Aula 11

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

22/10/2020

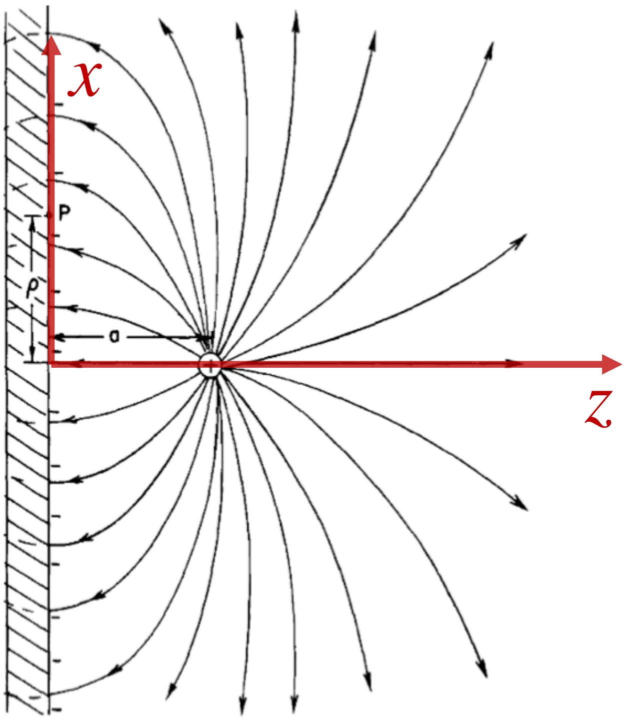
Aula passada

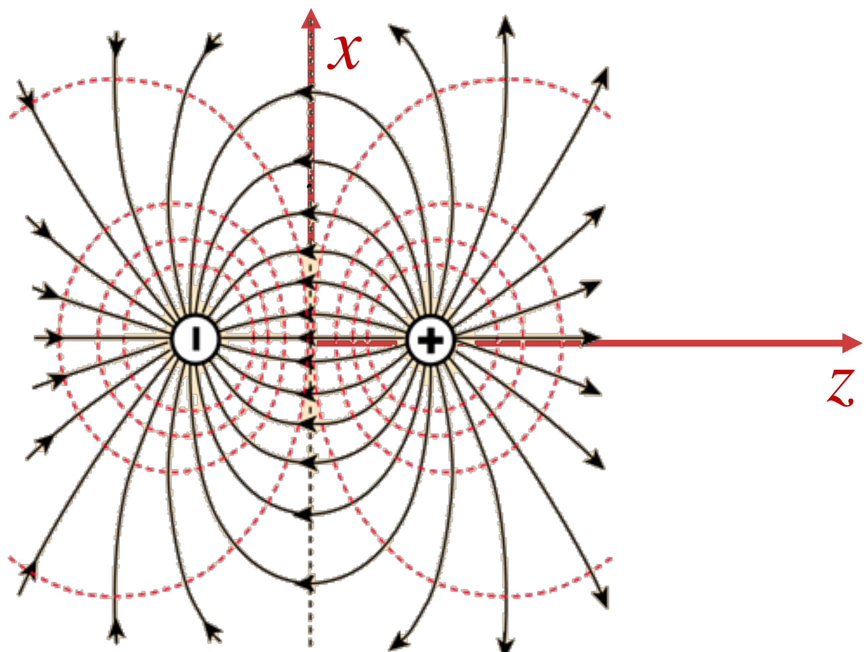
Nas duas situações abaixo, a região $\boxed{z > 0}$:

•Tem a mesma carga $+q$ e, portanto, o mesmo $\rho(\mathbf{r})$.

•Potencial nulo em $z = 0$ e no infinito.

➢Segue que $V(\mathbf{r})$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ são os mesmos nas duas situações.



