vec{F}_m = dq \, (\vec{v} \times \vec{B}) = (\sigma \, d\ell_\perp d\ell) \left[v \left(\frac{d\vec{\ell}}{d\ell} \right) \times \vec{B} \right]$$

$$= \sigma \, d\ell_\perp \, v \, d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

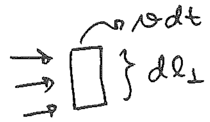
Note que $d\ell_\perp d\ell = da$ é o elemento superficial de área. Assim, lembrando que $d\vec{\ell}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção:

$$d\vec{F}_m = \sigma \vec{v} \times \vec{B}\, da$$

A quantidade $\sigma \vec{v} = \vec{K}$ é chamada de densidade superficial de corrente e é a corrente por unidade de comprimento transversal:

$$\vec{K} = \frac{d\vec{I}}{d\ell_\perp}$$

pois, num intervalo dt, a carga que atravessa um segmento de comprimento $d\ell_\perp$ é:



$$dq = \sigma\, d\ell_\perp\, v\, dt$$

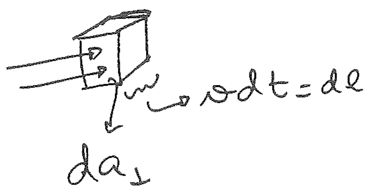
$$\Rightarrow \quad dI = \frac{dq}{dt} = \sigma v\, d\ell_\perp \quad \text{e} \quad K = \frac{dI}{d\ell_\perp} = \sigma v$$

Logo:

$$d\vec{F}_m = \vec{K} \times \vec{B}\, da \Rightarrow \vec{F}_m = \int \vec{K} \times \vec{B}\, da$$

onde a integral é calculada sobre toda a superfície onde há $\vec{K}$.

Finalmente, se a corrente se distribui por um volume, teremos uma densidade volumétrica de corrente, que será a corrente que atravessa uma dada superfície infinitesimal $da_\perp$:



$$dq = \rho\,(v\,dt)\,da_\perp \Rightarrow dI = \frac{dq}{dt} = \rho v\,da_\perp$$

e

$$J = \frac{dI}{da_\perp} = \rho v$$

ou, vetorialmente, $\vec{J} = \rho\vec{v}$. Segue que :

$$d\vec{F}_m = dq\,(\vec{v}\times\vec{B}) = \rho v\,da_\perp dt\,(\vec{v}\times\vec{B})$$

$$= \rho\,\underbrace{da_\perp\,dl}_{dV}\,(\vec{v}\times\vec{B}) = \rho\,(\vec{v}\times\vec{B})\,dV$$

$$\Rightarrow d\vec{F}_m = (\vec{J}\times\vec{B})\,dV$$

Integrando: $\vec{F}_m = \int \vec{J}\times\vec{B}\,dV$

Resumindo, os análogos das densidades linea superficial ou volumétrica de <u>carga</u> da eletrostática

$$\left.\begin{aligned} dq &= \lambda\,dl \\ dq &= \sigma\,da \\ dq &= \rho\,dV \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{eletrostática}$$

são as densidades linear, superficial e volumétrica de corrente:

$$\left.\begin{aligned} d\vec{I} &= \vec{I}\,dl \\ d\vec{I} &= \vec{K}\,da \\ d\vec{I} &= \vec{J}\,dV \end{aligned}\right\}\ \text{magnetostática}$$

que agora são <u>VETORES</u>.

(Problema 5.5, 5.6)

Agora, estamos na posição de expressar matematicamente uma das leis mais importantes do eletromagnetismo: A CONSERVAÇÃO (LOCAL) DA CARGA.

A corrente que atravessa uma superfície <u>S</u> é dada, em função de $\vec{J}$ por:

$$dI = |\vec{J}|\,da_{\perp} = \vec{J}\cdot d\vec{a}$$

onde usamos o fato de que $\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,B_{\perp}$, onde $B_{\perp}$ é o componente do vetor $\vec{B}$ na direção de $\vec{A}$ (lembre-se de que $d\vec{a}$ é NORMAL ao elemento de área). Integrando

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{a} = \frac{dQ}{dt}$$

Se a superfície for fechada, então podemos usar o teorema de Gauss:

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{a} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dV$$

Ora, mas a carga total no volume V é:

$$Q = \int_V \rho \, dV$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_V \rho \, dV\right] = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$$

(Podemos "passar" a derivada para dentro da integral porque o volume é fixo no espaço. É como:

$$\frac{d}{dy}\left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right] = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx \quad)$$

Mas a carga que atravessa a superfície S, por unidade de tempo, é igual à variação da carga em V (multiplicada por −1), SE NÃO HÁ CRIAÇÃO OU DESTRUIÇÃO DE CARGA. Logo:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J} \, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV$$

