

## Lei de Ohm

Quando uma corrente flui por um condutor, alguma força tem que ser exercida sobre as cargas livres do condutor para que elas se movam.

A lei que rege esse movimento é a chamada lei de Ohm. Ela diz que a densidade ~~de~~ de corrente  $\vec{J}$  é proporcional a força por unidade de carga

$$\vec{J} = \sigma \vec{f}$$

Essa força é, na maioria das vezes, a força elétrica e temos:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{Lei de Ohm})$$

A constante de proporcionalidade  $\sigma$  é a chamada CONDUCTIVIDADE e é uma característica do meio. Até meios dielétricos têm uma pequena condutividade. A condutividade do Cobre é:

$$\sigma_{Cu} = 1,68 \times 10^8 \text{ Ohm}^{-1}\text{-m}$$

e a da água pura é:

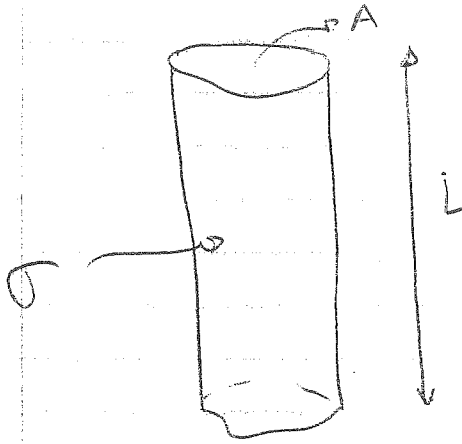
$$\sigma_{H_2O} = 2,5 \times 10^3 \text{ Ohm}^{-1}\text{-m}$$

A unidade Ohm é definida como  $\frac{V}{A}$  (volt / ampere).

O inverso da condutividade é a resistividade e é denotada por  $\rho$

(Não confundir a resistividade com a densidade volumétrica de carga e a condutividade com a densidade superficial)

Se considerarmos agora um cilindro de material de secção recta com área  $A$  e altura  $L$ , com condutividade  $\sigma$ ; tal que haja uma diferença de potencial  $V$  entre os bases podemos calcular a corrente pelo material da seguinte forma.



O campo eléctrico  $\vec{E}$  é uniforme no cilindro (ver Exemplo 7.3) Portanto  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  também é uniforme

A corrente  $I$  é  $JA$ :

$$I = JA = \sigma EA = \frac{\sigma AV}{L}$$

A constante  $\frac{L}{\sigma A} = \frac{\rho L}{A} = R$  é a RESISTÊNCIA do cilindro e a forma usual da lei de Ohm é:

$$V = RI \quad (\text{Lei de Ohm})$$

Note que a resistência  $R$  depende não só do material mas também da GEOMETRIA do condutor/resistor.

O inverso da resistência é a CONDUTÂNCIA do resistor:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{\sigma A}{L}$$

A resistência é medida em Ohm no sistema MKS (SI)

### Relaxação para o equilíbrio eletrostático

Sabemos que NO EQUILÍBRIO ELETROSTÁTICO toda a carga introduzida em um condutor migra para a sua superfície. Podemos nos perguntar sobre o tempo característico desse processo.

Considere, para isso, um meio condutor infinito com condutividade  $\sigma$  e onde foi introduzida uma densidade de carga inicial:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r})$$

Da equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

Da lei de Gauss:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rho$$

cujá solução com condições inicial

$$\rho(\vec{r}, t=0) = \rho_0(\vec{r})$$

é:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

O tempo característico de decaimento é dado por:

$$\tau \equiv \frac{\epsilon_0}{\sigma} \Rightarrow \tau_{cu} \approx 1.5 \times 10^{-19} \text{ s} \text{ que é um}$$

tempo muito curto para ser detectado.

### CAMPO ELÉTRICO EM MEIOS UNIFORMES COM CORRENTES ESTACIONÁRIAS

Quando um meio condutor uniforme é atravessado por uma corrente estacionária, o potencial elétrico em seu interior satisfaz a EQUAÇÃO DE LAPLACE. Isso porque:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{J}}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (\text{porque o meio é uniforme e } \sigma \text{ não varia})$$

$$= 0 \quad (\text{porque } \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

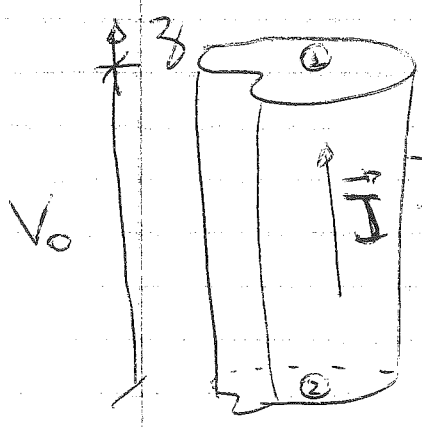
para correntes estacionárias, por definição)

Assim:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

Como  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \boxed{\nabla^2 V = 0}$   
(Eq. de Laplace)

Exemplo 7.3 Campo elétrico em um condutor cilíndrico uniforme atravessado por uma corrente estacionária devido a uma voltagem  $V_0$



