Aula 13

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

29/10/2020

Campos elétricos na matéria

CAMPOS EM DIELÉTRICOS (ISOLANTES)

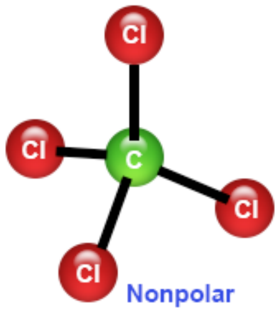
Dipolos induzidos

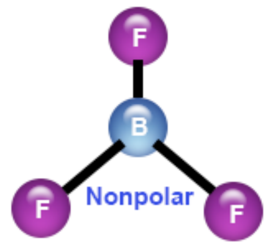
Caso de átomos ou moléculas sem dipolo elétrico permanente: CO_2, O_2, N_2,...

$O=C=O$

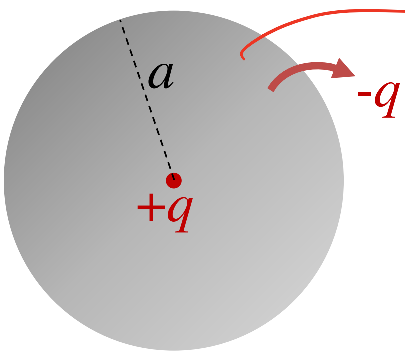
$-$ $2+$ $-$

$O=O$ $N=N$





Dipolos induzidos: um modelo

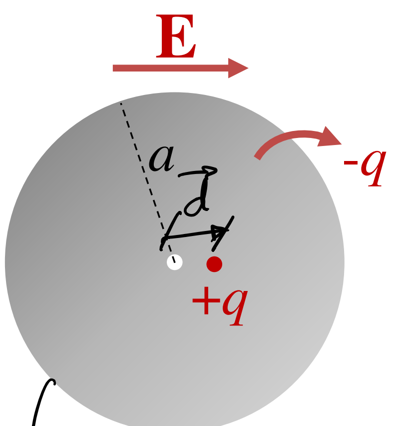


DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DE CARGA TOTAL $-q$, ESFÉRICA DE RAIO $\underline{a}$

$$\rho = \frac{-q}{V} = \frac{-q}{\frac{4\pi}{3} a^3} = -\frac{3q}{4\pi a^3}$$

SOB O EFEITO DO CAMPO, A CARGA $+q$ SE DESLOCA DO CENTRO DA ESFERA. NA SITUAÇÃO DE EQUILÍBRIO, A FORÇA TOTAL SOBRE q É ZERO.

$$\vec{F} = q\vec{E} - q\vec{E}_{ESF} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_{ESF}\Big|_{r=d}$$



$$\vec{p} = \int \rho_{TOT}\, \vec{r}\, dV = q\vec{d}$$

CAMPO DE UMA DISTRIBUIÇÃO UNIFORME ESFÉRICA:

$$\vec{E}_{ESF} = +\frac{\rho}{3\epsilon_0} r\hat{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{a^3}\hat{r}$$

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_{Esf}| \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{d}{a^3} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad qd \rightarrow p$$

$$\Rightarrow p = (4\pi a^3)\epsilon_0 E \Rightarrow \boxed{\vec{p} = (4\pi a^3)\epsilon_0 \vec{E}}$$

DIPOLO INDUZIDO É LINEAR NO CAMPO $\vec{E}$.

$\vec{p} = \alpha \vec{E} \Rightarrow \alpha = (4\pi a^3)\epsilon_0 \Rightarrow$ POLARIZABILIDADE DO ÁTOMO

POLARIZAÇÃO: $\vec{P} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V}$ MOMENTO DE DIPOLO ELÉTRICO POR UNIDADE DE VOLUME