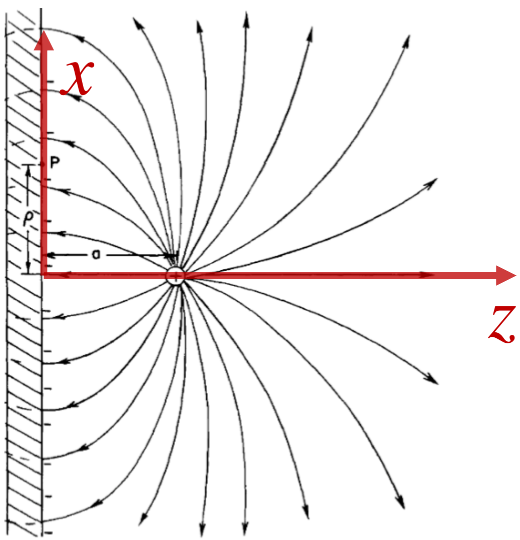


Aula passada

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{r}-a\hat{\mathbf{z}}}{\left|\mathbf{r}-a\hat{\mathbf{z}}\right|^3} - \frac{\mathbf{r}+a\hat{\mathbf{z}}}{\left|\mathbf{r}+a\hat{\mathbf{z}}\right|^3}\right],\ (z \geq 0)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right],\ (z \geq 0)$$

Porém, $V(\mathbf{r})=0$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r})=0$, se $z<0$.

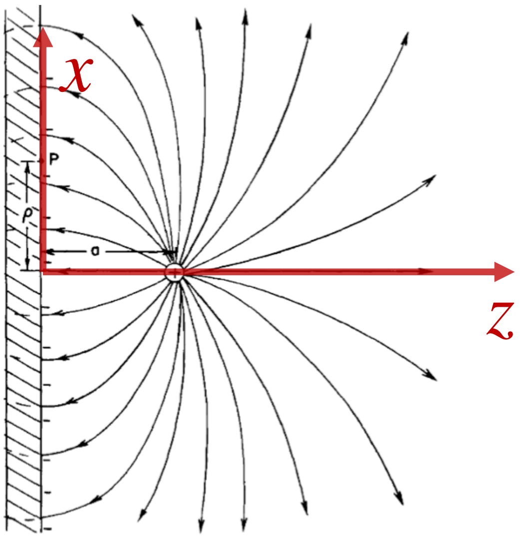


Aula passada

Carga induzida no plano

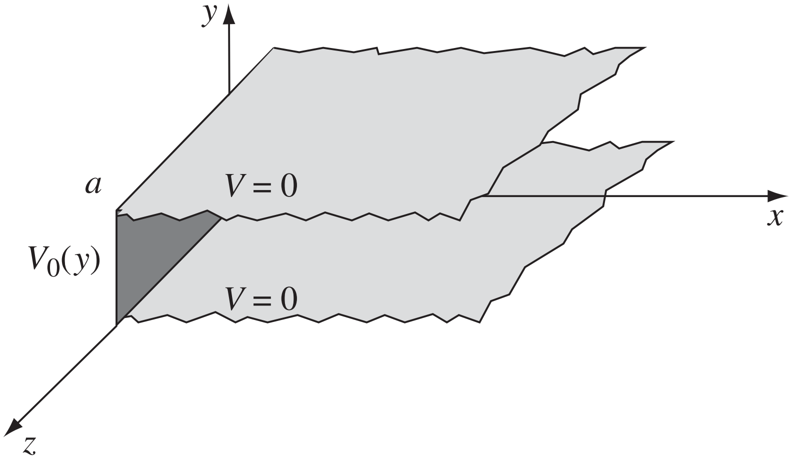
$$\sigma(x,y) = \varepsilon_0 \, \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E}\big|_{z=0^+} = -\frac{qa}{2\pi} \frac{1}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{3/2}}$$

A carga induzida:
(i) tem sinal oposto à carga $+q$.
(ii) decai rapidamente com a distância.
(iii) a carga total induzida é $-q$.



Aula passada

Problema: resolver a Equação de Laplace numa certa região R do espaço, dadas condições de contorno na fronteira da região.



A escolha do sistema de coordenadas é ditada pela geometria do problema.