Seção reta constante

Temos que:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

Precisamos especificar as condições de contorno

$$Em (1) e (2) \quad V(\vec{r}) = const.$$

Temos  $V(z) = 0$  e  $V(L) = V_0$ . Nas paredes laterais

$$\vec{J} \cdot \hat{n} = 0 \quad (\text{De contrário, haveria fluxo de carga para fora do condutor})$$

$$\text{Como } \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \Rightarrow \vec{E} \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial n} = (\vec{\nabla} V) \cdot \hat{n} = 0$$

pois  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ . Assim temos  $V=0$  em (2)  $V=L_0$  em (1) e  $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$  nas paredes laterais. Pelo teorema de unicidade, qualquer solução é única. Se tomarmos

$$V(z) = -\frac{V_0}{L} z$$

satisfazemos a Eq. de Laplace e as condições de contorno. Essa, portanto, é a solução procurada. O campo elétrico é:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{V_0}{L} \hat{z} \Rightarrow \text{uniforme}$$

## FORÇA ELETROMOTRIZ (FEM)

Em situações eletrostáticas:

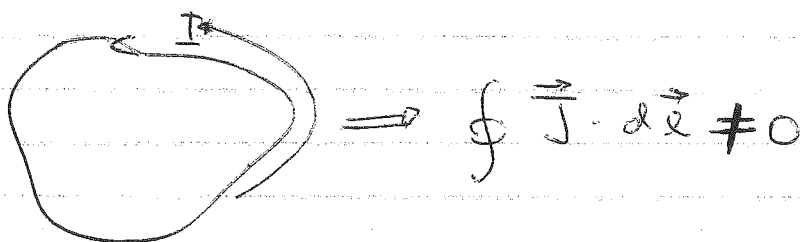
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

onde a integral é calculada ao longo de uma curva C fixa no espaço. Se C está dentro de um circuito elétrico e se o circuito consiste de material com condutividade  $\sigma$ , então:

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = \sigma \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

SE SÓ ATUAREM FORÇAS ELETROSTÁTICAS SOBRE O CIRCUITO. Daí concluímos que forças eletrostáticas não são capazes de estabelecer uma corrente ~~estável~~ em um circuito, pois, nesse caso,

$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l}$  seria diferente de zero:



Portanto, para estabelecermos uma corrente ~~estável~~ em um circuito, precisamos que existam forças que não sejam puramente eletrostáticas. Chamemos de  $f_s$  essas forças (por unidade de carga).  $f_s$  pode ter origem química (como em baterias), pode ser estabelecida mecanicamente como em uma grade Van de Graff, etc. Obviamente, haverá forças eletrostáticas no circuito também, que serão importantes para garantir que não haja acúmulo de carga em uma região (como vimos

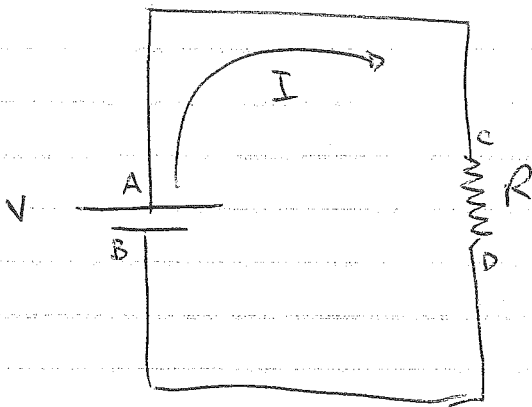
De maneira geral, as cargas livres estarão sujeitas a esses dois tipos de força (por unidade de carga)

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{E}$$

A FORÇA ELETROMOTRIZ (FEM)  $\mathcal{E}$  (que não é uma força propriamente dita, mas tem unidades de potencial elétrico (Volts)) é definida como:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint \vec{F}_s \cdot d\vec{\ell}$$

pois  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ . Ela mede o efeito acumulado da força total (por unidade de carga) ao longo do circuito  $\mathcal{C}$ . Por exemplo, num circuito composto por uma bateria IDEAL (bateria ideal é aquela com resistência interna zero) e um resistor de resistência  $R$ , temos que  $\vec{F}_s \neq 0$  e não nula dentro da bateria (e tem origem química). O terminal



A está a um potencial  $V$  acima do terminal B. Portanto há um campo elétrico  $\vec{E}$  entre A e B dentro da bateria que se OPÕE ao movimento das cargas na direção da corrente. Como a bateria

é ideal ( $r=0$ ), a força total sobre as cargas é zero (do contrário, a corrente seria infinita) e

$$\vec{F}_s = -\vec{E} \text{ pois } \vec{F} = \vec{F}_s + \vec{E} = 0$$

Fora da bateria,  $\vec{F}_s = 0$ . Entre  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , dentro do resistor,

O campo elétrico  $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$ . Assim:

$$V(D) - V(C) = - \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{\ell} < 0 \Rightarrow V(D) < V(C)$$

A face eletromotriz, nesse caso é:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{f}_s \cdot d\vec{\ell} = \int_B^A \vec{f}_s \cdot d\vec{\ell} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V$$

