Aula 10

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

20/10/2020

Aulas passadas

Equações fundamentais da eletrostática

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \Longleftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla V \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Solução geral:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

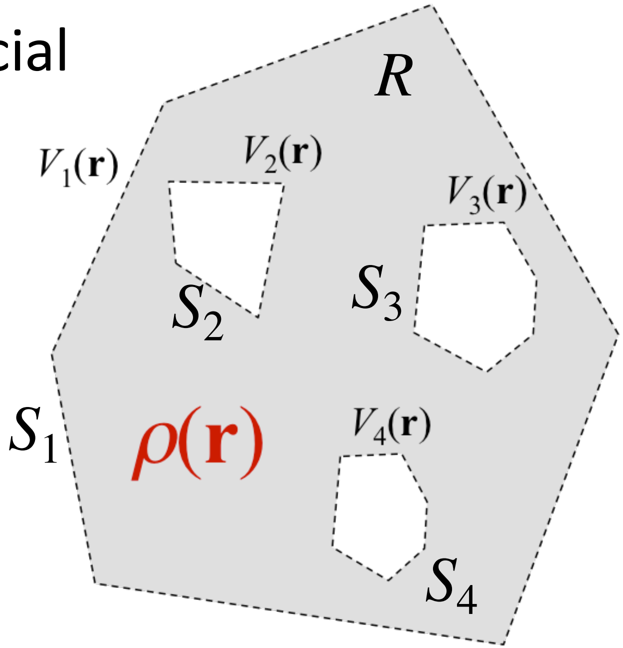
A solução geral nem sempre é muito útil, principalmente quando há condutores envolvidos, pois não se sabe $\rho(\mathbf{x})$ de antemão.

Aulas passadas

Problema de valor de contorno: resolver a Eq. de Poisson em uma região R, com $\rho(\mathbf{x})$ dado dentro de R e alguma informação sobre $V(\mathbf{x})$ dada na fronteira S.

1º teorema de unicidade: O potencial $V(\mathbf{r})$ é único numa região R se especificarmos:

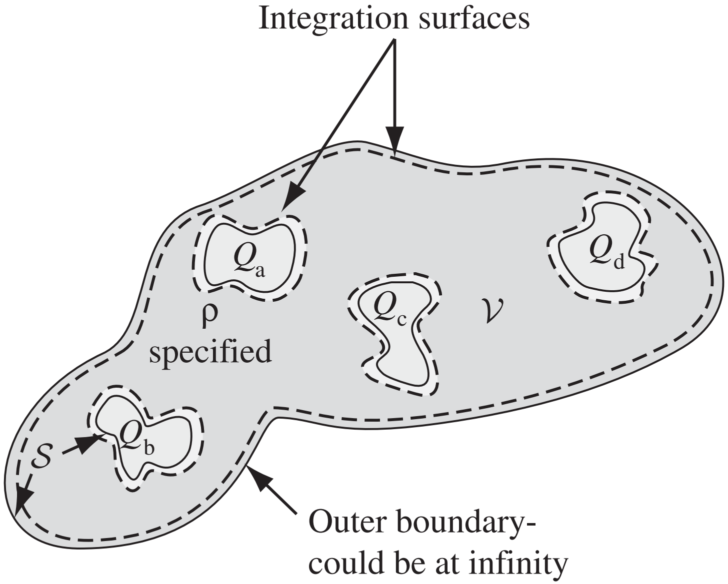
$$\begin{array}{lll} \rho(\mathbf{r}) & \text{em} & R \\ V(\mathbf{r}) & \text{em} & S(R) \end{array}$$



Aulas passadas

2º teorema de unicidade: O potencial $V(\mathbf{r})$ é único (a menos de uma constante) e o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ é unico num região R circundada por condutores se especificarmos:

$$\begin{array}{lll} \rho\left(\mathbf{r}\right) & \text{em} & R \\ Q_i & \text{em} & S_i\left(R\right)\ \ (i=1,2,\ldots) \end{array}$$



O método de cargas imagens

Problema: Uma carga q perto de um plano condutor infinito aterrado $(V=0)$. Achar $V(\mathbf{x})$ para $z > 0$.

