

Aula 15

F 502 – Eletromagnetismo I

2º semestre de 2020

05/11/2020

Aulas passadas

Em meios dielétricos, dipolos podem ser permanentes ou induzidos por campos externos.

Polarização: dipolo total por unidade de volume

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V}$$

Aulas passadas

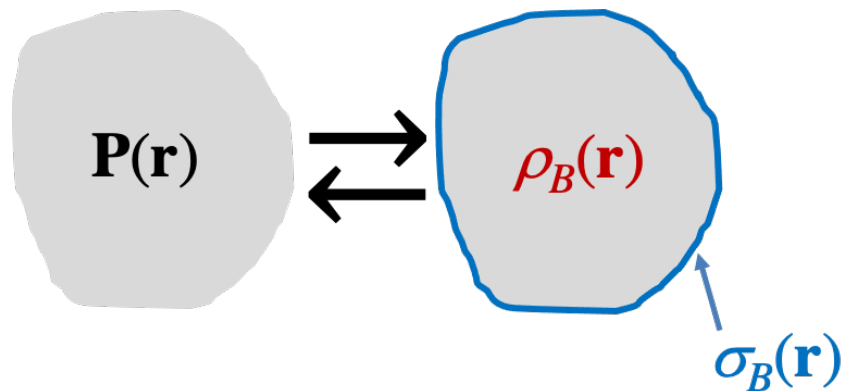
Um corpo com uma polarização $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ é equivalente a (produz o **mesmo** campo elétrico que):

1. Uma densidade **volumétrica** de carga:

$$\rho_B(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$$

2. E uma densidade **superficial** de carga em sua superfície:

$$\sigma_B(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})$$



Aulas passadas

Separando as cargas em **cargas ligadas** ou de polarização e o resto (**cargas livres**):

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_B(\mathbf{r}) + \rho_F(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) + \rho_F(\mathbf{r})$$

Levando na lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_B + \rho_F}{\epsilon_0} = \frac{-\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_F}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_F$$

Definimos o **deslocamento elétrico**:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_F$$

Aulas passadas

Leis da eletrostática em meios materiais

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_F \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{array}$$

Falta informação:

1. Ou $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ é dada (p. ex., corpos com polarização permanente)

2. Ou o meio é **linear**:

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

$$\chi_e = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right)$$

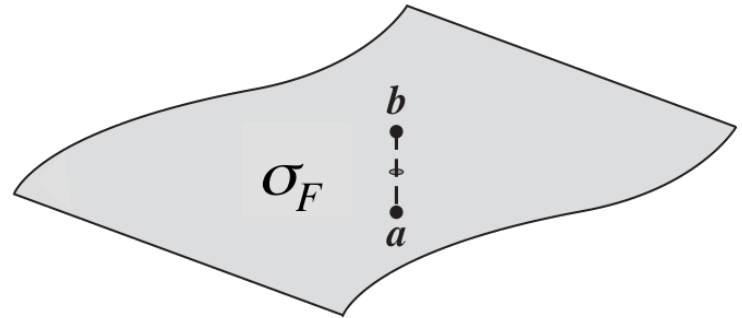
Aulas passadas

Condições de contorno na presença de dielétricos:

$$\Delta D^{\perp} = \sigma_F$$

$$\Delta \mathbf{E}^{\parallel} = 0$$

$$\Delta V = 0$$



Aulas passadas

Problemas de valor de contorno na presença de dielétricos **lineares**. Em cada região com constante dielétrica ϵ

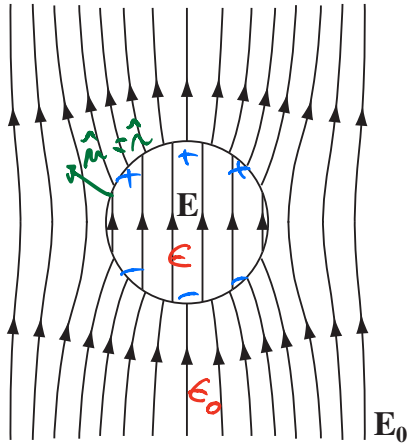
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_F \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_F}{\epsilon} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla V\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho_F}{\epsilon}}$$

“Casar” os campos em regiões diferentes com as **condições de contorno**.

$$\begin{aligned}\Delta D^\perp &= \sigma_F \\ \Delta \mathbf{E}^\parallel &= 0 \\ \Delta V &= 0\end{aligned}$$