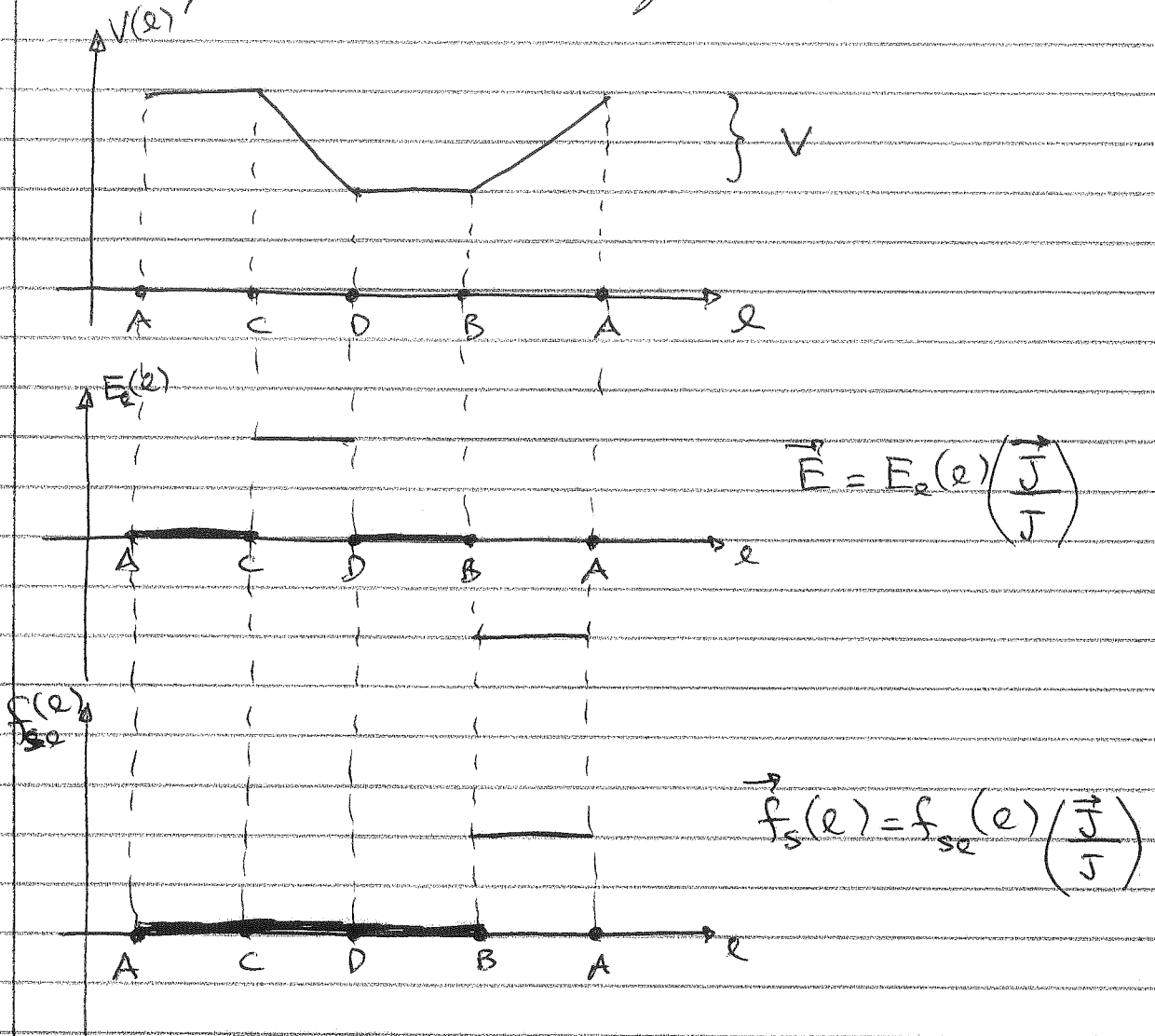
Além disso, como  $V(A) = V(C)$  e  $V(B) = V(D)$ , (estamos desprezando a resistência dos fios de contato)

$$V(D) - V(C) = V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -V$$

O papel da bateria ideal, portanto, é estabelecer uma FEM  $\mathcal{E}$  igual à sua voltagem.

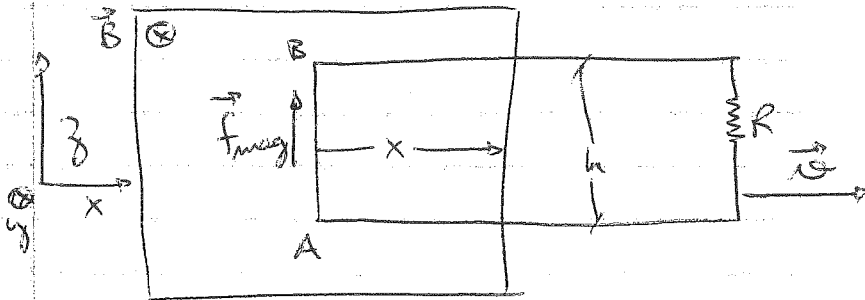


Podemos fazer um esboço da variação das várias quantidades ao longo do circuito:



### FEM gerada por movimento

Existe uma maneira muito simples de gerar FEM que é através da força de Lorentz, na presença de um campo magnético  $\vec{B}$ . Por exemplo, suponha que haja um campo magnético  $\vec{B}$  uniforme em uma região bem definida do espaço (gerado por um solenoide longo, p. ex.):



As cargas livres, no segmento  $AB$ , experimentarão uma força magnética por unidade de carga:

$$\vec{F}_{mag} = vB \hat{z}$$

Os segmentos na direção  $\hat{x}$ , sofrerão forças magnéticas perpendiculares ao fio. Assim:

$$\mathcal{E} = \int \vec{F}_s \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{F}_{mag} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B vB d\ell = vBh$$

Essa FEM estabelece uma voltagem  $V = \mathcal{E}$  nos terminais do resistor  $R$ .