$z > 0$: DEFINE A REGIÃO R

PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO:

• $\rho(\vec{r}) = q\,\delta^{(3)}(\vec{r} - a\hat{z})$

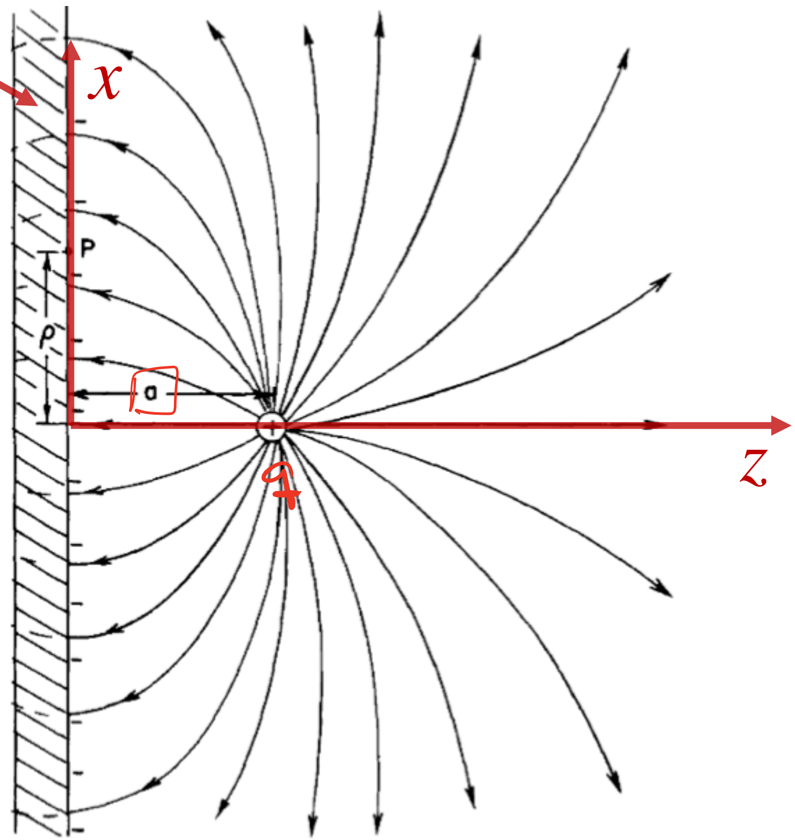
CARGA q EM $\vec{r}_0 = a\hat{z}$

• $V(\vec{r})$ É DADO NA FRONTEIRA:

• PLANO $z=0$: $V(x,y,z=0)=0$

• HEMISFÉRIO INFINITO EM $|\vec{r}| \to \infty$ E $z>0$: $V(\vec{r}) \to 0$

SE EU ACHAR UMA SOLUÇÃO ELA SERÁ $\underline{\underline{A}}$ SOLUÇÃO (TEOREMA DE UNICIDADE)



