Provas relacionadas à blindagem eletrostática em condutores com cavidades

Eduardo Miranda
Insituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas,
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 777 CEP 13083-859 Campinas, SP

Seja um condutor de forma qualquer com carga líquida nula. Ele tem uma cavidade interna 1 de forma qualquer. Há cargas (localizadas) fora do condutor $\rho_{ext}(\mathbf{r})$ e dentro da cavidade $\rho_1(\mathbf{r})$. A superfície externa do condutor é S e a superfície da cavidade é S_1. Vamos chamar a região definida pela cavidade de R_1, a região fora do condutor de R_{ext} e a região condutora entre R_1 e R_{ext} de R_c. Vamos chamar essa configuração de C_1, como esquematizado na Figura 1.

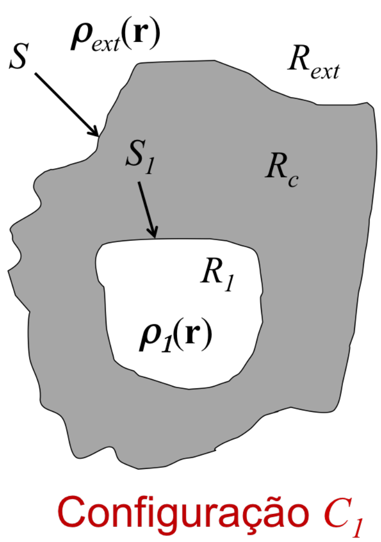

Figura 1. Configuração C_1

Queremos provar a seguinte "independência" dos problemas eletrostáticos dentro da cavidade e fora do condutor:

1. A distribuição de carga induzida $\sigma(\mathbf{r})$ em S não depende na forma de S_1 e só depende "globalmente" de $\rho_1(\mathbf{r})$ na medida em que $\oint_S \sigma dS = \int_{R_1} \rho_1(\mathbf{r})\, dV$.

2. A distribuição de carga induzida $\sigma_1(\mathbf{r})$ em S_1 não depende na forma de S nem de $\rho_{ext}(\mathbf{r})$.

Vamos assumir os teoremas de unicidade da eletrostática, particularmente o segundo. Da lei de Gauss, aplicada a uma gaussiana inteiramente na região R_c e englobando a cavidade, temos que

$$\oint_{S_1} \sigma_1 dS = -\int_{R_1} \rho_1(\mathbf{r})\, dV,$$

ou seja, a carga **total** induzida em S_1 é igual a menos a carga total dentro da cavidade. Analogamente, como o condutor tem carga líquida nula, temos que

$$\oint_S \sigma dS = \int_{R_1} \rho_1(\mathbf{r})\, dV.$$

A região R_{ext} é caracterizada por

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{ext}(\mathbf{r}) \text{ em } R_{ext}, \tag{1}$$

$$Q = \int_{R_1} \rho_1(\mathbf{r})\, dV \text{ em } S, \tag{2}$$

$$Q = 0 \text{ em } S_\infty, \tag{3}$$

onde S_∞ é a superfície no infinito. Pelo segundo teorema de unicidade, o campo elétrico em R_{ext} é único.

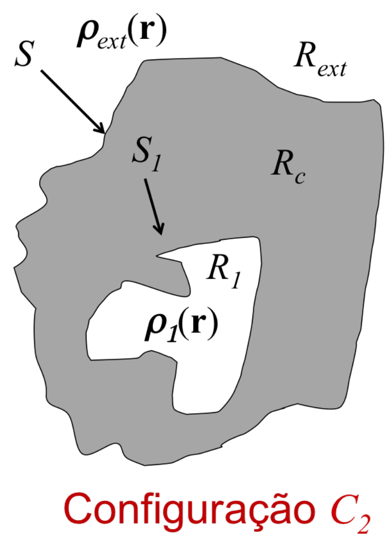

Figura 2. Configuração C_2

Suponha agora que mudemos a forma da cavidade, mantendo uma distribuição $\rho_1(\mathbf{r})$ dentro dela. Vamos chamar essa segunda configuração de C_2 (ver a Figura 2) e manteremos a mesma nomenclatura de C_1, porém com a cavidade de formato diferente. A região externa a esse condutor é a mesma R_{ext} de C_1. Além disso, a região R_{ext} de C_2 satisfaz as mesmas condições das Eqs. (1-3). Portanto, o campo elétrico em R_{ext} é o mesmo tanto em C_1 quanto em C_2. Como a distribuição $\sigma(\mathbf{r})$ de Q na superfície S é determinada pelo valor do campo elétrico normal a S (imediatamente fora de S) e esse campo elétrico é o mesmo nas duas configurações acima, a distribuição também será a mesma. Segue que essa distribuição não pode depender da forma da cavidade e só depende de $\rho_1(\mathbf{r})$ globalmente, através da condição da Eq. (2). Isso prova o item 1 acima.

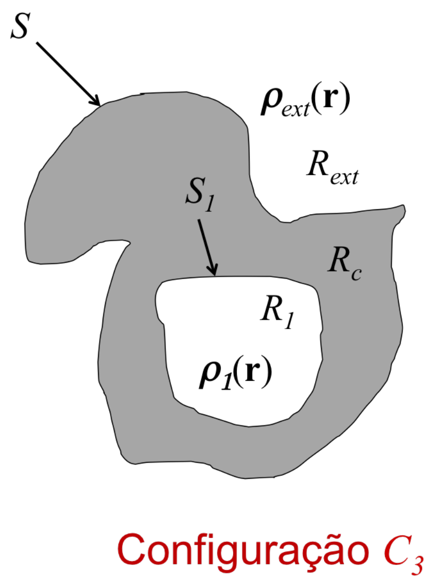

Figura 3. Configuração C_3

Considere agora uma terceira configuração, que chamaremos de C_3. Nessa configuração, manteremos a cavidade com o mesmo formato e volume de C_1, porém tomaremos a superfície externa do condutor com formato diferente de C_1 (ver a Figura 3). Continuaremos chamando essa superfície externa de S, assim como manteremos o resto da nomenclatura inalterada, referindo sempre a qual configuração estamos nos referindo. Notamos que, tanto na configuração C_1 quanto na configuração C_3, as seguintes condições de contorno sobre a região R_1 se aplicam

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = \rho_1\left(\mathbf{r}\right) \text{ em } R_1, \tag{4}$$

$$-Q = -\int_{R_1} \rho_1\left(\mathbf{r}\right) dV \text{ em } S_1. \tag{5}$$

Ora, segue do segundo teorema de unicidade que o campo elétrico em R_1 é idêntico nas duas configurações C_1 e C_3. Segue também que, como a distribuição $\sigma_1\left(\mathbf{r}\right)$ de $-Q$ na superfície S_1 é determinada pelo valor do campo elétrico normal a S_1 (imediatamente dentro de S_1) e esse campo elétrico é o mesmo nas duas configurações C_1 e C_3, a distribuição também será a mesma. Portanto, $\sigma_1\left(\mathbf{r}\right)$ não depende de nenhum modo da forma de S nem de $\rho_{ext}\left(\mathbf{r}\right)$. Isso prova o item 2.

É fácil generalizar os resultados acima para qualquer número de cavidades, provando assim que a blindagem em cada cavidade é completamente local, independente da forma da superfície externa S do condutor e das formas e cargas das outras cavidades. Igualmente, a blindagem na superfície externa S é independente das formas das cavidades internas, provando assim a independência total da blindagem em cada superfície em relação às outras.