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Aula passada

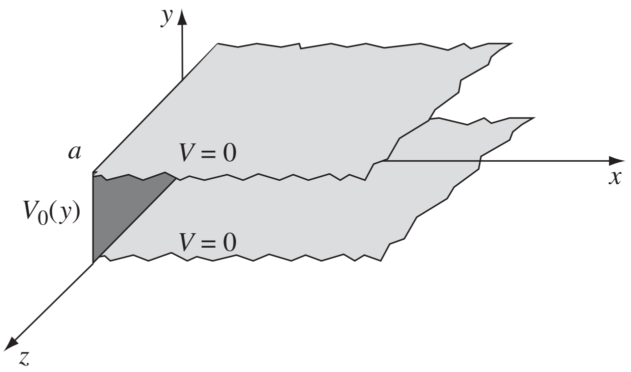
Método de separação de variáveis

$$V(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,\cancel{Z(z)}$$

No exemplo simples ao lado, não há dependência com z.

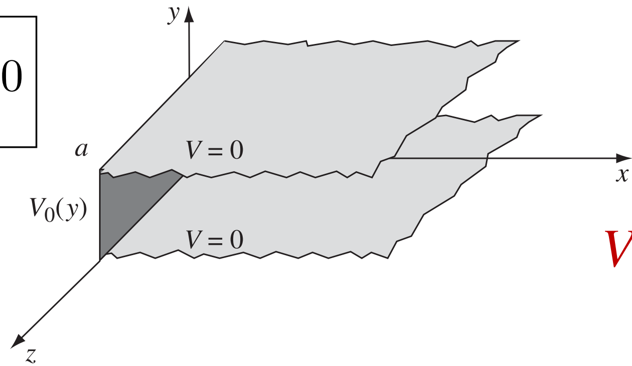
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

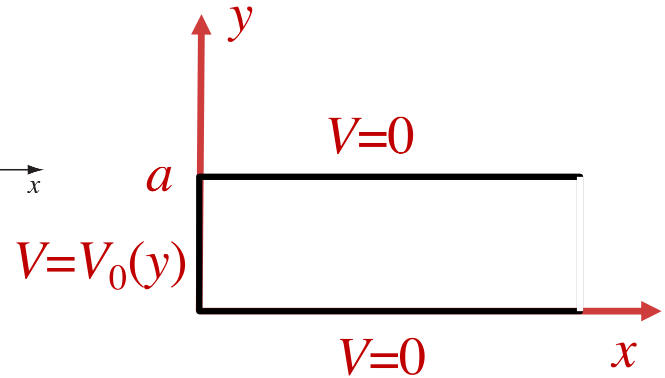
$$V(x,y) = X(x)\,Y(y)$$



Aulas passadas

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0}$$





$$V(x,y) = X(x)\,Y(y) \Rightarrow \frac{1}{X(x)}X''(x) = -\frac{1}{Y(y)}Y''(y) = \text{const.} = k^2$$

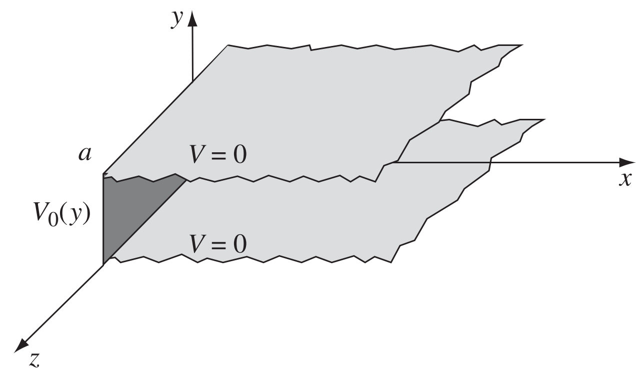
$$V(x,y) = \left(Ae^{kx} + Be^{-kx}\right)(C\sin ky + D\cos ky)$$

Impondo as condições de contorno

$$\begin{aligned}
V(x\to\infty, y) &= 0 \Rightarrow V(x,y) = e^{-kx}(C\sin ky + D\cos ky)\\
V(x, y=0) &= 0 \Rightarrow V(x,y) = Ce^{-kx}\sin ky\\
V(x, y=a) &= 0 \Rightarrow V_n(x,y) = C_n e^{-k_n x}\sin k_n y,\;\; k_n = \frac{na}{\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)
\end{aligned}$$

Aula passada

Solução geral: superposição de todas as soluções particulares (Equação **linear**).



