

Propriedades magnéticas da matéria

Assim como materiais dielétricos polarizam-se na presença de campos elétricos, também acontece de os materiais apresentarem uma resposta magnética na presença de campos magnéticos externos aplicados. Ao invés de se polarizarem, eles se "magnetizam". Existem duas diferenças básicas em relação ao caso elétrico:

(i) A magnetização induzida, na grande maioria dos materiais é bem pequena. A exceção são os chamados materiais magnéticos

(ii) A magnetização pode ser oposta ou paralela ao campo aplicado. Quando ela é paralela, os materiais são chamados PARAMAGNÉTICOS e quando ela é oposta eles são DIAMAGNÉTICOS

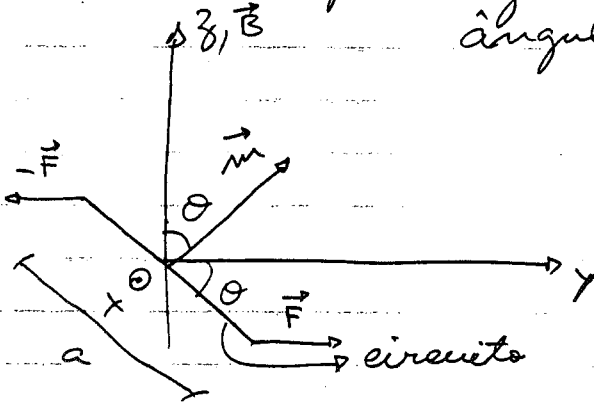
Vamos primeiramente ilustrar os 2 mecanismos físicos mais importantes na geração de PARAMAGNETISMO e DIAMAGNETISMO.

ORIENTAÇÃO DE DIPOLOS MAGNÉTICOS NUM CAMPO APLICADO :

Assim como um dipolo elétrico tende a se orientar paralelamente a um campo elétrico aplicado, um dipolo magnético também sofre um torque num campo magnético. Os dipolos magnéticos permanentes que existem na matéria têm sua origem nas correntes elétricas resultantes do movimento dos elétrons ao redor dos núcleos atômicos e também nos chamados momentos magnéticos intrínsecos ("spin") dos elétrons. Na maioria dos materiais, esses dipolos se cancelam internamente em cada átomo, mas em alguns outros o cancelamento é apenas parcial.

Quando o campo magnético é aplicado, os momentos de dipolo remanescentes sofrem um torque de alinhamento.

Considere, por exemplo, um circuito de corrente ~~em~~ retangular, de lados a e b , na presença de um campo magnético B na direção \hat{z} . Se o circuito estiver disposto de forma ~~o~~ que o ~~vetor~~ \vec{m} (que é normal ao plano do circuito e cuja direção é dada pela regra da mão direita) faça um ângulo θ com \hat{z} , teremos:



(i) Os lados de comprimento a (paralelos ao plano yz) sofrem forças na direção \hat{x} (e $-\hat{x}$). O torque dessas forças é nulo (em relação ao centro

(ii) Os lados de comprimento b (paralelos ao eixo x) sofrem as forças \vec{F} e $-\vec{F}$ na figura. Haverá, portanto, um torque resultante na direção \hat{x} , que tende a rodar \vec{m} de modo a alinhá-lo com \vec{B} .

$$\vec{N} = N \hat{x}$$

$$N = \frac{a}{2} F \sin \theta + \frac{a}{2} F \sin \theta = a F \sin \theta$$

A força sobre cada lado b é:

$$F = I B b \Rightarrow N = I a b B \sin \theta = m B \sin \theta$$

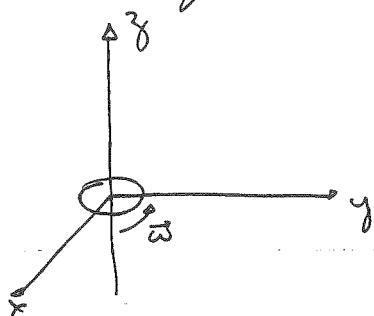
Vetorialmente:

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Note a analogia com o caso elétrico $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$