Vamos agora calcular o fluxo de  $\vec{B}$  através do circuito. Como o circuito foi atravessado no sentido horário, pela regra da mão direita  $d\vec{S}$  aponta na direção  $\hat{y}$ .

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bhx$$

Como  $x$  decresce para  $\vec{v}$  na direção positiva de  $x$ .

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = -Bhv = -\mathcal{E} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

Essa é a "REGRA DO FLUXO" (ou lei do fluxo) para FEM gerada pelo movimento. Ela é uma maneira rápida de acharmos a FEM devido à força magnética. Embora nós tenhamos provado sua validade para um caso específico, ela é válida de maneira geral, para campos não uniformes e circuitos que mudam a forma ou não são planos (ou ~~em~~ veja no Griffiths pp. 296-297).

Note bem a posição do sinal MENOS e observe que a regra da mão direita é usada para dar  $d\vec{S}$  uma vez definida a direção de circulação.

## Lei de Indução de Faraday

Faraday descobriu que poderia gerar correntes em circuitos fechados em várias situações que podem ser resumidas nas 3 figuras 7.20 de Griffiths.

A situação da figura (a) já foi analisada em termos da FEM gerada por movimento. As situações das figuras (b) e (c) são completamente novas. Faraday descobriu que não só a situação (a) mas (b) e (c) poderiam ser descritas pela "lei de fluxo":

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

A FEM nas situações (b) e (c) não é do tipo magnética, pois  $\vec{v} = \vec{0}$ . Portanto, precisamos saber qual o integrando de

$$\mathcal{E} = \oint \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

Faraday fez a suposição de que

$$\vec{f} = \vec{E}$$

onde  $\vec{E}$  acima é um campo elétrico gerado por variações de fluxo magnético e NÃO por cargas elétricas estáticas (já que para esse último  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ )  
Assim, temos agora duas fontes possíveis de campos elétricos:

- (i) CARGAS ELÉTRICAS
- (ii) CAMPOS MAGNÉTICOS VARIÁVEIS

Assim, para as situações (b) e (c)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Usando o teorema de Stokes.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Como a equação é válida para qualquer circuito fechado:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Lei de indução de Faraday

Note que campos eletrostáticos têm  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  enquanto que o campo gerado por

variações temporais de  $\vec{B}$  têm  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Note também que  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  não tem nada a ver com a explicação do experimento da figura (a) (em (a)  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ ). Lá é a face de Lorentz que gera a

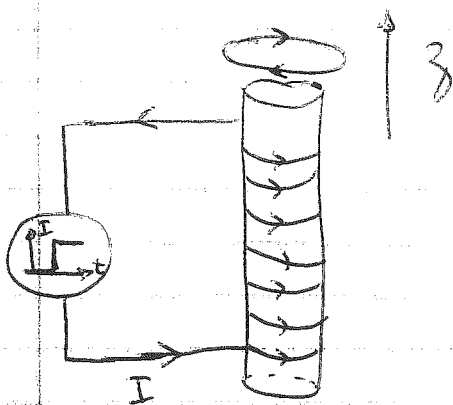
FEM. Entretanto, a Lei de Fluxo coincidentemente é a mesma. Essa coincidência, na verdade, envolve um princípio mais profundo da Física e princípio da relatividade (as leis físicas são as mesmas em todas as referências inerciais, portanto, só faz sentido falar em movimento relativo e não há um referencial absoluto).

## Lei de Lenz

O sinal negativo que aparece na "Lei do Fluxo" e na expressão diferencial da Lei de Faraday, embute um fato que é conhecido como Lei de Lenz. A Lei de Lenz é formulada da seguinte maneira:

A FEM induzida por uma mudança de fluxo magnético é tal que a corrente por ela produzida flui numa direção tal que o fluxo produzido POR ESSA CORRENTE tende a cancelar o ~~fluxo~~ a mudança de fluxo.

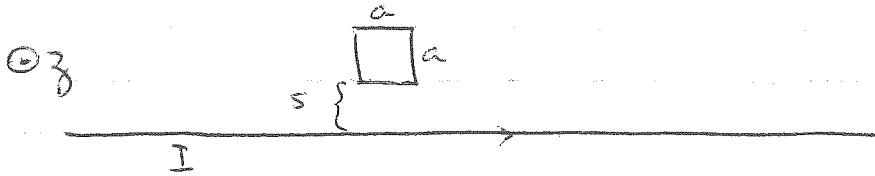
Uma demonstração clara dessa Lei pode ser feita se pusermos um circuito de fio na borda de um ELETRO-ÍMÃ:



Ao ligarmos o eletro-ímã, este cria um campo magnético na direção  $\hat{z}$ , para a corrente na direção da figura. Isso fará com que o fluxo pelo circuito circular aumente (tomando  $\hat{z}$  paralelo a  $d\vec{S}$  do circuito).