$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-k_n x} \sin k_n y$$

$$k_n = \frac{na}{\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

PRECISAMOS IMPOR: $V(0,y) = V_0(y) \;\; \forall \;\; y \in [0,a]$

$V(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{nay}{\pi}\right) = V_0(y) \quad \forall \; y \in [0,a] \quad (1)$

ISSO É UMA REPRESENTAÇÃO DE $V_0(y)$ EM SÉRIE DE FOURIER.

MULTIPLICO A EQ. (1) POR $\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$ E INTEGRO EM y DE 0 ATÉ a:

$$\int_0^a dy \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \int_0^a V_0(y)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)dy$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)dy = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{SE } m \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{SE } m = n \end{array}\right\} = \frac{a}{2}\delta_{m,n}$$

$$\underbrace{\frac{a}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_{m,n}}_{C_m} = \int_0^a V_0(y)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)dy$$

$$\boxed{C_m = \frac{2}{a}\int_0^a V_0(y)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)dy}$$

EXEMPLO: $V_0(y) = V_0 = \text{CONST.}$

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a V_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy = \frac{2V_0}{\cancel{a}}\left(\frac{\cancel{a}}{n\pi}\right)(-1)\cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\Big|_{y=0}^{y=a}$$

$$= -\frac{2V_0}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - 1\right]$$

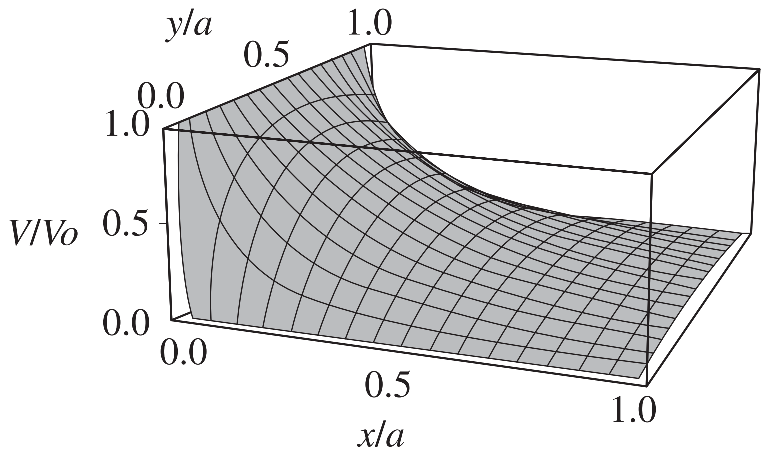
SE $n =$ PAR: $\cos(n\pi) = 1 \Rightarrow C_n = 0$

SE n É ÍMPAR, $\cos(n\pi) = -1 \Rightarrow C_n = \frac{4V_0}{n\pi}$

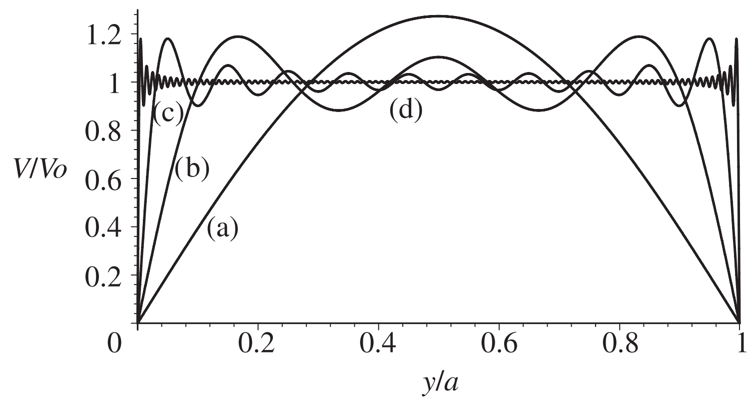
SOLUÇÃO:

$$\boxed{V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{\substack{n=1,3,5,\ldots \\ n \text{ ÍMPAR}}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi x}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}$$

O potencial como função de x e y.