SE HOUVER UM GRANDE NÚMERO DE DIPOLOS INDUZIDOS, A POLARIZAÇÃO É TAMBÉM PROPORCIONAL A $\vec{E}$:

$$\boxed{\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}}$$

$\chi_e \Rightarrow$ SUSCEPTIBILIDADE ELÉTRICA DO MEIO

Polarizabilidade de alguns átomos

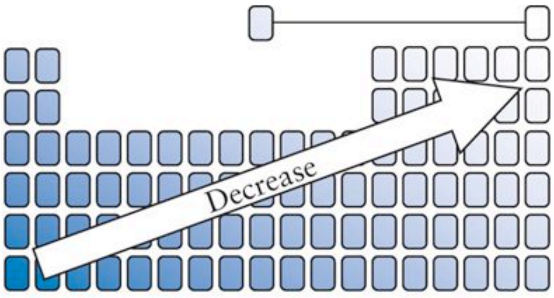
H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K	Cs
0.667	0.205	24.3	5.60	1.67	0.396	24.1	1.64	43.4	59.4

TABLE 4.1 Atomic Polarizabilities ($\alpha/4\pi\epsilon_0$, in units of 10^{-30} m^3). *Data from: Handbook of Chemistry and Physics,* 91st ed. (Boca Raton: CRC Press, 2010).

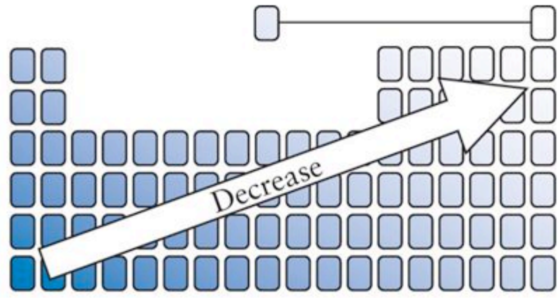
Tendências da polarizabilidade

A polarizabilidade é a facilidade com a qual o átomo se deforma.

Bate bem com o modelo simples.



Size of Atom



Polarizability

Dipolos permanentes

Algumas moléculas polares:

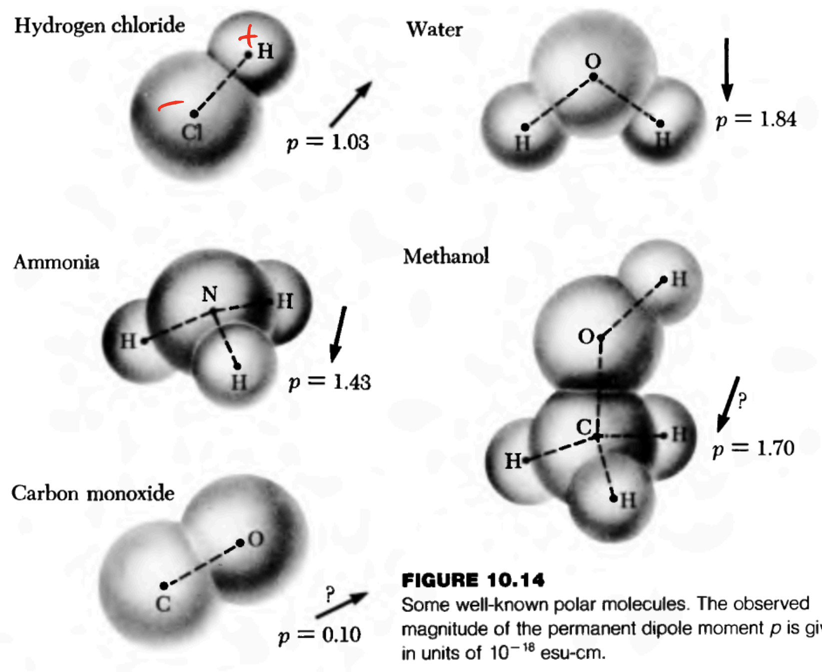
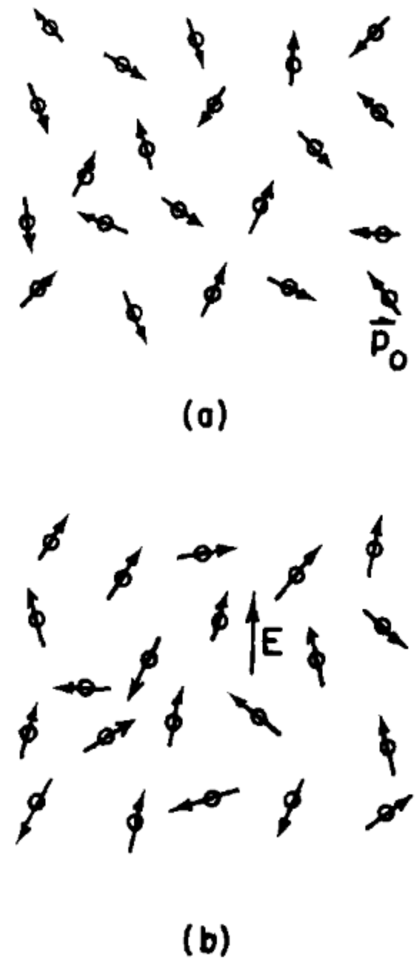
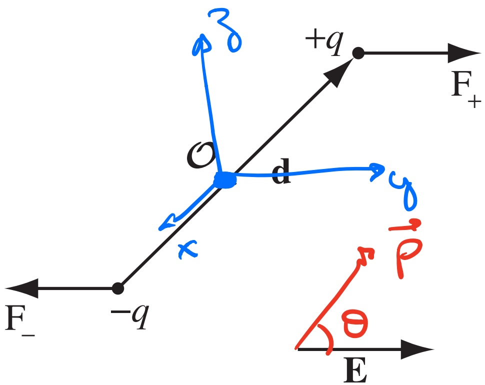