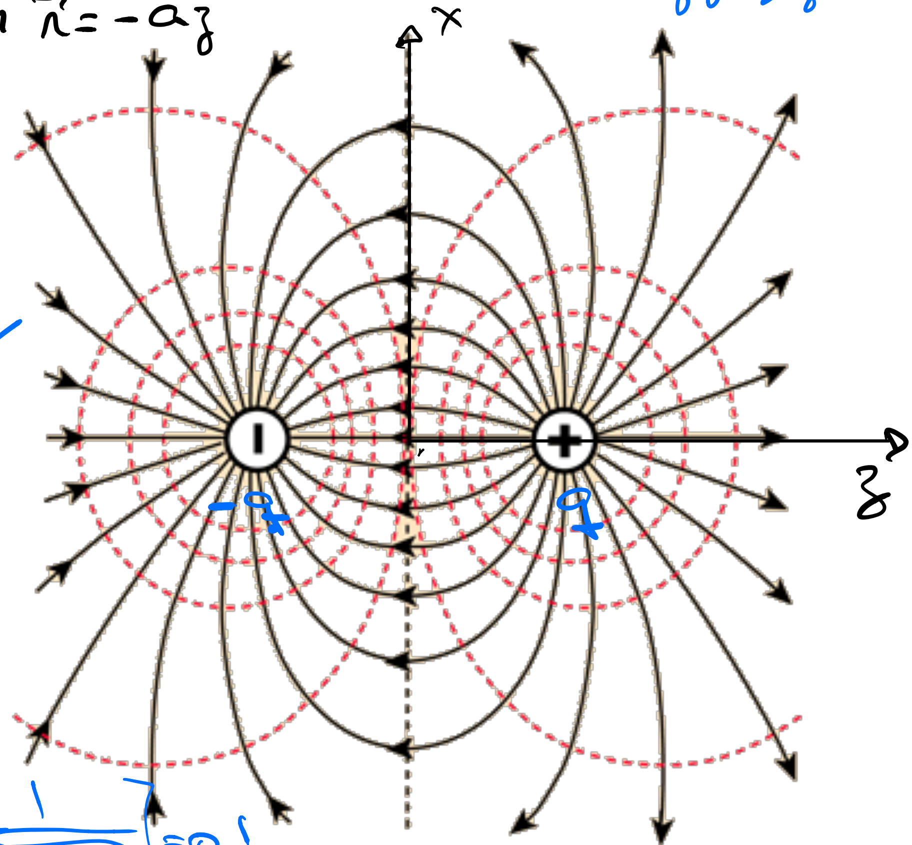
Problema auxiliar

- NÃO HÁ PLACA
- MAS HÁ UMA CARGA $-q$ EM $\vec{r} = -a\hat{z}$

$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

EM $R\,(z>0)$:

- $\rho(\vec{r}) = q\,\delta^{(3)}(\vec{r} - a\hat{z})$
- $V(\vec{r}) \to 0$ SE $|\vec{r}| \to \infty$



$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r} - a\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r} + a\hat{z}|}\right] \checkmark$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}}\right]$$

EM $z = 0$:

$$V(x, y, z=0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}\right] = 0\,!$$

COMO OS DOIS PROBLEMAS SATISFAZEM POISSON COM O MESMO $\rho(\vec{r})$ E AS MESMAS CONDIÇÕES DE CONTORNO, A SOLUÇÃO DO SEGUNDO É A SOLUÇÃO DO PRIMEIRO:

PARA $z>0$:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-a\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r}+a\hat{z}|}\right]$$

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(z-a)}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}} - \frac{(z+a)}{[x^2+y^2+(z+a)^2]^{3/2}}\right]$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}} - \frac{a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\right] = -\frac{qa}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

A carga induzida no plano infinito

$\sigma(\vec{r})$ EM $z=0$?

VIMOS QUE NA SUPERFÍCIE DE UM CONDUTOR:

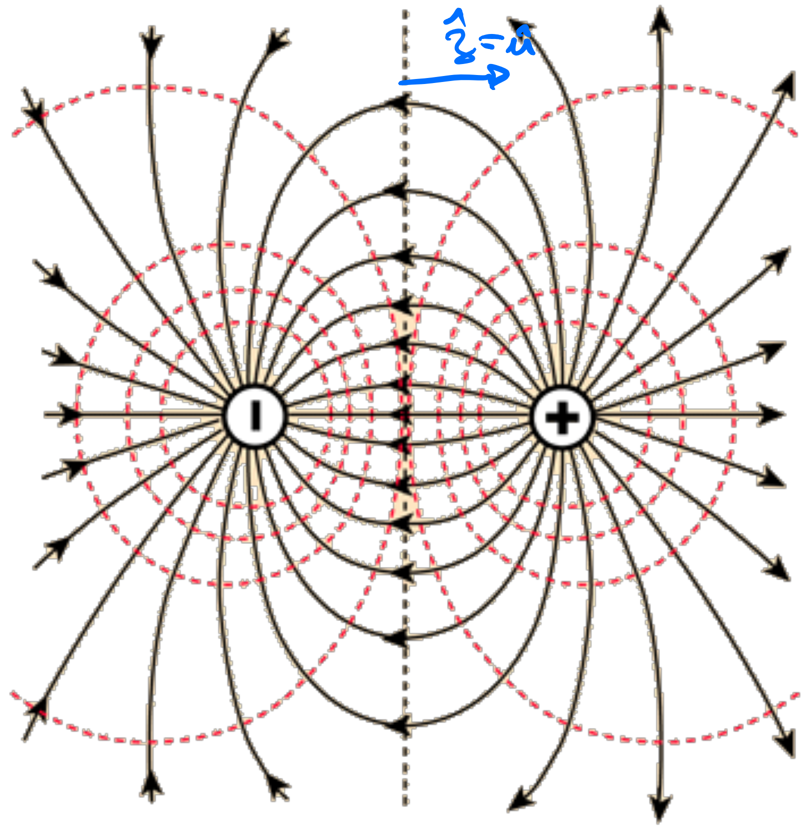
$$E_n\big|_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