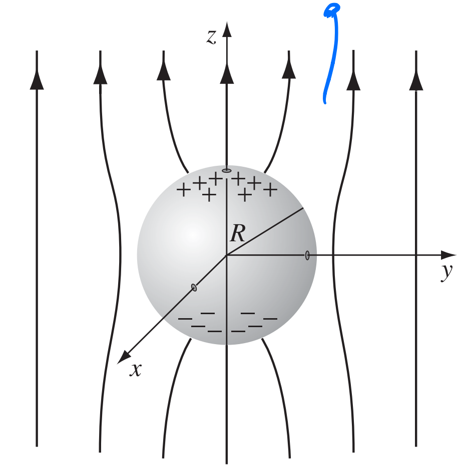
O potencial em $x=0$ como função de y.



Solução da Equação de Laplace em coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=0.$$

PROBLEMA NA REGIÃO $r > R$



SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS:

$$V(r,\theta,\phi) = R(r)T(\theta)F(\phi)$$

VAMOS SUPOR SIMETRIA AZIMUTAL:

INDEPENDE DE $\phi \Rightarrow \cancel{F(\phi)} \Rightarrow V(r,\theta) = R(r)T(\theta)$

$$\frac{T(\theta)}{\cancel{r^2}}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right]+\frac{R(r)}{\cancel{r^2}\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right]=0$$

DIVIDO POR $T(\theta)R(r)$:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR}{dr}\right] = -\frac{1}{T(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right] = \text{CONST.} = k$$

PARTE RADIAL: $\frac{d}{dr}\left[r^2 R'\right] = kR \Rightarrow r^2 R'' + 2rR' - kR = 0$

CHUTE: $\boxed{R(r) = A\,r^{\alpha}} \Rightarrow A\left[\alpha(\alpha-1)r^2 r^{(\alpha-2)} + 2\alpha r\, r^{(\alpha-1)} - k r^{\alpha}\right] = 0$

$\left[\alpha(\alpha-1)r^{\alpha} + 2\alpha r^{\alpha} - k r^{\alpha}\right] = 0 \quad \left[\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - k\right] r^{\alpha} = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha - k = 0 \qquad \left[k = \alpha(\alpha+1)\right]$

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4k}}{2}$$

VAMOS VER MAIS ADIANTE QUE APENAS SOLUÇÕES COM α INTEIRO DÃO SOLUÇÕES PARA $T(\theta)$ NÃO SINGULARES. VAMOS OLHAR APENAS PARA ESSES CASOS.

PARA QUE $\underline{\alpha}$ SEJA INTEIRO, DEVEMOS TER:

a) $\sqrt{1+4k} \rightarrow$ INTEIRO

b) $-1 \pm \sqrt{1+4k} \rightarrow$ PAR $\Rightarrow \sqrt{1+4k}$ É ÍMPAR

$\sqrt{1+4k} = 2\ell + 1$

$\ell \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+4k} = 2\ell+1 \Rightarrow \cancel{4}k+\cancel{1} = (2\ell+1)^2 = \cancel{4}\ell^2+\cancel{4}\ell+\cancel{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \ell^2+\ell = \ell(\ell+1)}$$

$$\alpha = \frac{-1 \pm (2\ell+1)}{2} = \begin{cases} \dfrac{2\ell}{2} = \ell \\ -\dfrac{2\ell+2}{2} = -(\ell+1) \end{cases}$$

$$R(r) = A r^{\ell} + B r^{-(\ell+1)} = \boxed{A r^{\ell} + \frac{B}{r^{(\ell+1)}} = R(r)}$$