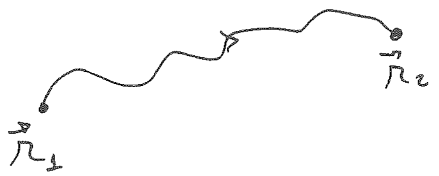
$$\Rightarrow \int_V \left[\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dV = 0$$

Como isso é válido para qualquer volume $\underline{V}$, o integrando é nulo:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

"Equação de continuidade da carga elétrica"

Ela reflete uma lei de conservação <u>local</u>: a carga é conservada em qualquer volume por menor que ele seja. Em princípio, poderia haver conservação GLOBAL de carga: a carga é destruída em $\vec{r}_1$ e é imediatamente criada em $\vec{r}_2$. A equação acima diz que isso é impossível. Se a carga começa em $\vec{r}_1$ e acaba em $\vec{r}_2$ ela tem que se mover continuamente de um ponto ao outro.



Lei de Biot-Savart

A lei de Biot-Savart nos dá o campo magnético criado por um elemento de corrente ESTACIONÁRIA. É o análogo da lei de Coulomb da eletrostática.
O campo $d\vec{B}$ criado por um elemento de corrente ESTACIONÁRIA $d\vec{I}$ é:

$$\boxed{d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \, d\vec{I}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$ Lei de Biot-Savart

Particularizando para elementos lineares, superficiais e volumétricos de corrente:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{I}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \, dl'$$

ou

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{K}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \, dS'$$

ou

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \, dV'$$

$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ (Isso é uma definição no sistema SI).

Antes de aplicarmos a lei para casos específicos vamos estudar algumas conseqüências importantes.

• <u>Cálculo do divergente de $\vec{B}$</u>:

Usando a lei de Biot-Savart para o caso de correntes volumétricas (os outros casos são casos particulares desse se escrevermos as correntes em termos de funções Delta de Dirac)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, dV'$$

Tomando o divergente e lembrando que $\vec{\nabla}$ atua sobre a variável $\vec{r}$ e <u>não</u> sobre $\vec{r}\,'$, que é uma variável muda de integração:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{J} \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right] dV'$$

Temos agora que usar:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{J}\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right] = \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{J}) - \vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}\times\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]$$

Como $\vec{J}$ é função de $\vec{r}\,'$ (e não de $\vec{r}$) $\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{J}(\vec{r}\,') = 0$.
O segundo termo também é nulo porque:

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 0$$

(A translação de $\vec{r} \to \vec{r}-\vec{r}\,'$ não afeta essa prova)

Assim:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$$

Essa é uma das 2 equações fundamentais da magnetostática. Ela expressa o fato de que não há fontes de campo magnético na forma de "cargas magnéticas". Apenas correntes de carga ELÉTRICA criam campo magnético.

Cálculo do rotacional de $\vec{B}$:

Vamos agora calcular $\vec{\nabla}\times\vec{B}$. Usando procedimento análogo:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\nabla}\times\left[\vec{J}\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right]dV'$$

Agora, precisamos de:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

Como $\vec{A} = \vec{J}(\vec{r}')$, que não depende de $\vec{r}$, qualquer ação de $\vec{\nabla}$ sobre $\vec{A}$ dará zero. Sobram portanto apenas 2 termos: $\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{\vec{J}(\vec{r}')\left[\vec{\nabla}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right] - (\vec{J}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right\}dV'$$

Já vimos que $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}) \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) = 4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$

e o primeiro termo dá:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}')\,4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')\,dV' = \mu_0\vec{J}(\vec{r})$$

O segundo termo pode ser manipulado da seguinte maneira:

$$-\vec{J}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right) = +\vec{J}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\right)$$

onde $\vec{\nabla}'$ atua na variável $\underline{\underline{\vec{r}'}}$ e não sobre $\vec{r}$ e usamos que:

$$\frac{d}{dx}f(x-x') = -\frac{d}{dx'}f(x-x')$$

Assim, se analisarmos componente por componente, temos:

$$(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}')\, f$$

onde f pode ser $\dfrac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ ou $\dfrac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ ou $\dfrac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$.

Usando que: $\vec{\nabla}'\cdot(f\vec{A}) = \vec{A}\cdot\vec{\nabla}' f + f\,\vec{\nabla}'\cdot\vec{A}$ temos:

$$\vec{A}\cdot\vec{\nabla}' f = \vec{\nabla}'\cdot(f\vec{A}) - f\,\vec{\nabla}'\cdot\vec{A}$$

Mas $\vec{\nabla}'\cdot\vec{J}(\vec{r}\,') = 0$ para correntes estacionárias pois

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \quad \text{se} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Assim, o segundo termo de $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ é:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\nabla}'\cdot\left[\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')_i\,\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right] dV'$$

onde o subscrito $\underline{i}$ significa a componente $\underline{i}$ de $(\vec{r}-\vec{r}\,')_i$. Usando o teorema de Gauss:

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')_i\,\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$\underline{S}$ agora engloba toda a configuração de correntes. Ela pode ser feita maior que a região onde há correntes sem afetar a integração original. Nesse caso, a integração sobre $\underline{S}$ dá zero, pois $\vec{J}(\vec{r}\,')=0$.
Assim:

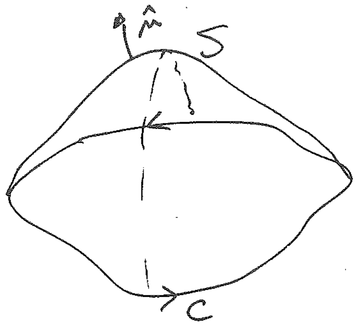
$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}}$$

"Lei de Ampère": que é a outra equação básica da magnetostática.

A lei de Ampère pode ser escrita na forma integral, que é muito útil:

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

onde $\underline{S}$ é uma superfície aberta, cujo contorno é C.



A superfície é "orientável": Podemos "escolher um lado" para o qual aponta a normal $\hat{n}$. Nesse caso, fica estipulada a direção de circulação de C pela regra da mão direita.

Usando agora o teorema de Stokes:

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{S}' = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$$

Além disso:

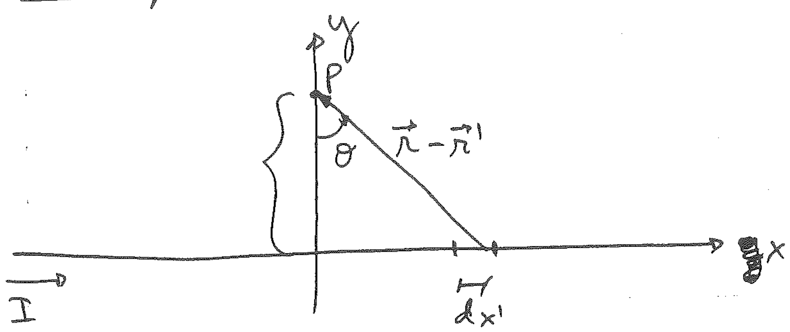
$$\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = I_{ENC} = \begin{cases}\text{corrente total que} \\ \text{atravessa a superfície} \\ \underline{S}\end{cases}$$

Assim:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{ENC}$$

Nessa forma integral, a lei de Ampère desempenha papel semelhante à lei de Gauss na eletrostática

<u>Exemplo</u>: Fio condutor fino infinito com corrente I.



Pela lei de Biot-Savart

$$\vec{I}(\vec{r}')\,dl' = I\,dx'\,\hat{x} \quad ; \quad \vec{r} = y\,\hat{y} \quad e \quad \vec{r}' = x'\hat{x}$$

$$(\vec{r}-\vec{r}') = y\,\hat{y} - x'\,\hat{x} \qquad |\vec{r}-\vec{r}'|^3 = [y^2 + x'^2]^{3/2}$$

$$\vec{I}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')\,dl' = I\,dx'\,\hat{x}\times[y\,\hat{y}-x'\hat{x}] = I\,y\,dx'\,\hat{z}$$

Assim: $\vec{B}(\vec{r}) = B_z(\vec{r})$

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\,y\,dx'}{[y^2+x'^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,y\int\frac{dx'}{[y^2+x'^2]^{3/2}}$$

Suponhamos, primeiro, que o fio se estende de x_1 até x_2.
Se definirmos $\underline{\theta}$ como na figura (y é constante):

$$\cos\theta = \frac{y}{(x'^2+y^2)^{1/2}} \quad ; \quad \tan\theta = \frac{x'}{y} \Rightarrow dx' = y\sec^2\theta\,d\theta$$

$$\int\frac{dx'}{[y^2+x'^2]^{3/2}} = \int y\sec^2\theta\,d\theta\,\frac{\cos^3\theta}{y^3} = \frac{1}{y^2}\int\cos\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow B_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi y}\int\cos\theta\,d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi y}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

onde $\sin\theta_i = \dfrac{x_i}{[x_i^2+y^2]^{1/2}}$ e $i = 1,2$

Essa fórmula é geral para um segmento de corrente estacionária de x_1 a x_2. Se

$$x_1 \to -\infty \Rightarrow \sin\theta_1 = -1 \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$x_2 \to +\infty \Rightarrow \sin\theta_2 = +1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

Assim:

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi y} 2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

De maneira geral, por simetria, podemos expressar o resultado em coordenadas cilíndricas (o fio agora é $\parallel$ a $\hat{z}$)

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}}$$

$\Rightarrow$ Campo de um fio condutor fino infinito com corrente estacionária I

Esse mesmo resultado pode ser muito mais facilmente encontrado usando-se a lei de Ampère integral. Por simetria, o campo tem a direção $\hat{\phi}$:

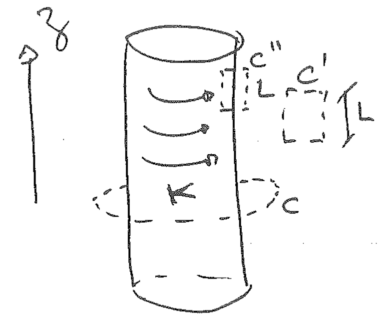
$$\vec{B} = B\hat{\phi}$$

Além disso, B é constante ao longo de um círculo de raio $\underline{s}$ com centro no fio e normal a ele. Assim:

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\, 2\pi s = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}}$$

Exemplo: Campo de um solenóide infinito



$K = nI$

onde n = número de voltas por unidade de comprimento

O campo $\vec{B}$ tem a direção $\hat{z}$. Ele não pode ter a direção $\hat{\phi}$ porque se tomarmos o circuito C acima e aplicarmos a lei de Ampère teríamos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\phi 2\pi s = \mu_0 I_{ENC} = 0 \Rightarrow B_\phi = 0$$

Além disso, o campo não pode ser radial também pois, se ele apontasse para fora e nós revertêssemos o sinal da corrente ele teria que trocar de sinal e passar a apontar para dentro. Mas reverter a corrente é equivalente a virar o solenóide de ponta cabeça. E isso não poderia inverter o sinal de B_s! (Pois como é que o solenóide sabe que está de cabeça prá cima ou prá baixo?). Assim:

$$\vec{B} = B\,\hat{z}$$

Se tomarmos o circuito C' acima e aplicarmos a lei de Ampère, teremos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = [B(a) - B(b)]L = \mu_0 I_{ENC} = 0$$

onde os lados na direção $\hat{z}$ distam de a e b do centro do solenóide:

$$\Rightarrow B(a) = B(b) = \text{const. independente da distância do eixo.}$$

Mas se $s \to \infty$, $B(s) \longrightarrow 0$. (Isso não é tão óbvio assim, já que o solenóide é infinito, mas é verdade nesse caso também). Logo, fora do solenóide $\vec{B} = \vec{0}$:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{0} \qquad \text{(FORA DO SOLENÓIDE)}}$$

Dentro do solenóide, o campo é não nulo. Aplicando a lei de Ampère ao circuito C":

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_z L = \mu_0 I_{ENC} = \mu_0 n I L$$

$$\Rightarrow B_z = \mu_0 n I \quad \text{independente de } s$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z} \qquad \text{(DENTRO DO SOLENÓIDE)}}$$

Potencial vetor

Na eletrostática, a equação:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

permitiu-nos introduzir o potencial elétrico V:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

que simplificava consideravelmente os cálculos. Na magnetostática temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

O campo elétrico podia ser escrito como um gradiente porque isso implica imediatamente que o rotacional é zero. Por outro lado, podemos escrever:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

porque

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

não importa qual seja $\vec{A}$. Entretanto, note que o potencial vetor $\vec{A}$, por ser um vetor, não diminui tanto os cálculos como o potencial elétrico escalar $V(\vec{r})$.

O potencial elétrico era definido a menos de uma constante arbitrária, pois isso não altera o campo elétrico, que é a quantidade física:

$$\underbrace{V'(\vec{r})}_{\Downarrow} = \underbrace{V(\vec{r}) + C}_{\Downarrow}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} V'(\vec{r}) \; ; \; \vec{E} = -\vec{\nabla}(V(\vec{r}) + C) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{E}'}$$

Da mesma forma, podemos acrescentar a $\vec{A}$, qualquer campo vetorial $\vec{G}(\vec{r})$ cujo rotacional é zero, SEM ALTERAR O CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B}$:

$$\text{Se} \quad \vec{\nabla}\times\vec{G}=\vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{G})=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{G}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$$

Mas se $\vec{G}$ tem rotacional nulo $\Rightarrow \vec{G}=\vec{\nabla}\lambda$
(pode ser escrito como o gradiente de um campo escalar).

Isso mostra que existe uma ambigüidade enorme na definição de $\vec{A}$:

$$\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\lambda \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}$$

Iremos tomar partido dessa ambigüidade. Pois se levarmos:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

à outra equação da magnetostática:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\mu_0\vec{J}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\mu_0\vec{J}$$

Podemos eliminar o termo acima, restringindo a classe de funções $\vec{A}(\vec{r})$ àquelas que têm:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0}$$

de tal forma que ficamos com:

$\boxed{\nabla^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}}$ que equivale a 3 Eqs. de Po

$$\nabla^2 A_x=-\mu_0 J_x \ ; \ \nabla^2 A_y=-\mu_0 J_y \ ; \ \nabla^2 A_z=-\mu_0 J_z$$