Exemplo 4.7: esfera dielétrica num campo uniforme



$$\mathbf{E}_{ext} = E_0 \hat{\mathbf{z}} \Leftrightarrow V_{ext} = -E_0 z$$

Não há **cargas livres**: $\nabla^2 V = 0$
 Simetria **azimutal**:

$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$	$r > R$ e $r < R$
---	---------------------------

- (i) $V(r = R^-, \theta) = V(r = R^+, \theta),$
- (ii) $V(r \rightarrow \infty, \theta) \rightarrow -E_0 z = -E_0 r \cos \theta,$
- (iii) $D_r(r = R^-) = D_r(r = R^+),$
- (iv) $E_\theta(r = R^-) = E_\theta(r = R^+).$

Aplicando a **condição (ii)** e exigindo que $V(r, \theta)$ seja finito para $r < R$:

$$V_D(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

$$V_F(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B'_l}{r^{(l+1)}} P_l(\cos \theta)$$

Impondo as outras condições de contorno, achamos todos A_l e B'_l . Apenas A_1 e B'_1 são não nulos:

$$V_D(r, \theta) = -\frac{3E_0}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \overbrace{r \cos \theta}^z = -\frac{3E_0}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} z$$

$$V_F(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \underbrace{\left(\frac{\epsilon/\epsilon_0 - 1}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right)}_{\frac{P}{4\pi\epsilon_0}} E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$$

CAMPO ELÉTRICO DENTRO DA ESFERA:

$$\vec{E}_D = -\vec{\nabla} V_D = \left(\frac{3E_0}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) \hat{z} \Rightarrow |\vec{E}_D| = \left(\frac{3}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) E_0 < E_0$$

$$\vec{P}_D = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}_D = \left(\epsilon/\epsilon_0 - 1 \right) \epsilon_0 \vec{E}_D = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_D = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) E_0 \hat{z}$$

$$\vec{D}_D = \epsilon \vec{E}_D = \left(\frac{3\epsilon}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) E_0 \hat{z}$$

DENSIDADES DE CARGA LIGADA:

$$\rho_B = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_D = 0$$

$$\sigma_B = \hat{n} \cdot \vec{P}_D = \hat{r} \cdot \vec{P}_D = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) E_0 \hat{r} \cdot \hat{z}$$

$$\sigma_B = 3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon/\epsilon_0 + 2} \right) E_0 \cos\theta$$

AS CARGAS LIGADAS NA SUPERFÍCIE CRIAM CAMPO ELÉTRICO $\propto (\hat{z})$, QUE ENFRAQUECE O CAMPO EXTERNO

FORA DA ESFERA: $\vec{P}_F = 0$ $\vec{D}_F = \epsilon_0 \vec{E}_F$

$$\vec{E}_F = E_0 \hat{z} + \vec{E}_{ESF}$$

\vec{E}_{ESF} É O CAMPO DE UM DIPOLO NA ORIGEM

CUJO MOMENTO DE DIPOLO É:

$$V_{DIP}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos\theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon(\epsilon_0 - 1)}{\epsilon(\epsilon_0 + 2)} \right) E_0 R^3 \hat{z}$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3 \left[3 \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon(\epsilon_0 + 2)} \right) E_0 \hat{z} \right]$$

\vec{P}

$$\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}_{ESF}$$

É INTERESSANTE ANALISAR O COMPORTAMENTO DA SOLUÇÃO, QUANDO $\epsilon \rightarrow \infty$ ($\epsilon \gg \epsilon_0$)

$\vec{E}_D \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \infty} 0$ QUE É O RESULTADO DE UMA ESFERA CONDUTORA

NOTE QUE $\vec{P}_D, \vec{D}_D \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \infty} 3\epsilon_0 \vec{E}_0$ QUE NÃO FAZ SENTIDO PARA UM CONDUTOR...
(CUIDADO)

FORA DA ESFERA:

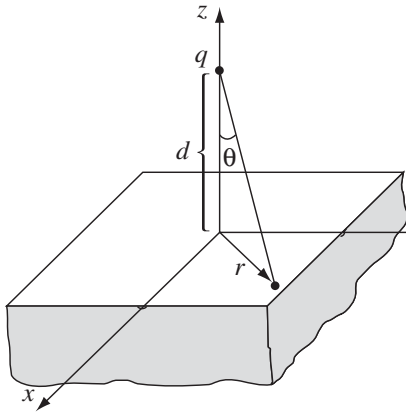
$$V_F(r, \theta) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \infty} -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R^3}{r^2} \cos \theta$$

QUE É O RESULTADO DO CONDUTOR

A CARGA NA SUPERFÍCIE:

$$\sigma_B(\theta) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow \infty} 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (\text{RESULTADO DO CONDUTOR})$$

Exemplo 4.8



Uma carga q distante de d de um semi-espaco infinito dielétrico ($z < 0$, permissividade ϵ).