FIGURE 10.14
Some well-known polar molecules. The observed magnitude of the permanent dipole moment p is given in units of 10^{-18} esu-cm.



Torques em dipolos elétricos



FORÇA TOTAL SOBRE O DIPOLO:

$$\vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$$

TORQUE TOTAL SOBRE CADA DIPOLO:

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$= \left(\frac{\vec{d}}{2}\right) \times \vec{F}_+ + \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \times \vec{F}_-$$

$$= q\left(\frac{\vec{d}}{2}\right) \times \vec{E} - q\left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \times \vec{E}$$

$$\vec{N} = q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$|\vec{N}| = pE\sin\theta$$

O TORQUE ATUA PARA ALINHAR O DIPOLO AO CAMPO

⇒ USANDO FÍSICA ESTATÍSTICA, MOSTRA-SE QUE $\boxed{\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}}$

Efeitos não-lineares, anisotropia e ferroeletricidade

i) SE O CAMPO $\vec{E}$ É MUITO FORTE OU, DEPENDENDO DO MATERIAL,:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \left[\chi_e \vec{E} + \chi_e^{(3)} (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \cdots \right]$$

ii) ANISOTROPIA: EM SÓLIDOS NÃO CÚBICOS, VOCÊ PODE TER:

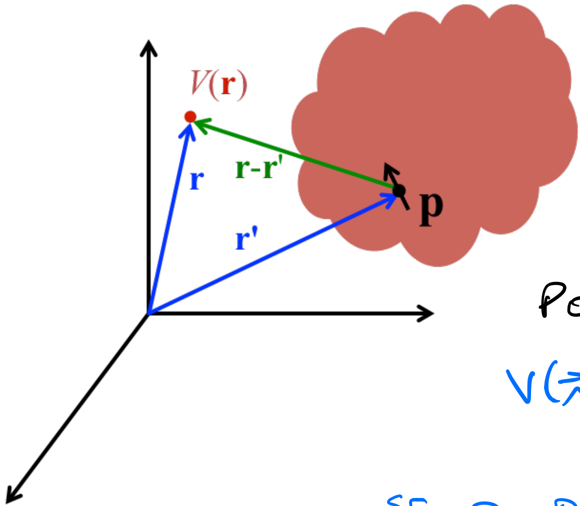
$$\vec{P} = \epsilon_0 \overline{\overline{\chi}}_e \cdot \vec{E} \Rightarrow \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{e11} & \chi_{e12} & \chi_{e13} \\ \chi_{e21} & \chi_{e22} & \chi_{e23} \\ \chi_{e31} & \chi_{e32} & \chi_{e33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{P}$ PODE NÃO APONTAR NA MESMA DIREÇÃO DE $\vec{E}$

iii) FERROELETRICIDADE: $\vec{P}$ EXISTE MESMO NA AUSÊNCIA DE CAMPO ELÉTRICO EXTERNO APLICADO ($BaTiO_3$)

$\rightarrow$ ELETRETOS

Cargas ligadas



Qual é o potencial elétrico gerado por um corpo com polarização **P(r)**?

