Aula 14

F 502 – Eletromagnetismo I

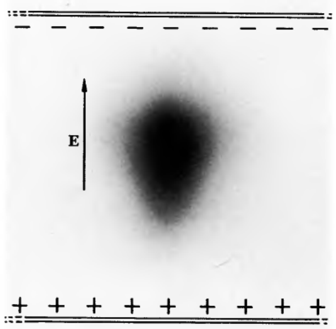
2º semestre de 2020

03/11/2020

Aula passada

Efeitos de campos elétricos na matéria

- Dipolos induzidos:



$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$$ $\alpha \rightarrow$ polarizabilidade

Polarização: dipolo total por unidade de volume

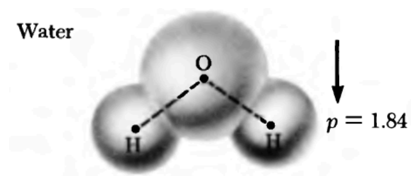
$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V}$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_o \mathbf{E}}$$

$\chi_e \rightarrow$ susceptibilidade elétrica

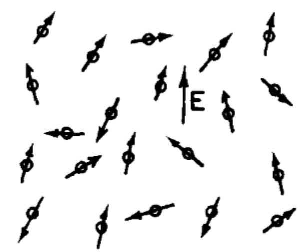
Aula passada

- Dipolos permanentes: o campo alinha os dipolos



(a)

O campo elétrico exerce um torque sobre o dipolo, que tende a alinhá-lo ao campo elétrico:



(b)

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_o \mathbf{E}}$$

Aula passada

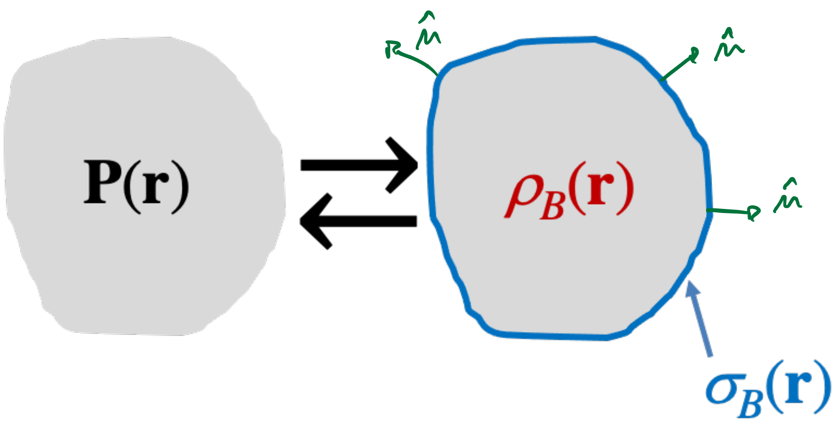
Um corpo com uma polarização $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ é **equivalente** a (produz o mesmo campo elétrico que):

1.Uma densidade volumétrica de carga:

$$\rho_B(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r})$$

2. E uma densidade superficial de carga em sua superfície:

$$\sigma_B(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r})$$



Deslocamento elétrico

SITUAÇÃO ONDE HÁ DIELÉTRICOS E OUTRAS CARGAS (CONDUTORES, CARGAS PONTUAIS):

$$\rho = \rho_B + \rho_F$$

ρ_B: DENSIDADE DE CARGAS LIGADAS OU DE POLARIZAÇÃO (DIELÉTRICOS)

ρ_F: RESTO → CONDUTORES, CARGAS PONTUAIS

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_B + \rho_F) = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_F - \vec{\nabla}\cdot\vec{P})$$

$$\epsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{\nabla}\cdot\vec{P} = \rho_F$$

$$\vec{\nabla}\cdot\underbrace{(\vec{P} + \epsilon_0\vec{E})} = \rho_F$$

$\vec{D}$: VETOR DESLOCAMENTO ELÉTRICO $\therefore \boxed{\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_F}$$

FORMA INTEGRAL:

$$\oint_{S(V)} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho_F \, dV = Q_F(V)$$

Eletrostática em meios materiais

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_F \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}}$$

PELO TEOREMA DE HELMHOLTZ, UM CAMPO VETORIAL SÓ É UNIVOCAMENTE DETERMINADO SE FOREM ESPECIFICADOS SEU DIVERGENTE E SEU ROTACIONAL