Podemos nos perguntar se é sempre possível achar um campo $\vec{A}$ tal que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

e $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. A resposta é sim. Todo campo vetorial é unicamente determinado se especificamos seu rotacional e seu divergente (desde que o campo vá a zero no infinito assim como as funções que definem seu rotacional e seu divergente: Teorema de Helmholtz $\rightarrow$ Apêndice B do livro). Assim, se $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ a equação:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

tem como solução:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV'$$

ou

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_x(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV' \quad , \text{ etc.}$$

assim como:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_0(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV'$$

DESDE QUE $\vec{J}(\vec{r})$ SEJA LOCALIZADO, OU SEJA, CAIA A ZERO SUFICIENTEMENTE RÁPIDO COM $\vec{r}$ QUANDO $(|\vec{r}| \rightarrow \infty)$. Lembre que a mesma exigência era feita na equação de Poisson da eletrostática.

Obviamente,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')\,ds'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

para densidades superficiais de corrente ou:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}(\vec{r}\,')\,dl'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

para densidades lineares de corrente.

Dessa maneira completamos uma série de analogias com a eletrostática.

Note como $\vec{A}(\vec{r})$ geralmente tem a mesma direcao da corrente. Isso é útil na resolução de problemas.

Exemplo 5.12 - $\vec{A}(\vec{r})$ para um solenóide infinito com n voltas por unidade de comprimento, raio R e corrente I.
Uma maneira de calcular $\vec{A}(\vec{r})$ é usar a fórmula:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, ds'$$

Como a distribuição de correntes é infinita, não é correto utilizar essa fórmula (a não ser que se calcule primeiro para um cilindro finito de comprimento L e se tome $L \to \infty$). Vamos proceder de outra maneira. A integral de linha de $\vec{A}$:

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \Phi_B = \text{Fluxo de } \vec{B}$$

onde C é a borda de uma superfície aberta S.
Note a analogia com a lei de Ampère:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{ENC}$$

Nesse caso, como a corrente é azimutal (ou seja, é na direção do versor $\hat{\phi}$), $\vec{A}$ também o será:

$$\vec{A} = A_\phi\,\hat{\phi}$$

Já sabemos que o campo magnético $\vec{B}$ é nulo do lado de fora do cilindro e constante dentro:

$$\vec{B} = B_z\,\hat{z} = \mu_0 n I\,\hat{z} \quad (s < R)$$

Portanto, para círculos de raio s e concêntricos ao cilindro:

$$\Phi_B(s) = \begin{cases} (\pi s^2)\,\mu_0 n I & s < R \\ \\ (\pi R^2)\,\mu_0 n I & s \geq R \end{cases}$$

Assim:

$$\oint_{C(s)} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi s\, A_\phi(s) = \Phi_B(s)$$

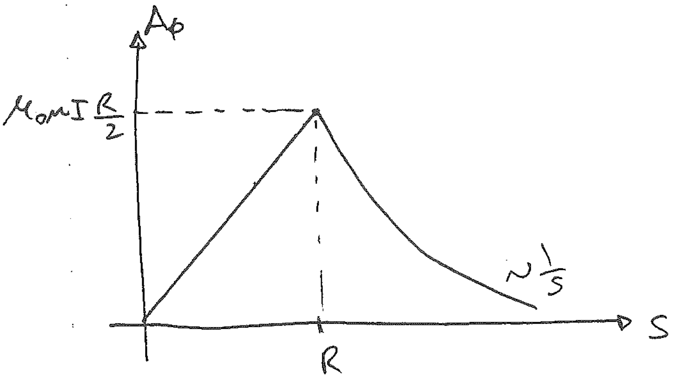
$$\Rightarrow \boxed{A_\phi(s) = \begin{cases} \mu_0 n I \dfrac{s}{2} & s < R \\ \\ \mu_0 n I \dfrac{R^2}{2s} & s \geq R \end{cases}}$$

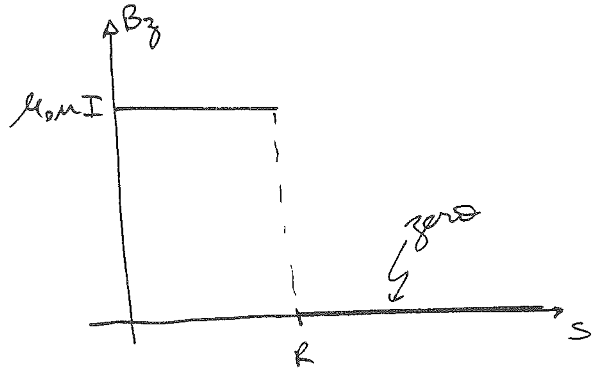
Note como, para fora do cilindro,

$\vec{B} = \vec{0}$ mas $\vec{A}(\vec{r}) \neq \vec{0}$!