A CARGA q POLARIZARÁ O DIELETRICO QUE TERÁ, PORTANTO, ρ_B E σ_B .

ASSIM, OS CAMPOS CRIADOS TÊM COMO FONTES

$$q, \cancel{\rho_B} \text{ E } \sigma_B.$$

$$\rho_B = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}] = -\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{D} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \vec{D} \right] = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

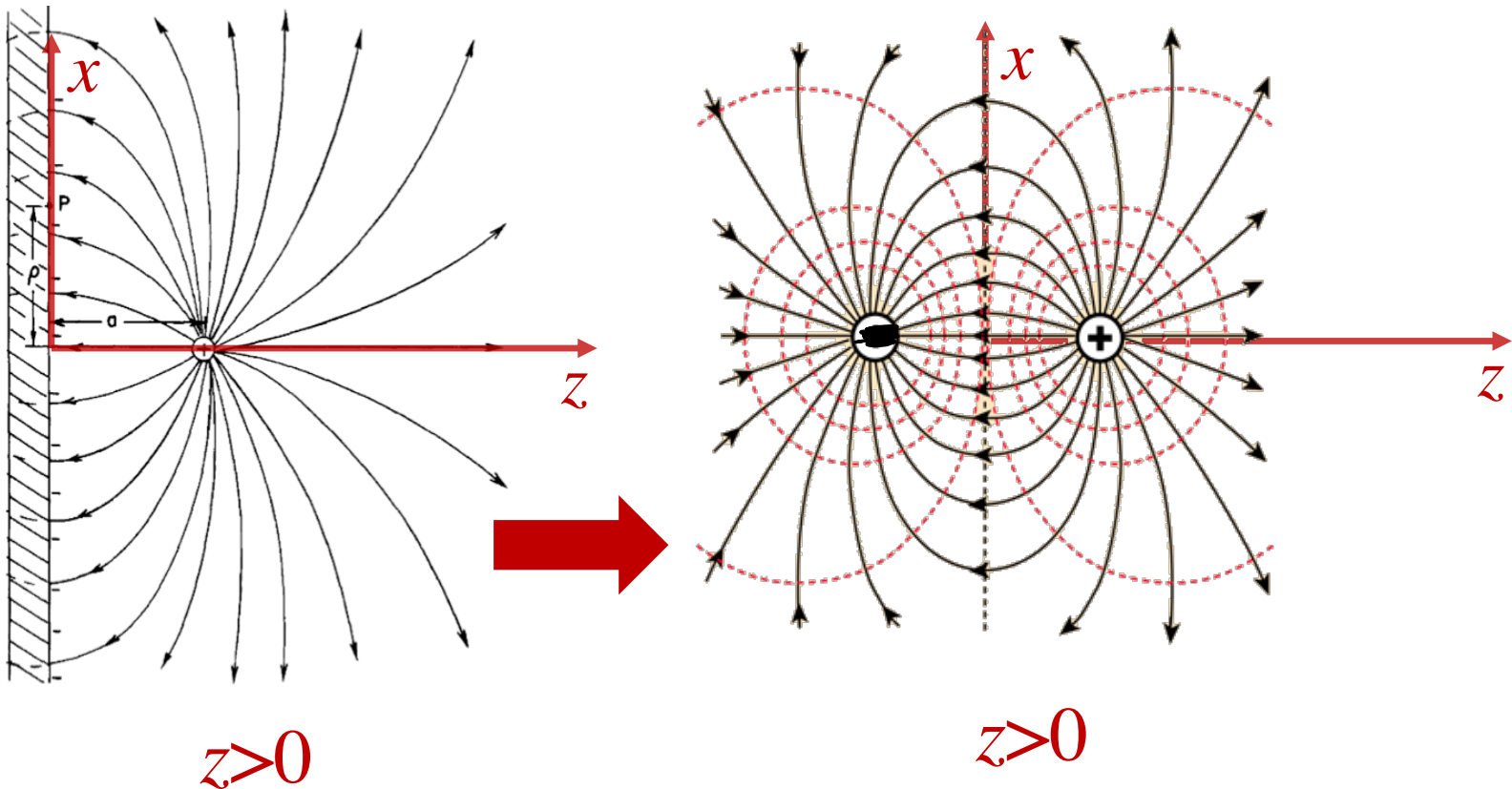
PORQUE NÃO HÁ CARGAS LIVRES (ρ_f) NA REGIÃO DO DIELETRICO.