- ALTERAÇÃO DA VELOCIDADE DE UM ELÉTRON EM TORNO DE UM NÚCLEO DEVIDO A UM CAMPO MAGNÉTICO APLICADO

Suponhamos que um elétron descreve uma órbita circular de raio R , no plano xy , em torno de um de carga Q na origem. O movimento orbital é responsável por um momento na direção \hat{z}



$$\vec{m} = I \pi R^2 \hat{z}$$

$$I = \frac{-e}{T} = -\frac{e v}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow \vec{m} = -\frac{e v R}{2} \hat{z}$$

A velocidade v é dada por

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qe}{R^2} = m_e \frac{v^2}{R}$$

onde m_e é a massa do elétron.

Suponha agora que um campo ~~elétrico~~ ^{magnético} é aplicado na direção \hat{z} ($B\hat{z}$). Se a órbita tem o mesmo raio R (a alteração pequena de k não altera o resultado final).

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qe}{R^2} + e v' B = m_e \frac{v'^2}{R}$$

onde v' é a NOVA velocidade da órbita e levamos em conta o fato de que a carga negativa do elétron faz com que as forças elétrica e magnética têm a mesma direção.

Seja $\Delta v = v' - v$, a alteração da velocidade e suponha que $\Delta v \ll v$ (para campos B de laboratório $\Delta v \ll v$). Assim:

$$e v' B = m_e \frac{v'^2}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qe}{R^2} = \frac{m_e}{R} (v'^2 - v^2)$$

$$= \frac{m_e}{R} (v' - v)(v' + v)$$

$$\approx \frac{2m_e v \Delta v}{R}$$

$$\Rightarrow e v B \approx \frac{2m_e v \Delta v}{R} \Rightarrow \Delta v \approx \frac{e R B}{2m_e}$$

Note que $\Delta v > 0$, ou seja, a velocidade é aumentada (mostre que $\Delta v \ll v$ se $R \sim 1 \text{ \AA}$, $B \sim 10 \text{ T}$ e $v \sim 10^{-2} \text{ c}$, valores típicos num átomo). Assim:

$$\Delta \vec{m} = -\frac{e R \Delta v \hat{z}}{2} = -\frac{e^2 R^2 B \hat{z}}{4m_e} = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \vec{B}$$

que é oposto a \vec{B} . Note que o resultado final é válido mesmo que se reverta a direção da órbita. O efeito é sempre oposto a \vec{B} . Esse tipo de mecanismo é responsável pelo diamagnetismo da matéria.

Independente da origem microscópica da respo-
ta magnética, sua descrição macroscópica segue linhas
bastante análogas. Por exemplo, definimos a magnetiza-
ção \vec{M} como sendo o momento de dipolo magnético
por unidade de volume:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta v}$$

Um elemento de volume de um material com mag-
netização não nula produz um potencial vetor \vec{A} .

$$\begin{aligned} d\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\Delta \vec{m}(\vec{r}')] \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \end{aligned}$$

Como anteriormente, usamos:

$$\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \left[\vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV'$$

Usando: $\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f \vec{\nabla} \times \vec{A} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{A}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left\{ \vec{\nabla}' \times \left[\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] + \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} dV'$$

O segundo termo pode ser manipulado da seguinte forma. Seja \vec{c} um vetor CONSTANTE e \vec{A} um campo vetorial. Aplicando o teorema de Gauss a $\vec{A} \times \vec{c}$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{c}) dV = \int_S \vec{A} \times \vec{c} \cdot d\vec{S} = - \int_S (\vec{c} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

$$= - \int_S \vec{c} \cdot (\vec{A} \times d\vec{S}) = - \vec{c} \cdot \int_S \vec{A} \times d\vec{S}$$

onde o último passo vem do fato de \vec{c} ser constante. Agora:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

porque \vec{c} é constante. Assim:

$$\int_V \vec{c} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV = \vec{c} \cdot \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV = - \vec{c} \cdot \int_S \vec{A} \times d\vec{S}$$

Como \vec{c} é completamente arbitrário:

$$\Rightarrow \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV = - \int_S \vec{A} \times d\vec{S}$$