Pela Lei de Faraday e POR CAUSA DO SINAL NEGATIVO, a  $\mathcal{E}$  induzida cria uma corrente na direção OPOSTA às espiras do eletro-ímã. Por sua vez, o fluxo criado PELO CIRCUITO (NÃO O FLUXO DO ELETRO-ÍMÃ) terá a direção  $-\hat{z}$ , que é oposta à ~~de~~ MUDANÇA do fluxo do eletro-ímã. Como os fluxos são opostos o sistema ELETRO-ÍMÃ-CIRCUITO é equivalente a dois ímãs ~~de~~ com pólos IGUAIS se tocando. Por isso, haverá repulsão entre os dois.  
(Compare, CUIDADOSAMENTE, com o que acontece ~~quando~~ quando a corrente é DESLIGADA)

Problema 7.18



Primeiro, precisamos calcular o fluxo magnético  $\Phi_B$  em um instante qualquer, através do quadrado. O campo gerado pelo fio (na aproximação quase-estática) é:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{z}$$

onde  $r$  é a distância ao fio (coordenadas cilíndricas) e  $\hat{z}$  é a direção para fora do papel mostrada na figura. O fluxo é: ( $d\vec{S} = ds \hat{z}$ )

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_s^{s+a} \frac{1}{r} a dr$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{s}\right)$$

A FEM é:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{s}\right) \left(- \frac{dI}{dt}\right)$$

A corrente no quadrado  $I_a$  é:

$$I_a = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 a}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{s}\right) \left(- \frac{dI}{dt}\right)$$

Portanto, durante o tempo em que  $I$  cai a zero:

$\frac{dI}{dt} < 0 \Rightarrow \boxed{I_a > 0}$  (O pré-fator da expressão de  $I_a$  é positivo)

Pela regra da mão direita, uma corrente  $I_a$  positiva, flui no sentido ANTI-HORÁRIO

A carga total que passa por um ponto qualquer do quadrado é:

$$Q = \int I_a dt = \frac{\mu_0 a}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{s}\right) \int \left(-\frac{dI}{dt}\right) dt$$

$$\int \left(-\frac{dI}{dt}\right) dt = -[I_{final} - I_{inicial}] = I$$

Assim:

$$\boxed{Q = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi R} \ln\left(1 + \frac{a}{s}\right)}$$



## Analogia com a lei de Ampère

A forma integral da lei de Faraday:

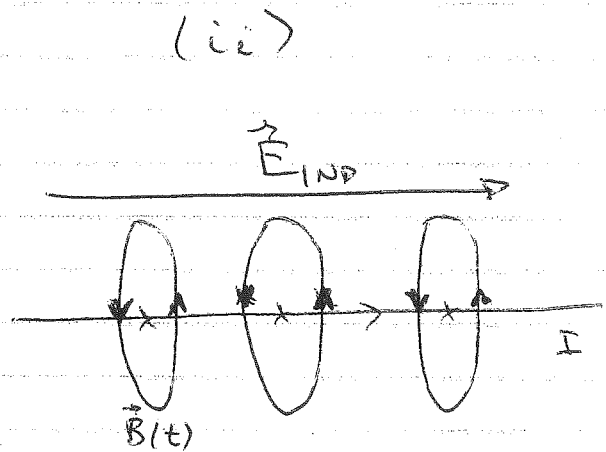
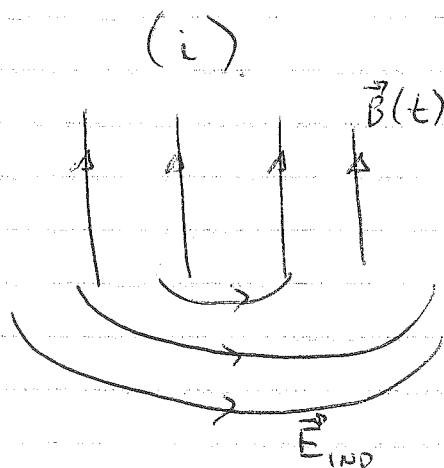
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

guarda grande analogia com a lei de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{ENC}$$

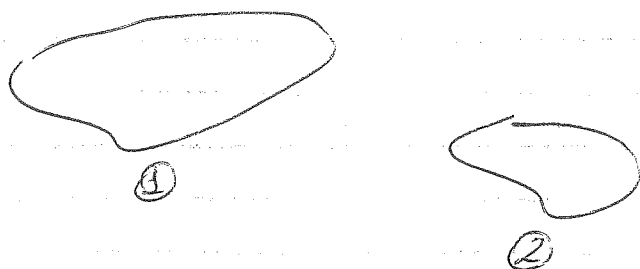
(Claro, pois ambas são leis a respeito do rotacional de um campo). Essa analogia é útil para lembrarmos, EM SITUAÇÕES DE SIMETRIA, qual a direcção do campo eléctrico induzido. Para isso, devemos notar que a mudança de fluxo  $\Phi$  é o análogo da corrente  $I_{ENC}$ .