APENAS TEREMOS q E σ_B CRIANDO CAMPO ELÉTRICO.

$$\Rightarrow \sigma_B = \hat{n} \cdot \vec{P} = \hat{z} \cdot \vec{P} = P_z = (\epsilon - \epsilon_0) E_z^D \Big|_{z=0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{DENTRO DO DIELETRICO} \\ \text{DENTRO DO DIELETRICO} \end{array} \right)$$

NOTE QUE σ_B NÃO É UNIFORME: $\sigma_B(x, y)$

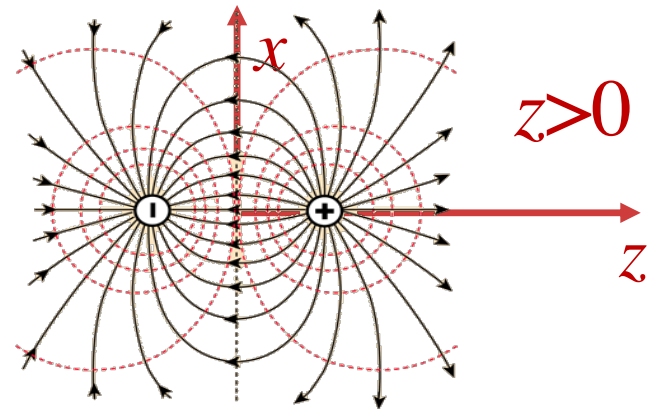
Recapitulando o caso do plano condutor aterrado



Recapitulando o caso do plano condutor aterrado

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}|^3} - \frac{\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r} + a\hat{\mathbf{z}}|^3} \right], \quad (z \geq 0)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \right], \quad (z \geq 0)$$



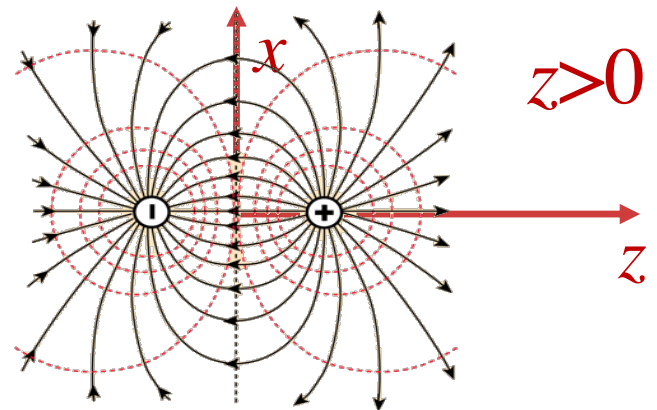
Recapitulando o caso do plano condutor aterrado

Carga induzida no plano

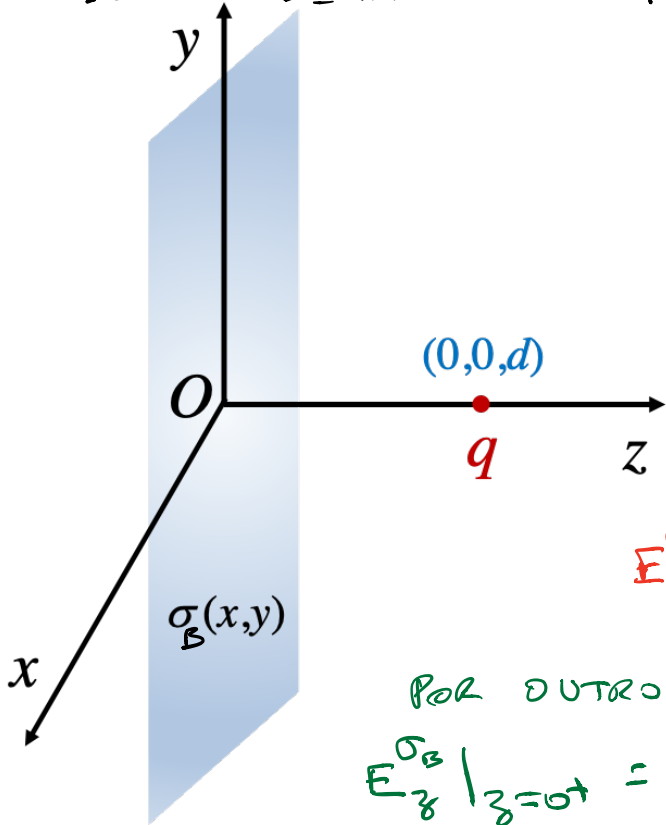
$$\sigma(x, y) = \varepsilon_0 \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E}|_{z=0^+} = -\frac{qa}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\int \sigma(x, y) dx dy = -\frac{qa}{2\pi} \int \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = -q$$

A carga total induzida é $-q$.