A NORMAL AO PLANO $z=0$ É $\hat{z} \Rightarrow E_n = \hat{z}\cdot\vec{E} = -\hat{z}\cdot\vec{\nabla}V$

$$= -\frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0^+}$$

$$\Rightarrow \sigma = \epsilon_0\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0^+}\right)$$

$$\boxed{\sigma = -\frac{qa}{2\pi}\frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}}$$



- $\sigma(\vec{x}) = -\frac{qa}{2\pi}\frac{1}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}$ ONDE $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

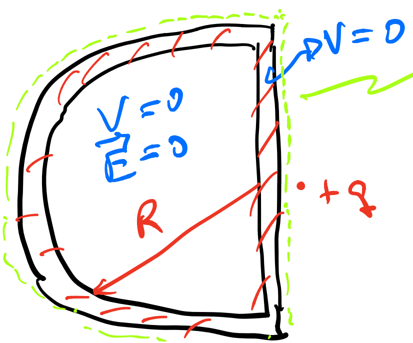
CAI RAPIDAMENTE COM A DISTÂNCIA $\sim \frac{1}{\rho^3}$

- A CARGA TOTAL INDUZIDA É:

$$q_{IND} = \int \sigma(x,y)\,dS = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \sigma(x,y)$$

$$= -\frac{qa}{2\pi}\int \frac{dx\,dy}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{qa}{\cancel{2\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\cancel{2\pi}\rho\, d\rho}{(\rho^2+a^2)^{3/2}} = -q\,!$$

- PODEMOS "COMPLETAR" A PLACA CONDUTORA NUMA CALOTA DE RAIO MUITO GRANDE ($R \to \infty$)



TOMANDO ESSA GAUSSIANA:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q(\text{DENTRO})}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{IND}$$

SUBSTITUINDO PELO PROBLEMA AUXILIAR:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon}(-q) \Rightarrow \boxed{q_{IND} = -q}$$

A força sobre a carga

A FORÇA SOBRE +q É

$q\vec{E}_{IND}$ ONDE $\vec{E}_{IND}$ É O

CAMPO CRIADO PELA $\sigma(x,y)$

INDUZIDA.