Exemplos:



## Indutância

Suponhamos que temos 2 circuitos de fios condutores que chamaremos de ① e ②



Se passarmos uma corrente em ①, esta cria um fluxo em ②. Este é bastante complicado de calcular, mas sabemos que ele é proporcional à corrente em ① (que chamaremos de  $I_1$ ) porque

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint d\vec{l}_1 \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

onde a integral é sobre o circuito ①. Veja como  $B_1(\vec{r})$  é proporcional a  $I_1$ . Assim:

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = M_{21} I_1$$

Da mesma maneira:

$$\Phi_1 = M_{12} I_2$$

Além disso, o próprio circuito ① cria um fluxo em si mesmo (pois o campo no interior do circuito é não-nulo) que também é proporcional a  $I_1$ . Assim:

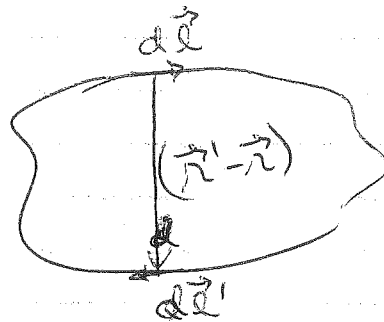
$$\Phi_1 = M_{11} I_1 + M_{12} I_2$$

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 + M_{22} I_2$$

Quando  $i=j$  temos:

$$M_{ii} \equiv L_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{d\vec{l} \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

onde usamos  $d\vec{l}$  e  $d\vec{l}'$  para denotar 2 elementos de linha DIFERENTES DE UM MESMO CACHINHO



A fórmula de Neumann mostra que os coeficientes  $M_{ij}$  só dependem do arranjo geométrico dos circuitos. Para geometrias fixas (circuitos fixos) eles são constantes que podem ser calculados. Se derivarmos em relação ao tempo:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -M_{11} \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - M_{22} \frac{dI_2}{dt}$$

ou:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ \mathcal{E}_2 &= -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \end{aligned}$$

onde  $M = M_{12} = M_{21}$

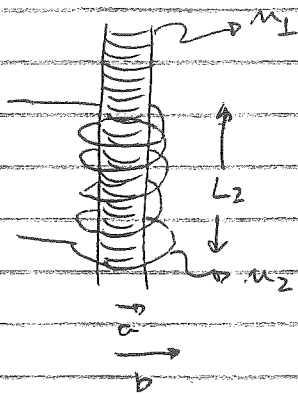
Os coeficientes  $M_{ij}$  são chamados de INDUTÂNCIA MÚTUA dos circuitos  $i$  e  $j$ , enquanto que  $L_i$  é a AUTO-INDUTÂNCIA do circuito  $i$ .

Quando há apenas um circuito, temos:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

Essa fórmula expressa matematicamente o fato de que a FEM se opõe (note o sinal negativo) a mudanças na corrente (Lei de Lenz). Por isso, às vezes observamos uma faísca ao desligarmos um aparelho elétrico: a indutância do aparelho se opõe à mudança da corrente (seu decréscimo a zero) quando uma fonte FEM induzida.

## Indutância mútua de 2 solenóides



O solenóide 1 tem  $n_1$  voltas por unidade de comprimento e raio  $a$  enquanto que o 2 tem  $n_2$  e raio  $b$  e comprimento  $L_2$ .

Para calcular a indutância mútua  $M$  é mais fácil calcular o fluxo que ① cria em ②, pois o campo de ② é muito complicado (solenóide finito)

O campo  $\vec{B}_1$  é: (supondo que uma corrente  $I_1$  passe por ①)

$$B_1 = \mu_0 n_1 I_1 \quad (\text{pela lei de Ampère})$$

O fluxo através de uma espira de ② é:

$$\Phi = B_1 \pi a^2 = \mu_0 \pi n_1 a^2 I_1$$

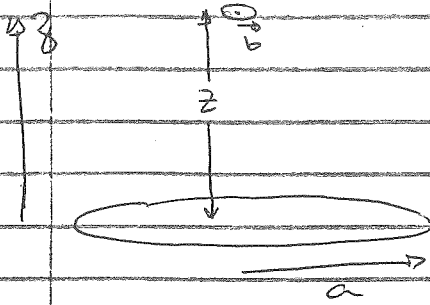
pois o campo ocupa uma área  $\pi a^2$  em cada espira de ②. O fluxo total é encontrado multiplicando-se pelo número de espiras:

$$\Phi_{21} = n_2 L_2 \Phi = \pi \mu_0 n_1 n_2 a^2 I_1 L_2 = M_{21} I_1$$

Assim:

$$M = M_{21} = \pi \mu_0 n_1 n_2 a^2 L_2$$

Problema 7.20 :



(a)  $I$  no arô grande. Ache o fluxo  $\Phi$  no arô pequeno. Como o arô pequeno é bem pequeno ( $b \ll a$ ), vamos considerar o campo do arô grande como aproximadamente constante na área do arô pequeno.