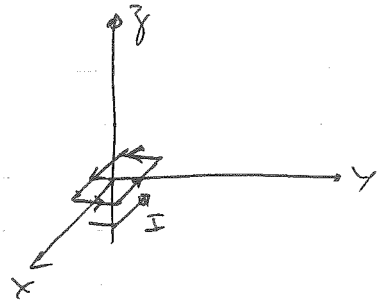
Não há nenhum problema, porque:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (A_\phi \hat{\phi}) = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s A_\phi)\,\hat{z} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\mu_0 n I \frac{R^2}{2}\right)\hat{z} = \vec{0}$$





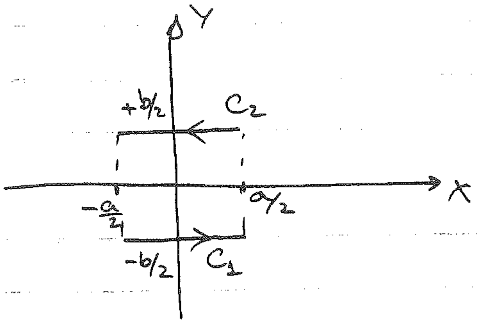
Potencial vetor de um circuito retangular (lados $\underline{a}$ e $\underline{b}$) de corrente I (para $|\vec{r}| >> a, b$)



Temos que:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Nos lados paralelos ao eixo $\hat{y}$, $d\vec{\ell}' = d\ell' \hat{y}$ e nos outros lados, $d\vec{\ell}' = d\ell' \hat{x}$. Tomemos os lados ao longo de x:



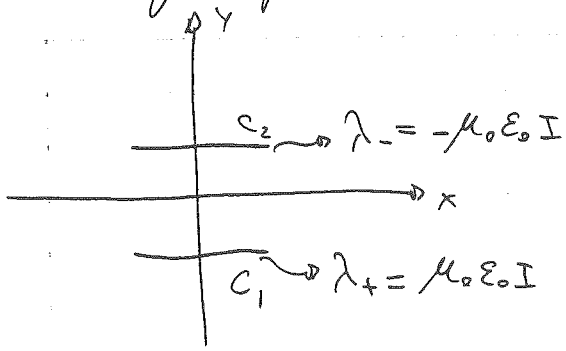
Como $d\vec{\ell}' = d\ell' \hat{x}$, apenas A_x é diferente de zero:

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\ell'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Como a corrente tem direções contrárias:

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\underset{C_1}{\int_{-\frac{a}{2}}^{a/2}} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \underset{C_2}{\int_{-\frac{a}{2}}^{a/2}} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

Esse potencial é o mesmo de 2 linhas de cargas opostas nos mesmos lugares:



$$V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\int_{C_1} \frac{\lambda_+ dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{C_2} \frac{\lambda_- dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

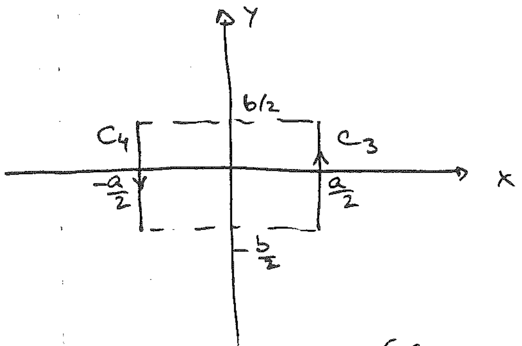
Para $|\vec{r}| \gg a,b$ podemos escrever

$$V_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}_1\cdot\hat{r}}{r^2}$$

onde $\vec{p}_1 = (\lambda_+ a)(-b\hat{y}) = -\lambda_+ ab\,\hat{y} = -\mu_0\varepsilon_0 I ab\,\hat{y}$

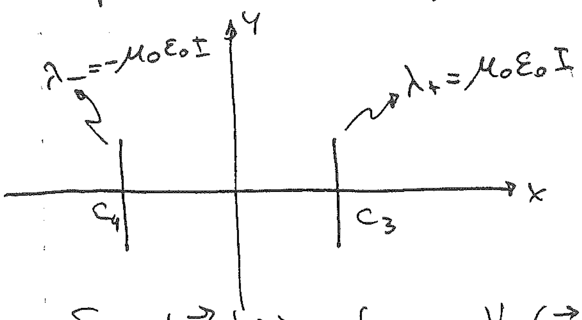
$$\Rightarrow \boxed{A_x(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}(Iab)\frac{\hat{y}\cdot\hat{r}}{r^2}}$$

Analogamente para os outros 2 lados:



$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\underset{C_3}{\int_{-b/2}^{b/2}}\frac{dy'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \underset{C_4}{\int_{-b/2}^{b/2}}\frac{dy'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

que é análoga ao caso eletrostático:



$$V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{C_3}\frac{\lambda_+ dy'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \int_{C_4}\frac{\lambda_- dy'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