MAS O CAMPO EM $z>0$ É

IDÊNTICO AO CAMPO DE +q

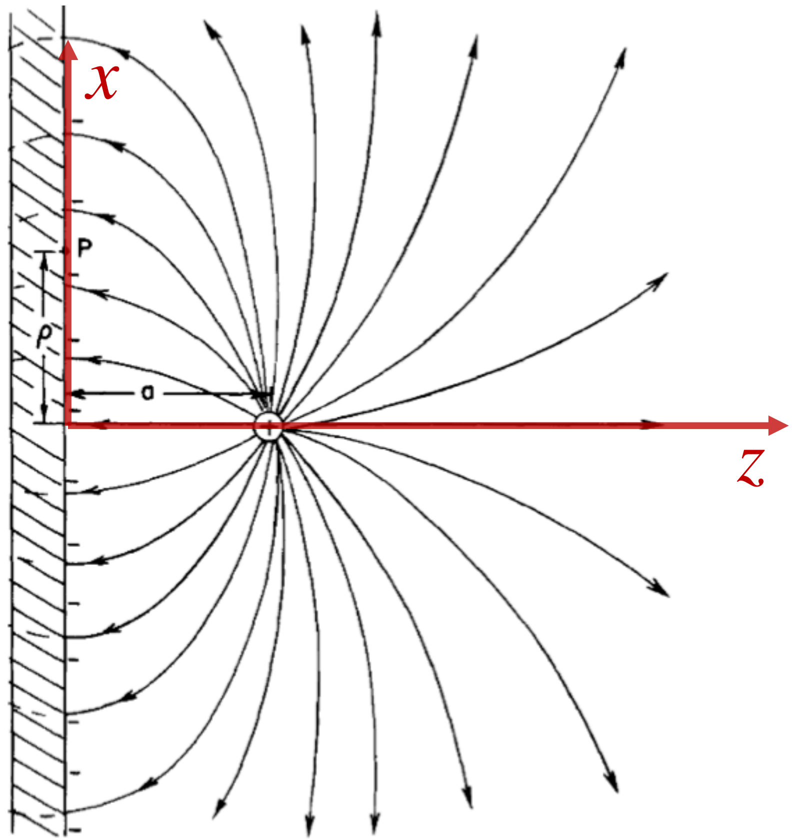
E DA CARGA IMAGEM DO

PROBLEMA AUXILIAR. PORTANTO

$\vec{E}_{IND}$ É O CAMPO DA CARGA

IMAGEM: $\vec{E}_{IND} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{z}}{(2a)^2}$

$\vec{F} = q\vec{E}_{IND} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}\hat{z}$



A energia da configuração

POR DEFINIÇÃO:

$$W = \int_{\infty}^{a\hat{z}} (-q)\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = q\int_{a\hat{z}}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

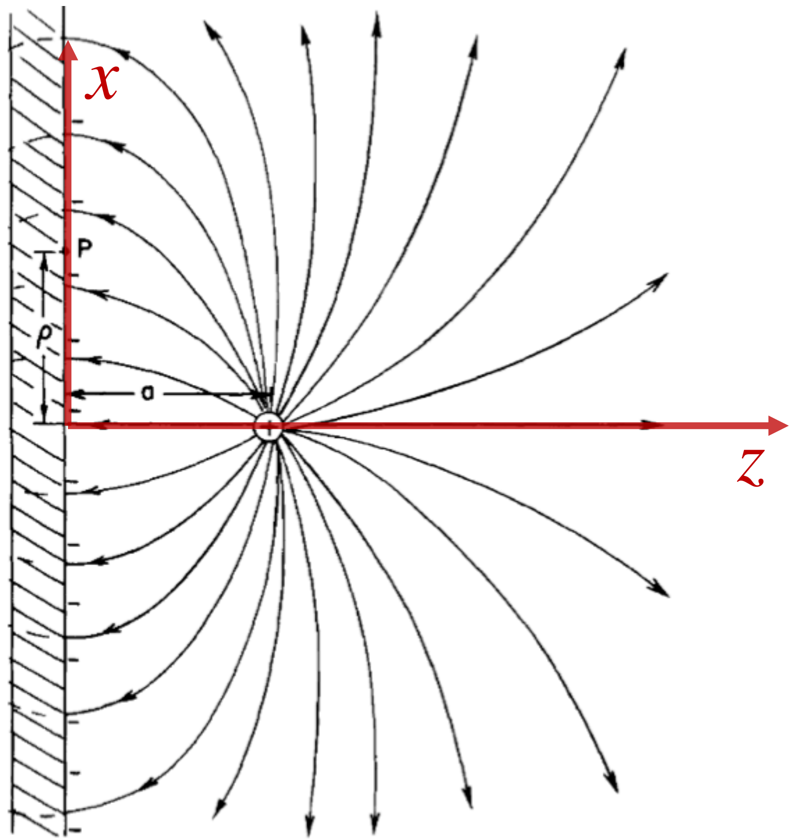
$$= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\int_a^{\infty}\frac{dz}{(2z)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0}\int_a^{\infty}\frac{dz}{z^2}$$

$$\boxed{d\vec{\ell} = dz\,\hat{z}} \quad \boxed{W = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a}}$$