PARTE ANGULAR:

$$\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta \frac{dT}{d\theta}\right] = -\ell(\ell+1)\sin\theta\, T(\theta)$$

$$\Rightarrow \sin\theta \frac{d^2T}{d\theta^2} + \cos\theta \frac{dT}{d\theta} + \ell(\ell+1)\sin\theta\, T(\theta) = 0$$

MUDANÇA DE VARIÁVEIS: $x = \cos\theta$

$T(x=\cos\theta)$: $x \in [-1,1]$

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = -\sin\theta \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{(1-x^2)\frac{d^2T}{dx^2} - 2x\frac{dT}{dx} + \ell(\ell+1)T(x) = 0 \qquad \ell = 0,1,2,\ldots}$$

$\therefore$ EQ. DE LEGENDRE

UM CONJUNTO DE SOLUÇÕES PARA ESSA EQUAÇÃO SÃO POLINÔMIOS! ESSES POLINÔMIOS SÃO CHAMADOS

POLINÔMIOS DE LEGENDRE: $P_\ell(x)$; $x \in [-1,1]$

PROPRIEDADES DO $P_\ell(x)$:

(i) $P_\ell(x)$ É UM POLINÔMIO DE ORDEM $\underline{\ell}$

(ii) FÓRMULA DE RODRIGUES:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[(x^2-1)^\ell\right]$$

(iii) $P_\ell(1) = 1$; $P_\ell(-1) = (-1)^\ell$

(iv) $P_\ell(x)$ É UMA FUNÇÃO PAR SE $\underline{\ell}$ FOR PAR E ÍMPAR SE $\underline{\ell}$ FOR ÍMPAR.

(v) EXEMPLOS: $P_0(x) = 1$ $\quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

(vi) $|P_\ell(x)| \leq 1 \quad x \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq P_\ell(x) \leq 1$

(vii) ORTOGONALIDADE:

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{SE } \ell \neq \ell' \\ \dfrac{2}{2\ell+1} & \text{SE } \ell = \ell' \end{cases}$$

(viii) SE $f(x)$ É CONTÍNUA POR PARTES NO INTERVALO $x \in [-1, 1]$, ENTÃO:

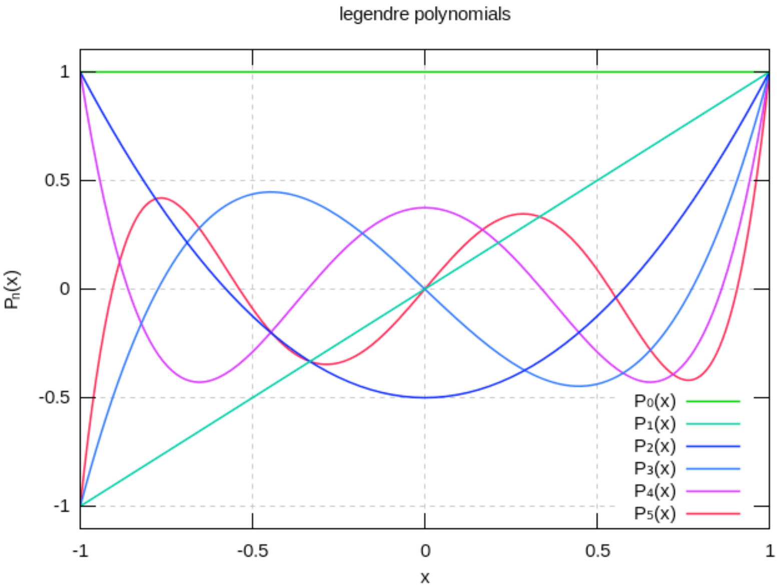
$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(x) \qquad x \in [-1, 1]$$

ONDE

$$a_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_\ell(x)\, f(x)\, dx$$

Os primeiros polinômios de Legendre

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= (3x^2 - 1)/2 \\
P_3(x) &= (5x^3 - 3x)/2 \\
P_4(x) &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \\
P_5(x) &= (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8
\end{aligned}
$$