O campo de um arô de raio  $a$  a uma distância  $z$  acima de seu centro é:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{Exemplo 5.6})$$

O campo (perimetria) aponta na direção  $\hat{z}$  positiva se a corrente  $I$  circula no arô grande na direção anti-horária quando vista de cima (regra da mão direita). O fluxo  $\Phi$  é:

$$\Phi \approx B_z \pi b^2 = \frac{\pi \mu_0 I}{2} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

(b) Corrente  $I$  no arô pequeno: ache o fluxo  $\Phi'$  no arô grande. Como  $b \ll a$ , usaremos a aproximação de dipolo magnético para o campo do arô pequeno. Assim (dipolo na origem e arô grande em  $-z$ )

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (\text{Equação 5.86})$$

onde  $m = I \pi b^2$ ; Transformando para coordenadas cartesianas:  $S^2 \equiv x^2 + y^2$

$$r = \sqrt{S^2 + z^2}; \quad \cos \theta = \frac{-z}{r} = \frac{-z}{\sqrt{S^2 + z^2}}; \quad \sin \theta = \frac{S}{\sqrt{S^2 + z^2}}$$

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$$

$$\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{S^2 + z^2}} [S \cos \phi \hat{x} + S \sin \phi \hat{y} - z \hat{z}]$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta \cos\phi \hat{x} + \cos\theta \sin\phi \hat{y} - \sin\theta \hat{z}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s^2+z^2}} \left[ -z \cos\phi \hat{x} - z \sin\phi \hat{y} - s \hat{z} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{\pi \mu_0 I b^2}{4\pi (s^2+z^2)^{3/2}} \left\{ \frac{-2z}{(s^2+z^2)} \left[ s (\cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}) - z \hat{z} \right] + \right.$$

$$\left. \frac{s}{(s^2+z^2)} \left[ z (\cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}) + s \hat{z} \right] \right\} =$$

$$= \frac{\pi \mu_0 I b^2}{4\pi (s^2+z^2)^{5/2}} \left\{ -3sz (\cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}) + (2z^2 - s^2) \hat{z} \right\}$$

Esse campo deve agora ser integrado para a obtenção do fluxo  $\Phi'$ . Usando  $d\vec{S} = dS \hat{z} = s ds d\phi \hat{z}$

$$\Phi' = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I b^2}{4} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{s ds}{(s^2+z^2)^{5/2}} d\phi \left[ (2z^2 - s^2) \right]$$

$$= \frac{\pi \mu_0 I b^2}{2} \int_0^a \frac{s(2z^2 - s^2) ds}{(s^2+z^2)^{5/2}}$$

Usando que:  $\int \frac{s}{(s^2+z^2)^{5/2}} ds = \frac{(-1/3)}{(s^2+z^2)^{3/2}}$  e

$$\int \frac{s^3 ds}{(s^2+z^2)^{5/2}} = (-1/3) \frac{(3s^2+2z^2)}{(s^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^a \frac{s(2z^2 - s^2) ds}{(s^2+z^2)^{5/2}} = -\frac{2}{3} z^2 \left[ \frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{z^3} \right] + \left( \frac{1}{3} \right) \left[ \frac{(3a^2+2z^2)}{(a^2+z^2)^{3/2}} - \frac{2}{z} \right]$$

$$= \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \Phi' = \frac{\tilde{N} \mu_0 I b^2}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \Phi$$

(c) Como  $\Phi = \Phi'$  as indutâncias mútuas são iguais. Elas são:

$$M_{12} = M_{21} = M = \frac{\pi \mu_0}{2} \frac{a^2 b^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$



## Energia magnética

Suponhamos que temos uma espira qualquer. Para estabelecermos uma corrente estacionária  $I$  na espira, precisamos variar a corrente de zero até  $I$ . No processo de variação da corrente existirá uma FEM induzida

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$$

que, pela lei de Lenz, tende a OPOR-SE À ~~variação~~ variação da corrente. Portanto, devemos realizar trabalho para fazer com que a corrente cresça. Esse trabalho é armazenado REVERSIVELMENTE no circuito (de poder ser recuperado de volta). Note, que essa energia não tem nada a ver com perdas dissipativas por efeito Joule ( $\frac{dW}{dt} = RI^2$ ) pois ela é armazenada MESMO

QUE O CIRCUITO TENHA RESISTÊNCIA NULA.

Essa energia magnética é que queremos calcular.

Vamos começar por um circuito único de auto-indutância  $L$ : O trabalho realizado para mover  $dq$  pelo circuito é:

$$dW = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{(contra a FEM induzida)}}}{-\mathcal{E}} dq = L \frac{dI}{dt} (I dt) = LI dI$$

$$\Rightarrow W = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$

Suponha agora que há 2 circuitos em bobinas que chamaremos de ① e ②. Nesse caso, em cada circuito ( $i=1,2$ )

$$dW_i = -\varepsilon_i dq_i = + \frac{d\Phi_i}{dt} I_i dt = I_i d\Phi_i$$

Se os circuitos forem fixos no espaço:

$$\Phi_i = \sum_{j=1,2} M_{ij} I_j = M_{i1} I_1 + M_{i2} I_2$$

O que mostra que  $\Phi_i$  é linear nas correntes  $I_1$  e  $I_2$ . Assim:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int dW_1 + \int dW_2 = \int I_1 (M_{11} dI_1 + M_{12} dI_2) + \\ &+ \int I_2 (M_{21} dI_1 + M_{22} dI_2) = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \\ &+ M \int (I_1 dI_2 + I_2 dI_1) \end{aligned}$$

$$\text{Mas } \int I_1 dI_2 + I_2 dI_1 = \int d(I_1 I_2) = I_1 I_2$$

$$\Rightarrow W_{12} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

De maneira geral, para  $N$  circuitos, podemos escrever:

$$W = \sum_{i=1}^N \int dW_i = \int \sum_{i=1}^N I_i d\Phi_i = \int \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N I_i M_{ij} dI_j$$