Se $|\vec{r}| \gg a,b$: $V_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}_2\cdot\hat{r}}{r^2}$; $\vec{p}_2 = (\lambda_+ b)(a\hat{x}) = \mu_0\varepsilon_0 Iab$

$$\boxed{A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}(Iab)\frac{\hat{x}\cdot\hat{r}}{r^2}}$$

Usando que:

$$\hat{x} \cdot \hat{r} = \frac{x}{r} \quad e \quad \hat{y} \cdot \hat{r} = \frac{y}{r}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(Iab)}{r^3} \underbrace{(-y\hat{x} + x\hat{y})}_{\hat{z} \times \vec{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} (Iab) \frac{\hat{z} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}}$$

onde $\vec{m} = Iab\,\hat{z}$ é o momento de dipolo magnético do circuito.

Expansão multipolar para $\vec{A}(\vec{r})$:

Como vimos no exemplo de um circuito retangular de corrente, o potencial vetor a grandes distâncias do circuito pode ser escrito:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}$$

onde $\vec{m} = Iab\,\hat{z}$ era o momento de dipolo magnético do circuito. O módulo de $\vec{m}$ é a corrente vezes a área do circuito e a direção de $\vec{m}$ é dada pela regra da mão direita.

O resultado acima, bastante análogo ao potencial elétrico de um dipolo $\vec{p}$ (note, entretanto, a diferença: $V_{dip} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$) sugere que haja uma expansão multipolar para $\vec{A}(\vec{r})$, assim como havia na eletrostática.

Realmente, se tivermos um circuito qualquer de corrente (na verdade, qualquer distribuição localizada de correntes):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I}(\vec{r}\,')\,dl'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Se a corrente for a mesma ao longo do circuito (do contrário, não se trata de uma corrente estacionária!)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

onde a integral $\oint_C$ é ao longo do circuito.

Usando a expansão já deduzida:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{[r^2+r'^2-2rr'\cos\theta']^{1/2}} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta')$$

onde θ' é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}'$.

$$\Rightarrow \cos\theta' = \hat{r}\cdot\hat{r}'$$

teremos:

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\sum_{l=0}^{\infty}\oint_c \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta')\, d\vec{l}'$$

O termo em $l=0$ é:

$$A_{MON}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\oint_c d\vec{l}' = 0$$

pois a integral de linha sobre um caminho fechado se anula. Isso reflete o fato de que não existem termos de MONOPOLO MAGNÉTICO, pois não existem "cargas magnéticas":

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

O primeiro termo não necessariamente nulo é o termo de $l=1$:

$$\vec{A}_{DIP}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\oint_c r'\cos\theta'\, d\vec{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\oint_c \hat{r}\cdot\vec{r}'\, d\vec{l}'$$

A expressão acima pode ser manipulada da seguinte maneira

Sejam dois vetores constantes $\vec{c}$ e $\vec{e}$ e o campo vetorial:

$$\vec{H} = (\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{e}$$

O teorema de Stokes nos dá:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$$

O rotacional de $\vec{H}$ é:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{\nabla}\times\left[(\vec{c}\cdot\vec{r})\vec{e}\right] = (\vec{c}\cdot\vec{r})(\vec{\nabla}\times\vec{e}) - \vec{e}\times\vec{\nabla}(\vec{c}\cdot\vec{r})$$

Como $\vec{e}$ é constante $\vec{\nabla}\times\vec{e} = \vec{0}$ e:

$$\vec{\nabla}(\vec{c}\cdot\vec{r}) = \vec{\nabla}(c_x x + c_y y + c_z z) = c_x\hat{x} + c_y\hat{y} + c_z\hat{z} = \vec{c}$$

Assim:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = -\vec{e}\times\vec{c}$$

Levando ao teorema de Stokes:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \vec{e}\cdot\left[\oint_C (\vec{c}\cdot\vec{r})\,d\vec{l}\right]$$

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot d\vec{S} = -(\vec{e}\times\vec{c})\cdot\int_S d\vec{S} = -\vec{e}\cdot\left[\vec{c}\times\int_S d\vec{S}\right]$$

onde usamos a propriedade do produto triplo $\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

Igualando:

$$\vec{e}\cdot\left[\oint_C (\vec{c}\cdot\vec{r})\,d\vec{l}\right] = \vec{e}\cdot\left[-\vec{c}\times\int_S d\vec{S}\right]$$

Como $\vec{e}$ é arbitrário: $\Rightarrow$ $\boxed{\oint_C (\vec{c}\cdot\vec{r})\,d\vec{l} = -\vec{c}\times\int_S d\vec{S}}$

Fazendo $\vec{C} = \hat{r}$ e lembrando que a variável de integração é $\vec{r}'$:

$$\oint_C (\hat{r}\cdot\vec{r}')\,d\vec{\ell}' = -\hat{r}\times\int_S d\vec{S}'$$

e:

$$\boxed{\vec{A}_{DIP}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\left[\int_S d\vec{S}'\right]\times\hat{r} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\,\vec{m}\times\hat{r}}$$

onde $\boxed{\vec{m} = I\int_S d\vec{S}'}$ é o momento de dipolo magnético.