A EQ. DE LEGENDRE É DE 2ª ORDEM. PORTANTO, DEVE TER UMA OUTRA SOLUÇÃO LINEARMENTE INDEPENDENTE DE $P_\ell(x)$. DE FATO, ELA EXISTE, PORÉM ELA É SINGULAR ($\to \pm\infty$) EM ALGUM PONTO DE $x \in [-1,1]$. NÃO ESTAREMOS INTERESSADOS NESSES CASOS

ALÉM DISSO, SE $\underline{\ell}$ NÃO FOR INTEIRO (E ASSIM $\underline{\alpha}$ TAMBÉM NÃO), AS DUAS SOLUÇÕES SERÃO SINGULARES E VAMOS TAMBÉM IGNORAR ESSES CASOS.

ASSIM, SUPERPONDO TODAS AS SOLUÇÕES SEPARÁVEIS:

$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{(\ell+1)}} \right) P_\ell(\cos\theta)$$

Solução geral (simetria azimutal)

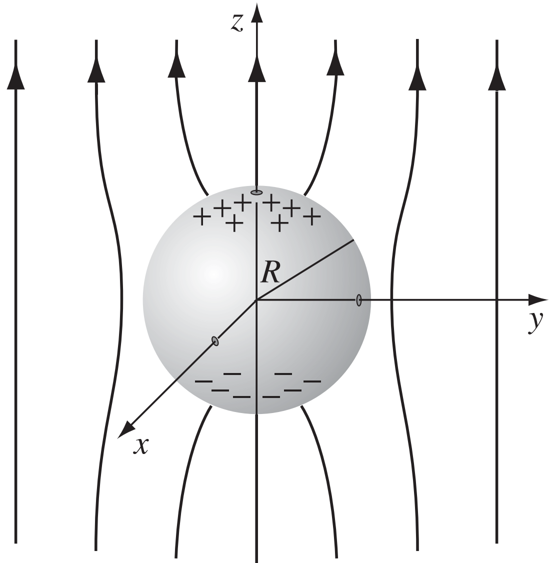
$$\boxed{V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta).}$$

Exemplo 3.8: Uma esfera condutora neutra num campo uniforme

$$\mathbf{E} = E_0\,\mathbf{z}$$

PROBLEMA PARA

$r \geq R$



$$V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO!

- $V(R,\theta) = \text{CONST.} = V_0 \ \forall\ \theta \in [0,\pi]$
- $r \to \infty$: $V(r,\theta) \longrightarrow$ POTENCIAL DE $\vec{E} = E_0\hat{z}$

$$-\vec{\nabla}V_\infty(r,\theta) = E_0\hat{z} \Rightarrow V_\infty(z) = -E_0 z \Rightarrow V_\infty(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \text{CONST.}$$

EM $r = R$:

$$V(R,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \underbrace{\left(A_\ell R^\ell + \frac{B_\ell}{R^{(\ell+1)}}\right)}_{a_\ell} P_\ell(\cos\theta) = V_0$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(\cos\theta) = V_0$$

$$\Rightarrow a_\ell = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^{+1} V_0 P_\ell(x)\, dx = \left(\frac{2\ell+1}{2}\right) V_0 \int_{-1}^{+1} P_\ell(x)\, dx$$

Como $P_0(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell(x)\, dx = \int_{-1}^{+1} P_0(x) P_\ell(x) dx = \delta_{\ell,0} \int_{-1}^{+1} [P_0(x)]^2 dx = 2\,\delta_{\ell,0}$$

$$\Rightarrow a_\ell = \left(\frac{2\ell+1}{\cancel{2}}\right) V_0 \cancel{2}\, \delta_{\ell,0} = (2\ell+1) V_0\, \delta_{\ell,0} = V_0\, \delta_{\ell,0}$$

$$a_\ell = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell \geq 1 \\ V_0 & \text{se } \ell = 0 \end{cases}$$