AS EQUAÇÕES ACIMA SÃO, PORTANTO, INSUFICIENTES PARA RESOLVER O PROBLEMA. NA PRÁTICA:

(i) MEIOS LINEARES, $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}}$, ONDE $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$, $\epsilon_r = \dfrac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi_e$

ϵ : PERMISSIVIDADE DO MEIO

ϵ_r : " RELATIVA DO MEIO = CONSTANTE DIELÉTRICA

Meios dielétricos lineares

DADO ϵ: $\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \epsilon\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho_F$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho_F/\epsilon \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{INFORMAÇÃO SUFICIENTE}$$

OUTRA POSSIBILIDADE:

(ii) $\vec{P}$ É DADA: $\quad \left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho_F - \dfrac{1}{\epsilon_0}\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{INFORMAÇÃO SUFICIENTE}$

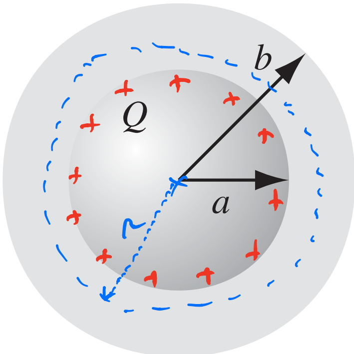
Constante dielétrica

$\epsilon > \epsilon_0$

Material	Dielectric Constant	Material	Dielectric Constant
Vacuum	1	Benzene	2.28
Helium	1.000065	Diamond	5.7-5.9
Neon	1.00013	Salt	5.9
Hydrogen (H_2)	1.000254	Silicon	11.7
Argon	1.000517	Methanol	33.0
Air (dry)	1.000536	Water	80.1
Nitrogen (N_2)	1.000548	Ice (-30° C)	104
Water vapor (100° C)	1.00589	$KTaNbO_3$ (0° C)	34,000

TABLE 4.2 Dielectric Constants (unless otherwise specified, values given are for 1 atm, 20° C). *Data from Handbook of Chemistry and Physics,* 91st ed. (Boca Raton: CRC Press, 2010).

Exemplo 4.5



Esfera condutora (raio a, carga Q), envolta por uma camada dielétrica (raio externo b, permissividade ε)

SIMETRIA ESFÉRICA: $\vec{E} = E_r(r)\,\hat{r}$

$\vec{D} = D_r(r)\,\hat{r}$

$\vec{P} = P_r(r)\,\hat{r}$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_F \Rightarrow \oint_{S(V)} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_F(V) \Rightarrow 4\pi r^2 D_r(r) = Q_F(V)$$

(i) $r<a$: DENTRO DA ESFERA: $\vec{E} = 0$, $\vec{P} = 0$; $4\pi r^2 D_r(r) = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0$

(ii) $a<r<b$: $4\pi r^2 D_r(r) = Q \Rightarrow D_r(r) = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$

$$\Rightarrow E_r = \frac{D_r}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}\,; \quad P_r(r) = D_r(r) - \epsilon_0 E_r(r) = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$(iii)\ r > b: \quad D_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$P_r(r) = 0$$

E A CARGA LIGADA? ELA ESTÁ NA CASCA DIELÉTRICA

$$\rho_B = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\cancel{r^2}\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{Q}{4\pi \cancel{r^2}}\right] = 0$$

$$\sigma_B = \hat{n}\cdot\vec{P}$$

NA SUPERFÍCIE INTERNA DA CASCA: $\hat{n} = -\hat{r}$

$$\sigma_B(r=a) = -\hat{r}\cdot\vec{P}\Big|_{r=a} = -P_r(a) = -\left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{Q}{4\pi a^2}$$

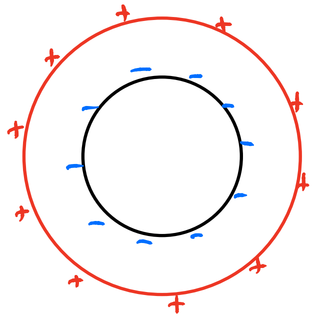
$$\sigma_B(r=a) = -\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{Q}{4\pi a^2}$$

NA SUPERFÍCIE EXTERNA DA CASCA: $\hat{n} = \hat{r}$

$$\sigma_B(r=b) = \hat{r}\cdot\vec{P}\Big|_{r=b} = \left(1-\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{Q}{4\pi b^2} = \left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon}\right)\frac{Q}{4\pi b^2}$$

NOTEM QUE, SE $Q>0$, $\sigma_B(a) < 0$, $\sigma_B(b) > 0$

$Q > 0$



O CONDUTOR INDUZ CARGA DE SINAL CONTRÁRIO NA SUPERFÍCIE INTERNA DA CASCA.