Note que o circuito pode não ser planar. $\int_S d\vec{S}'$ é a chamada ÁREA VETORIAL do circuito. Se o circuito é planar a área vetorial se reduz a um vetor cujo módulo é a área do circuito e a direção é dada pela regra da mão direita.

A expansão contém termos de ordem $l = 2, 3, \ldots$ que nos dão as contribuições de QUADRUPOLO MAGNÉTICO, OCTUPOLO MAGNÉTICO e assim por diante. Para $r \to \infty$ podemos nos concentrar apenas no primeiro termo não-nulo.

O campo magnético $\vec{B}$ de um dipolo magnético "puro" é: (tomando $\vec{m} = m\hat{z}$)

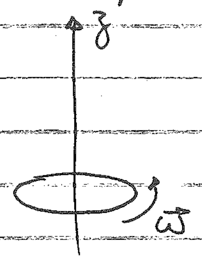
$$\vec{B}_{DIP}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}_{DIP}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\left[\frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}\underbrace{\hat{z}\times\hat{r}}_{\hat{\phi}\sin\theta}\right] = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left[\frac{\hat{\phi}}{r^2}\sin\theta\right]$$

$$\boxed{\vec{B}_{DIP}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}$$

Esse resultado é idêntico ao campo de um dipolo elétrico "puro". Portanto, podemos escrever:

$$\boxed{\vec{B}_{DIP}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3(\vec{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{m}\right]}$$

<u>Problema 5.35</u> _ Achar o momento de dipolo magnético de um disco com densidade superficial de carga σ e raio R que gira com velocidade angular ω.



Dividindo o disco em elementos infinitesimais de corrente dI na forma de aros de raio r, cada elemento tem:

$$d\vec{m} = dI\,(\pi r^2)\,\hat{z}$$

Mas: $\frac{dI}{dr} = K = \sigma v = \sigma \omega r \Rightarrow dI = \sigma \omega r\, dr$

Assim: $\vec{m} = \int d\vec{m} = \int_0^R \sigma \omega \pi r^3 dr\, \hat{z} = \pi \sigma \omega \frac{R^4}{4}\hat{z}$

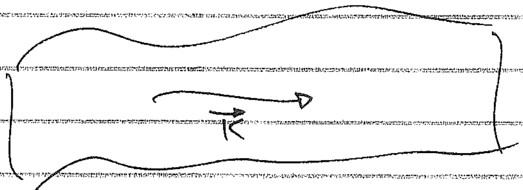
$$\boxed{\vec{m} = \frac{\pi R^4}{4}\sigma\omega\,\hat{z}}$$

Condições de contorno em magnetostática

Como sempre, as condições de contorno na magnetostática são determinadas a partir das equações básicas:

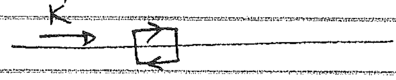
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$$

usando-se "caixinhas de Minâncora" e "circuitos" infinitesimais. Assim, se há uma superfície com uma corrente $\vec{K}$:



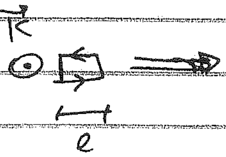
de $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \boxed{B_n^1 = B_n^2}$ (a componente normal é contínua)

Se tomamos um pequeno circuito cujos lados ao longo da superfície são AO LONGO DE $\vec{K}$



$$\Rightarrow B_1^{\parallel} = B_2^{\parallel}$$

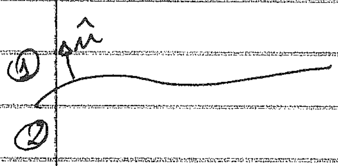
enquanto que se os lados são NORMAIS A $\vec{K}$



$$\Rightarrow (B_1^{\parallel} - B_2^{\parallel})\,\ell = \mu_0 K \ell$$

$$\Rightarrow B_1^{\parallel} - B_2^{\parallel} = \mu_0 K$$ (a discontinuidade de $B^{\parallel}$ NORMAL A $\vec{K}$ é $\mu_0 K$)

Vetorialmente:



$$\boxed{\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{K}\times\hat{n}}$$

O potencial vetor $\vec{A}$, se tomando com divergência nula:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

é contínuo através da superfície, pois A_n é contínua (de $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) e

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_B \longrightarrow 0$$ para um circuito infinitesimal

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A}_1 = \vec{A}_2} \text{ (contínuo).}$$