Como  $\Phi_i$  é linear nas correntes  $I_j$  podemos fazer com que todas as correntes cresçam a uma mesma taxa relativa  $\alpha$ :

$$I_j' = \alpha I_j \quad \text{onde } \alpha \text{ varia de } 0 \text{ a } 1$$

$$\text{Assim: } dI_j = d\alpha I_j \Rightarrow d\Phi_i' = d\alpha \Phi_i$$

Assim:

$$W = \int_0^1 \sum_{i=1}^N I_i' \overbrace{d\alpha \Phi_i}^{d\Phi_i'} = \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i$$

Note que no sistema  $W_{12} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$  quando  $N=2$ . A fórmula acima é útil porque podemos escrever:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}_i \end{aligned}$$

Generalizando para correntes volumétricas  $\vec{J}$

$$\sum_{i=1}^N \oint I_i d\vec{\ell}_i \rightarrow \int \vec{J} dV$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV$$

Usando agora a lei de Ampère:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dV$$

Usando que:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\mu_0} \left[ \int_V \vec{B} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{\vec{B}} dV - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) dV \right] \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left[ \int_V B^2 dV - \int_S (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \right] \end{aligned}$$

A integração foi originalmente feita na região onde  $\vec{J} \neq 0$  ( $W = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{J} dV$ ). Entretanto, podemos estender a integração por todo o espaço porque  $\vec{J} = 0$  nas outras regiões. Nesse caso,

$$\vec{B} \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{e} \quad \vec{A} \sim \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \vec{A} \times \vec{B} \sim \frac{1}{r^3}$$

e a integral de superfície em  $S$  ( $S \rightarrow$  infinito) vai a zero porque a área cresce com  $r^2$ . Assim, resta apenas o primeiro termo:

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{TODO ESPAÇO}} B^2 dV$$

"Energia magnética"

Isso mostra que a energia está armazenada no campo magnético com densidade:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Energia armazenada em um solenóide longo de comprimento  $L$  ( $n$  espiras por unidade de comprimento) com corrente  $I$  e raio  $R$ .

O campo  $\vec{B}$  do solenóide é uniforme e ao longo do seu eixo dentro do mesmo e igual a zero fora.

$$B = \mu_0 n I$$

A densidade de energia é:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 n^2 I^2 = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}$$

A energia armazenada é:

$$W = \int u_B dV = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} L (\pi R^2)$$

Comparando  $W = \frac{1}{2} L I^2$  obtemos a auto-indutância:

$$L = \mu_0 n^2 \pi R^2 L$$

Problema 7.30 :

(a)

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}_1]$$

onde  $\vec{m}_1 = I_1 \vec{a}_1$  e o circuito 2 foi colocado na origem

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 + L_2 I_2$$

$$M_{21} I_1 \cong \vec{B}_1(\vec{r}) \cdot \vec{a}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi r^3} [3(\vec{a}_1 \cdot \hat{r})(\vec{a}_2 \cdot \hat{r}) - \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2]$$

$$\Rightarrow M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{a}_1 \cdot \hat{r})(\vec{a}_2 \cdot \hat{r}) - \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2]$$

Ovviamente,  $M_{12}$  é obtida fazendo-se  $\vec{a}_1 \Rightarrow \vec{a}_2$  e  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ . Se que que:

$$M_{21} = M_{12}$$

$$(b) \quad \Phi_1 = M I_2 + L_1 I_1 \quad \Phi_{12} = M I_2$$

$$dW_1^* = I_1 d\Phi_{12} = M I_1 dI_2$$

$$W_1^* = \int M I_1 dI_2 = M I_1 I_2$$

que é o termo adicional de energia que já tínhamos deduzido.

$$W_1^* = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r}) - \vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2] = -U \quad \rightarrow (\text{da Eq. 6.35})$$

A diferença de sinal corresponde à situação em que  $I = \text{const.}$  quando os circuitos se movem, caso da Eq. 6.35, onde  $\vec{m}_1$  e  $\vec{m}_2$  e portanto,  $I_1$  e  $I_2$  permanecem constantes. Nesse caso:

$$dW_F = dW + dW_{\text{ext}} \quad \left\{ \begin{array}{l} dW_F = \vec{F} \cdot d\vec{a} \text{ é o trabalho} \\ \text{das forças magnéticas sobre} \\ \text{os circuitos que se movem.} \end{array} \right.$$

onde  $dW$  é a variação da energia magnética e  $dW_{\text{ext}}$  é o trabalho realizado pelas fontes externas de energia para manter as correntes constantes. Temos que

$$W = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_i$$

Se  $I_i$ 's são constantes:  $dW = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\Phi_i$

O trabalho externo é:

$$dW_{\text{ext}} = - \sum_i \mathcal{E}_i dq_i = \sum_i d\Phi_i I_i$$

$$\Rightarrow dW_{\text{ext}} = 2 dW$$

$$\Rightarrow dW_T = -dW \Rightarrow W_T = -W$$

Isso explica o sinal de menos acima ( $W_T = 0$ )  
 Note que podemos tomar:

$$dW = d[M I_1 I_2] = M I_1 I_2 \text{ porque}$$

as contribuições das auto-indutâncias são constantes para  $I_i$ 's constantes.