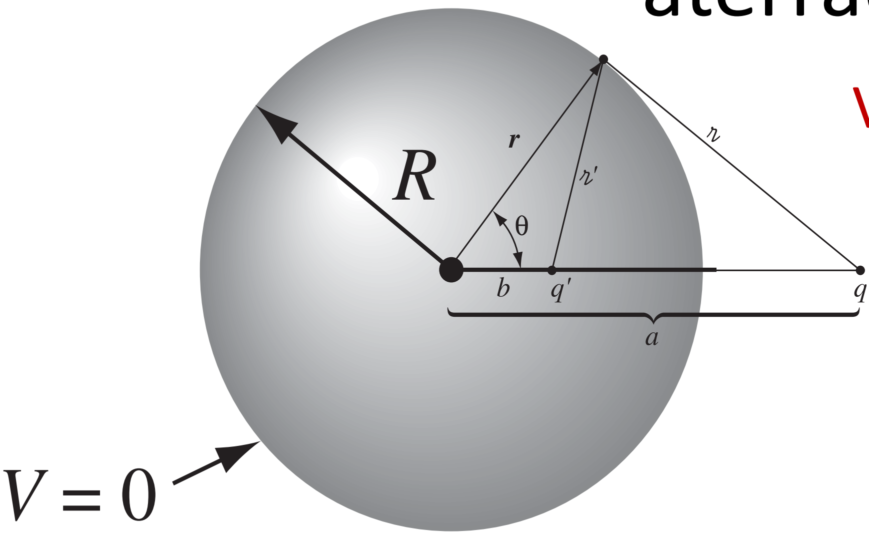
MAS A ENERGIA DA CARGA + SUA IMAGEM É OUTRA!

$$W' = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{2a} = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$W' = 2W$$



Carga próxima a esfera condutora aterrada



Ver Seção 3.2.4 do Griffiths:

$$q' = -\frac{R}{a} q$$

$$|q'| < |q|$$

$$b = \frac{R^2}{a}$$

MOSTRE QUE, QUANDO $R \to \infty$, RECUPERAMOS O CASO DO PLANO INFINITO.

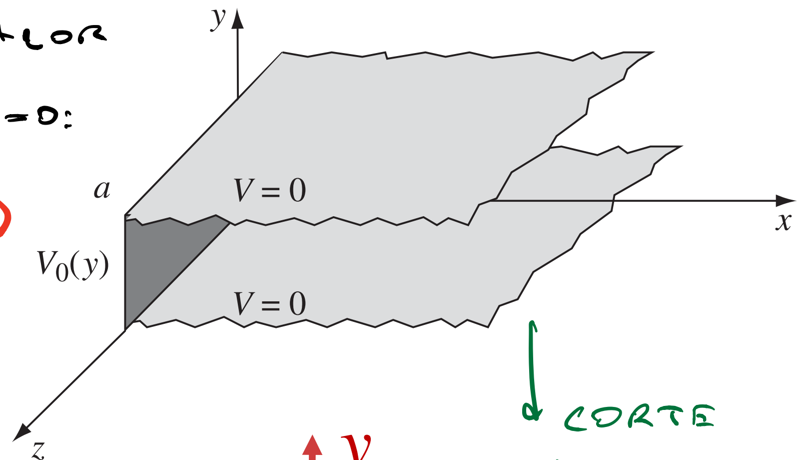
Solução da Eq. de Laplace por separação de variáveis

É COMUM O PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO EM QUE $\rho(\vec{r})=0$:

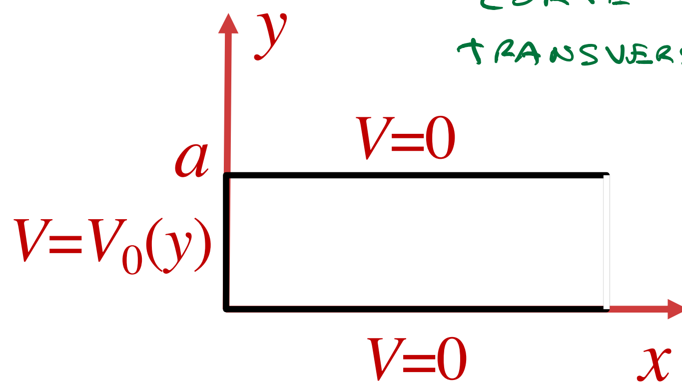
$\nabla^2 V = 0$ (EQ. DE LAPLACE)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$$

EM R COM $V(\vec{r})$ DADO EM S.