Assim:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \int_S \frac{\vec{H}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_V \frac{\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\}$$

Mas esse é justamente o potencial vetor criado por UM SISTEMA EQUIVALENTE de densidade volumétrica de corrente:

$$\vec{J}_B = \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

e densidade superficial de corrente:

$$\vec{K}_B = \vec{M} \times \hat{n}$$

onde \vec{J}_B existe no volume do corpo magnetizado e \vec{K}_B na sua superfície. Note a analogia com o caso elétrico em que:

$$\rho_B = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad e \quad \sigma_B = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Se agora dividirmos a corrente total \vec{J} em uma parte ligada:

$$\vec{J}_B = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

e o resto, que chamaremos de LIVRE \vec{J}_F , teremos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{J}_F + \vec{J}_B) = \mu_0 \vec{J}_F + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_F$$

Chamando de $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_F$$

que é análogo a $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_F$. Na forma integral, a lei de Ampère fica:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{F ENC}$$

A outra equação da magnetostática permanece inalterada:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Problema 6:10:

A corrente ligada desse problema existe apenas na parede lateral da barra:

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = 0$$

$$|\vec{K}_b| = |\vec{M} \times \hat{u}| = M$$

e a direção de \vec{K}_b é sempre paralela à parede com o sentido dado pela regra da mão direita (em relação a \vec{M})
Podemos tratar o sistema como sendo igual a um TORO COMPLETO MAIS UM ARCO DE CORRENTE NA REGIÃO DO "GAP" DE SENTIDO OPOSTO, pelo princípio de superposição. A contribuição do toro completo é:

$B_T = \mu_0 M$ na direção de \vec{M} no centro do "gap" (ou melhor, na direção que \vec{M} teria se o toro fosse completo)
(ver Ex. 5.10)

$$\Rightarrow \vec{B}_T = \mu_0 \vec{M}$$

A contribuição do "Arco" é dada no ~~problema~~ ^{Problema 5.10} (centro do arco). Pretendemos achar a corrente I ela é:

$$I = K_b W = Mw$$

Pela Eq.(5.35) a contribuição de cada lado do ARCO quadrado é:

$$B_{LADO} = \frac{\mu_0 I}{4\pi(\frac{a}{2})} \left[\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{\mu_0 I}{a}$$

$$\text{e } B_D = 4 B_{LADO} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\mu_0 I}{a}$$

Assim:

$$B_{AEO} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \ell_0 \mu \left(\frac{w}{a}\right)$$

O valor total, levando em conta a reversão da corrente do ar é:

$$\vec{B} = \ell_0 \left[1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{w}{a}\right) \right] \vec{M}$$

Exemplo 6.3 - Solenóide infinito de raio R , n espiras por unidade de comprimento, corrente I por espira, preenchido por material de permeabilidade μ

Pela lei de Ampère modificada para meios materiais:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_F \Leftrightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{ENC}^F$$

$$\Rightarrow H \ell = n I \ell \Rightarrow \vec{H} = n I \hat{z}$$

onde o eixo do solenóide foi posto na direção \hat{z} .
Segue que:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu n I \hat{z}$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) n I \hat{z}$$

Se o meio é paramagnético $\mu > \mu_0$ ($\chi_m > 0$; $\chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} - 1$) e \vec{B} é um pouco MAIOR do que o caso em que o solenóide tem vácuo internamente.

Se o meio é diamagnético $\mu < \mu_0$ ($\chi_m < 0$) e \vec{B} é ligeiramente reduzido.

Para um meio como FERRO DOCE em que pode-se, em algumas circunstâncias, supor $\vec{M} \propto \vec{H}$ ($\chi_m \gg 1$) e \vec{B} é aumentado tremendamente em relação ao vácuo.

Fisicamente, o que ocorre é que as correntes ligadas na superfície do meio:

$$\vec{K}_B = \vec{M} \times \hat{n} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) n I \hat{\phi}$$

agora como um "SEGUNDO SOLENÓIDE" interno que aumenta o campo do solenóide externo, no caso paramagnético, e o diminui, no caso diamagnético.