PELA NEUTRALIDADE DA CASCA DIELÉTRICA, SERÁ INDUZIDA CARGA DE MESMO SINAL QUE Q NA SUPERFÍCIE EXTERNA DA CASCA.

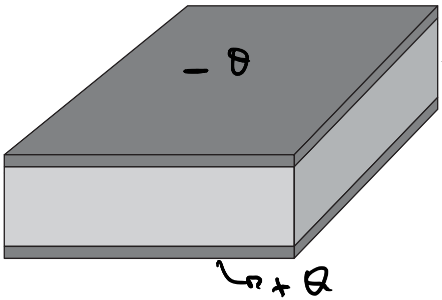
$$Q_B(r=a) = \int \sigma_B(r=a)\, dS = -\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon}\right) \int \frac{Q\, dS}{4\pi a^2} = -\left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon}\right) Q$$

$$Q_B(r=b) = \int \sigma_B(r=b)\, dS = \left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon}\right) Q$$

$$Q_B(r=a) = -Q_B(r=b)$$

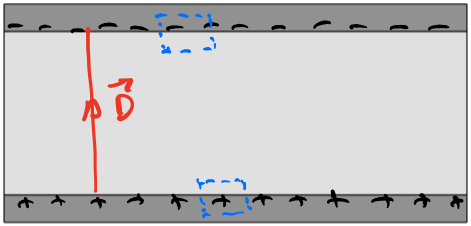
$$Q_T(r=a) = Q_F + Q_B(r=a) = Q - \left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon}\right) Q = \left[1 - \left(\frac{\epsilon-\epsilon_0}{\epsilon}\right)\right] Q = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} Q < Q$$

Exemplo 4.6



Capacitor de placas paralelas (área A, separação d), com um dielétrico no meio (constante dielétrica ε_r)

$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$



$\oint_{S(V)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_F(V)$ GAUSSIANA AO LADO

NA TAMPA DENTRO DO CONDUTOR:

$\vec{E} = 0 \;, \vec{P} = 0 \;, \vec{D} = 0$

NO DIELÉTRICO, $\vec{D} \neq 0$:

$\Rightarrow D \cancel{S} = Q_F(V) = \sigma_F \cancel{S}$ ONDE S É A ÁREA DA TAMPA DA CAIXINHA

$D = \sigma_F = \frac{Q}{A}$

$\Rightarrow E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A}$

DIFERENÇA DE POTENCIAL: $|\Delta V| = \left| -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \right| = \frac{Q}{\epsilon A} d$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\epsilon A}{d} = \epsilon_r \underbrace{\left(\frac{\epsilon_0 A}{d} \right)}$$

C_0: CAPACITÂNCIA NO VÁCUO

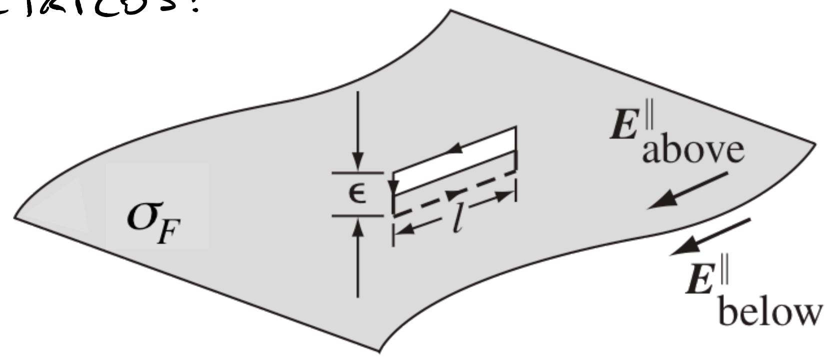
$$\Rightarrow \boxed{C = \epsilon_r C_0 > C_0}$$

Problemas de valor de contorno com dielétricos

CONDIÇÕES DE CONTORNO
NA PRESENÇA DE DIELÉTRICOS:

DE: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

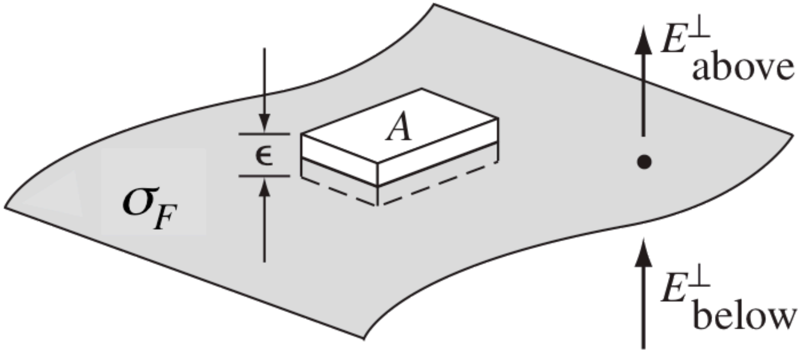
$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{\parallel \text{ ABOVE}} = \vec{E}_{\parallel \text{ BELOW}}}$



Problemas de valor de contorno com dielétricos

$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_F$

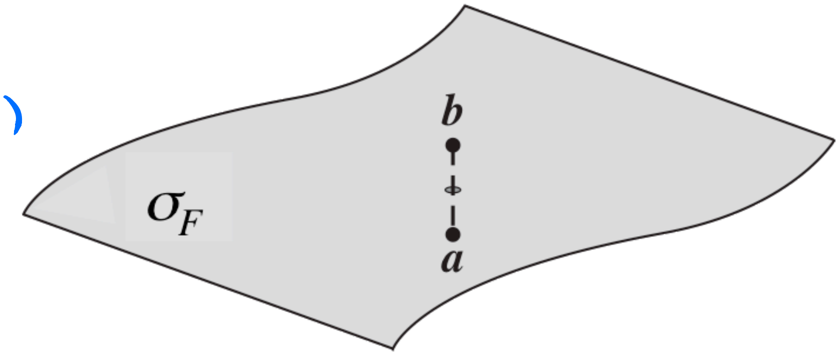
$$\boxed{D_{n\,ABOVE} - D_{n\,BELOW} = \sigma_F}$$



Problemas de valor de contorno com dielétricos

$$V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$V_a = V_b$ (CONTÍNUO)



Equação de Poisson em meios lineares

NUM MEIO LINEAR: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_F}{\epsilon}$

E $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_F}{\epsilon}}$$

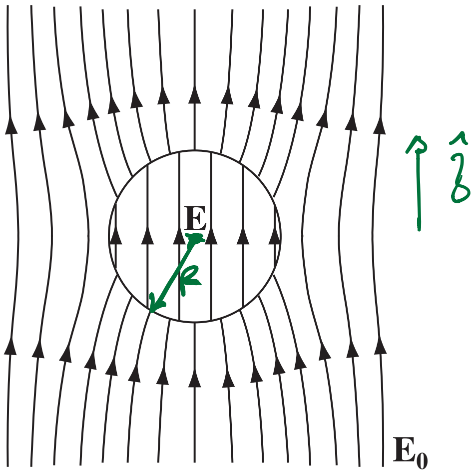
EM CADA MEIO LINEAR

SE HOUVER DIVERSOS MEIOS $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho_F^1}{\epsilon_1} \; ; \quad \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho_F^2}{\epsilon_2}, \; \ldots$$

MAS É PRECISO "CASAR" AS SOLUÇÕES $V_1, V_2, \ldots$ NAS INTERFACES ENTRE OS MEIOS, USANDO AS CONDIÇÕES CONTORNO DISCUTIDAS.

Exemplo 4.7: esfera dielétrica num campo uniforme



$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta).$$

CAMPO EXTERNO: $\vec{E} = E_0 \hat{z}$

CONDIÇÕES DE CONTORNO:

(i) $V(r=R^-,\theta) = V(r=R^+,\theta) \quad \forall \theta$

(ii) $V(r\to\infty,\theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta \quad \forall \theta$

(iii) $D_r(r=R^+) = D_r(r=R^-)$ JÁ QUE $\sigma_f = 0$

$\epsilon E_r(r=R^+) = \epsilon_0 E_r(r=R^+)$ $\qquad \vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$

$$\Rightarrow \cancel{-}\epsilon \frac{\partial V}{\partial r}(r,\theta)\Big|_{r=R^+} = \cancel{-}\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}(r,\theta)\Big|_{r=R^+} \quad \forall \theta$$

ii) $E_{\parallel}(r=R^+,\theta) = E_{\parallel}(r=R^-,\theta) \quad \forall\theta$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}(r=R^+,\theta) = \frac{\partial V}{\partial\theta}(r=R^-,\theta) \quad \forall\theta$$