FONTES DE CAMPO
DO PROBLEMA



VAMOS ANALISAR O CAMPO ELÉTRICO
IMEDIATAMENTE DENTRO DO DIELETRICO

$$E_z^D|_{z=0} = E_z^q|_{z=0} + E_z^{\sigma_B}|_{z=0} \quad (2)$$

$$\vec{E}^q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - d\hat{z}}{|\vec{r} - d\hat{z}|^3}$$

$$E_z^q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z-d)}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}}$$

$$E_z^q|_{z=0} = \frac{-qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad (3)$$

Por outro lado:

$$E_z^{\sigma_B}|_{z=0} = -\frac{\sigma_B}{2\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\text{DE (2): } E_z^D|_{z=0} = \frac{\sigma_B}{(\epsilon - \epsilon_0)} \quad (5)$$

$$\text{LEVANDO (3), (4) E (5) EM (2): } \frac{\sigma_B}{(\epsilon - \epsilon_0)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z-d)}{[]^{3/2}} - \frac{\sigma_B}{2\epsilon_0}$$

RESOLVENDO PARA σ_B :

$$\sigma_B(x, y) = \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \right) \left(-\frac{q d}{2\pi} \right) \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

INTEGRANDO SOBRE O PLANO xy , OBTÉMOS q_B
(CARGA DE POLARIZAÇÃO TOTAL)

$$q_B = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_B(x, y) dx dy = \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \right) (-q) = q_B$$

(NOTE QUE, SE $\epsilon \rightarrow \infty$, $q_B = -q$, COMO NO CASO DO
PLANO CONDUTOR)

q_B OBTIDA SUGERE UMA SOLUÇÃO POR CARGA
IMAGEM. DE FATO, PARA $\epsilon > 0$, SEJA O CAMPO

CRIADO POR q E q_B SITUADA EM $\vec{r}_B = (0, 0, -d)$

O POTENCIAL ELÉTRICO DESSAS DUAS CARGAS É TAL QUE:

- SATISFAZ A EQ. DE POISSON EM $z > 0$
- ALÉM DISSO, O POTENCIAL:

$$V_F(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{1/2}} + \frac{q_B}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{1/2}} \right] \quad (6)$$

DAÍ UM CAMPO ELÉTRICO QUE, EM $z=0^+$, SE REDUZ AO CAMPO $E_z^F|_{z=0^+}$ DO PROBLEMA

$$E_z^F|_{z=0^+} = E_z^A|_{z=0} \quad E_z^B|_{z=0^+} = E_z^B|_{z=0} + \frac{\sigma_B(x,y)}{2\epsilon_0}$$

$$= \left[1 + \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \right) \right] \frac{-qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

ALÉM DISSO $E_z^F \xrightarrow{|\vec{r}| \rightarrow \infty} 0$ PELO TEOREMA DE UNICIDADE (6) É A SOLUÇÃO DO PROBLEMA

ALÉM DISSO, PARA $z < 0$ HÁ TAMBÉM UMA SOLUÇÃO
POR CARGA IMAGEM! NESSE CASO A CARGA
IMAGEM q_B ESTÁ NA MESMA POSIÇÃO DA
CARGA REAL; OU SEJA, PARA $z < 0$:

$$V_D(\vec{r}) = \frac{(q + q_B)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{1/2}}$$

$$q + q_B = q - \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}\right)q = q \left[1 - \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}\right]$$

$$= q \left[\frac{2\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}\right]$$

ESSA SOLUÇÃO SATISFAZ LAPLACE E A CONDIÇÃO
DE CONTORNO DO CAMPO ELÉTRICO EM $z=0^+$
 \Rightarrow É A SOLUÇÃO PROCURADA

RESUMINDO:

(i) $z > 0$: POTENCIAL DE

• q EM $(0, 0, d)$

• q_B EM $(0, 0, -d)$

(ii) $z < 0$: POTENCIAL DE

• $(q + q_B)$ EM $(0, 0, d)$

QUANDO $\epsilon \rightarrow \infty$: $q_B = -q$ E EU

RECUPERO O PROBLEMA DO SEMI-ESPAÇO

INFINITO CONDUTOR

$f(x)$

PARA x PRÓXIMO DE x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$