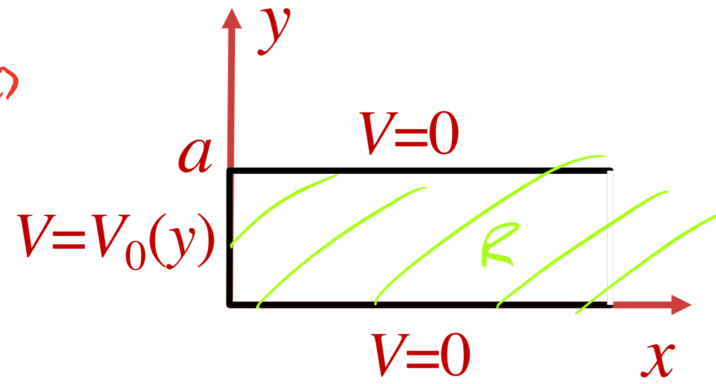
CORTE TRANSVERSAL



PARA A REGIÃO AO LADO NÃO HÁ DEPENDÊNCIA COM z:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$



CONDIÇÕES DE CONTORNO: $V(x,y)$

$$\begin{cases} V(x,0) = 0 \quad \forall\ x > 0 \ \checkmark \\ V(x,a) = 0 \quad \forall\ x > 0 \ \checkmark \\ V(0,y) = V_0(y) \quad \forall\ y \in [0,a] \\ V(x,y) \to 0 \quad \text{QUANDO } x \to \infty \ \checkmark \end{cases}$$

$$V(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$\Rightarrow \quad Y\,X''(x) + X\,Y''(y) = 0$$

DIVIDO POR $X(x)Y(y)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

IGUALDADE ENTRE UMA FUNÇÃO SÓ DE x COM UMA FUNÇÃO SÓ DE y. COMO x E y SÃO VARIÁVEIS INDEPENDENTES: $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = $ cons

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k^2 > 0$$

A EXCLUSÃO DE CONSTANTES NEGATIVAS OU ZERO PODE SER JUSTIFICADA DEPOIS USANDO AS CONDIÇÕES DE CONTORNO.

$$X''(x) = k^2 X(x) \Rightarrow X(x) = A e^{kx} + B e^{-kx}$$

$$Y''(y) = -k^2 Y(y) \Rightarrow Y(y) = C \sin(ky) + D \cos(ky)$$

$$\boxed{V(x,y) = \left(A e^{kx} + B e^{-kx}\right)\left(C \sin(ky) + D \cos(ky)\right)}$$

AGORA VAMOS APLICAR AS COND. CONTORNO

i) $V(x,y) \to 0 \qquad x \to \infty \implies A = 0$

$$V(x,y) = e^{-kx}\left(C \cos(ky) + D \sin(ky)\right)$$

ii) $V(x,0) = 0 \quad \forall x > 0$

$$V(x,0) = C e^{-kx} = 0 \quad \forall x \implies C = 0$$

$$\implies V(x,y) = D e^{-kx} \sin(ky)$$

iii) $V(x,a) = 0 \quad \forall x > 0$

$$\implies V(x,a) = D e^{-kx} \sin(ka) = 0 \quad \forall x > 0$$

$ka = n\pi$ ONDE $n = \cancel{0}, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$k = n\dfrac{\pi}{a}$

$$\boxed{V_n(x,y) = D_n e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots}$$

$n < 0$ DÁ SOLUÇÕES LIN. DEP.

POR SUPERPOSIÇÃO (EQ. É LINEAR) OBTENHO

A SOLUÇÃO GERAL:

$$\boxed{V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}$$