$r<R$: $V_D(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \cancel{\frac{B_\ell}{r^{(\ell+1)}}}\right)P_\ell(\cos\theta)$

$r>R$: $V_F(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A'_\ell r^\ell + \frac{B'_\ell}{r^{(\ell+1)}}\right)P_\ell(\cos\theta)$

DENTRO DA ESFERA, O POTENCIAL V_D NÃO PODE DIVERGIR QUANDO $r \to 0 \Rightarrow B_\ell = 0$

FORA DA ESFERA, PELA CONDIÇÃO (ii)

$V_F(r\to\infty,\theta) \to -E_0 r\cos\theta \Rightarrow A'_0 = 0$

$\boxed{A'_1 = -E_0}$

$V_F(r\to\infty,\theta) = A'_0 + A'_1 r\cos\theta + \sum_{\ell=2}^{\infty} A'_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) \qquad A'_2 = A'_3 = \dots = 0$

$r>R$: $V_F(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B'_\ell}{r^{(\ell+1)}}P_\ell(\cos\theta)$

CONDIÇÃO (ii):

$$V_D(r=R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = V_F(R,\theta)$$

$$= -E_0 R \cos\theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l'}{R^{(l+1)}} P_l(\cos\theta)$$

$$\begin{cases} l=0: & A_0 = \dfrac{B_0'}{R} \\ l=1: & A_1 R = -E_0 R + \dfrac{B_1'}{R^2} \Rightarrow \boxed{A_1 = -E_0 + \dfrac{B_1'}{R^3}} \quad (1) \\ l \geq 2: & \boxed{A_l R^l = \dfrac{B_l'}{R^{(l+1)}}} \quad (3) \end{cases}$$

CONDIÇÃO (iii)

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=R^-} = \frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=R^+}$$

$$\frac{\partial V_D}{\partial r} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell A_\ell r^{(\ell-1)} P_\ell(\cos\theta)$$

$$\frac{\partial V_F}{\partial r} = -E_0\cos\theta - \sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+1)\frac{B_\ell'}{r^{(\ell+2)}}P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\left[\sum_{\ell=1}^{\infty}\ell A_\ell R^{(\ell-1)}P_\ell(\cos\theta)\right] = -E_0\cos\theta - \sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+1)\frac{B_\ell'}{R^{(\ell+2)}}P_\ell(\cos\theta)$$

$\forall\,\theta$

$\ell=0$: $\quad 0 = -\frac{B_0'}{R^2} \Rightarrow \boxed{B_0'=0} \Rightarrow \boxed{A_0=0}$

$\ell=1$: $\quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0}A_1 = -E_0 - 2\frac{B_1'}{R^3} \Rightarrow \boxed{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}A_1 = -E_0 - 2\frac{B_1'}{R^3}}$ (2)

$\ell\geq 2$: $\quad \boxed{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\ell A_\ell R^{(\ell-1)} = -(\ell+1)\frac{B_\ell'}{R^{(\ell+2)}}}$ (4)

$\ell = 1$?

$$(1) \quad A_1 = -E_0 + \frac{B_1'}{R^3}$$

$$(2) \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} A_1 = -E_0 - \frac{2B_1'}{R^3}$$

$2 \times (1) + (2)$:

$$\Rightarrow 2A_1 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} A_1 = -2E_0 - E_0 = -3E_0$$

$$\left(2 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) A_1 = -3E_0$$

$$\Rightarrow A_1 = -\left(\frac{3E_0}{2 + \epsilon/\epsilon_0}\right)$$

$$\frac{B_1'}{R^3} = A_1 + E_0 = \left[1 - \frac{3}{2 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}}\right] E_0$$

$$= \left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2}\right) E_0$$

PARA $\ell \geq 2$: $A_\ell = B'_\ell = 0$

(MOSTRE VOCÊ MESMO)

FINALMENTE:

$$\begin{cases} V_D(r,\theta) = -\dfrac{3E_0}{\epsilon/\epsilon_0 + 2}\, r\cos\theta \\[2ex] V_F(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \left(\dfrac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2}\right)\dfrac{E_0 R^3}{r^2}\cos\theta \end{cases}$$