NÃO IMPORTA COMO $\vec{P}(\vec{r})$ FOI CRIADA

POTENCIAL DE UM DIPOLO, NA ORIGEM:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

SE O DIPOLO ESTIVER NO PONTO $\vec{r}'$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

PARA O CORPO COMO UM TODO $\therefore$ $d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r}')dV'$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'$$

MAS: $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

$$\vec{\nabla}' = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x'} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y'} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = +\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$

$$\left[\frac{d}{dx} f(x-x') = -\frac{d}{dx'} f(x-x')\right]$$

$$f'(x-x') = (-)(-1) f'(x-x')$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) dV'$$

USANDO $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{A} + f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \left[\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')\right] dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{S(V)} \frac{\overbrace{\vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\hat{n}}^{\sigma_B(\vec{r}\,')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\overbrace{[-\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')]}^{\rho_B(\vec{r}\,')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV'$$

$\rho_B(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})$ E "VIVE" NO VOLUME DO CORPO

$\sigma_B(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n}$ E "VIVE" NA SUPERFÍCIE DO CORPO

NOTE QUE $\hat{n}$ APONTA PARA <u>FORA</u> DO CORPO

Densidades de cargas ligadas

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_B(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r})\\ \rho_B(\mathbf{r}) &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r})\end{aligned}}$$

B → "BOUND" = LIGADA

CARGAS LIGADAS

EM CONTRASTE COM AS CARGAS "LIVRES"
DE CONDUTORES

Resumo

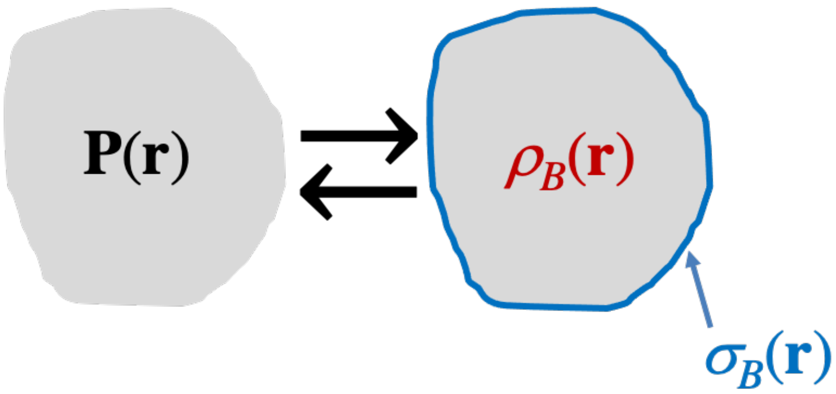
Um corpo com uma polarização $\mathbf{P(r)}$ é **equivalente** a (produz o mesmo campo elétrico que):

1.Uma densidade volumétrica de carga:

$$\rho_B(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r})$$

2. E uma densidade superficial de carga em sua superfície:

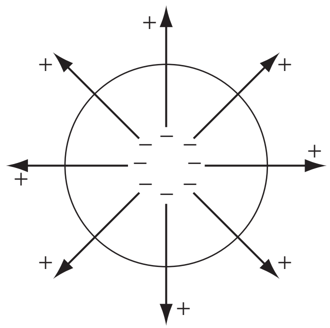
$$\sigma_B(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r})$$



Interpretação física das cargas ligadas

$$\boxed{\rho_B(\mathbf{r}) \quad = \quad -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r})}$$

Polarização divergindo de um ponto:

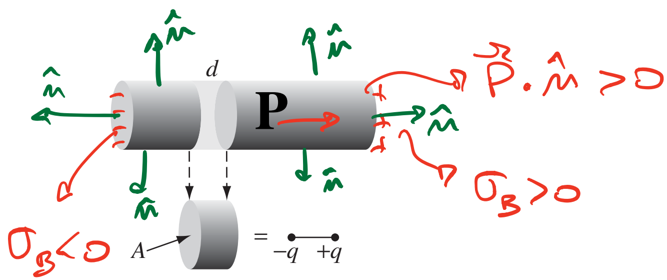


Interpretação física das cargas ligadas

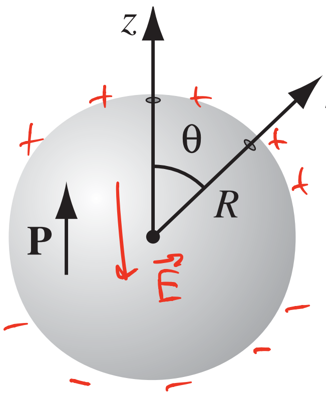
$$\boxed{\sigma_B(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})}$$

Linha de dipolos:

Cilindro de dipolos:



Exemplo 4.2: esfera uniformemente polarizada: **P(r)=P** $= P\hat{z}$



$V(r,\theta) = ?$

$\rho_B = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$

$\sigma_B = \hat{n}\cdot\vec{P} = \hat{r}\cdot\vec{P} = P(\hat{r}\cdot\hat{z}) = \boxed{P\cos\theta = \sigma_B(\theta)}$

O PROBLEMA PODE SER RESOLVIDO USANDO A TÉCNICA DO CAP. 3:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{(l+1)}}\right)P_l(\cos\theta) \quad \begin{pmatrix} r>R \\ \text{ou} \\ r<R \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ EXEMPLO 3.9 DO LIVRO:

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) & (r<R) \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{(l+1)}} P_l(\cos\theta) & (r>R) \end{cases}$$

$$A_\ell = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{(\ell-1)}} \int_0^\pi \sigma_B(\theta) P_\ell(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$B_\ell = \frac{R^{(\ell+2)}}{2\epsilon_0} \underbrace{\int_0^\pi \sigma_B(\theta) P_\ell(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta}_{I}$$

$$I = P \int_0^\pi \cos\theta \, P_\ell(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \qquad x = \cos\theta \quad dx = -\sin\theta \, d\theta$$

$$= P \int_{-1}^{+1} \underbrace{x}_{P_1(x)} P_\ell(x) \, dx = P \int_{-1}^{+1} P_1(x) P_\ell(x) \, dx = P\left(\frac{2}{3}\right) \delta_{\ell,1}$$

$$A_\ell = \begin{cases} 0 & \text{SE } \ell \neq 1 \\ \dfrac{P}{3\epsilon_0} & \text{SE } \ell = 1 \end{cases} \qquad B_\ell = \begin{cases} 0 & \text{SE } \ell \neq 1 \\ \dfrac{R^3 P}{3\epsilon_0} & \text{SE } \ell = 1 \end{cases}$$

$$V(r,\theta)=\begin{cases} A_1 r P_1(\cos\theta) = \dfrac{P}{3\epsilon_0} r\cos\theta = \dfrac{P}{3\epsilon_0} z & (r<R) \\ \dfrac{B_1}{r^2} P_1(\cos\theta) = \dfrac{PR^3}{3\epsilon_0 r^2}\cos\theta = \dfrac{PR^3}{3\epsilon_0}\dfrac{\hat{z}\cdot\hat{r}}{r^2} & (r>R) \end{cases}$$

DENTRO DA ESFERA: $V \sim z$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{P}{3\epsilon_0}\hat{z} \rightarrow$$

CAMPO ELÉTRICO DENTRO DA ESFERA É CONSTANTE E APONTA NO SENTIDO OPOSTO À POLARIZAÇÃO $\vec{P}$

FORA DA ESFERA: $\dfrac{PR^3}{3\epsilon_0} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(P \underbrace{\dfrac{4\pi R^3}{3}}_{V}\Big) = \dfrac{p_{ESF}}{4\pi\epsilon_0}$

$$\Rightarrow V(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(p_{ESF}\hat{z})\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}_{ESF}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

POTENCIAL DE UM DIPOLO $\vec{p}_{ESF}$ NO CENTRO DA ESFERA